sciendo

uniform distribution theory

DOI: 10.2478/udt-2019–0014
Unif. Distrib. Theory **14** (2019), no.2, 69–72

SUR LES PARTIES FRACTIONNAIRES DES SUITES $(\beta^n)_{n\geq 1}$

Anne Bertrand-Mathis

Département de Mathématiques, University de Poitiers, FRANCE

ABSTRACT. We show that for an arbitrary sequence of intervals I_n with constant length c, there exist real numbers β such that for all n β^n belongs to I_n modulo one.

Communicated by Radhakrishnan Nair

J. F. Koksma [2] a démontré que pour presque tout nombre réel supérieur à 1 la suite $(\beta^n)_{n\geq 1}$ est uniformément répartie modulo un. Lorsque β est un nombre de Pisot Vijayaraghavan (c'est à dire un entier algébrique supérieur à 1 dont les conjugués autres que lui même sont tous de module strictement inférieur à 1) la suite $(\beta^n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 modulo un; si β est un nombre de Salem (c'est à dire un entier algébrique supérieur à 1 dont les conjugués sont tous de module inférieur ou égal à 1, l'un d'entre eux au moins étant de module exactement 1) la suite $(\beta^n)_{n\geq 1}$ est dense modulo un mais n'est pas uniformement répartie [1]. Nous montrons ici que la répartition des suites $(\beta^n)_{n\geq 1}$ est susceptible de prendre des formes très variées.

Etant donné un nombre réel x nous appellerons "x modulo un" l'image de x dans le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Etant donnés deux réels distincts $a < b$ compris entre 0 et 1 nous appellerons intervalle fermé modulo un ou encore intervalle fermé $I_{a,b}$ du tore l'image dans le tore de l'intervalle $[a,b] = \{y;\ 0 \leq a \leq y \leq b \leq 1\}$ de $\mathbb{R}$; lorsque $1 > a > b > 0$ l'intervalle $I_{a,b}$ sera l'image du sous ensemble de $\mathbb{R}$ $\{y;\ 0 \leq y \leq b \ ou\ a \leq y \leq 1\}$; a et b sont dits extrémités de $I_{a,b}$ et la longueur de l'intervalle est $b - a$ ou $b + 1 - a$ selon les cas; si $a < b$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[n + a, n + b]$ où n appartient à $\mathbb{Z}$ sera dit congru à $I_{a,b}$ modulo un,

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 11K06, 11J71.
Keywords: Distribution modulo one, sequence of intervals, exponential sequence.

si $a\ >b$ les intervalles de la forme $[n-a, n+b]$ seront dits congrus à $I_{a,b}$; lorsque x est congru à un élément de $I_{a,b}$ nous écrirons $x \in I_{a,b}$ modulo un.

Lemme. *Soit $I_{a,b}$ un intervalle du tore de longueur c. Alors tout intervalle J de $\mathbb{R}$ de longueur $1+c$ contient un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \alpha+c]$ congru à $I_{a,b}$ modulo un.*

P r e u v e d u L e m m e. Soit $J = [x, x+1+c]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $1+c$. L'intervalle $[x, x+1]$ contient un point α congru à a modulo un et l'intervalle $[\alpha, \alpha+c]$ est alors congru à $I_{a,b}$ et contenu dans J. $\square$

Nous dirons qu'un sous ensemble $\mathbb{H}$ de $\mathbb{R}$ est relativement dense s'il existe un nombre réel m tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ l'ensemble $[x, x+m] \cap \mathbb{H}$ soit non vide .

Nous nous intéresserons surtout aux suites $(\beta^n)_{n\geq 1}$ avec $\beta > 1$, cependant les résultats obtenus s'étendent au cas $\beta < -1$.

Théorème. *Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une suite d'intervalles du tore de longueur constante $c > 0$; soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des nombres réels β tels que pour tout $n \geq 1$, $\beta^n \in I_n$ modulo un; alors $\mathbb{H}$ est non vide. De plus $\mathbb{H}$ est relativement dense dans $[1, \infty[$ (tout intervalle de longueur supérieure à $1+c$ contenu dans $\left[\frac{1+c}{c}, \infty\right[$ contient un élément de $\mathbb{H}$).*

P r e u v e d u T h é o r è m e. dans ce qui suit les I_n sont des intervalles du tore et les J_n et U_n sont des intervalles de $\mathbb{R}$. $\square$

Nous allons faire une récurrence sur n; soit c la longueur commune des intervalles I_n; soit $J_0 = [x_0, y_0]$ un intervalle réel de longueur $1+c$ avec $\frac{1+c}{c} \leq x_0 < y_0$; alors d'aprés le Lemme J_0 contient un intervalle de $\mathbb{R}$, $U_1 = [x_1, x_1+c] = [x_1, y_1]$, congru à I_1 modulo un, de longueur c. Posons $J_1 = U_1$. Alors

$$\frac{1+c}{c} \leq x_0 \leq x_1 < y_1 \leq y_0$$

et

$$\beta \in J_1 \Rightarrow \beta^1 \in I_1 \text{ mod } 1.$$

Considérons l'intervalle de $\mathbb{R}$ $\left[x_1^2, y_1^2\right]$; il est de longueur supérieure ou égale à $1+c$ car d'une part x_1 est supérieur ou égal à $\frac{1+c}{c}$ et d'autre part $[x_1, y_1]$ est de longueur c donc $y_1^2 - x_1^2 = (x_1+c)^2 - x_1^2 = 2cx_1 + c^2 \geq 2c\frac{1+c}{c} + c^2 \geq 1+c$; d'après le Lemme il contient un intervalle réel U_2 congru à I_2 modulo un, de longueur c, que l'on peut mettre sous la forme $U_2 = \left[x_2^2, y_2^2\right]$ avec $x_1 \leq x_2 < y_2 \leq y_1$ et $y_2^2 = x_2^2 + c$; posons $J_2 = [x_2, y_2]$; nous avons obtenu un intervalle J_2 de $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{1+c}{c} \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 < y_2 \leq y_1 \leq y_0$$

et

$$\beta \in J_2 \Rightarrow \beta^2 \in I_2 \mod 1.$$

Ainsi $J_2 \subseteq J_1 \subseteq J_0$ et l'intervalle U_2 est de longueur c.

Supposons qu'au rang n nous ayons obtenu une suite d'intervalles fermés emboités $J_n \subseteq J_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq J_0$ avec $J_n = [x_n, y_n]$ tels que pour tout $k \geq 1$, $\beta \in J_k \Rightarrow \beta^k \in I_k \mod 1$, que l'intervalle $U_n = [x_n^n, y_n^n]$ soit de longueur c et que x_n soit supérieur á $\frac{1+c}{c}$: ceci est l'hypothèse H_n; montrons que H_n implique H_{n+1}.

L'intervalle $U_n = [x_n^n, y_n^n]$ est égal à $[x_n^n,\ x_n^n + c]$. L'intervalle $\left[x_n^{n+1},\ y_n^{n+1}\right]$ est égal à $[x_n x_n^n,\ y_n(x_n^n + c)]$; étant donné que y_n est supérieur à x_n et que x_n est supérieur à $\frac{1+c}{c}$, la longueur de l'intervalle $\left[x_n^{n+1}, y_n^{n+1}\right]$ est supérieure à xc donc á $\frac{1+c}{c}c = 1 + c$; cet intervalle contient donc un intervalle U_{n+1} congru à I_{n+1} modulo un, de longueur c, que nous pouvons écrire $U_{n+1} = \left[x_{n+1}^{n+1}, y_{n+1}^{n+1}\right]$ avec $\frac{1+c}{c} \leq x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n$; soit $J_{n+1} = [x_{n+1}, y_{n+1}]$; si β appartient à J_{n+1} alors β^{n+1} se trouve dans U_{n+1} donc dans I_{n+1} modulo un; J_{n+1} est inclus dans J_n et U_{n+1} est de longueur c : H_{n+1} est vérifiée et comme H_1 est vraie H_n est vraie pour tout n. L'intersection des fermés emboités $(J_n)_{n\geq 0}$ est non vide. Soit β appartenant à cette intersection; pour tout n$\geq$ 1 β^n appartient à I_n modulo un.

La démonstration faite implique que tout intervalle de longueur supérieure ou égale à $1 + c$ situé à droite de $\frac{1+c}{c}$ contient un élément de $\mathbb{H}$. Donc $\mathbb{H}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}^+$.

Corollaire. *Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une suite d'intervalles du tore de longueur constante $c > 0$; soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres réels β tels qu' il existe n_0 avec pour tout $n \geq n_0$, $\beta^n \in I_n$ modulo un; alors $\mathcal{L}$ est dense dans $\left[\frac{1+c}{c}, \infty\right[$.*

P r e u v e d u C o r o l l a i r e. soit $\varepsilon > 0$ et soit $[x, y]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur ε avec $\frac{1+c}{c} < x < y$; soit n_0 un entier tel que $J_0 = [x^{n_0},\ y^{n_0}]$ ait une longueur supérieure ou égale à $1 + c$; il existe un intervalle U_{n_0} de $\mathbb{R}$ inclus dans $[x^{n_0},\ y^{n_0}]$ et congru modulo un à I_{n_0}, donc de longueur c, que nous noterons $\left[x_{n_0}^{n_0},\ y_{n_0}^{n_0}\right]$ et appellerons U_{n_0} avec $x \leq x_{n_0} < y_{n_0} \leq y$; posons $J_{n_0} = [x_{n_0}, y_{n_0}]$; si β est dans J_{n_0} alors β^{n_0} est dans I_{n_0} modulo un; un raisonnement analogue au précédent démontre l'existence d'un β compris entre x et y tel que pour tout $n \geq n_0$, β^n se trouve dans I_n modulo un. Le choix de $\varepsilon = y - x$ étant arbitraire l'ensemble $\mathcal{L}$ est dense dans $\left[\frac{1+c}{c}, \infty\right[$. La dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}$ dépend peut être du choix de $(I_n)_{n\geq 0}$; elle est sans doute nulle dans la plupart des cas mais il serait intéressant de le vérifier. $\square$

Proposition. *Soit* $(I_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'intervalles du tore de longueur constante* $c>0$*; alors l'ensemble des nombres* $\beta \leq -1$ *tels que pour tout* n $(-\beta)^n$ *se trouve dans* I_n *modulo un est non vide, et chaque intervalle de longueur supérieure à* $1+c$ *contenu dans* $\left]-\infty, -\frac{1+c}{c}\right]$ *contient un élément de cet ensemble. De plus l'ensemble des nombres* $-\beta \leq -\frac{1+c}{c}$ *tels que* $(-\beta)^n \in I_n$ *modulo un pour* n *assez grand est dense dans* $\left]-\infty, -\frac{1+c}{c}\right]$.

P r e u v e. On peut faire un raisonnement analogue en partant d'un intervalle J_0 appartenant à $\left[-\infty, -\frac{1+c}{c}\right]$, ou bien utiliser le Théorème en utilisant la suite d'intervalles $I'_{2n} = I_{2n}$, $I'_{2n+1} = -I_{n+1}$ puis en changeant β en $-\beta$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAHANE, J. P.—SALEM, R.: *Ensembles Parfaits et Séries Trigonométriques.* In: Actualités Sci. Indust. Vol. 1301, Hermann, Paris, 1963.

[2] KOKSMA, J. F.: *Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins*, Compositio Mathematica, **2** (1935), 250–258.

Received July 19, 2018
Accepted June 28, 2018

Anne Bertrand-Mathis
Département de Mathématiques
Université de Poitiers BP 30179
Bd Marie et Pierre Curie
86963 Futuroscope Chasseneuil Cedex
FRANCE
E-mail: anne.bertrand@math.univ-poitiers.fr