CRITÈRE DE V. MARKOVIC POUR LA CONJECTURE DE CANNON

PETER HAÏSSINSKY

L'objet de cet exposé est d'établir le critère suivant de V. Markovic [Mar]:

Théorème (Markovic).— *Soit G un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à S^2; si G admet une action cellulaire et géométrique sur un complexe cubique CAT(0) alors G est virtuellement conjugué à l'action d'un réseau uniforme de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$.*

On en déduit [CC]:

Corollaire.— *Soit G un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à S^2; si G admet une action cellulaire et géométrique sur un complexe cubique CAT(0) et si son action sur son bord est fidèle et préserve l'orientation alors G est conjugué à l'action d'un réseau uniforme de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$.*

Groupes kleinéens convexe-cocompacts et idée de la démonstration. On rappelle quelques notions liées aux groupes kleinéens. Voir [Sul, Thu].

Un groupe kleinéen G est un sous-groupe discret de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$. Il opère sur $\mathbb{H}^3$ par isométries et sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par homographies. La sphère admet une décomposition en deux sous-ensembles totalement invariants: l'ensemble limite Λ_G, lieu des points d'accumulation de n'importe quelle orbite, et l'ensemble de discontinuité Ω_G, ouvert maximal de $\widehat{\mathbb{C}}$ où l'action de G est proprement discontinue.

En identifiant $\widehat{\mathbb{C}}$ avec le bord à l'infini de $\mathbb{H}^3$, le groupe G préserve l'enveloppe convexe $\mathrm{env}(\Lambda_G)$ de Λ_G. On dit que G est *convexe-cocompact* si l'action de G sur $\mathrm{env}(\Lambda_G)$ est cocompacte. Du coup, G est hyperbolique au sens de Gromov.

Lorsqu'un groupe kleinéen est sans torsion, on peut lui associer sa *variété kleinéenne*

$$M_G = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega_G)/G\,.$$

Le groupe G est convexe-cocompact si et seulement si M_G est compacte. Une telle variété est donc compacte, orientable et de groupe fondamental hyperbolique.

Soit M une variété compacte, orientable, de dimension trois. Une surface S est *proprement plongée* dans M si S est compacte et orientable et si, ou bien $S \cap \partial M = \partial S$, ou bien S est contenue dans ∂M. Une surface proprement plongée S dans M est *incompressible* si S n'est pas homéomorphe à S^2 et si l'inclusion $i : S \to M$ induit un morphisme injectif $i_* : \pi_1(S,x) \to \pi_1(M,x)$. Enfin, on dit que M est une *variété hakenienne* (ou de Haken) si M contient une surface imcompressible.

Thurston montre le théorème d'uniformisation suivant.

Théorème d'uniformisation (Thurston).— *Une variété compacte, irréductible, orientable, hakenienne, de dimension trois et de groupe fondamental hyperbolique au sens de Gromov est homéomorphe à la variété kleinéenne d'un groupe kleinéen convexe-cocompact.*

Date: 10 Décembre 2013.

Lorsqu'une variété M est hakenienne, elle admet une hiérarchie: après avoir découpé M le long d'une surface incompressible, on obtient une ou deux variétés hakenienne que l'on peut continuer à découper inductivement. Le processus s'arrête en temps fini et on obtient à la fin une collection finie de boules. La démonstration de Thurston consiste à refabriquer M à partir de ces boules et de montrer qu'à chaque étape, il obtient la variété kleinéenne d'une groupe kleinéen convexe-cocompact. La démonstration que nous proposons suit le même chemin. Sachant que G admet une action spéciale sur un complexe cubique, il admet une hiérarchie quasiconvexe. L'idée est alors de fabriquer une variété hakenienne orientable de dimension 3 de groupe fondamental isomorphe à G en partant de boules. Le théorème d'uniformisation montrera qu'à chaque étape, on obtient la variété kleinéenne d'une groupe kleinéen convexe-cocompact.

Certains résultats sont tirés de [Haï], où des caractérisations des groupes kleinéens convexe-cocompacts sont proposées.

Notations. Si X est un espace hyperbolique, on notera ∂X son bord à l'infini. Soit $Y \subset X$; on écrira Λ_Y pour désigner la trace de sa fermeture dans ∂X. Si X est géodésique, on dira que Y est *quasiconvexe* s'il existe une constante K telle que, pour toute paire de points dans $Y \cup \Lambda_Y$, toute géodésique qui les relie est dans un K-voisinage de Y.

Une collection $(K_\alpha)_\alpha$ de sous-ensembles d'un espace métrique est *évanescente* s'il n'y a qu'au plus un nombre fini d'éléments de la collection de diamètre au moins δ pour tout $\delta > 0$.

Plan des notes. On commence par rappeler quelques propriétés des actions spéciales de groupes hyperboliques dont nous aurons besoin; on rappelle aussi et on établit quelques propriétés générales des actions de convergence. Ensuite, on donne une démonstration du théorème principal en dimension 1 (groupes de bord le cercle). Le paragraphe 3 traite des groupes qui opèrent sur la sphère S^2: on démontre le théorème en utilisant la stratégie de Thurston. Au paragraphe 4, on explique la stratégie de Markovic, founissant ainsi une seconde preuve.

Remerciements. Pour la préparation de cet exposé, j'ai bénéficié à un moment ou à un autre des lumières de Michel Boileau, Frédéric Haglund, Cyril Lecuire, Luisa Paoluzzi et Hamish Short. Je les remercie de tout cœur ! Cela m'a permis d'éviter un certain nombre d'erreurs grossières, celles qui subsistent étant évidemment de ma seule responsabilité !

1. Prérequis

On rappelle quelques résultats nécessaires à la démonstratrion du théorème principal portant sur les complexes cubiques CAT(0) et sur les groupes de convergence.

On rappelle tout d'abord qu'un groupe opère *géométriquement* sur un espace métrique si l'action est proprement discontinue, cocompacte et par isométries.

1.1. Complexes cubiques et groupes hyperboliques.

On rappelle les résultats qui ont trait aux complexes cubiques CAT(0) qui nous seront utiles.

On dira qu'un groupe G est *cubulé* ou *opère sur un complexe cubique CAT(0)* s'il opère cellulairement et géométriquement sur un complexe cubique CAT(0).

Théorème 1.1 (Cubulation, [BW]). *Soient G un groupe hyperbolique non élémentaire et $\mathcal{H}$ une collection de sous-groupes quasiconvexes tels que, pour tous $x, y \in \partial G$ distincts, il existe*

$H \in \mathcal{H}$ tel que Λ_H sépare $\{x, y\}$. Alors il existe $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ et un complexe cubique CAT(0) X tels que

(1) *le groupe G opère géométriquement sur X;*
(2) *pour tout hyperplan Y de X, il existe $g \in G$ et $1 \leq j \leq n$ tels que gH_jg^{-1} soit un sous-groupe d'indice fini dans* stab$Y$.

Théorème 1.2 (sous-groupe quasiconvexe [Hag])**.** *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire opérant géométriquement sur un complexe cubique CAT(0) X. Un sous-groupe H de G est quasiconvexe si et seulement si son action sur X est convexe-cocompact, c'est-à-dire qu'il existe un sous-complexe convexe $Z \subset X$ invariant par l'action de H avec Z/H compact.*

On note $\mathcal{QVH}$ la plus petite classe de groupes qui contient le groupe trivial $\{e\}$ et qui est stable par les opérations suivantes:

(1) si $G = A \star_C B$, avec $A, B \in \mathcal{QVH}$ et $C < G$ quasiconvexe, alors $G \in \mathcal{QVH}$;
(2) si $G = A\star_C$, avec $A \in \mathcal{QVH}$ et $C < G$ quasiconvexe, alors $G \in \mathcal{QVH}$;
(3) si $A < G$, $A \in \mathcal{QVH}$ est d'indice fini dans G alors $G \in \mathcal{QVH}$.

Les éléments de $\mathcal{QVH}$ sont dit admettre une *hiérarchie virtuelle quasiconvexe*. On parlera de *hiérarchie quasiconvexe* pour la sous-classe contenant toujours le groupe trivial et stable par les deux premières opérations. Une hiérarchie quasiconvexe d'un groupe hyperbolique G sera donc la donnée d'un arbre fini enraciné et étiqueté tel que les feuilles sont étiquetées par le groupe trivial $\{e\}$ et les autres sommets sont étiquetés par une paire de sous-groupes quasiconvexes (C_H, H) de G, avec $C_H < H$ et où H se scinde au-dessus de C_H en produit amalgamé $A_H \star_{C_H} B_H$ ou en extension HNN $A_H\star_{C_H}$. Dans le premier cas, H a deux enfants dont chaque sommet contient A_H et B_H dans son étiquette; dans le second cas, H n'a qu'un seul enfant dont l'étiquette contient A_H.

Théorème 1.3 (action virtuellement spéciale [Wis, Ago, HaW])**.** *Soit G un groupe hyperbolique non-élémentaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *le groupe G opère géométriquement sur un complexe cubique CAT(0);*
(2) *le groupe G admet une action virtuellement spéciale et géométrique sur un complexe cubique CAT(0);*
(3) *le groupe G admet une hiérarchie virtuelle quasiconvexe.*

Dans ce cas, les sous-groupes quasiconvexes de G sont séparables et il existe un sous-groupe d'indice fini G' qui admet une hiérarchie quasiconvexe au-dessus des stabilisateurs d'hyperplans.

On montre un petit lemme explicitant les scindements obtenus dans le théorème 1.3.

Si Y est un hyperplan de X, on note $N(Y) \subset X$ le sous-complexe de X engendré par les cubes qui intersectent Y et $\partial N(Y)$ les cubes de $N(Y)$ qui sont disjoints de Y. On définit aussi le sous-complexe

$$X\backslash\backslash Y = X \setminus (N(Y) \setminus \partial N(Y)) .$$

Ce sous-complexe $X\backslash\backslash Y$ admet deux composantes connexes, qui sont convexes et qui forment deux demi-espaces combinatoires. Voir [Hag] pour plus de détails. On dit que Y est *essentiel* si aucun des deux demi-espaces n'est contenu dans un R-voisinage de $N(Y)$ pour n'importe quel $R > 0$.

Lemme 1.4. *Supposons que G opère spécialement sur un complexe cubique CAT(0). Si Y est un hyperplan essentiel et $C =$ stab(Y), alors G se scinde au-dessus de C. Les sous-groupes de sommet opèrent sur un sous-complexe CAT(0).*

Démonstration. Soit $Y \subset X$ un hyperplan essentiel de X. Posons $\mathcal{Y} = \cup_{g\in G} g(Y)$. On définit un graphe T comme suit: les sommets sont les composantes connexes de $X \setminus \mathcal{Y}$ et deux sommets forment une arête s'ils sont séparés par exactement un hyperplan $g(Y)$ pour un certain $g \in G$. Comme l'action de G est spéciale, on en déduit que T est un arbre et que l'action de G sur T est simpliciale, minimale et sans inversion d'arêtes, *cf.* [HaW]. Si on note C le stabilisateur de Y, alors on vient de montrer que G est ou bien un produit amalgamé $G = A\star_C B$ ou une extension HNN $G = A\star_C$, où A et B stabilisent des composantes de $X\setminus\mathcal{Y}$. Plus précisément, prenons un sommet v de X; pour tout hyperplan $g(Y)$, on note $Z_{g(Y)}$ la composante de $X\setminus\setminus g(Y)$ qui contient v. L'intersection $Z = \cap Z_{g(Y)}$ est un sous-complexe convexe sur lequel opère le stabilisateur H de la composante de $X \setminus \mathcal{Y}$ qui contient v. Si on note $p : X \to X/G$ la projection canonique, alors $p(Z)$ s'identifie à Z/H, donc Z/H est compact et l'action de H est convexe-cocompacte. ■

1.2. **Groupes de convergence.** Un *groupe de convergence* est un groupe G d'homéomorphismes d'un compact métrisable Z dont l'action diagonale sur les triplets de points distincts est proprement discontinue. Un groupe de convergence est caractérisé par la propriété suivante: si (g_n) est une suite d'éléments distincts, il existe $a, b \in Z$ et une sous-suite $(n_k)_k$ tels que $(g_{n_k})_k$ tend uniformément sur les compacts de $Z \setminus \{b\}$ vers $\{a\}$. On dit que l'action est *uniforme* si elle est aussi cocompacte sur les triplets de points. Voir [Bow2].

L'ensemble de discontinuité Ω_G d'un groupe de convergence G est l'ouvert maximal sur lequel l'action de G est proprement discontinue. Le complémentaire est l'ensemble limite Λ_G.

B. Bowditch montre que la notion de convergence uniforme caractérise l'hyperbolicité au sens de M. Gromov [Bow1, Bow2].

Théorème 1.5. *Si G est un groupe de convergence uniforme opérant sur un espace métrisable compact parfait Z, alors G est hyperbolique et il existe un homéomorphisme équivariant entre son bord et Z. De plus, un sous-groupe H de G est quasiconvexe si et seulement si Λ_H est constitué de deux points ou moins, ou si son action sur Λ_H est uniforme.*

En particulier, l'action est uniforme sur Λ_G si et seulement si G est hyperbolique et son bord est homéomorphe à Λ_G par une conjugaison [Bow1]. On a de plus.

Corollaire 1.6. *Si G est un groupe de convergence uniforme sur Z alors*

(1) *le groupe G est de présentation finie;*
(2) *le groupe G se scinde en un produit au-dessus de groupes finis de groupes ayant au plus un bout* [Dun]*;*
(3) *chaque composante connexe de Z non triviale est connexe, localement connexe et sans point de coupure* [Swa].

On en déduit tout de suite la structure des bords planaires des groupes hyperboliques:

Proposition 1.7. *Soit G un groupe de convergence uniforme sur un continuum planaire Z. Alors Z est ou bien toute la sphère, ou bien homéomorphe à un tapis dégénéré, c'est-à-dire un compact du plan, connexe, localement connexe, et dont les composantes du complémentaire sont des domaines de Jordan.*

Démonstration. Supposons que Z n'est pas homéomorphe à la sphère et que Z est déjà plongé dans le plan. Comme Z est connexe, les composantes du complémentaire sont simplement connexes et comme Z est aussi localement connexe, c'est aussi le cas des bords des composantes de son complémentaire [Why2, Thm VI.2.2]. Soit Ω l'une de ces composantes.

Prenons une représentation conforme $h : \mathbb{D} \to \Omega$. Comme $\partial\Omega$ est un compact localement connexe, le théorème de Carathéodory implique que h admet un prolongement continu et surjectif $h : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$. Si Ω n'est pas un domaine de Jordan, alors on peut trouver deux rayons de $\mathbb{D}$ dont l'image par h est une courbe de Jordan qui sépare $\partial\Omega$, donc Z, ce qui contredit que Z n'a pas de point de coupure. ■

On passe maintenant à une caractérisation dynamique des sous-groupes quasiconvexes.

Proposition 1.8. *Soient G un groupe hyperbolique non élémentaire et $\mathcal{P}$ une famille G-invariante et évanescente de compacts non triviaux de ∂G. Alors*

(a) *l'ensemble $\mathcal{P}/G$ est fini;*
(b) *pour chaque $K \in \mathcal{P}$, le stabilisateur G_K de K est quasiconvexe, d'ensemble limite K.*

Démonstration. On se fixe une métrique visuelle sur ∂G, et soit $m > 0$ telle que chaque triplet de points distincts de ∂G puisse être m-séparé par un élément de G. Etant donné $\delta > 0$, on note $\mathcal{P}_\delta$ le sous-ensemble des éléments K de $\mathcal{P}$ tels que diam $K \geq \delta$; cet ensemble est fini puisque $\mathcal{P}$ est évanescente, et non vide si $\delta \leq m$.

Pour tout $K \in \mathcal{P}$, on peut trouver deux points $x_1, x_2 \in K$ et $g \in G$ tels que $\{g(x_1), g(x_2)\}$ est m-séparé: ceci implique que $g(K) \in \mathcal{P}_m$, donc $\mathcal{P}$ est composée d'un nombre fini d'orbites.

On se fixe $K \in \mathcal{P}$ et on suppose d'abord que K contient au moins trois points. On énumère $\mathcal{P}_m \cap G(K) = \{K_1, \ldots, K_N\}$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, N\}$, on peut trouver $g_j \in G$ tel que $g_j(K_j) = K$. Comme $\mathcal{P}_m \cap G(K)$ est fini et les $\{g_j^{-1}, j = 1, \ldots, N\}$ sont uniformément continus, il existe $m' \in]0, m[$ telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et tous $x, y \in K_j$ avec $d(x, y) \geq m$, on ait $d(g_j(x), g_j(y)) \geq m'$. Comme G_K est un sous-groupe de G, son action sur les triplets de K est automatiquement proprement discontinue. Montrons qu'elle est aussi cocompacte. Soient $x_1, x_2, x_3 \in K$ et prenons $g \in G$ tel que $\{g(x_1), g(x_2), g(x_3)\}$ est m-séparé. Il s'ensuit que $g(K) = K_j$ pour un certain j, donc $(g_j \circ g) \in G_K$ et $\{(g_j \circ g)(x_1), (g_j \circ g)(x_2), (g_j \circ g)(x_3)\}$ est m'-séparé.

Si K n'a que deux points x, y, alors il suffit de montrer que leur stabilisateur est infini: ceci montrera que G_K a deux bouts, et est donc quasiconvexe dans G. Choisissons une suite (x_n) qui s'accumule sur x. Comme ci-dessus, on peut trouver une infinité d'éléments $g_n \in G$ tels que $g_n\{x, x_n, y\}$ est m-séparé; le même argument que ci-dessus établit que G_K est infini. Ceci montre (b). ■

On conclut ce paragraphe par la démontratrion d'un résultat de rigidité [Bow2, Prop. 5.5].

Proposition 1.9. *Soient G, H deux groupes de convergence isomorphes (par $\rho : G \to H$) opérant sur X, Y tels que leur action sur leur ensemble limite est uniforme et cocompacte sur leur ensemble de discontinuité. On suppose qu'il existe une fonction $f : X \to Y$ telle que:*

(1) *$f \circ G = H \circ f$,*
(2) *$f : \Omega_G \to \Omega_H$ est un homéomorphisme et*
(3) *$f : \Lambda_G \to \Lambda_H$ est un homéomorphisme*

alors $f : X \to Y$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Comme $f : X \to Y$ est une bijection entre compacts, il suffit de montrer que f est continue. Pour cela, on considère une suite de $(x_n)_n$ de Ω_G qui tend vers $x \in \Lambda_G$ et on veut montrer que $(f(x_n))_n$ tend vers $f(x)$.

Soit $K \subset \Omega_G$ un compact dont l'orbite recouvre Ω_G. On peut alors trouver $(a_n)_n$ dans K et $(g_n)_n$ de G tels que $x_n = g_n(a_n)$. Notons $b_n = f(a_n)$ et $h_n = \rho(g_n)$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(g_n)_n$ tend vers un point $a \in \Lambda_G$ et $(h_n)_n$ tend vers un point $b \in \Lambda_H$. Or $f : \Lambda_G \to \Lambda_H$ étant une conjugaison, on obtient $b = f(a)$, et par convergence, $(g_n(a_n))_n$ tend vers a et $(h_n(b_n))_n$ tend vers $f(a)$.

Par conséquent, comme $f(x_n) = f(g_n(a_n)) = h_n(b_n)$, on en déduit d'une part que (x_n) tend vers $a = x$ et $(f(x_n))_n$ tend vers $b = f(a) = f(x)$, ce qui établit la continuité de f. ■

2. Échauffement: groupes de convergence uniformes sur le cercle

On conmence par établir un cas particulier du théorème de classification des actions de convergence de Casson-Jungreis, Gabai et Tukia [CJ, Gab, Tuk]. On dit qu'un groupe de convergence G est conjugué à un groupe fuchsien s'il existe un homéomorphisme $\varphi : S^1 \to \mathbb{S}^1$ telle que $\varphi G \varphi^{-1}$ est un groupe fuchsien.

Théorème 2.1. *Soit G un groupe hyperbolique de bord S^1; alors G est virtuellement conjugué à un réseau uniforme de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$.*

Corollaire 2.2. *Si G est hyperbolique de bord S^1 et si son action sur son bord est fidèle et préserve l'orientation, alors G est conjugué à un réseau uniforme de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Cela découle du théorème ci-dessus et de la solution au problème de Nielsen. Voir [Tuk]. ■

2.1. **Mise en place.** Si G est un groupe de convergence non élémentaire sur S^1, uniforme sur Λ_G, alors Ω_G est une réunion dénombrable d'intervalles qui forment une suite évanescente. Par conséquent, la proposition 1.8 nous apprend que ces intervalles forment un nombre fini d'orbites et chaque stabilisateur est un groupe à deux bouts. Un tel sous-groupe est dit *périphérique.*

Proposition 2.3. *Un groupe hyperbolique de bord S^1 opère sur un complexe cubique CAT(0) dont le stabilisateur de chaque hyperplan est virtuellement cyclique.*

Démonstration. On remarque qu'un groupe de convergence sur S^1 infini cylique sépare S^1. Or, pour un groupe de convergence uniforme, les paires de points fixes d'éléments loxodromiques sont denses dans $S^1 \times S^1$ [Bow2]. On peut donc appliquer le théorème 1.1 de cubulation. ■

Corollaire 2.4. *Un groupe hyperbolique de bord S^1 contient un sous-groupe normal d'indice fini G avec les propriétés suivantes:*

1. *le groupe G est sans torsion;*
2. *l'action de G sur S^1 préserve l'orientation;*
3. *le groupe G opère spécialement sur un complexe cubique CAT(0) X de sorte que tout stablisateur d'hyperplan est un groupe cyclique.*

Démonstration. Quitte à prendre un sous-groupe d'indice deux, on peut supposer que le groupe préserve l'orientation. D'après la proposition 2.3, il opère sur un complexe cubique CAT(0) dont les stabilisateurs des hyperplans sont des groupes virtuellement cycliques. D'après le théorème 1.3, le groupe est virtuellement spécial, donc virtuellement sans torsion: on peut ainsi trouver un sous-groupe normal d'indice fini G, sans torsion, qui opère spécialement sur X. Etant sans torsion, les stabilisateurs sont cycliques. ■

Remarque 2.5. *Les stabilisateurs des hyperplans sont tous malnormaux.*

2.2. **Le lemme de recollement.** On suppose que G vérifie les conclusions du corollaire 2.4. La démonstration proposée ici appliquera la proposition suivante de manière itérative:

Proposition 2.6. *Soient $H < G$ un groupe convexe cocompact préservant un sous-complexe convexe $Z \subset X$ et $Y \subset X$ un hyperplan qui sépare essentiellement Z, de stabilisateur C dans Z.*

- *Si $H = A \star_C B$ et si A et B sont conjugués à des groupes fuchsiens, alors H aussi.*
- *Si $H = A\star_C$ et si A est conjugué à un groupe fuchsien, alors H aussi.*

Démonstration. Par construction, C est le stabilisateur d'un hyperplan de Z; celui-ci est naturellement un sous-ensemble convexe d'un hyperplan Y de X (ils sont définis comme étant transverses à une même arête).

On traite d'abord le cas $H = A \star_C B$. Comme stab(Y) est cyclique, l'hyperplan Y sépare S^1 en deux intervalles ouverts I_A et I_B tels que $I_A \cap \Lambda_A = \emptyset$ et $I_B \cap \Lambda_B = \emptyset$. Il existe une involution C-équivariante $\iota : (S^1, I_A) \to (S^1, I_B)$ qui fixe ponctuellement Λ_Y. Par construction, $(\overline{I_A} \setminus \Lambda_C)/C$ et $(\overline{I_B} \setminus \Lambda_C)/C$ s'injectent dans Ω_A/A et Ω_B/B respectivement. Soient $\varphi_A : S^1 \to \mathbb{S}^1$ l'homéomorphisme tel que $A' = \varphi_A A \varphi_A^{-1}$ est fuchsien, et notons $S_A = (\mathbb{H}^2 \cup \Omega_{A'})/A'$; de même, on considère $\varphi_B : S^1 \to \mathbb{S}^1$ l'homéomorphisme tel que $B' = \varphi_B B \varphi_B^{-1}$ est fuchsien, et on note $S_B = (\mathbb{H}^2 \cup \Omega_{B'})/B'$. Par construction, $\varphi_A((\overline{I_A} \setminus \Lambda_C)/C)$ est contenu dans ∂S_A, et est homéomorphe *via* ι à $\varphi_B((\overline{I_B} \setminus \Lambda_C)/C)$ qui est contenu dans ∂S_B. Par conséquent, on peut recoller S_A et S_B par ι pour obtenir une surface compacte de groupe fondamental isomorphe à H. Le théorème d'uniformisation des surfaces nous construit un groupe fuchsien H'. Il reste à voir que H et H' sont conjugués. On a une première conjugaison entre les bords ∂H et $\partial H'$ fournie par l'isomorphisme entre H et H'. Par ailleurs, Ω_H/H et $\Omega_{H'}/H'$ sont homéomorphes par construction; cet homéomorphisme se relève en homéomorphisme équivariant entre Ω_H et $\Omega_{H'}$; les détails sont généreusement laissés aux lecteurs ! La proposition 1.9 permet de conclure.

On suppose maintenant $H = A\star_C$. Il existe $h \in H$ qui réalise l'extension HNN. Comme ci-dessus, il existe I_C bordé par Λ_Y disjoint de Λ_A, $I_{C'}$ bordé par $h(Y)$ disjoint de Λ_A et une involution équivariante $\iota : I_C \to I_{C'}$ entre C et $C' = hCh^{-1}$ qui renverse l'orientation et tel que $\iota \circ h|_{\Lambda_Y}$ est l'identité. Par conséquent, $(\overline{I_C} \setminus \Lambda_C)/C$ et $(\overline{I_{C'}} \setminus \Lambda_{C'})/C'$ sont des courbes disjointes dans ∂S_A. Si on recolle S_A le long de ces courbes, on obtient aussi une surface compacte de groupe fondamental isomorphe à H. Le théorème d'uniformisation des surfaces nous construit un groupe fuchsien H'. Il reste à vérifier que H et H' sont conjugués. On procède comme ci-dessus. ■

2.3. **L'argument final.** On suppose que G vérifie les conclusions du corollaire 2.4. On considère l'arbre donné par une hiérarchie quasiconvexe, *cf.* le théorème 1.3. Les feuilles étant triviales correspondent aux groupes fondamentaux de disques. Ensuite, on peut appliquer itérativement la proposition 2.6 pour construire une surface compacte hyperbolique de groupe fondamental H conjugué à G. Cette surface n'a pas de bord car l'ensemble limite de H est tout le cercle. Donc H est un réseau uniforme de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$. ■

3. Action de convergence sur S^2

Nous présentons maintenant une démonstration du théorème de Markovic similaire à celle du théorème 2.1.

3.1. **Mise en place.** Nous donnons d'abord des propriétés générales des groupes de convergences de S^2, *cf.* [MT, MS].

Proposition 3.1. *Soit G un groupe de convergence sur S^2, uniforme sur Λ_G, sans torsion et dont l'action préserve l'orientation. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Le quotient Ω_G/G est un réunion finie de surfaces compactes.*
2. *Soit Ω une composante de Ω_G. Son stabilisateur est un sous-groupe quasiconvexe H tel que $\Lambda_H = \partial\Omega$.*
3. *Si K est une composante connexe non triviale du bord d'une composante Ω de Ω_G, alors K est un cercle, son stabilisateur H est isomorphe à un groupe fuchsien cocompact F et son action est conjuguée à F sur S^2.*

Démonstration. On suppose Ω_G non vide. Comme G est sans torsion et préserve l'orientation, on a $\mathrm{stab}(\Omega) = \mathrm{stab}(\partial\Omega)$ pour toute composante Ω de Ω_G.

Si Λ_G est connexe, il est aussi localement connexe (Cor. 1.6), donc la collection des composantes connexes de Ω_G est évanescente et invariante par l'action de G [Why2, Thm VI.4.4]. Par conséquent, la proposition 1.8 montre que l'on n'a qu'un nombre fini d'orbites de composantes de Ω_G et le stabilisateur H de chaque composante Ω est uniforme sur $\partial\Omega$. Si Λ_G n'est pas connexe, alors G est un produit libre de groupes qui ont au plus un bout d'après le corollaire 1.6. Dans ce cas, les composantes de Λ_G forment une suite évanescente donc les composantes de Ω_G forment aussi une suite évanescente. Du coup, chaque stabilisateur est un sous-groupe quasiconvexe H et $\Lambda_H = \partial\Omega$ d'après la proposition 1.8.

Soit K une composante connexe non triviale du bord d'une composante Ω de Ω_G. Son orbite forme aussi une suite évanescente d'après ce qui précède, donc $\mathrm{stab}(K)$ est quasiconvexe de bord K. D'après la proposition 1.7, K est localement connexe et les composantes de son complémentaire sont des domaines de Jordan. Or K est le bord d'un ouvert Ω_K qui contient Ω, donc K est une courbe de Jordan. D'après le théorème 2.1, $H = \mathrm{stab}(K)$ est conjugué à un groupe fuchsien cocompact F. Par ailleurs, Ω_H/H est la réunion de deux surfaces sans bord de groupe fondamental de type fini, donc deux surfaces compactes, forcément homéomorphes à $\mathbb{D}/F$. Par conséquent, la proposition 1.9 montre que H et F sont conjugués sur S^2.

Il découle de l'analyse précédente que Ω_G/G est une réunion finie de surfaces; de plus, si Λ_G est connexe, alors ces surfaces sont compactes. Il reste à montrer que $S = \Omega/H$ est compacte, quand Ω est une composante non simplement connexe de Ω_G et $H = \mathrm{stab}(\Omega)$. On présente deux méthodes.

La première suit [Kul] et repose sur des méthodes topologiques. On note $p : \Omega \to S$ la projection canonique. Comme H est de type fini et $\pi_1(S) \to H = \pi_1(S)/\pi_1(\Omega)$ est surjectif, on peut trouver une surface compacte à bord $S' \subset S$ avec les propriétés suivantes: (a) $\pi_1(S') \to \pi_!(S) \to H$ est surjectif; (b) les composantes de $S \setminus S'$ ne sont pas des disques et (c) chaque composante du bord de S' est une courbe de Jordan qui sépare S (voir [AS, Thm. I.29A] pour(c)). On note $\Omega' = p^{-1}(S')$; c'est un fermé connexe car $\pi_1(S')$ se surjecte sur H.

Soit U une composante de $\Omega \setminus \Omega'$ et montrons que U est simplement connexe. Soit $\gamma \subset U$ une courbe de Jordan. Elle sépare S^2 en deux disques D_1 et D_2; comme Ω' est connexe et disjoint de γ, Ω' se trouve dans un seul disque, p.ex. D_1. Comme Ω' contient la H-orbite d'un point, on en déduit que D_1 contient aussi $\Lambda_H = \partial\Omega$. Par conséquent, D_2 est contenu dans Ω et U est simplement connexe.

Soit γ' une composante de $\partial S'$, et prenons une composante γ de $p^{-1}(\gamma')$; elle borde Ω' et une composante U de son complémentaire. Si γ est une courbe de Jordan, alors elle est compacte dans Ω, donc son stabilisateur est trivial; cela implique que γ borde un disque U dans Ω et $p(U)$ est bordé par γ', disjoint de S'. Ce n'est pas possible d'après (b). Donc $p:\gamma\to\gamma'$ est un revêtement universel. Montrons que γ sépare U de Ω'. Si ce n'est pas le cas, alors $\mathrm{stab}(U)$ agit transitivement et par permutations sur les composantes connexes Γ_U de $p^{-1}(\gamma')$ contenues dans $\overline{U}$; le noyau de cette action est donc un sous-groupe de $\mathrm{stab}(\gamma)$: il est soit trivial, soit cyclique. Or, ce stabilisateur est isomorphe au groupe fondamental de $p(U)$, donc un groupe libre, ce qui nous conduit à une contradiction dans les deux cas: il n'est pas un groupe de permutations car l'action doit préserver l'ordre cyclique de Γ_U et il ne contient pas de sous-groupe normal cyclique. Du coup, γ sépare U de Ω'. On obtient un scindement de H au-dessus de $\mathbb{Z} = \mathrm{stab}(\gamma)$ ainsi: on construit un arbre simplicial dont les sommets sont les composantes de $\Omega\setminus p^{-1}(\gamma')$ (dont une, notée Ω_0, contient Ω') et les arêtes celles de $p^{-1}(\gamma')$. Or, par construction, $\mathrm{stab}(\Omega_0) = H$, ce qui montrerait que $\mathrm{stab}(U) = \mathbb{Z}$: contradiction. Donc le quotient est une surface compacte.

La seconde suit [MS] et utilise l'accessibilité de H. Soient $p:\Omega\to\Omega/H$ le revêtement et N le sous-groupe normal du revêtement. On considère une famille de courbes homotopiquement disjointes et non triviales $M = \{u_1,\ldots,u_n\}$ sur Ω/H telle qu'il existe des exposants minimaux $a_1,\ldots,a_n$ de sorte que $u_1^{a_1},\ldots,u_n^{a_n}$ sont dans N. On note $N_M < N$ le sous-groupe normal engendré par ces multiples. Soit $\Gamma = p^{-1}(\{u_1,\ldots,u_n\})$: il s'agit d'une collection dénombrable de courbes simples disjointes homotopiquement non triviales dans Ω.

On construit un arbre T ainsi. Les sommets sont donnés par les composantes connexes de $\Omega\setminus\cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma$ et on met une arête entre deux sommets s'il partage une courbe $\gamma\in\Gamma$ dans leur bord. On constate que Γ est une suite évanescente car Γ/H est fini et $\Gamma\subset\Omega$. Comme chaque courbe de Γ est une courbe de Jordan, elle sépare S^2, donc T est un arbre; de plus, H étant sans torsion et son action préservant l'orientation, on en déduit que l'action de H sur T est sans inversion d'arête. Le stabilisateur de chaque arête est trivial. On obtient ainsi une décomposition de H en produit libre dont le graphe de groupes a n arêtes. Comme H est accessible, on obtient une borne sur le nombre d'arêtes, donc sur n.

Or, d'après [Mas, Lemma 5], si $N_M\neq N$, alors on peut trouver une courbe u_{n+1} disjointe des précédentes et refaire la même construction avec $M\cup\{u_{n+1}\}$. Comme ce procédé s'arrête, on obtient une famille finie de courbes disjointes qui découpent la surface en un nombre fini de composantes connexes dont les groupes fondamentaux sont ou bien triviaux ou bien fuchsiens cocompacts d'après ci-dessus. On en déduit que Ω/H est une surface de type fini. Comme elle n'a pas de bord ($\Lambda_H = \partial\Omega$), elle est compacte. ∎

On prépare le groupe ambiant G de bord S^2.

Proposition 3.2. *Soit G un groupe hyperbolique de bord S^2 qui opère sur un complexe cubique CAT(0). Alors il existe un sous-groupe d'indice fini, sans torsion, qui opère spécialement sur un complexe cubique CAT(0) tel que le stabilisateur de chaque hyperplan est fuchsien cocompact et dont l'action à l'infini préserve l'orientation.*

Démonstration. Soit X un complexe cubique CAT(0) sur lequel G opère. Par le théorème 1.3, on peut supposer que G est sans torsion et opère sur son bord en préservant l'orientation.

Soient $x, y \in \partial X$ deux points distincts. On montre que l'on peut les séparer sur ∂X par l'ensemble limite d'un groupe fuchsien cocompact. On commence par considérer un hyperplan Y dont le bord sépare ces points. Du coup, l'ensemble limite de $H = \mathrm{stab}(Y)$ sépare $\{x, y\}$. On peut donc trouver une composante connexe Ω de Ω_H qui contient x mais pas y. Une composante connexe K de son bord sépare donc $\{x, y\}$. D'après la proposition 3.1, K est l'ensemble limite d'un groupe fuchsien cocompact.

En vertu du théorème 1.1, G opère sur un complexe cubique CAT(0) X' dont les stabilisateurs de chaque hyperplan est virtuellement fuchsien. Comme G opère sans torsion, ces groupes sont fuchsiens. Par le théorème 1.3, on peut supposer que l'action est spéciale. ■

3.2. **Le lemme de recollement.** On suppose que G vérifie les conclusions de la proposition 3.2. On procède comme pour les groupes du cercle. La démonstration appliquera la proposition suivante de manière itérative. On dit qu'un groupe de convergence G est conjugué à un groupe kleinéen s'il existe un homéomorphisme $\varphi : S^2 \to \mathbb{S}^2$ telle que $\varphi G \varphi^{-1}$ est un groupe kleinéen.

Proposition 3.3. *Soient $H < G$ un groupe convexe cocompact préservant un sous-complexe convexe $Z \subset X$ et $Y \subset X$ un hyperplan qui sépare essentiellement Z, de stabilisateur C.*

- *Si $H = A \star_C B$ et si A et B sont conjugués à des groupes kleinéens, alors H aussi.*
- *Si $H = A \star_C$ et si A est conjugué à un groupe kleinéen, alors H aussi.*

Démonstration. Le groupe C fixe Λ_Y, qui est homéomorphe à S^1. Par conséquent, l'action de C est de convergence sur Λ_Y, uniforme sur $\Lambda_C \subset \Lambda_Y$.

On traite d'abord le cas $H = A \star_C B$. L'hyperplan Y découpe S^2 en deux domaines de Jordan D_A et D_B fixés par C tels que $D_A \cap \Lambda_A = D_B \cap \Lambda_B = \emptyset$. De plus, la proposition 3.1 implique l'existence d'une involution C-équivariante $\iota_C : S^2 \to S^2$ qui fixe Λ_Y ponctuellement et échange les composantes D_A et D_B.

Comme A et B sont conjugués à des groupes kleinéens convexe-cocompacts A_0 et B_0, on peut considérer les variétés kleinéennes M_A et M_B. Il vient que $(\overline{D_A} \setminus \Lambda_C)/C$ est une sous-surface de ∂M_A, $(\overline{D_B} \setminus \Lambda_C)/C$ est aussi une sous-surface de ∂M_B,. et ι_C induit un homéomorphisme qui renverse l'orientation entre elles. On peut alors définir $M_H = M_A \sqcup_{\iota_C} M_B$: c'est une variété hakenienne de groupe fondamental isomorphe à H [SW]. Comme H est hyperbolique, le théorème d'uniformisation de Thurston implique l'existence d'un groupe kleinéen convexe-cocompact H' tel que $M_{H'}$ est homéomorphe à M_H. Du coup, les variétés M_A et M_B s'injectent dans $M_{H'}$ de manière bilipschitz transformant A_0 et B_0 en des sous-groupes A' et B' de H' et on obtient par relèvements des plongements bilipschitz (A_0, A')- et (B_0, B')-équivariants $f'_A : \mathbb{H}^3 \cup \Omega_A \to \mathbb{H}^3 \cup \Omega_{A'}$ et $f'_B : \mathbb{H}^3 \cup \Omega_B \to \mathbb{H}^3 \cup \Omega_{B'}$ que l'on peut choisir pour que $f'_A|_{\Lambda_Y \setminus \Lambda_C} = f'_B|_{\Lambda_Y \setminus \Lambda_C}$. Ils induisent des conjugaisons $f_A : \Omega_A \cup \Lambda_A \to \Omega_{A'} \cup \Lambda_{A'}$ et $f_B : \Omega_B \cup \Lambda_B \to \Omega_{B'} \cup \Lambda_{B'}$ tels que $f_A|_{\Lambda_Y} = f_B|_{\Lambda_Y}$ par la proposition 1.9. On définit alors un homéomorphisme équivariant $f : S^2 \to \mathbb{S}^2$ en posant $f = f_A$ sur $S^2 \setminus (\cup_{a \in A} a(D_A))$, $f = f_B$ sur $S^2 \setminus (\cup_{b \in B} b(D_B))$ et en prolongeant f par la dynamique. On a donc $A' \circ f = f \circ A$ et $B' \circ f = f \circ B$. Comme $H = A \star_C B$ et $H' = A' \star_{A' \cap B'} B'$, l'homéomorphisme f induit une conjugaison entre H et H'.

Si $H = A \star_C$, la démonstration est similaire. Il existe un élément $h \in H \setminus A$ telle que l'extension HNN est obtenue en identifiant C avec $C' = hCh^{-1}$. Comme l'action est spéciale, C et C' sont des groupes de convergence sur S^1, qui fixent des domaines de Jordan D_C et $D_{C'} = S^2 \setminus \overline{h(D_C)}$ disjoints de Λ_A. Il existe aussi une involution équivariante $\iota : (S^2, D_C) \to (S^2, D_{C'})$ qui renverse l'orientation et tel que $\iota \circ h$ fixe Λ_Y ponctuellement. On recolle alors M_A en identifiant $(\overline{D_C} \setminus \Lambda_C)/C$ avec $(\overline{D_{C'}} \setminus \Lambda_{C'})/C'$ *via* ι. On obtient ainsi une variété hakenienne

M_H de groupe fondamental isomorphe à H. On conclut comme ci-dessus, à ceci près que M_A ne s'injecte pas dans M_H, mais dans le relevé cyclique induit par h. ∎

3.3. **L'argument final.** On suppose que G vérifie les conclusions de la proposition 3.2. On considère l'arbre donné par une hiérarchie quasiconvexe du théorème 1.3. Les feuilles étant triviales correspondent aux groupes fondamentaux de boules. Ensuite, on peut appliquer itérativement la proposition 3.3 pour construire une variété compacte hakenienne orientable de groupe fondamental conjugué à G. ∎

4. Approche par remplissage

On décrit ici l'approche de Markovic qui consiste à construire une variété de dimension trois en étendant l'action de G sur $\mathbb{S}^2$ à la boule $\mathbb{B}$. Elle fournit une autre démonstration du théorème 2.1.

4.1. **Cubulation malnormale.** V. Markovic momtre le résultat suivant en préparation de son approche [Mar, Thm 2.1].

Théorème 4.1. *Si G admet une action virtuellement spéciale sur un complexe cubique CAT(0) alors il contient un sous-groupe normal d'indice fini et sans torsion tel que les stabilisateurs des hyperplans sont tous malnormaux.*

On déduit le théorème de la proposition suivante, voir aussi [HrW, Thm 9.3]:

Proposition 4.2. *Un sous-groupe quasiconvexe et séparable d'un groupe hyperbolique G est presque malnormal dans un sous-groupe d'indice fini de G.*

Démonstration. (Théorème 4.1) D'après le théorème 1.3, on peut supposer, quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini, que G est sans torsion. Notons $Y_1, \dots, Y_n$ des représentants des orbites des hyperplans et $H_1, \dots, H_n$, leurs stabilisateurs respectifs. Ces groupes sont quasiconvexes et séparables, cf. le théorème 1.3. D'après la proposition 4.2, il existe G_j d'indice fini dans G qui contient H_j de façon malnormale (puisque G est sans torsion). Considérons le sous-groupe $G' = \cap_{g\in G} g(\cap_j G_j)g^{-1}$, d'indice fini et normal dans G, qui est contenu dans $\cap_j G_j$, et posons $H'_j = H_j \cap G'$.

Par construction, H'_j est malnormal dans G'. Si Y est un hyperplan, il existe $g \in G$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $Y = gY_j$. Du coup

$$\mathrm{stab}_{G'}(Y) = \mathrm{stab}_{G'} g(Y_j) = g\mathrm{stab}_{G'}(Y_j)g^{-1} = gH'_j g^{-1}\,.$$

Comme H'_j est malnormal dans G' et G' est normal dans G, si $g' \in G'$, alors

$$g'\mathrm{stab}_{G'}(Y)(g')^{-1} \cap \mathrm{stab}_{G'}(Y) = g[(g^{-1}g'g)H'_j(g^{-1}g'g)^{-1} \cap H'_j]g^{-1} = \{e\}$$

donc $\mathrm{stab}_{G'}(Y)$ est malnormal. ∎

Pour la proposition 4.2, on utilisera le lemme suivant, voir [GMRS, Lemma 1.2]:

Lemme 4.3. *Il existe $g_0 = e, g_1, \dots, g_k \in G$ tels que, pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} \cap H$ est infini si et seulement si $g \in \cup_j Hg_jH$.*

Démonstration. On vérifie que les double-classes $\{HgH, g \in G\}$ forment une partition de G et que le cardinal de $gHg^{-1} \cap H$ ne dépend que de sa double-classe HgH.

On munit G de la distance des mots associée à un système de générateurs fini de sorte que H soit K-quasiconvexe, K fixé. Si $H \cap gHg^{-1}$ est infini, alors il contient un élément loxodromique, donc $\Lambda_H \cap \Lambda_{gHg^{-1}}$ contient au moins deux points $a \neq b$. Comme H est K-quasiconvexe, on peut trouver $h \in H$ tel que $d(h^{-1}, [a,b]) \leq K$. Du coup, il existe $k \in [h(a), h(b)]$ tel que $d(e,k) \leq K$. Or, $\Lambda_{gHg^{-1}} = \Lambda_{gH}$, $h(\Lambda_{gHg^{-1}}) = \Lambda_{hgH}$ et hgH est aussi K-quasiconvexe, donc on peut trouver $h' \in H$ tel que $d(k, hgh') \leq K$. Par conséquent, $d(e, HgH) \leq 2K$. Comme la boule $B(e, 2K)$ est finie, on n'a qu'un nombre fini de double-classes qui l'intersectent. ∎

Démonstration. (proposition 4.2) Soient $e, g_1, \ldots, g_k$ donnés par le lemme 4.3. Comme H est séparable, on peut trouver un sous-groupe G_H de G d'indice fini qui contient H mais est disjoint de $\{g_1, \ldots, g_k\}$. Du coup, $Hg_jH \cap G_H = \emptyset$ donc H est presque malnormal. ∎

4.2. *G*-**pavage.** Soit G un groupe de convergence uniforme sur $\mathbb{S}^2$ (la même construction s'appliquerait aussi à $\mathbb{S}^n$). Un *G-pavage* est la donnée d'un quadruplet $(K, \mathcal{U}, \phi^{\mathcal{U}}, \mu)$ où

- (D1) K est un compact de la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant la sphère,
- (D2) $\mathcal{U}$ désigne la collection des composantes connexes de $\mathbb{B} \setminus K$,
- (D3) $\phi^{\mathcal{U}}$ représente une collection d'homéomorphismes $\phi^U : (\mathbb{B}, \mathbb{S}^2) \to (U, \partial U)$, $U \in \mathcal{U}$,
- (D4) $\mu : G \to \text{Homéo}(K)$ est une représentation gauche de G qui coïncide avec l'action de G sur $\mathbb{S}^2$ $(\mu(gf) = \mu(g) \circ \mu(f))$,

et qui vérifie les conditions suivantes:

- (C1) $\mathcal{U}$ est une famille évanescente;
- (C2) pour tout $U \in \mathcal{U}$, on a $\phi^U|_{\mathbb{S}^2 \cap \partial U} = \text{Id}$;
- (C3) pour tout $g \in G$, tout $U \in \mathcal{U}$,

$$\mu(g) \circ \phi^U|_{\mathbb{S}^2} = \phi^{\mu(g)(U)} \circ \mu(g)|_{\mathbb{S}^2}\,.$$

Sous les conditions (D1)-(D4), si $U \in \mathcal{U}$ et $g \in G$, alors chaque composante connexe de $K \setminus \partial U$ intersecte $\mathbb{S}^2$, du coup $\mu(g)(\partial U)$ est le bord d'une autre composante $V \in \mathcal{U}$ par le théorème de Jordan. La représentation μ induit donc une action de G sur $\mathcal{U}$ par permutations.

On définit aussi le *μ-stabilisateur de $U \in \mathcal{U}$* en posant

$$\text{stab}_\mu(U) = \{g \in G,\ \mu(g)(\partial U) = \partial U\} = \{g \in G,\ \mu(g)(U) = U\}\,.$$

On a les deux exemples élémentaires suivants:

- $K = \mathbb{S}^2, \mathcal{U} = \{\mathbb{B}\}$, $\phi = \text{Id}$ et μ est l'action;
- $K_{rad} = \overline{\mathbb{B}}, \mathcal{U}_{rad} = \emptyset$ et μ_{rad} est l'extension radiale de l'action de G à la boule.

Plus intéressant est la construction suivante. Si $H < G$ et $\xi \in G/H$, on notera $H_\xi = gHg^{-1}$ et $\Lambda_\xi = g(\Lambda_H)$ où $g \in G$ représente ξ.

Proposition 4.4. *Soit $H < G$ un sous-groupe de surface quasiconvexe et malnormal. Il existe un G-pavage $(K_H, \mathcal{U}_H, \phi_H^{\mathcal{U}}, \mu_H)$ tel que*

1. *pour tout $\xi \in G/H$, il existe un disque $P_\xi \subset \mathbb{B}$ avec $\partial P_\xi = \Lambda_\xi$, deux à deux disjoints, tels que $K_H = \mathbb{S}^2 \cup (\cup_{\xi \in G/H} P_\xi)$;*
2. *$\mu_H(G)$ est un groupe de convergence, dont l'action est libre et cocompacte dans $\mathbb{B} \cap K_H$.*

On s'appuie sur deux lemmes:

Lemme 4.5. *Il existe un homéomorphisme $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ tel que, pour tout $\xi \in G/H$, $\psi(\Lambda_\xi)$ est un cercle euclidien.*

Lemme 4.6. *Pour tout $\xi \in G/H$, il existe une involution H_ξ-équivariante $\iota_\xi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ telle que $\iota_\xi|_{\Lambda_\xi} = \mathrm{Id}$ et $\iota_{g(\xi)} = g\iota_\xi g^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. (Proposition 4.4) Le lemme 4.5 nous permet de supposer que Λ_ξ est un cercle euclidien pour tout $\xi \in G/H$ et on considère les homéomorphismes ι_ξ donnés par le lemme 4.6.

On note $P_\xi \subset \mathbb{H}^3(\simeq \mathbb{B})$ le plan hyperbolique porté par Λ_ξ et on considère une transformation $\psi_\xi : \mathbb{S}^2 \to \overline{P_\xi}$ tel que $\psi_\xi \circ \iota_\xi = \psi_\xi$, ψ_ξ est l'identité sur Λ_ξ et est un homéomorphisme restreint à chaque composante de $\mathbb{S}^2 \setminus \Lambda_\xi$ sur P_ξ.

Posons donc $K = \mathbb{S}^2 \cup (\cup_{\xi \in G/H} P_\xi)$; comme $\{\Lambda_\xi, \xi \in G/H\}$ est évanescente, la famille $\{P_\xi, \xi \in G/H\}$ aussi, donc K est compact.

Prenons une composante U de $\mathbb{B} \setminus K$: c'est un domaine convexe de $\mathbb{H}^3$ et son bord est composé de points de $\mathbb{S}^2$ et de plans P_ξ. On définit d'abord $\phi^U : \mathbb{S}^2 \to \partial U$ en posant $\phi^U = \mathrm{Id}$ sur $\mathbb{S}^2 \cap \partial U$ et $\phi^U = \psi_\xi$ sur les disques disjoints de $\overline{U}$ bordés par Λ_ξ. Comme ces disques forment une suite évanescente, on vérifie facilement que ϕ^U est un homéomorphisme. On peut maintenant utiliser la convexité hyperbolique de U pour prolonger ϕ^U à $\mathbb{B}$ afin d'obtenir un homéomorphisme $\phi^U : \overline{\mathbb{B}} \to \overline{U}$.

On définit maintenant μ ainsi. Soient $g \in G$ et $\xi \in G/H$. On pose, sur P_ξ, $\mu(g) = \psi_{g(\xi)} \circ \mu(g) \circ \psi_\xi^{-1}$. On vérifie que $\mu(g) : K \to K$ est un homéomorphisme en utilisant le fait que $\{P_\xi, \xi \in G/H\}$ est évanescente et que $\psi_\xi|_{\Lambda_\xi} = \mathrm{Id}$. On vérifie aussi facilement que μ est une représentation gauche de G, qu'on obtient un G-pavage, et qu'elle induit une action de convergence.

L'action est libre car les stabilisateurs des P_ξ sont des groupes de surface et elle est cocompacte car on a de surcroît une seule orbite de plans.

On prolonge ψ en homéomorphisme de la boule et on retransporte ce G-pavage à notre contexte initial. ∎

Remarque 4.7. *Si G opère spécialement sur un complexe cubique CAT(0) et H est le stabilisateur d'un hyperplan Y, alors on a une bijection bi-univoque entre $\mathcal{U}$ et les sous-complexes associés au scindement au-dessus de H donnés par le lemme 1.4.*

DÉMONSTRATION. (Lemme 4.5) Comme H est malnormal et un groupe de surface, il induit un scindement quasiconvexe de G. Il s'ensuit que les sommets sont des groupes quasiconvexes de bord sans point de coupure locale. D'après [Why1], ce sont des tapis de Sierpiński. On obtient ainsi un arbre T de tapis liés par les Λ_ξ. Ces tapis forment une suite évanescente et on peut supposer qu'il existe un unique sommet de diamètre maximal, noté S_G.

Considérons par ailleurs un tapis de Sierpiński S bordé par des cercles, et construisons un arbre de tapis en faisant opérer le groupe de Schottky engendré par les cercles périphériques de S.

On ordonne les sommets de T en fonction des diamètres des tapis associés avec S_G comme élément maximal. On considère un premier homéomorphisme $f_0 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ tel que $f_0(S_G) = S$. Observons qu'il est montré dans [Why1] que tout homéomorphisme entre deux cercles périphériques de deux tapis se prolonge en homéomorphisme global de ces tapis. Cela nous permet de construire une suite d'homéomorphismes $f_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ qui transforment n tapis de

T en n tapis induit par S prolongeant f_{n-1}, $n \geq 1$. En utilisant l'évanescence de ces configurations, on montre que cette suite est équicontinue, donc converge vers un homéomorphisme global $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ qui transforme chaque Λ_ξ en un cercle euclidien. ■

Démonstration. (Lemme 4.6) D'après la proposition 3.1, H est conjugué à un groupe fuchsien sur tout $\mathbb{S}^2$. Du coup, il existe une involution équivariante $\iota : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ qui fixe ponctuellement Λ_H.

On remarque que si $g_2 \in g_1 H$, alors

$$g_2 \circ \iota \circ g_2^{-1} = g_1(g_1^{-1}g_2) \circ \iota \circ (g_1^{-1}g_2)^{-1}g_1^{-1} = g_1 \circ \iota \circ g_1^{-1}$$

car $(g_1^{-1}g_2) \in H$ et ι est équivariante; donc on peut poser, pour $\xi \in G/H$, $\iota_\xi = g \circ \iota \circ g^{-1}$ avec n'importe quel $g \in \xi$. Le reste des vérifications suit sans imagination. ■

4.3. **Combinaison de G-pavages.** Soient $\mathcal{P}_i = (K_i, \mathcal{U}_i, \phi^{\mathcal{U}_i}, \mu_i)$, $i = 1, 2$ deux G-pavages. On construit *le raffinement* $(K, \mathcal{U}, \phi^{\mathcal{U}}, \mu)$ *de* $\mathcal{P}_1$ *induit par* $\mathcal{P}_2$ en posant

$$K = K_1 \cup \left(\cup_{U \in \mathcal{U}_1} \phi^U(K_2)\right) ,$$

$$\mathcal{U} = \{\phi^U(V),\ U \in \mathcal{U}_1, V \in \mathcal{U}_2\} ,$$

$\phi^U = \phi^{U_1} \circ \phi^{U_2}$ si $U = \phi^{U_1}(U_2)$, et on définit μ comme suit:

- sur K_1, on pose $\mu = \mu_1$;
- si $U \in \mathcal{U}_1$ et $g \in G$, on pose sur $\phi^U(K_2)$

$$\mu(g) = \phi^{\mu_1(g)(U)} \circ \mu_2(g) \circ (\phi^U)^{-1} .$$

Fait 4.8. *Le raffinement d'un G-pavage $\mathcal{P}_1$ induit par un autre G-pavage $\mathcal{P}_2$ est un G-pavage.*

Démonstration. On vérifie que K est compact en utilisant que $\mathcal{U}_1$ est évanescente. Les propriétés (D2), (D3), (C1) et (C2) n'offrent pas de difficultés.

Vérifions (D4). Montrons d'abord que $\mu(g)$ est un homéomorphisme pour chaque $g \in G$. Pour cela, il suffit de considérer une suite $\{x_n\}_n$ dans $K \setminus K_1$ qui tend vers un point $x \in K_1$. Deux cas se dégagent : ou bien une infinité de termes sont dans une même composante $U \in \mathcal{U}_1$ et on conclut avec la continuité de $\mu_2(g)$; ou bien ils sont tous dans des composantes différentes, et on conclut à l'aide de l'évanescence de $\mathcal{U}_1$. Par définition, $\mu(g)$ est bijectif, donc un homéomorphisme. On vérifie ensuite que μ est un morphisme.

Passons à (C3): soit $g \in G$ et prenons $U \in \mathcal{U}_1$, $V \in \mathcal{U}_2$ et $W = \phi^U(V)$. On a

$$\mu(g)(W) = \phi^{\mu_1(g)(U)} \circ \mu_2(g) \circ (\phi^U)^{-1}(W) = \phi^{\mu_1(g)(U)} \circ \mu_2(g)(V)$$

donc $\phi^{\mu(g)(W)} = \phi^{\mu_1(g)(U)} \circ \phi^{\mu_2(g)(V)}$; par suite, sur $\mathbb{S}^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu(g) \circ \phi^W &= \phi^{\mu_1(g)(U)} \circ \mu_2(g) \circ (\phi^U)^{-1} \circ \phi^U \circ \phi^V \\
&= \phi^{\mu_1(g)(U)} \circ \phi^{\mu_2(g)(V)} \circ (\phi^{\mu_2(g)(V)})^{-1} \circ \mu_2(g) \circ \phi^V \\
&= \phi^{\mu(g)(W)} \circ \mu_2(g) \\
&= \phi^{\mu(g)(W)} \circ \mu(g)
\end{aligned}$$

en utilisant (C3) pour μ_2 et en remarquant que $\mu = \mu_2$ sur $\mathbb{S}^2$. ■

Proposition 4.9. *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux G-pavages et considérons le raffinement $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_1$ induit par $\mathcal{P}_2$, alors*

(1) *si* $W = \phi^U(V)$, $U \in \mathcal{U}_1$ *et* $V \in \mathcal{U}_2$, *alors*
$$\mathrm{stab}_\mu(W) = \mathrm{stab}_{\mu_1}(U) \cap \mathrm{stab}_{\mu_2}(V)\,;$$
(2) *si* $\mu_1(G)$ *et* $\mu_2(G)$ *opèrent librement sur* $\mathbb{B} \cap K_1$ *et* $\mathbb{B} \cap K_2$, *alors* $\mu(G)$ *opère aussi librement sur* $\mathbb{B} \cap K$;
(3) *si les groupes* $\mu_1(G)$ *et* $\mu_2(G)$ *sont de convergence, alors* $\mu(G)$ *aussi.*

Démonstration. On ne traite que (3). Soit (g_n) une suite d'éléments distincts; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer l'existence de $\{a, b\}$ sur $\mathbb{S}^2$ tels que $(g_n)_n$ tend uniformément sur les compacts de $\mathbb{S}^2 \setminus \{b\}$ vers $\{a\}$. Du coup, on a aussi la convergence uniforme de $(\mu_j(g_n))_n$ sur les compacts de $K_j \setminus \{b\}$ vers $\{a\}$, $j = 1, 2$, puisque les actions sont de convergence et coïncident avec celle de G sur $\mathbb{S}^2$.

Il nous suffit de montrer que $(\mu(g_n))_n$ tend uniformément sur les compacts de $K \setminus \{b\}$ vers $\{a\}$. Montrons d'abord la convergence simple: il suffit de considérer $U \in \mathcal{U}_1$ et $x \in \phi^U(K_2)$, de sorte que
$$\mu(g_n)(x) = \phi^{\mu_1(g_n)(U)} \circ \mu_2(g_n) \circ (\phi^U)^{-1}(x)\,.$$
Si $\{\mu_1(g_n)(U)\}_n$ est infini alors le diamètre tend vers 0 par (C1) et on aura convergence vers $\{a\}$ en considérant $y \in \partial U \setminus \{b\}$. Sinon, on peut supposer que $\mu_1(g_n)(U) = V$ est fixe, de sorte que $\mu(g_n)(x) = \phi^V \circ \mu_2(g_n) \circ (\phi^U)^{-1}(x)$; or $(\phi^U)^{-1}(x) \neq b$ donc $\lim \mu(g_n)(x) = \phi^V(a) = a$ par (C2).

Supposons maintenant que la convergence n'est pas uniforme sur les compacts de $K \setminus \{b\}$. On peut alors trouver $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x_n)_n$ qui tend vers un point $x \neq b$ tels que $d(\mu(g_n)(x_n), a) \geq \varepsilon_0$. On peut supposer que $x_n \notin K_1$; pour chaque n, on note $U_n \in \mathcal{U}_1$ la composante qui contient x_n. Posons $L_k = \overline{\cup_{n\geq k}\partial U_n}$ et $L = \cap L_k$, des compacts de K_1. On a $x \in L$ et, pour tous k et $n \geq k$,
$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \leq d(a, \mu(g_n)(x_n)) &\leq d(a, \mu(g_n)(x)) + d(\mu(g_n)(x), \mu(g_n)(x_n))\\ &\leq d(a, \mu(g_n)(x)) + \mathrm{diam}\ \mu_1(g_n)(L_k)\end{aligned}$$
ce qui implique $b \in L$. De plus,
$$0 < d(b, x) \leq \mathrm{diam}\ L_k \leq 2 \sup_{n\geq k}(d(x, x_n) + \mathrm{diam}\ U_n)$$
donc on peut supposer qu'il existe $U \in \mathcal{U}_1$ tel que $U_n = U$ pour tout n d'après (C1). De même,
$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \leq d(a, \mu(g_n)(x_n)) &\leq d(a, \mu_n(g_n)(x)) + d(\mu(g_n)(x), \mu(g_n)(x_n))\\ &\leq d(a, \mu(g_n)(x)) + \mathrm{diam}\ \mu_1(g_n)(U)\end{aligned}$$
donc on peut supposer qu'il existe $V \in \mathcal{U}_1$ tel que $\mu_1(g_n)(U) = V$ pour tout n par (C1).

Du coup, $\mu(g_n)(x_n) = \phi^V \circ \mu_2(g_n) \circ (\phi^U)^{-1}(x_n)$; comme $(\phi^U)^{-1}(x) \neq (\phi^U)^{-1}(b) = b$, la suite $\{\mu_2(g_n) \circ (\phi^U)^{-1}(x_n)\}_n$ tend vers a et donc $\{\mu(g_n)(x_n)\}_n$ tend vers $\phi^V(a) = a$: contradiction.■

4.4. **Construction d'une variété hyperbolique.** Soit G un groupe hyperbolique cubulé de bord S^2. D'après la proposition 3.2 et le théorème 4.1, on peut supposer que G est sans torsion, opère spécialement sur un complexe cubique CAT(0) X tel que le stabilisateur de chaque hyperplan est fuchsien cocompact et malnormal et que son action à l'infini préserve l'orientation.

Soit $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ un ensemble minimal d'hyperplans représentant les orbites des hyperplans de X et posons $H_j = \mathrm{stab}_G(Y_j)$. La proposition 4.4 nous fournit des G-pavages $\mathcal{P}_{H_j} = (L_j, \mathcal{V}_j, \phi^{\mathcal{V}_j}, \nu_j)$ associés à H_j, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$.

On construit des G-pavages $(\mathcal{P}_j)_{1\le j\le n}$ par récurrence où $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_{H_1}$ et, pour $j\ge 2$, $\mathcal{P}_j$ est le raffinement de $\mathcal{P}_{j-1}$ induit par $\mathcal{P}_{H_j}$. Soit maintenant $\mathcal{P}=(\overline{\mathbb{B}},\emptyset,\emptyset,\mu)$ le raffinement de $\mathcal{P}_n$ induit par $(\overline{\mathbb{B}},\emptyset,\emptyset,\mu_{rad})$.

D'après la proposition 4.9, $\mu_j(G)$ est un groupe de convergence sur K_j, libre sur $\mathbb{B}\cap K_j$ où $j\in\{1,\dots,n\}$ et $\mathcal{P}_j=(K_j,\mathcal{U}_j,\phi^{\mathcal{U}_j},\mu_j)$.

Fait 4.10. *Soient $j\in\{1,\dots,n\}$ et $U\in\mathcal{U}_j$ de sorte que $U=\phi^{U_1}\circ\ldots\circ\phi^{U}(\mathbb{B})$, $U_k\in\mathcal{V}_k$, et posons $H=\mathrm{stab}_\mu(U)$. Alors H est quasiconvexe dans G et $\Lambda_H=\mathbb{S}^2\cap(\cap_{1\le k\le j}\partial U_k)$. De plus, H est trivial si et seulement si U est relativement compact dans $\mathbb{B}$.*

Nous utiliserons le fait que si H,K sont des sous-groupes quasiconvexes d'un groupe hyperbolique, alors $H\cap K$ est quasiconvexe et $\Lambda_{H\cap K}=\Lambda_H\cap\Lambda_K$, voir p.ex. [GMRS].

Démonstration. On a $\mathrm{stab}_\mu(U)=\mathrm{stab}_{\mu_j}(U)=\cap_{1\le k\le j}\mathrm{stab}_{\nu_k}(U_k)$ par la proposition 4.9. Or, d'après la remarque 4.7, il existe des sous-complexes convexes Z_k tels que $\mathrm{stab}_{\nu_k}(U_k)=\mathrm{stab}(Z_k)=A_k$ et $\Lambda_{A_k}=\partial U_k$, donc $H=\cap\,\mathrm{stab}(Z_k)=\mathrm{stab}(\cap Z_k)$. Comme $\Lambda_{A_k}=\partial U_k\cap\mathbb{S}^2$, on obtient $\Lambda_H=\mathbb{S}^2\cap(\cap_{1\le k\le j}\partial U_k)$.

Si U est relativement compact dans $\mathbb{B}$, alors il est séparé de $\mathbb{S}^2$ par des plans $\mu(g_k)(P_{H_k})$, donc $\cap Z_k$ est relativement compact dans X et du coup $H=\{e\}$. Réciproquement, si $H=\{e\}$, alors $\cap Z_k\cap\partial X=\emptyset$, donc U est séparé de tout point de $\mathbb{S}^2$ par un élément $g_k(P_{H_k})$, ce qui implique U relativement compact. ■

Soient $U\in\mathcal{U}_n$ et $H=\mathrm{stab}_\mu(U)$; alors U est relativement compact car $\partial U\cap\mathbb{S}^2$ contient au moins deux points si non vide. Du coup, ces points sont séparés par un Λ_ξ, $\xi\in\cup_{j<n}G/H_j$. Donc l'un des points n'est pas dans ∂U, et H est trivial. Ceci implique que $\mu(G)$ est libre sur $\mathcal{U}$, donc un groupe de convergence sur $\overline{\mathbb{B}}$, libre sur $\mathbb{B}$.

Du coup $M=\mathbb{B}/\mu(G)$ est une variété de groupe fondamental isomorphe à G car $\mathbb{B}$ est simplement connexe. La surface $S_M=P_{H_1}/H_1$ est proprement plongée et incompressible et M est irréductible car G a un seul bout.

Pour conclure, il suffit de montrer que M est compacte, car alors, on pourra appliquer le théorème d'uniformisation de Thurston, mettant un terme à la démonstration du théorème. Nous allons utiliser le corollaire de la proposition 3.1 suivant (démontré plus bas):

Lemme 4.11. *Soient G un groupe de convergence de S^2, uniforme sur Λ_G, et $\mathcal{P}$ une collection évanescente et G-invariante de compacts non triviaux de S^2. Alors il existe une partition $\mathcal{P}=\mathcal{P}'\cup\mathcal{P}''$ et une constante $\delta>0$ telles que $\mathcal{P}'/G$ est fini et, pour tout $K'\in\mathcal{P}''$, il existe $g\in G$ tel que $d(g(K),\Lambda_G)\ge\delta$.*

Nous allons montrer par récurrence sur les raffinements successifs de $\mathcal{P}_1$ que, pour chaque $j\in\{1,\dots,n\}$, il existe un compact $C_j\subset\mathbb{B}$ et une partition G-invariante $\mathcal{U}_j=\mathcal{U}_j'\cup\mathcal{U}_j''$ tels que $\mathcal{U}_j'/G$ est fini et, pour tout $U\in\mathcal{U}_j''$, il existe $g\in G$ tel que $g(U)\subset C_j$. Pour $j=1$, on prend $C_1=\emptyset$ et $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_1'$ puisque l'on a un scindement au-dessus de H_1, voir la remarque 4.7. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang j. Prenons $U\in\mathcal{U}_j'$ et posons $H=\mathrm{stab}_\mu(U)$. La μ-action de H sur ∂U est conjuguée par ϕ^U à l'action de H sur $\mathbb{S}^2$. D'autre part, pour chaque $V\in\mathcal{U}_{j+1}$ contenu dans U, on a $(\phi^U)^{-1}(V)\in\mathcal{V}_{j+1}$, et $\mathcal{V}_{j+1}$ est évanescente. D'après le lemme 4.11, H est quasiconvexe et on peut trouver une partition $\mathcal{V}_{j+1}=\mathcal{V}_{j+1}'(U)\cup\mathcal{V}_{j+1}''(U)$ telle que $\mathcal{V}_{j+1}'(U)/H$ est fini et, pour chaque $V\in\mathcal{V}_{j+1}''(U)$, on trouve $h_V\in H$ tel que $d(h_V(\partial V),\Lambda_H)\ge\delta(U)>0$. Posons $C_U'=\cup_{V\in\mathcal{V}_j(U)''}\overline{\mu(h_V)(V)}$; par (C1), c'est un compact disjoint de Λ_H, donc $C_U=\phi^U(C_U')$ est compact dans $\mathbb{B}$.

Posons $\mathcal{U}'_{j+1} = \cup_{U \in \mathcal{U}'_j} \phi^U \circ \mu(G)(\mathcal{V}'_j(U))$, qui est constitué par un nombre fini de G-orbites. Posons aussi $C_{j+1} = C_j \cup (\cup_{U \in \in \mathcal{U}'_j} C_U)$, compact dans $\mathbb{B}$. Si $V \in \mathcal{U}_{j+1} \setminus \mathcal{U}'_{j+1}$, alors on peut trouver $g \in G$ tel que $\mu(g)(V) \in C_j$ ou tel que $\mu(g)(V) \subset U$, $U \in \mathcal{U}'_j$. Dans ce cas, on trouve $h_V \in \mathrm{stab}_\mu(U)$ tel que $\mu(h_V g)(U) \in C_U$. Ceci établit l'hypothèse de récurrence au rang $(j+1)$.

Comme, pour chaque $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, U est relativement compact, on en déduit que M est compacte.

Démonstration. (Lemme 4.11) D'après la proposition 3.1, il existe un compact $L \subset \Omega_G$ tel que, pour tout $x \in \Omega_G$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \in L$. On note $\mathcal{P}' = \{K \in \mathcal{P}, K \cap \Lambda_G \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$. Comme $\mathcal{P}''$ est évanescente la réunion de L et des compacts de $\mathcal{P}''$ qui l'intersecte foment un compact $L' \subset \Omega_G$ donc $\mathrm{dist}(L', \Lambda_G) > 0$.

Rappelons la notation $\mathcal{P}_\delta = \{K \in \mathcal{P},\ \mathrm{diam}\ K \geq \delta\}$, et prenons $0 < m < \mathrm{dist}(L', \Lambda_G)$ de sorte que deux points de Λ_G peuvent être m-séparés par G. Soit $K \in \mathcal{P}$; si K contient deux points de Λ_G, alors son orbite intersecte $\mathcal{P}_m$; sinon, il existe $g \in G$ tel que $g(K) \cap L \neq \emptyset$ de sorte que $g(K) \in \mathcal{P}_m$ si $K \in \mathcal{P}'$; par conséquent $\mathcal{P}' \subset G \cdot \mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}'/G$ est fini; dans le cas contraire ($K \in \mathcal{P}''$), on obtient $g(K) \subset L'$. ■

Si on ne sait pas que M est compacte, on peut procéder comme Markovic, en utilisant la topologie de dimension trois, pour se ramener à une variété irréductible compacte hakenienne de groupe fondamental G de la manière suivante.

Supposons donc M non compacte. Comme G est de type fini, le théorème du cœur compact de Scott nous produit une sous-variété compacte $M_c \subset M$ dont l'injection fournit un isomorphisme de groupes fondamentaux [Sco]. On comble chaque composante de ∂M_c homéomorphe à S^2 par une boule standard afin d'obtenir une nouvelle variété compacte N de groupe fondamental G. Elle est irréductible car G n'a qu'un bout. On a *a priori* deux cas possibles. Si N a du bord, alors N est hakenienne et le théorème d'uniformisation de Thurston montre que N est hyperbolique et quasi-isométrique à G. Mais cela contredirait que N ait du bord. Donc N est sans bord. Il reste à vérifier que N est hakenienne. Si $S_M \subset M_c$, alors c'est bon. Sinon, en supposant S_M et ∂M_c en position générale, $S_M \setminus M_c$ n'a pas de topologie puisque l'injection $M_c \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux et S_M est incompressible dans M, donc $S_M \setminus M_c$ est une réunion disjointe de disques que l'on peut isotoper dans M_c afin d'obtenir une surface incompressible dans $M_c \subset N$. Du coup, N est compacte, irréductible, sans bord, et hakenienne. Le théorème d'uniformisation de Thurston permet de conclure.

Bibliographie

[Ago] Ian Agol. The virtual Haken conjecture. *Documenta Math.* **18**(2013), 1045–1087. With an appendix by Ian Agol, Daniel Groves, Jason Manning.

[AS] Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann surfaces.* Princeton Mathematical Series, No. 26. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[BW] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise. A boundary criterion for cubulation. *Amer. J. Math.* **134**(2012), 843–859.

[Bow1] Brian H. Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.* **11**(1998), 643–667.

[Bow2] Brian H. Bowditch. Convergence groups and configuration spaces. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 23–54. de Gruyter, Berlin, 1999.

[CC] James W. Cannon and Daryl Cooper. A characterization of cocompact hyperbolic and finite-volume hyperbolic groups in dimension three. *Trans. Amer. Math. Soc.* **330**(1992), 419–431.

[CJ] Andrew Casson and Douglas Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.* **118**(1994), 441–456.

[Dun] Martin J. Dunwoody. The accessibility of finitely presented groups. *Invent. Math.* **81**(1985), 449–457.

[Gab] David Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Ann. of Math. (2)* **136**(1992), 447–510.

[GMRS] Rita Gitik, Mahan Mitra, Eliyahu Rips, and Michah Sageev. Widths of subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **350**(1998), 321–329.

[Hag] Frédéric Haglund. Finite index subgroups of graph products. *Geom. Dedicata* **135**(2008), 167–209.

[Haï] Peter Haïssinsky. Hyperbolic groups with planar boundaries. Prépublication, 2013.

[HaW] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise. Special cube complexes. *Geom. Funct. Anal.* **17**(2008), 1551–1620.

[HrW] G. Christopher Hruska and Daniel T. Wise. Packing subgroups in relatively hyperbolic groups. *Geom. Topol.* **13**(2009), 1945–1988.

[Kul] Ravi S. Kulkarni. A finiteness theorem for planar discontinuous groups. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **55**(1990), 37–43.

[Mar] Vladimir Markovic. Criterion for Cannon's conjecture. *Geom. Funct. Anal.* **23**(2013), 1035–1061.

[MS] Gaven J. Martin and Richard K. Skora. Group actions of the 2-sphere. *Amer. J. Math.* **111**(1989), 387–402.

[MT] Gaven J. Martin and Pekka Tukia. Convergence and Möbius groups. In *Holomorphic functions and moduli, Vol. II (Berkeley, CA, 1986)*, volume 11 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 113–140. Springer, New York, 1988.

[Mas] Bernard Maskit. A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)* **81**(1965), 341–355.

[Sco] G. Peter Scott. Compact submanifolds of 3-manifolds. *J. London Math. Soc. (2)* **7**(1973), 246–250.

[SW] Peter Scott and Terry Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.

[Sul] Dennis Sullivan. Discrete conformal groups and measurable dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6**(1982), 57–73.

[Swa] Gadde A. Swarup. On the cut point conjecture. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **2**(1996), 98–100 (electronic).

[Thu] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6**(1982), 357–381.

[Tuk] Pekka Tukia. Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups. *J. Reine Angew. Math.* **391**(1988), 1–54.

[Why1] Gordon Thomas Whyburn. Topological characterization of the Sierpiński curve. *Fund. Math.* **45**(1958), 320–324.

[Why2] Gordon Thomas Whyburn. *Analytic topology.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXVIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1963.

[Wis] Daniel T. Wise. The structure of groups with a quasiconvex hierarchy. preprint, Oct. 2012.