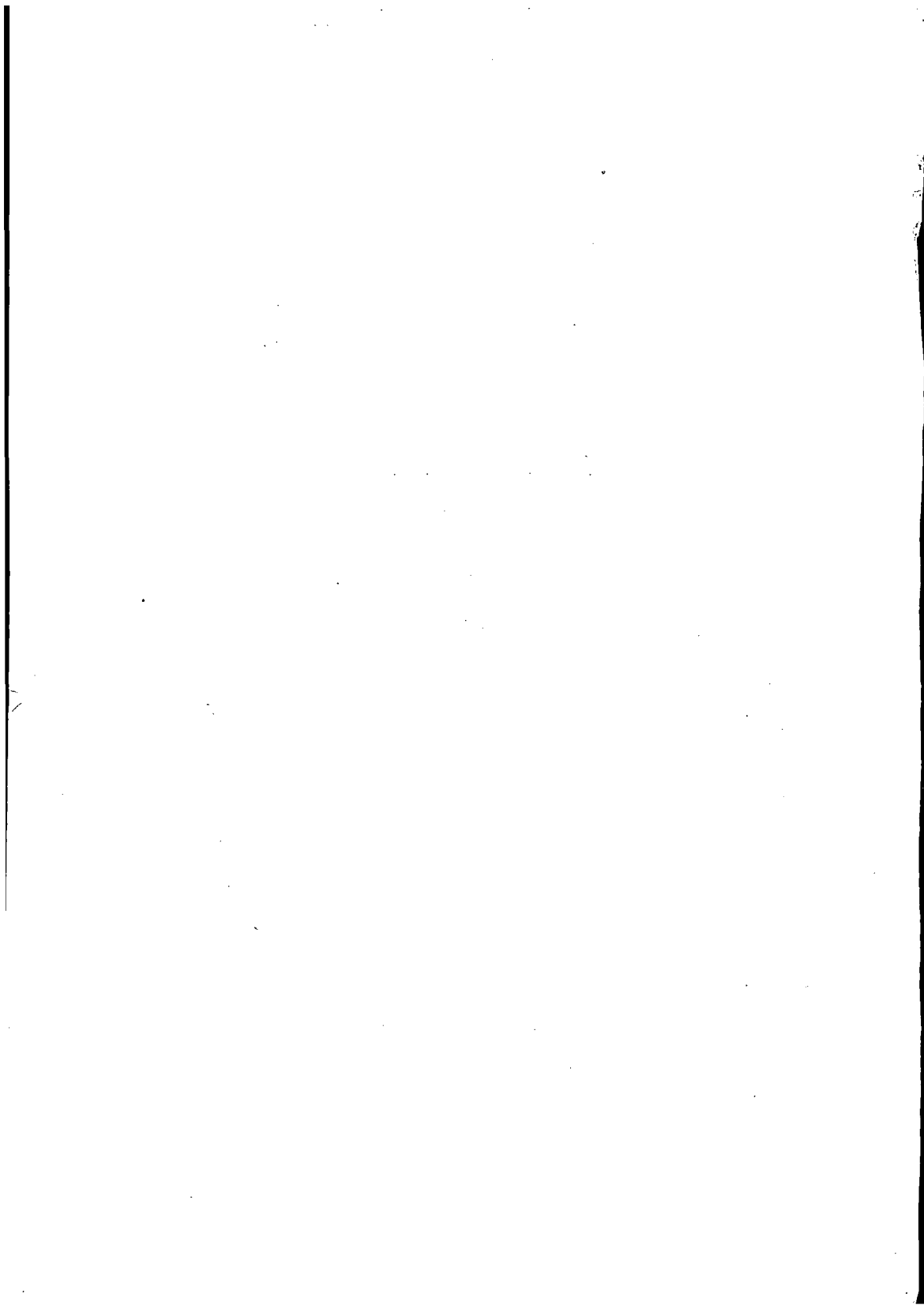


L'ARITHMETIQUE

ARITHMETIC



INTRODUCTION

§ 1

Stevin's *Arithmétique* was published in 1585, the year in which also *The Tenth* appeared. No Dutch original was published, as in the case of *The Tenth*; the *Arithmétique* was only presented in French. Bound together with the *Arithmétique* was another book, entitled *Pratique d'Arithmétique*; it mainly dealt with commercial applications of the theory unfolded in the *Arithmétique*. These applications included *The Tenth* and the *Tables of Interest*, which were thus published a second time, now in a French translation. Added to the *Arithmétique* was Stevin's own and very free version of the first four books of Diophantus, at that time available in a Latin translation by Xylander¹). Moreover, added to the *Pratique* was a treatise on incommensurable quantities, with Stevin's explanation of the tenth book of Euclid's *Elements*²). When after Stevin's death Albert Girard republished the *Arithmétique*, he not only added a few remarks of his own (clearly indicated), but also added Stevin's *Appendice algébrique*, a short essay first published in 1594. At the same time Girard completed Stevin's work on Diophantus by adding his own version of the fifth and sixth books³).

The *Arithmétique* is thus a collection of several books, all loosely related to each other and centring around the main part, which deals with the arithmetic of integers, fractions, and irrationals, along with what we call the algebra of polynomials and the theory of equations. Apart from *The Tenth* and the *Tables of Interest*, published separately, the part dealing with equations is probably to us the most interesting section of the book. It gives us a late sixteenth-century approach to the theory of algebraic equations, including those of the fourth degree — called, in Stevin's words: "les équations de cinc quantitez".

§ 2

Stevin's *Arithmétique* is divided into two books, one on *Definitions*, the other on *Operations*. In the *Definitions* he explains his notation and his classification of numbers in arithmetical, geometrical, and algebraic ones. What strikes us immediately when we begin to read the book is Stevin's emphatic plea to consider

¹) *Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticarum Libri sex . . . A Guil. Xylandro Augusto no incredibili labore latine redditum*. (Basle, 1575). — Xylander's German name was Wilhelm Holtzman; he was a professor at Heidelberg. Rafael Bombelli, a professor at Bologna, had already published 143 problems of Diophantus in the third book of *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica* (Bologna, 1572; there is also an edition of 1579).

²) Stevin knew Euclid's *Elements* primarily from the Latin translation by Clavius: *Euclidis Elementorum libri XV, . . . accessit XVI. De solidorum regularium comparatione . . . Auctore Christophoro Clavio* (Rome, 1574, 2 vols, several later editions) — Clavius (1537–1612) taught at the Jesuit College in Rome and was an advisor to Pope Gregory XIII on the calendar reform of 1582.

³) H. Bosmans, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles* 35 (1910–11), *l.c.* (35) indicates precisely the relation between Girard's editions and the original versions edited or supervised by Stevin.

one a number: "Que l'unité est nombre". We here have to do with an opposition to a point of view which had come down from the Greeks and which finds expression in Euclid's *Elements* VII, def. 2: "Number is a multitude made up of units ($\mu\upsilon\nu\acute{\alpha}\delta\epsilon\varsigma$)". The unit itself is not a number, since the origin or principle ($\acute{\alpha}\rho\chi\acute{\eta}$) of a thing is not that thing itself. Similarly, a point is not a line, though it is its origin. This analogy between the point and the arithmetical unit was stressed in particular by the Pythagoreans, who taught that a unit is a point without position and a point is a unit having position, and whose influence was felt by Euclid. It appears that Stevin disagrees with this analogy. Two units, he points out, form a number different from the unit but of the same nature, but two points only form a point. If we wish to compare a point with an arithmetical concept, we had better take zero: a multitude of zeros is still zero. We may call the point the "beginning" of the line (here we find the concept $\acute{\alpha}\rho\chi\acute{\eta}$ again), and zero the "beginning" of number, "le vrai et naturel commencement". This idea is found again in *The Tenth*, in the second definition, where the "beginning" is indicated by \odot . Zero, therefore, is not a number in Stevin's mode of thinking. He uses the symbol zero freely, but does not accept zero as a root of an equation.

But though he may exclude zero as a number Stevin is quite convinced that the traditional number concept, as it had come down from the Greek through the early Renaissance and especially from Euclid, was too narrow. This number concept included natural numbers as well as rational and certain irrational ones, the latter usually conceived as radicals. Stevin now draws the conclusion that number is a continuous quantity "as continuous water corresponds to a continuous humidity, so does a continuous magnitude correspond to a continuous number". There are, he states, no "absurd, irrational, irregular, inexplicable or surd numbers". What he means is that one number, *qua* number, is not different from any other, 2 is the square root of 4 just as $\sqrt{2}$ is the square root of 2. We can only speak of incommensurability if we consider the ratio of two numbers, $6\sqrt{2}$ is rational in terms of $\sqrt{2}$, and irrational in terms of 2. Stevin is willing to include negative numbers in his number concept; though with some caution: they still are somewhat of a novelty to him. However, he draws the line at complex numbers, despite the fact that his older contemporary Rafael Bombelli had shown no such scruples, and had developed an algebra ¹⁾ in which our $5 + 7\sqrt{-1}$ is written as 5 p. | 0 m. 49 | and $5 - 7\sqrt{-1}$ as 5 m. | 0 m. 49 |. Here p. stand for *più*, m. for *meno*, and the new radicals are called *più di meno* when they are added, and *meno di meno* when they are subtracted (Stevin's "plus de moins" and "moins de moins" in Probl. 69). Stevin does not see the use of these novel numbers: "There are enough legitimate things", he writes, "to work on without need to get busy on incertain matter" ⁴⁾).

This extension of the number concept is typical of sixteenth-century mathematics; it is due to the enormous amount of numerical work which was done and to the general reluctance to let the Greeks dominate all intellectual endeavour. We here witness a gradual process rather than a conscious break, and thus we find Stevin making concessions to the Ancients which look quite antiquated to us.

⁴⁾ *Arithmétique*, p. 309

An example of this is formed by the part of the *Definitions* which deals with "geometrical" numbers, numbers such as squares, cubes, roots, etc., still traditionally connected with geometrical figures (our terminology: "square", "cube", still preserves this ancient trait). However, Stevin breaks with the old Coss notation and introduces the new exponential notation of Bombelli to denote the powers of a given number, so that he writes

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1}2, & \textcircled{2}4, & \textcircled{3}8, & \textcircled{4}16 \dots\dots \\ \textcircled{1}3, & \textcircled{2}9, & \textcircled{3}27, & \textcircled{4}81, \dots\dots; \end{array}$$

in our notation: if $a = 2$, then $a^2 = 4$, $a^3 = 8$, $a^4 = 16$,
if $a = 3$, then $a^2 = 9$, $a^3 = 27$, $a^4 = 81$,

Here \textcircled{i} stands for the i^{th} power of a given number. Stevin is perfectly willing to take i fractional, $\textcircled{\frac{1}{2}}$ means a square root, $\textcircled{\frac{1}{3}}$ the root of a cube; thus $\textcircled{\frac{1}{3}}$ means $\sqrt[3]{}$ (sometimes he also writes $\sqrt{\textcircled{3}}$ instead of $\textcircled{\frac{1}{3}}$). Since $\textcircled{1}$ is the expression of the length of a line segment, $\textcircled{2}$ stands for a square, $\textcircled{3}$ for a cube, $\textcircled{\frac{1}{2}}$ for a segment which is the mean proportional between the unit segment e and $\textcircled{1}$:

$$\text{Similarly: } e : \textcircled{\frac{1}{2}} = \textcircled{\frac{1}{2}} : 1. \\ e : \textcircled{\frac{1}{3}} = \textcircled{\frac{1}{3}} : \textcircled{\frac{1}{3}} = \textcircled{\frac{1}{3}} : 1.$$

Since space has three dimensions, the geometrical expression of $\textcircled{4}$ also calls for an artifice, and Stevin again uses a proportion

$$\textcircled{4} : \textcircled{3} = \textcircled{2} : \textcircled{1},$$

which, by comparing $\textcircled{4}$ and the cube $\textcircled{3}$, expresses $\textcircled{4}$ as a rectangular block, having the square $\textcircled{2}$ for base, and a height such that the volume of the block is to that of the cube in the ratio of $\textcircled{4}$ to $\textcircled{3}$; here $\textcircled{2}$ and $\textcircled{1}$ are numbers. In the same way $\textcircled{5}$, $\textcircled{6}$, ... can be interpreted as solids.

This is a clumsy procedure. The way out towards spaces of higher dimensions only appeared in the nineteenth century at a level of mathematical understanding far different from that of Stevin's days. However, there was another way out, which was implicit in Stevin's work and was actually adopted by Descartes not long after Stevin's death. It consisted in applying the method used to interpret $\textcircled{\frac{1}{2}}$, also to $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, etc., and writing $e : \textcircled{1} = \textcircled{1} : \textcircled{2}$, $\textcircled{1} : \textcircled{2} = \textcircled{2} : \textcircled{3}$. In this way every power can be expressed in terms of the unit line segment, and we have arrived at the correspondence between numbers and line segments on which analytic geometry is based⁵⁾. We see in this example how great were the obstacles that had to be overcome in order to reach such a simple thing — simple to us — as analytic geometry.

§. 3

The second book of the *Arithmétique* deals with *Operations* and consists of three parts. The first two parts do not contain much of particular interest to us;

⁵⁾ E. J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, p. 72.

they expound the rules of ordinary arithmetic with integers, fractions, and radicals, and teach proportions and the "regula falsi". The subject matter does not differ appreciably from that of our present textbooks, e.g. the multiplication and division of fractions such as $(\sqrt{2} + \sqrt{6}) / (\sqrt{2} + \sqrt{4})$, and the reduction of $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$ to $\sqrt{3} + 2$. It is a little more elaborate than our present treatment, because Stevin insists on proving some of his results with the aid of geometrical figures in the Euclidean tradition, about which more is to be said below. He has our signs + and —; the sign of equality, if he needs it, is \therefore . In another place he uses M for multiplication, D for division.

The third section of this book *On Operations* contains the algebraic part, the theory of polynomials, and that of equations. Here we meet with "algebraic" numbers. To define them, Stevin again introduces the exponential notation ①, but this time to indicate the i^{th} power of an indefinite quantity, i.e. what we usually denote by x^i . By a combination of these symbols we obtain an "algebraic" number, for instance

$$\textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{0},$$

which amounts to what we now write as $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Here the symbol ① therefore stands not only for x^i , but for any positive multiple of x^i ; the + sign is omitted, if not required. When the coefficient is given, it has to be indicated: $5\textcircled{4}$ stands for $5x^4$. In this case the sign for the summation or subtraction appears ⁶⁾:

$$4 \textcircled{1} + 12 \text{ means } 4x + 12.$$

Stevin then teaches the principal operations with polynomials (multinomials, as he calls them), very much following the methods he used for expressions containing radicals. Here we find, for instance, the division of polynomials, such as

$$\frac{4x^7 - 2x^6 - 6x^5 + 9x^4}{2x^4 + 3x^3} = 2x^3 - 4x^2 + 3x. \text{ This is followed by an original}$$

idea of Stevin, the method for finding the greatest common divisor (G.C.D.) of two polynomials. He states that he was led to his discovery by some remarks of

⁶⁾ We have to bear in mind that Stevin uses Bombelli's exponential notation in four different ways:

a) In *The Tenth*, to indicate decimal units;
 b) in his *Trigonometry*, to indicate sexagesimal units;
 c) in *L'Arithmétique*, to indicate powers of a given positive number, in practice 2 or 3, hence to indicate our a^p ; a being a constant;

d) also in *L'Arithmétique*, to indicate powers of an indefinite quantity, hence our x^p , and under certain circumstances even a multiple of x^p , hence our ax^p . But when the a is specifically given, he writes it, e.g. $5\textcircled{4}$ means $5x^4$. — On Bombelli's notation, see our introduction to *The Tenth*; also: H. Wieleitner, *Zu Bombelli's Bezeichnung der Unbekannten und ihrer Potenzen*, Archivio di Storia delle Scienze 7 (1926), pp. 29–33; E. Bortolotti, *Sulla rappresentazione simbolica delle incognita e delle potenze di essa introdotte dal Bombelli*, ib. 8 (1927), pp. 49–63.

Pedro Nunes (1502—1578), a Portuguese mathematician, whose latinized name of Nonius is preserved in the measuring instrument better called a vernier. Nunes, in his *Libro de algebra*⁷⁾ of 1567, had derived some methods for the factorization of certain polynomials⁸⁾. This brought Stevin in search of a general method to reduce rational algebraic fractions to their simplest form, to a discovery: the generalization of the Euclidean algorithm for finding the G.C.D. of two positive integers to two polynomials⁹⁾. This is the way we still find the G.C.D. of two such forms¹⁰⁾.

The remaining part of *L'Arithmétique* is devoted to the theory of equations. Before we discuss it, we have to report on one other aspect of Stevin's notation. Though it is true that Bombelli's exponential notation ① is an advantage over previous notations which denoted every power of x by a symbol of its own, there is a difficulty when two or more indefinite quantities have to make their appearance. We now meet this difficulty by introducing other letters, y , z , etc. Stevin cannot do this, and so, where we write y , y^2 , he writes *sec* ①, *sec* ②,; where we continue with z , z^2 ,, he writes *ter* ①, *ter* ②,, The result is that the term which in our notation is $\frac{5x^2 z^3}{y}$, appears in *L'Arithmétique* as 5② *D. sec* ① *M ter* ③. We can now appreciate better the advantages of Descartes' x , y , z , notation.

§ 4

The chief theoretical achievement of sixteenth-century mathematics is the development of algebra, and this development was primarily due to the advancement in the theory of equations. During this century the solution of the third and fourth-degree equations was added to the classical solution of the quadratic equation, and methods were found to deal with the numerical solution of equations of higher degrees. The algebraists — or "cossists", as they were called — created an algebraic symbolism and improved the notations step by step. They abandoned the exclusive concentration on positive numbers, and admitted negative and even imaginary numbers. On the one hand these men showed increased skill in numerical work with large integers, fractions, and irrationals, on the other hand they reached greater abstractions in their treatment of equations.

The theory of equations reached the mathematicians of the Renaissance period

⁷⁾ P. Nunes, *Libro de algebra en arithmetica y geometria* (Antwerp, 1567). This was a translation by the author into Spanish from the original Portuguese. See H. Bosmans, *Sur le "Libro de algebra" de Pedro Nuñez*, *Bibl. mathematica* (3) 8 (1908), pp. 154-169; *id.*, *L'Algèbre de Pedro Nuñez*, *Annaes de Acad. Polyt. do Porto* 3 (1908), 50 pp.

⁸⁾ See the account in Bosmans, *l.c.* (7) Bosmans points out that there is no reason to believe (as Stevin seems to suggest) that Nunes tried to find the G.C.D. of polynomials and failed.

⁹⁾ *Elements* VII, Prop. I, II. Euclid's proofs are geometrical, and make a discrimination between the cases that the G.C.D. is 1 and $\neq 1$; this is done because of the assumption that one is not a number.

¹⁰⁾ For a modern discussion, see H. Weber, *Lehrbuch der Algebra* I (Braunschweig, 1898), p. 37.

primarily in two ways¹¹⁾: through Euclid's *Elements*¹²⁾ and Al-Khwarizmi's *Algebra*¹³⁾. Both were available in Latin translations¹⁴⁾, though Al-Khwarizmi's book remained in manuscript. The two texts were not independent, since the Arabic writer showed the influence of the *Elements*. But whilst the *Elements* followed an abstract-geometrical pattern, the Arabic text contained numerical examples and used geometry only for illustration, or as a means of demonstration. Since Stevin's exposition is strongly influenced by both Greek and Arabic writers, some understanding of their methods is necessary for the understanding of the *Arithmétique*.

§ 5

Euclid's theory of what we call linear and quadratic equations has, at first sight, little in common with them. It is cast into the form of questions and de-

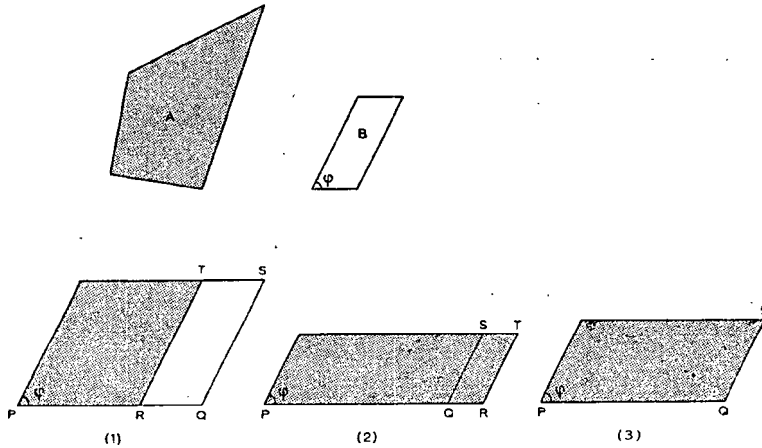


Fig. 1

¹¹⁾ For a general exposition, see J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* III (Berlin-Leipzig, 3e Aufl., 1937), 239 pp. An appendix contains samples of different notations, including some taken from Stevin's *L'Arithmétique* on pp. 222-223. A somewhat different treatment of quadratic equations is found in J. Tropfke, *Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausende*, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 43 (1934), pp. 90-107; 44 (1924), pp. 26-47, 95-119 (On Stevin, see p. 119). Comp. also D. E. Smith, *History of Mathematics* II (Boston, New York, etc., 1925, XII + 725 pp.), Ch. VI and M. Cantor, *Vorlesungen* I, II.

¹²⁾ *Euclidis opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge*, vol. VI (1896). See T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*; Oxford, 1921, 2 vols. XV + 446 pp., XI + 586 pp.; *id.*, *A Manual of Greek Mathematics*; Oxford, 1931, XVI + 552 pp.). There is no translation of the *Data* into any modern language.

¹³⁾ The *Algebra* of Al-Khwarizmi was only available in manuscript copies, either in Arabic or in Latin. In 1831 the Arabic text was published, together with an English translation: *The Algebra of Mohammed ben Musa, ed. and transl. by F. Rosen* (London, 1831). See also L. C. Karpinski, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwarizmi* (New York, 1915, 164 pp.).

¹⁴⁾ See e.g. the translation *l.c.*²⁾

monstrations concerning the so-called application of areas (*παράβολη τῶν χωρίων*) It is required to construct in a given angle a parallelogram, one side of which is to lie along a given segment PQ , while its area A is to satisfy certain conditions. The area A is given as that of a convex polygon, which can always be transformed into a triangle or parallelogram of given size and equal area. The simplest case is that of *Elements* Prop. I, 44, 45, where it is required to apply in a given angle to a given segment PQ as base a parallelogram of given area A . The construction is equivalent to the solution of the linear equation $ax \sin \varphi = A$, when a is the length of segment PQ .

We arrive at the equivalent of the quadratic equation when to PQ is to be applied a parallelogram equal to a parallelogram of a given area A and deficient, resp. exceeding by a parallelogram similar to a given parallelogram B (which, of course, has angle φ). This means (Fig. 1) that we have to find on PQ or its continuation a point R such that the parallelogram of area A on PR in case (1) falls short of parallelogram PS on PQ by the parallelogram RS similar to B ; in case (2) exceeds parallelogram PS by the parallelogram QT similar to B . In case (3), where PS is equal to A , we are back to Prop. I, 44, 45.

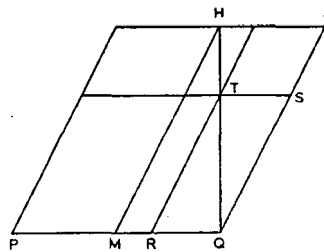


Fig. 2

Case (1) is solved in Prop. VI, 28 of the *Elements*. Bisect PQ at M (Fig. 2) and erect on MQ the parallelogram $MQIH$ similar to the given one B ; its area be λB . Construct at H a parallelogram HT along HI and HM with area equal to $\lambda B - A$, which requires $\lambda B > A$. The vertex T lies on diagonal HQ . Then parallelogram PT is the required parallelogram on PQ of area A . Indeed, since area $PT = \text{area } MS + \text{area } MT = \text{area } MS + \text{area } TI$, area $PT = \lambda B - (\lambda B - A) = A$.

To obtain the algebraic equivalent of this construction let PQ be a , $TR = x$ and $RQ = \mu x$ (μ given through parallelogram B). Then parallelogram PT has the area

$$x(a - \mu x) \sin \varphi = A, \quad \frac{a^2}{4\mu} \sin \varphi \geq A.$$

When we take $\varphi = 90^\circ$ (which does not impair the generality), we are led to the quadratic equation

$$\mu x^2 - ax + A = 0, \quad a^2 \geq 4\mu A, \quad \mu > 0, \quad a > 0.$$

For $RQ = \mu x$ we find

$$\mu x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \mu A}.$$

The case $\mu = 1$ corresponds to the application of an area deficient by a square, favorite with Stevin.

The root $\mu x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \mu A}$ is missing in Euclid. It is obtained by

placing the parallelogram of area $\lambda B - A$ at H on the continuation of QH . The new point R lies with respect to P as the old point R lies with respect to Q and thus offers no essentially new geometrical solution.

Case (2) is solved in Prop. VI, 29 of the *Elements*. The solution is very much like that of case (1), which the exception that now (Fig. 3) the parallelogram at H has the area $\lambda B + A$. We find for the corresponding quadratic equation $\mu x^2 + ax - A = 0$ ($\varphi = 90^\circ$), $a > 0$, $\mu > 0$.

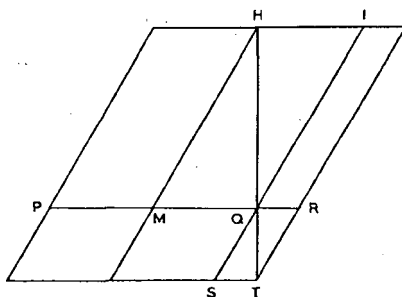


Fig. 3

For $RQ = \mu x$ we find $\mu x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \mu A}$.

The other solution makes no sense for Euclid, since it is negative. We can say that it corresponds to a new point R lying with respect to P as the old point R lies with respect to Q and offers no essentially new geometrical solution.

These two quadratic equations are therefore of the form I) $\mu x^2 - ax + b = 0$, or $\mu x^2 = ax - b$, II) $\mu x^2 + ax - b = 0$, or $\mu x^2 = -ax + b$ ($\mu, a, b > 0$). The first type has two positive solutions for $a^2 > 4\mu b$, of which Euclid mentions only one, the second type has one positive solution. There exists another type with one positive solution:

$$\text{III) } \mu x^2 - ax - b = 0, \mu x^2 = ax + b,$$

which does not appear in Euclid's *Elements*. However, Prop. 84 of another book by Euclid, the *Data*¹²⁾ also deals with an application of areas, and this proposition requires (in geometrical language) the construction of two unequal segments x and y of given difference $x - y = a$ ($x > y$), forming a parallelogram of given angle φ and given area A . Then $x - y = a$, $xy \sin \varphi = A$, or

$$x^2 \sin \varphi - ax \sin \varphi - A = 0,$$

the equation of type III). In this case $y = x - a$ satisfies an equation of type II). This is substantially also Euclid's solution, since he shows how Prop. 84 can be reduced to Prop. 59 of the *Data*, which is equivalent to *Elements* VI 29.

The *Elements* contain another approach to these problems, which we can interpret as follows. If one of the positive roots is p , then type I can be written, for $\mu = 1$, as follows:

$$b = p(a-p) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - p\right)^2 \text{ (or: } p(p-a) = \left(\frac{a}{2} - p\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

for $p > a$) and type II:

$$b = p(a + p) = p^2 + ap = \left(p + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

These identities are the (algebraic) content of two geometrical theorems, listed as Prop. 5, 6 in Book II of the *Elements*. (Prop. 5 states that if a segment a is divided into two parts a_1, a_2 , then the area of the rectangle with sides a_1, a_2 plus that of the square with side $\frac{a_1 - a_2}{2}$ is equal to that of the

square with side $\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a}{2}$; $a_1 a_2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$; take $a_2 = p$,

$a_1 = (a - p)$. These identities are demonstrated with the same figure used later in Prop. VI 28, 29. Euclid here confines himself to the rectangles, and since he only develops the theory of proportions in Book V, he does not use the concept of the application of areas; the coefficient of x^2 in the corresponding quadratic equations is $\mu = 1$. However, this formal relation to the theory of quadratic equations is the reason that many authors quote the Prop. II 5, 6 rather than those of Prop. VI 28, 29 as the basis of their geometrical theory of quadratic equations¹⁵).

Quadratic equations also appear, in some form or other, in the works of other Greek authors known to the mathematicians of the sixteenth century (Heron, Diophantus). The main line of development, however, starts from Euclid.

§ 6

The *Algebra* of Al-Khwarizmi (Bagdad, c. 825 A.D.)¹³ was so influential that the name "algebra" is derived from the Arabic title of his book. It attests to the influence of Euclid, but also represents a characteristic Oriental tradition, which can be traced to ancient Mesopotamian sources as far back as the second millennium B.C.¹⁶). The emphasis is here on numerical computation; geometrical demonstrations are incidental and lack the axiomatic precision of the Greeks, while homogeneity is not preserved. Euclid never adds areas to lengths, Al-Khwarizmi has no objection to this.

Al-Khwarizmi has no algebraic notation, he writes his problems and answers

¹⁵) For further accounts of what has been called the "geometrical algebra" of the Greeks see the books on Euclid by Heath *l.c.*¹²); H. G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum* (Kopenhagen, 1886); L. C. Karpinski, *l.c.*¹³), and E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, 2 vols (Groningen, 1929, 1930).

¹⁶) Description and source material in O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (Princeton, 1952, IX + 191 pp.).

out in full. He recognizes six types of equations, which the Renaissance authors often rendered as follows:

Latin	English	modern notation
1) census aequatur radicibus	square equal to roots	$x^2 = ax$
2) census aequatur numeris	square equal to numbers	$x^2 = a$
3) radices aequantur numeris	roots equal to numbers	$ax = b$
4) census et radices aequantur numeris	square and roots equal to numbers	$x^2 + ax = b$
5) census et numeri aequantur radicibus	square and numbers equal to roots	$x^2 + a = bx$
6) radices et numeri aequantur censui	roots and numbers equal to square	$ax + b = x^2$

The coefficients are all positive. The types 5), 4), 6) are the three types I, II, III of Euclid. Al-Khwarizmi illustrates each type by means of one typical example.

$$\text{I) } x^2 + 21 = 10x, \quad \text{II) } x^2 + 10x = 39, \quad \text{III) } x^2 = 3x + 4.$$

These examples became standard ones. L.C. Karpinski remarks that "the equation $x^2 + 10x = 39$ runs like a thread of gold through the algebras for several centuries"¹⁷). The solution is first obtained by using a certain recipe, one for each case:

$$\begin{aligned} \text{I) } x &= 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2 = 7 \text{ or } 3, \\ \text{II) } x &= \sqrt{25 + 39} - 3 = \sqrt{64} - 3 = 5, \\ \text{III) } x &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2} = \sqrt{6\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} = 4. \end{aligned}$$

In type I) Al-Khwarizmi gives both roots. Only positive roots are recognized. In the first type of the Latin list, $x^2 = ax$, the only root is $x = a$; the root $x = 0$ is not recognized, since 0, as we have seen, is not considered a number¹⁸).

The arithmetical formula for the solution of quadratic equations requires a proof, which Al-Khwarizmi gives by following the Euclidean procedure. Since all his examples have 1 as the coefficient of x^2 , the application of areas can be

¹⁷) L. C. Karpinski, *l.c.* ¹³), p. 19.

¹⁸) F. Rosen, *l.c.* ¹³), p. 5; L. C. Karpinski, *l.c.* ¹³), p. 67 ("nihil aliud esse numerorum, nisi quod ex unitatibus componitur"). The concept is of Greek origin, see above, pp. 2-3.

performed with squares. For $x^2 + 10x = 39$, Fig. 3 is used, in the following form (Fig. 4):

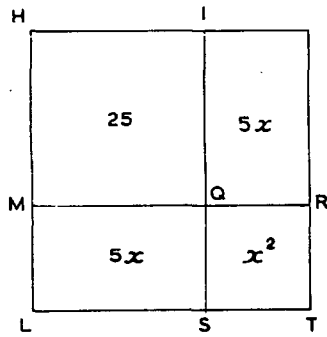


Fig. 4

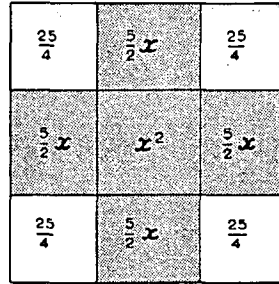


Fig. 5

This can be changed into a more symmetrical form (Fig. 5). In Fig. 4 the "gnomon" $IQMLT$ has area $x^2 + 10x = 39$, in Fig. 5 the shaded cross has the same area. The large square has area $(x + 5)^2$, the "quadratic supplement".

For $x^2 + 21 = 10x$, Fig. 2 of Euclid is used (with a slight modification; Fig. 6):

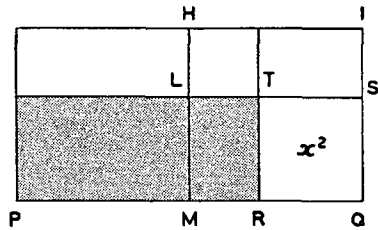


Fig. 6

No figure is given for the second root. For $x^2 = 3x + 4 = ax + b$ a special figure appears (Fig. 7)¹⁹⁾:

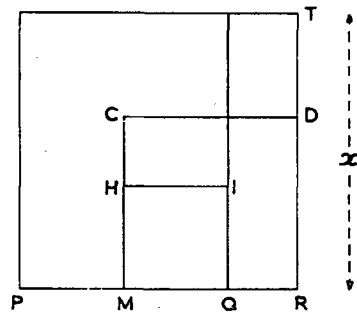


Fig. 7

¹⁹⁾ F. Rosen, *l.c.* ¹⁸⁾, p. 19, L. C. Karpinski, *l.c.* ¹⁸⁾, p. 87.

If $PQ = a$, $MQ = a/2$, then square $HQ = (a/2)^2$, square $MD = (a/2)^2 + b$, then $TR = x$.

Al-Khwarizmi solves many other quadratic equations, such as $x^2 = 12x + 288$;

$$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54; \frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2\frac{1}{6}.$$

In later authors, writing in Arabic, we also find quadratic equations with irrationals: thus Abu Kamil, "the Egyptian calculator" (c. 900 A.D.)²⁰, has equations such as

$$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2}) = 20, x = \sqrt{21\frac{1}{4} + \sqrt{1\frac{1}{2}}} - \sqrt{6} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

§ 7

The mathematicians of the Christian world followed Al-Khwarizmi and other Islamic authors, such as Abu Kamil, both in their numerical work and in their geometrical proofs. They recognized the three types of quadratic equations, solved them either by a formula or by completing the square, and then had a figure equal to or resembling the Euclidean rectangles. Gradually some changes appeared. In the first place, an algebraic notation was developed, different in different authors; symbols like +, −, √ made their appearance, and the numerical symbols began to look like ours. Michael Stifel (c. 1487—1567), in his *Arithmetica integra* (1544)²¹, tried to find one formula for the solutions of all three types of quadratic equations. For this purpose, he wrote the equations in the following forms:

I) $x^2 = ax - b$, II) $x^2 = b - ax$, III) $x^2 = ax + b$, so that, in Stifel's eyes, the solution of a quadratic equation was equivalent to the determination of a root, "radix": $x = \sqrt{b - ax}$, etc. Then Stifel's *Unica regula Algebrae* consists in the one formula

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{1}\right)^2 \pm b \pm \frac{a}{2}},$$

where a and b have the same sign in the formula as they have in the equation. After certain initials in the Latin formulation of the rule, it was called AMASIAS²²). This, however, is in reality not a single formula, since Stifel always had to explain when to add, when to subtract. The first actual "unica regula" is due to Stevin.

²⁰) L. C. Karpinski, *The Algebra of Abu Kamil Shojac ben Aslam*, *Bibl. mathem.* (3) 12 (1911-12), pp. 40-55; *id.*, *The Algebra of Abu Kamil*, *Am. Math. Monthly* 21 (1914), pp. 37-48.

²¹) M. Stifel, *Arithmetica integra* (Nuremberg, 1544), fol. 241.

²²) *l.c.* ²¹), fol. 48, 248-250.

An example of Stifel's notation is $1 \text{ } \mathfrak{z} \text{ } \text{aequat} \text{ } 1 \text{ } \mathfrak{r} \text{ } + 35156$ for $x^2 = x + 35156$, \mathfrak{z} standing for "census", and \mathfrak{r} for "radix". This is a typical notation of the so-called Cossists.

Geronimo Cardano, (Cardan, 1501—1576), in his *Ars magna* (1545)²³, had no rule of unification, but had a rule expressed in verse, quoted in Probl. 68 of the *Arithmétique*. He was, however, freer than Stifel in his occasional use of negative roots (*aestimatio ficta*²⁴, e.g. $x^2 = 4x + 32$, $x = 8, -4$) and even of complex ones. Solving the set of equations $x + y = 10$, $xy = 40$, he found:

$$x = 5 + \sqrt{-15}, y = 5 - \sqrt{-15},$$

in his notation:

$$5p : m : 15, 5m : m : 15,$$

"quae quantitas vere est sophistica", he added²⁵).

In his acceptance of complex numbers Cardan may have been influenced by Bombelli, whose *Algebra*, however, was not published until 1572²⁵). Here negative and complex numbers were accepted quite freely, though the emphasis in their use, as in Cardan, was on cubic rather than on quadratic equations. Bombelli's notation for x, x^2, \dots is $\mathfrak{1}, \mathfrak{2}, \dots$; this is the beginning of an exponential notation and adopted by Stevin. By this time the algebraic work had become quite independent of any geometrical interpretation, but Bombelli still found it necessary to interpret his solutions of quadratic equations with the aid of the Euclidean square figures. Even Stevin maintained this tradition.

§ 8

The numerical solution of the general cubic and biquadratic equations was an achievement of the sixteenth century and was felt at the time as a great and revolutionary discovery. For the first time mathematics had passed beyond the limits of the centuries-old Greek-Arabic cultural domain. The importance of this step was enhanced by an atmosphere of public disputations and nasty priority squabbles. Cardan's book, which made the discovery known to the learned world at large, was proudly called *Ars magna*.

In our days, when this chapter of algebra has become a minor and slightly boring part of the theory of equations, some effort is required to understand what its development meant historically. It stimulated numerical work and im-

²³) H. Cardanus, *Artis magna, sive de regulis algebraicis liber unus*. Nuremberg, 1545, fol 3 verso.

²⁴) *l.c.* ²³), fol. 66 recto.

²⁵) R. Bombelli, *L'Algebra* (Bologna, 1572; another ed. 1579); abstract in *L'Algebra Opera di Rafael Bombelli da Bologna Libri IV e V ... publ. a cura di E. Bortolotti* (Bologna, 1929, 302 pp.), pp. 25-46.

proved its notation, made mathematicians familiar with negative and complex numbers, helped to remove the Euclidean conventions still adhered to in algebraic work and the associated acceptance of the homogeneity of the equations. It encouraged further pioneering in equations of degrees higher than four, and the study of the theory of equations in general. Girard, Stevin's editor, was the first to state that every equation of degree n has n roots²⁶).

Equations of degrees higher than two, or problems leading to such equations, appear occasionally in Greek and Arabic literature. The most famous of them are the problems concerning the trisection of the angle and the duplication of the cube. The only systematic treatment of cubic equations before the Renaissance "cossists" is that of 'Umar Al-Khayyāmi (Omar Khayyam, c. 1038/1048 - c. 1123/24, Nishapur, Persia), who solved cubic equations by the intersections of conics²⁷). The method itself was not new and of Greek origin. Omar only knew positive roots and gave no numerical examples. However, there is no evidence that his work influenced the "cossists". Paciolo, in his *Summa* (1494), declared that the solution of equations of degrees higher than two was still wanting: "l'arte ancora a tal caso non a dato modo si commo ancora non a dato modo al quadrare del cerchio"²⁸).

The solution of the cubic equation, found in the early sixteenth century at the university of Bologna by Scipio Del Ferro and his associates, was rediscovered by Tartaglia and published by Cardan in his *Ars Magna*²⁹). The solution, called after Cardan, requires that there be no term in x^2 , but Cardan showed how this can always be achieved by a substitution. For instance, the equation $x^3 = ax^2 +$

b can be transformed into $y^3 = \frac{a^2y}{3} + \frac{2a^3}{27} + b$ by the substitution $x =$

$y + a/3$. Since Cardan knew only positive coefficients, he started with 13 different types, but he managed to reduce them to the three types:

$$x^3 = ax + b, \quad x^3 + ax = b, \quad x^3 + b = ax.$$

The second type was the starting point of Tartaglia, who solved it by writing

$u - v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$, and found

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

²⁶) A. Girard, *Invention nouvelle en l'algèbre* (Amsterdam, 1629), fol E 4; new ed. Amsterdam (1889).

²⁷) *The Algebra of Omar Khayyam*, by D. S. Kasir (New York, 1931, IV - 126 pp.).

²⁸) *Summa* (1494), fol. 150r.

²⁹) The story of the discovery of the solution of the third-degree equation has often been told. See, for instance, the histories of mathematics by M. Cantor, F. Cajori, G. Loria, et al., or O. Ore, *Cardano, The Gambling Scholar* (Princeton, 1953, 249 pp.). Also: E. Bortolotti, *L'algebra nella scuola matematica bolognese dal secolo XVI*, *Periodico di Matem.* (4) 5 (1925), pp. 147-184; id., *Manoscritti matematiche, riguardanti la storia dell'Algebra, esistenti nelle Biblioteche di Bologna*, *Publ. Circ. Mat. di Catania, Esercit. Matem.* 3 (1923), pp. 69-91.

Cardan gave corresponding solutions of the other cases. He reduced the case $x^3 + b = ax$ to that of $y^3 = ay + b$ by showing that in this case $y^2 - xy = a - x^2$, so that one value of y gives two values of x . Cardan recognized that there may be three roots (e.g. the equation $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$ has the roots $2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$) and remarked that their sum is equal to the coefficient of the quadratic term. He studied the general cubic equation, and also admitted complex roots³⁰). He tried to add a geometrical interpretation to the solution of the cubic equation, but did not get very far. The study of cubic equations was thus an important factor in the gradual elimination of the Euclidean application of areas from algebra.

Cardan's *Ars magna* also contains Ferrari's solution of a biquadratic equation by the reduction of the problem to that of a cubic equation³¹). Ferrari's example is

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x,$$

which he solved by adding to both sides first $6x^2$, than $2y(x^2 + 6) + y^2$. He obtained in this way:

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)x^2 + 60x + (12y + y^2),$$

the second member of which is a perfect square in x , if

$$\sqrt{(2y + 6)(12y + y^2)} = 30, \text{ or } y^3 + 15y^2 + 36y = 450,$$

which gives what we call the cubic resolvent, to be solved by Cardan's method³²). Cardan explained that biquadratic equations can have four roots. — Bombelli's merits mainly consist in the competence he shows in the numerical handling of cubic equations, including those with imaginary roots. He also faced the "casus irreducibilis", where the equation $x^3 = ax + b$ has a real root appearing as the sum of the cubic roots of two conjugate complex expressions. If $x^3 = ax + b$, then

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}};$$

this case presents itself when $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$; Bombelli understood this to mean that the two cubic roots must be conjugate complex³³). Bombelli also

³⁰) An extensive study of the *Ars magna* in N. L. W. A. Gravelaer, *Cardano's transmutatiemethoden*, *Nieuw Archief v. Wisk.* (2) 8 (1909), pp. 408-443. The three transformations used by Cardan to transform cubic equations of one kind into another were $x + -y$, $x = y \pm k$, $x = y/k$.

³¹) *Ars magna*, cap. 39, fol. 22 v.

³²) Comp. E. Bortolotti, *Sulla scoperta della risoluzione algebrica delle equazioni del quarto grado*, *Per. di Matem.* (4) 6 (1926), pp. 217-230.

³³) *L'Algebra* (1572), pp. 293-295. Cardan, in the second edition of the *Ars magna* (Basel, 1570), also discussed the *casus irreducibilis* in his so-called *Regula Aliza*, but remained, as Stevin remarked, rather vague (*L'Arithmétique*, 1585, p. 309). See also E. Bortolotti, *La trisezione dell'angolo ed il case irreducibile della equazione cubica nell'Algebra di R. Bombelli*, *Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna* 1922-23, 16 pp.

solved some equations of the fourth degree, e.g. $x^4 + 8x^3 + 11 = 68x$, for which he found two roots: $x = -1 \pm \sqrt{12}$ ³⁴).

§ 9

Stevin's theory of equations testifies to great skill, but is not particularly original³⁵). In his theory of quadratic, cubic, and biquadratic equations he follows his "cossist" predecessors, of which he mentions Paciolo, Cardan, Tartaglia, Stifel, Bombelli, and Nunes. He quotes "Mahomet", which may mean that he had studied a manuscript of Al-Khwarizmi, but may also indicate that he took the name from Cardan or some other author. A new feature in his work is a curious theory for explaining the character of an equation, which he thinks will help to overcome the difficulty of those people who think that an "equation" is something unusual. This seems to have been a common reaction in the sixteenth century, since we also find Stifel interested in explaining the difficulty away. Stifel, we have seen, explained a quadratic equation as the taking of a square root, e.g. $x = \sqrt{ax + b}$. To Stevin another point of view appealed more. An equation, says Stevin, is nothing but a proportion, and solving an equation is simply equivalent to applying the well-known rule of three. The three types of quadratic equations, for instance, can be written as follows (in modern notation):

$$\frac{x^2}{b - ax} = \frac{x}{p}, \quad \frac{x^2}{ax - b} = \frac{x}{p}, \quad \frac{x^2}{ax + b} = \frac{x}{p},$$

provided we add the condition that $x = p$. This does not seem a particularly helpful remark, but it must have had a clarifying effect on some of Stevin's contemporaries, who were brought up on the rule of three³⁶). For instance, when Stevin wrote: "given three terms, of which the first is ②, the second ①①, the third an arbitrary algebraic number, to find the fourth proportional term", or, in our notations:

³⁴) *L'Algebra ibid.*

³⁵) An extensive study of *L'Arithmétique*, and of Stevin's theory of equations in particular, by H. Bosmans is to be found in the following papers:

Notes sur l'Arithmétique de Simon Stevin, *Annales Soc. scient. Bruxelles* 35 (1910-11), 2e partie, pp. 305-313;

Remarques sur l'Arithmétique de Simon Stevin, *Mathesis* 36 (1922), pp. 167-174, 226-231, 275-281;

La résolution des équations du 3e degré d'après Simon Stevin, *ibid.* 37 (1923), pp. 246-254, 304-311, 341-347;

La résolution des équations du 4e degré chez Simon Stevin, *ibid.* 39 (1925), pp. 49-55.

See also the long extracts in G. Maupin, *Opinions et curiosités touchant la mathématique* (deuxième série), Paris, 1902.

³⁶) Stevin's interpretation of equations as proportions was criticized by Viète in *Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus Francisci Vietae responsum* (Paris, 1595), Cap. 2, fol. 2. Stevin is not mentioned, only Romanus, who had adopted Stevin's interpretation.

he meant what we express by the equation

$$\frac{x^2}{ax + b} = \frac{x}{p}, \quad x^2 = ax + b.$$

In his theory of quadratic equations Stevin also tried to improve on Stifel, who in his rule *AMASIAS* had given one single formula for the solution of all three types of quadratic equations. However, Stifel failed to explain when to use +, and when —. Stevin's rule is such that the directions for solving these equations have the same words in all three cases. He arrived at this by writing the equations in Stifel's form and considering a negative term, such as $-ax$, as a term with coefficient $-a$. Where Stifel still had to make a difference between adding and subtracting, Stevin could always say "adding" ³⁷). He proved the correctness of his formulation by an algebraic reasoning, since the classical geometrical constructions are typically different in the three cases. With Stevin we therefore have essentially our present single formula for the solution of all quadratic equations, and this in itself was another step in the gradual elimination of all Euclidean proofs from algebra. Stevin even included the case of a double root.

Stevin had no objections against negative roots, but felt that they called for an explanation. They are, he stated, the positive roots of the equation obtained by changing x into $-x$. The idea of introducing negative numbers by changing the sense on a line is a thing of later age. The concept of directed magnitudes was still undeveloped.

We have already seen that Stevin rejected complex roots. Even much later, after mathematicians had — almost grudgingly — accepted them, they were felt as something awkward. This did not change substantially until Gauss related them also to the concept of sense, this time in two dimensions.

For Stevin's ample discussion of quadratic, cubic and biquadratic equations we may refer to the text. He has an excellent exposition of the theory, covers all cases, and shows a considerable computational ability in handling them. It was probably the best exposition of this theory so far presented.

We have not reproduced the whole text, but have made those selections which can best give an idea of 16th century algebra and arithmetic and in especial show Stevin's characteristic methods of exposition.

§ 10

Another contribution to the theory of equations is to be found in the *Appendice algebratique* of 1594, which Girard later inserted in the text of the *Arithmétique*, as a Corollarium to Problem LXXVII. This *Appendice* originally appeared as a pamphlet of six pages, of which only one copy preserved in the University library of Louvain was known. The fire which destroyed this library in 1914, during the first World War, also destroyed this pamphlet ³⁸). It contained, as "appendix" to the *Arithmétique*, a numerical approximation of a positive root of an equation of any degree.

³⁷) Cardan had already made the remark that to add — means to subtract +: "quamvis minus cum additur . . . plus cum detrahitur", *Ars magna*, Cap. XVIII.

³⁸) On the history of this book in Louvain, see Ph. Gilbert, *Bull. Acad. roy. Belgique* (2e sér.) 8 (1859), pp. 192–197; H. Bosmans, *Annales Soc. sc. Bruxelles* 30 (2 part.) (1906), p. 275; H. Bosmans, *Nouvelle biographie nationale* XXIII (Bruxelles, 1924) art. Stevin.

Cardan had already published such a method, substantially an extension of the rule of the doubly false supposition. Let $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + ax = k$ be an equation with positive coefficients. Then, if for a positive integer $x = a$ the inequalities $f(a) > k$, $f(a + 1) < k$ hold, there exists a root x between a and $a + 1$. If we write

$$\frac{f(x) - f(a)}{f(a + 1) - f(a)} = \theta,$$

then $\theta < 1$ and we can take $x = a + \theta$ as a second approximation. In this way we can proceed further³⁹). Stevin's method is different and holds for equations of the form $f(x) = g(x)$, each member having only positive coefficients, such as $x^3 = 300x + 33915024$. He first finds a value $x = 10^k$ (k a positive integer) such that $f(10^k) < g(10^k)$, $f(10^{k+1}) > g(10^{k+1})$. Then he tries out $2 \cdot 10^k$, $3 \cdot 10^k$, ..., $9 \cdot 10^k$ till he finds a number $a \cdot 10^k$ such that $f(a \cdot 10^k) < g(a \cdot 10^k)$, $f(a + 1 \cdot 10^k) > g(a + 1 \cdot 10^k)$, etc. After having found the integer part of x (in his example 323), say $x = A$, he tries $\frac{10A + k}{10}$, $k = 1, 2, \dots, 9$, etc.

Stevin did not apply his decimal notation, though the article was published in 1594. He mentioned that his friend Van Ceulen also had a general method of solution. This may be true, but we do not know this method, since Van Ceulen never published it.

§ 11

Stevin's version of the first four books of Diophantus does not claim to be a translation. Stevin simply used Diophantus' text as a source for problems which he could solve with the aid of his theory of equations. When he found it convenient, he also changed the numerical values in the problems. He was encouraged in this free treatment of a classic by the fact that Xylander's translation was based on a bad Greek text anyway. The result is that Stevin's *Diophant* is simply a continuation of the theory of equations in the *Arithmétique*. We have not republished this part. The genuine Diophantus is now readily available⁴⁰).

Nor have we republished the first section of the *Pratique*, which deals with problems of commercial arithmetic, or the last part of the section, which contains a treatise on incommensurables with an explanation of the tenth book of Euclid. Stevin first gives, in Euclid's spirit, a geometrical interpretation of radicals of the form $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, and then reinterprets Euclid's classification of these forms in terms of radicals. It is a creditable performance, but offers little which interested readers cannot find much more easily in modern commentaries⁴¹).

³⁹) This was the "regula aurea", *Ars Magna*, Cap. XXX, fol. 53. Cardan applied it to several cases, e.g. $x^4 + 3x^3 = 100$.

⁴⁰) See *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum graecis commentariis* ed. P. Tannery. 2 vol. Lipsiae, 1893, 1895 or the French translation: *Diophante d'Alexandrie... oeuvres traduites... par P. Ver Eecke* (Bruges, 1926, XCI + 299 pp.).

⁴¹) T. L. Heath, *The thirteen Books of Euclid's Elements* Vol. III (Cambridge 1908) 1-255. E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides II* (Groningen 1930). 167-199.

Ruth Struik in *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, editi da Federigo Enriques. Libro X* (Bologna 1932).

L'ARITHMETIQUE
DE SIMON STEVIN
DE BRUGES:

Contenant les computations des nombres
Arithmetiques ou vulgaires :

Aussi l'Algebre, avec les equations de cinc quantitez.

Ensemble les quatre premiers liures d'Algebre
de Diophante d'Alexandrie, maintenant pre-
mierement traduits en François.

*Encore vn liure particulier de la Pratique d'Arithmetique,
contenant entre autres, Les Tables d'Interess, La Disme;
Et vn traicté des Incommensurables grandeurs :
Avec l'Explication du Dixiesme Liure d'Euclide.*



A LEYDE,
De l'Imprimerie de Christophle Plantin.
c 10. 10. LXXXV.

A V T R E S D O C T E
E T V E R T V E V X
S E I G N E V R M^{onfr} I E H A N
C O R N E T S D E G R O O T .

Q O M B I E N qu'entre les diuer-
ses inclinations que la Nature à
distribué aux Hommes, il m'est
escheu pour ma part, le desir
d'entendre choses rares, sans, hélas! pouuoir
atteindre le but proposé: Si est ce toutesfois
qu'elle y a tellement pourueu, que l'ennui de
l'attente est aucunement soulagé, par le confort
procedant de l'espoir de quelque fois y paruenir.
Mais comment? Certes par la continuelle fami-
liarité, mon Treshonnoré Seigneur, laquelle
m'a rendu certain, non seulement de vostre in-
satiable & flagrante cupidité, de comprendre
choses hautes & vertueuses; mais qu'outre
cela vous esties heureusement parueniu à la
cognoissance de plusieurs mysteres; (ce qui, à
cause de vostre benigne & communicatiue af-
fection, m'est deueniu comme ferme refuge de
mes

mes difficultez. Car, quelle partie de la Philosophie se pourroit il rencontrer, que vous n'y soiez versé; non pas selon le vulgaire, mais par solide intelligence des causes? Certes les disciplines Mathematiques m'en sont en partie tesmoignage; veu qu'entre autres les subtilz Problemes & Theoremes Catoptriques d'Alhazene, Vitelle, & d'Euclide, ne vous pouvoient contenter, sans veoir par l'experience leurs rares effets, preparant, & faisant preparer en toute diligence, les appareils y necessaires. En la Musique, par dessus l'exercice de la voix, des Instrumens, voire de la Composition, en laquelle (si l'on peut croire l'effet) vous n'estes pas des moindres: vous vous estes encore diligemment exercé en la Therorie d'icelle, nous en proposant & resolvant argumens non vulgaires. Quant à vostre erudition en la Jurisprudence, Physique, & Poësie, elle est notoire à vn chascun; mais à moi en particulier, vostre diligence & travail, en l'auancement des choses tendantes à l'utilité de la Republique: lesquelles (moiennant que l'aveugle ennemie de Raison, ou la terminante

nante Cloto ne l'empeschent) seront plus grandes que l'on n'a attendu des Hommes de nostre temps: de sorte que ie me sens faire aucunement mon debuoir, quand i'estudie & m'efforce, de faire chose agreable à vostre tresillustre Esprit: (Ce que ie ne puis mieux faire pour ceste fois, qu'en vous dediant l'Arithmetique, ensemble la Pratique d'icelle, meslees d'aucunes (telles qu'elles sont) miennes inuentions, propres à mon auis, pour l'vtilité commune: L'auancement & prosperité de laquelle estant vostre delectation & singuliere estude, ie ne doubte point qu'elles ne vous donneront quelque contentement. Receuës doncques benignement, ce tesmoinage de zele, & d'immortelle affection, de celuy qui souhaite l'heureuse issue de tous vos hauts & vertueux concepts, cest de

L'entierement vostre.

Simon Steuin.

3

A D

Note: The dedication is to Johan Cornets de Groot (1554—1640), burgo-master of Delft from 1591/95, father of Hugo de Groot (Grotius, the author of *De Jure Belli ac Pacis* (1625), see Vol. I, p. 6, note 15). The poems are by Dominique Baulde (le Bauldier, 1561—1613), in 1603 professor extraordinarius, in 1613 professor ordinarius, at Leiden, Franciscus Bertie Anglus, apparently an Englishman, and the same Johan de Groot, first under an anagram of Ianus Grotius, then under one of Ian de Groot. Another poem by de Groot: Vol. I, p. 51.

A D
SIMONEM STEVINVM
BRVGENSEM.

*Multas Bruga aliis exaequat laudibus vrbes,
At cunctas anteit laudibus ingenij.
Testes tot passim populos vulgata per omnes
Nomina vel potius numina quae peperit.
Illis non Sophia pars vlla intacta remansit
Quam potis humana percipere arte labos.
Sola Mathematicae miro tendebat amore
Cultorem è celebri deligere vrbe sibi.
Tendebat frustra, sine te STEVINE fuisset:
Qui Diuam officio prosequerere tuo.
Felix tu Patria, felix te Patria alumno:
Sed magis in hac felix Patria parte tamen,
Quo preciosior est mortalis munere vita,
Nascendique breui sorte perennis honos.*

Dominicus Baudius Insulensis.

I N

I N O P V S S I M O N I S
S T E V I N I B R V G E N S I S .

*Gracia Dulichium mirata est: Roma Catonem:
Et Demosthenicos Attica turba sonos.
Est quod iactet opes nato te, Belgia STEVIN,
Iactabit primum te, tua Brugga suum.
Fœlices quibus ista licent: sunt ista laboris
(Crede mihi) meriti premia digna tui.
Tam bene succedunt non omnibus omnia ;*

S T E V I N

*Quam bene succedunt hæc tua scripta tibi.
Est aliquid scripto doctis placuisse: peritos
Atque etiam ignaros qui docet, ille docet.
Hoc opus, hic labor est, illo tibi gratulor ipso
Ars tua tam facilis quod docet ire via.
Non quod Arithmeticam facile est docuisse, Ma-
gistro
Te sine (vera loquar) non bene docta fuit.
Sic numeros numerare prius, post Addita primis
Quam bene conueniant, ars tua docta docet.
Nec satis hoc, numero cum sint Diuisa priori,
Ni doceas qua quis Subtrahat arte viam.*

*Fractaque per partes, numero reddenda priori,
Et non fracta prius, qua ratione potes.
Aspice quàm docta quid Radix scribitur arte,
Aspice quàm bene sit Regula scripta Trium.
Teg. autor (Diophante) iterum sic traxit ab Orco
Ut noua, quæ nō sunt, hæc tua scripta putent.
Seu numerare uoles, seu mensurare libebit,
Huc ades: iste tibi præstat utrumque liber.
Sic patriæ prodesse studes, sic nascimur omnes,
Quàm tuus in patriam est officiosus amor!
Vade liber, neque te pudeat recitare Magistrum
Sed caput attollas docta per ora virum.*

Franciscus Bertie Anglus.

D E

DE OPERE OPERIBVSQVE
AVTORIS SERMO.

PIERIS intermissa diu, intermissus Apollo,
Intermissa Charis, intermissique labores
Ingenui antiquo satagunt includere ludo
Militiæ Sacræ desertorem. Quid amicis,
Quid Patriæ, quid debuerim Maioribus, &
quid

Postremū mihi, nulla vnquam me obliuio cepit:
Quid verò, tibi STEVINI, ignorantia crassa.
Proximus ergo dolo latam committere culpam,
Improbis & potui crasse ignorare quod omnes
Seu norunt, siue ignorent, nosset tamen omnes,
Optandum simul, atque operæ pretiū foret, atqui
(redo equidem norunt communiter, aut melior
pars.

Non ego iam dico MONADI suus vt locus inter
Assertus Numeros; Quid Principium Nume-
rorum

QVOD Numerus non sit, veluti neque li-
nea PUNCTVM.

Magnus enim fuit hic error, pars maxima veri
Decepti specie. Dic, Lector, fons, & origo
Herbis

*Herbis arboribusque, & que sit denique
plantis?*

*Num Radix dices? Erras. num semina? ve-
rum*

*Dicis. at in Numeris simili ratione, modoque
Est quod seminis obtineat vim, fons & origo
Hec Numeris, Numerum quem si quis dixerit,
errat.*

Toutes les
Racines
entre No-
mbres. pag.
30.

*Longè est diuersum Radix quod dicitur illam
Dicere fas Numeri partem, Numerumque
vocare.*

*Qualibet vt carnis pars est caro, qualibet ossis
Os, sic & Numeri Numerus pars qualibet.
hinc est*

Qu'il n'y
a nuls no-
mbres ab-
surds irra-
tionels,
irreguliers
inexplica-
bles ou
sourds.
125.33

*Vt non immeritò Numeros genus hoc Radices
Appellet. Iam Cæcus, Inextricabilis, atque
Surdus & Absurdus Numerus, Rationis &
expers,*

*Quæ Monstra hæc reat esse! Humana sorte
creatos*

*Auritos, Oculatos, Participes Rationis
Fortè velis Numeros? ipse expers es Rationis.
Absurdi nihil in Numeris absurde, sed in te*

(Ne

(Ne vitij in simulato probos) in te improbe totum est.

Pluribus hoc equidē vitium mortalibus, artes
Obscuri accusant, mente ipsi ac lumine capti.
Scriptoris vitium lectorem decipit, huius
Ingenium tardum scriptorem; Ars criminis
exfors.

Tanto iustius hic qui nil molitur iniquum,
Artibus ut sit honos suus hoc agit, & malè si
quid
Antiquis scriptum, aut nec scriptum, corrigit,
auget.

Ingenium nostrum tenebris, & carcere cæco,
Non res clausa iacet. Euclidis asymmetricus ille
Ille liber Decimus quàm non mortalia torsit
Pectora! Clara tamen res est, tantum arrige
mentem.

Des incé-
mensura-
bles gran-
deurs. pa.
167

Te penes arbitrium, tua sit censura, paratam
Ad miora viam inuenies. STEVINUS ille est
Non fumum ex fulgore, sed ex fumo dare lucem
Cogitat, ut speciosa dehinc miracula promat.
Sume vnum è multis. quid non Decarithmia
prestat

Decarith-
mia.
La Difina
pag. 137

Diuinum

*Diuinum scriptoris opus? cui non ego si vel
Aurea mi vox sit, centum linguae, oraq. centum,
Omni etate queam laudes persolvere dignas.*

*Sed quid ego hæc memorem? multo maiora
canebat*

*Qui mihi te notum STEVINI & me tibi fecit.
Nempe canebat uti magnum per inane remotas
Longinquis spatiis audire & reddere voces
Noueris, ignotas aliisque notare figuras.
Nec mihi credibilis visa esset fabula, ni me
Credere fecisset commenti Pythagoræ
Fama vetus. magis ecce fidem superare videtur
Per vada per scopulos intactas posse carinas
Sistere. Parte alia, quid, quod dicare recepto
Terra Neptuno miracula promere rerum!*

*Quicquid id est, supera inuidiam, quodque
vile censes*

*Censeat hoc ipsum, & Res Publica sentiat,
ut te*

Maturo viui viuum dignemur honore.

IAGIVS TORNVS
ΦΙΑΟΜΑΘΗΣ.

A V

A V L E C T E V R.
P O V R L' O E V V R E.

*Ami Lecteur, puis que V O S T R E amitié
Nous aimons tant qu'vn corps aime son ame ;
Anime nous, par amours, de ce baume
De ta faueur causant V I V A C I T E'.
Anime nous, & serés amené
Dans vn vergier, dont l'amoureuse flamme
Tous vertueux à contempler enflamme,
Vergier ie dy plain de félicité.
La cueillirés les secrets de nature,
Dont mon STEVIN grand nôbre vous procure,
Nombre si grand qu'onc nombre numbrera.
Nombre sans nombre es nombres trouuera
Qui de cest' art à N O M B R E R aura cure.
En auez vous, ami Lecteur? Voila. &*

Darie Togon.

A V L E C T E V R.

VE V que l'Arithmetique selon le iugement de tous, est science vtile à vn chascun en particulier, & en general à toute Republique, voire vn des forts & principaux fondamens de la conseruation de tout cest vniuers, Certes plusieurs Philosophes anciens & modernes, ne se sont pas exercez sans raison si diligemment en icelle, ny sans bonne cause (considerant la dignité de si grand subiect) n'auons nous employé nostre temps & trauail, à en cueillir & descripre, ce que la persuasion nous fist esperer de pouuoir auancer à la Commune; Mais qu'est cela? C'est (à fin de le comprendre sommairement en trois poincts) premierement l'ordre, tel qu'il est mien. Au second quelques noz inuentions. Au tiers refutation de quelques absurditez enuieillies en ceste science, Desquels nous pourrions dire plus amplement

ment en particulier, mais posant le suivant effect pour declaration, & vous benign Lecteur pour iuge, nous le passerons outre. Vous suppliant nous vouloir excuser des vulgaires fautes, qui pourroient proceder de l'Imprimerie, ou par quelque oubliance, quant aux autres, que vous estimerez, peut estre, sortir de nostre mesentendement, les vouloir debonnairement corriger par certaine affection à l'augmentation de la science, non pas aigri sur nostre ignorance, veu que nous sommes tous subiects à faillir.

Ce que faisant, n'obligerez pas seulement de plus fort nostre affection, du tout vouée à vostre seruice, mais donnerez aussi courage aux autres, de manifester ce qui sera vtile à la Chose Publique.

ARGV-

A R G V M E N T.

No v s diuifons l'Arithmetique en deux parties comprenant chacune en vn particulier liure, defquels le premier fera des definitions, qui feront de l'Arithmetique, & des nombres Arithmetiques (pour premiere partie du premier liure) & des nombres Geometriques (pour la deuxiefme partie) Et des effects des nombres procedans de leur comparaiſon, comme Raifon & Proportion (pour la troiefme partie) & de leur computation qui eſt rationnelle & proportionnelle : Rationnelle (pour la quatriefme partie) comme les quatre computations generales, à ſçauoir Aiouſter, Souſtraire, Multiplier, & Diuiſer (dicte computation rationnelle, par ce qu'il y a ſeulement mutuelle habitude de termes & point comparaiſon d'egales raifons comme en la proportion) proportionnelle (pour la cinquiefme partie) comme Reigle de trois, Reigle de proportionnelle partition, Reigle de faux.

Le ſecond

Le second liure est de l'operation, qui fera des nombres Arithmetiques entiers & rompuz (pour premiere partie du second liure) & des nombres Geometriques qui sont racines ou radicaux simples, & multinomies (pour deuxiesme partie) ou quantitez Algebraiques entieres & rompues (pour troiesme partie) Et ladicte operation, desdictes ses soubdiuisions sera Rationelle, & Proportionelle; Rationelle, comme les quatre computations generales, Proportionelle, comme Regle de trois, Regle de proportionelle partition, & Regle des faux. Et en plus grande euidence nous comprendrons l'Argument en telle table:

**

Arithme-

LE PREMIER LIVRE
D'ARITHMETIQUE
DES DEFINITIONS.

PREMIERE PARTIE DES
DEFINITIONS; DE L'ARITHME-
tique & des nombres Arithmetiques.

PARCE que l'Arithmetique (ce qui est aussi commun aux autres arts) s'explique par motz comme signes de l'affection de l'ame, lesquels se denotent par escriptures; Il nous faut premierement descrire la signification des propres vocables de ceste science. Car auant que l'on comprenne la matiere de la doctrine, in conuient entendre les motz par lesquels on l'explique. Nous ferons doncques nostre premier liure de leurs definitions, descripuant tousiours du commencement (en tant qu'il nous sera possible) ce qui consiste premier en la nature.

AVERTISSEMENT
A L'APPRENTIF.

Veu qu'il viendra bien à poinct sous aucunes definitions, d'argumeter des proprietes des nombres (lesquelles l'apprentif pour le premier n'est pas tenu de sçavoir) il m'a semblé bon l'aduertir comment nous auons appliqué tels argumens distinctement avec
* * 2 leurs

*First Book, on Definitions
First Part*

Defs. I and II define arithmetic as the science of numbers, and number as "that by which the quantity of each thing is explained". Indeed "as unity is the number by which we say that the quantity of an explained thing is one: and two, by which it is called two: and half, by which it is called half". Now it must be made clear THAT UNITY IS NUMBER. Stevin does not like to use the excuse of many others, who, when dealing with some difficult matter, state that they

LE I. LIVRE D'ARITH.

leurs titres sous leurs définitions, à fin que pour le premier se contentant des définitions, & de leurs explications, il puisse à son plus grand prouffit les passer outre.

DEFINITION I.

A Rithmetique est la science des nombres.

DEFINITION II.

Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chacune chose.

EXPLICATION.

Comme l'vnité est nombre par lequel la quantité d'une chose expliquée se dict vn : Et deux par lequel on la nomme deux : Et demi par lequel on l'appelle demi; Et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois, &c.

Q U E L'V N I T E E S T
N O M B R E .

Plusieurs personnes voulans traicter de quelque matiere difficile, ont pour coustume de declairer, cōment beaucoup d'empeschemens, leur ont destourbé en leur concept, comme autres occupations plus necessaires; de ne s'estre longuement exercé en icelle estude, &c. à fin qu'il leur tourneroit à moindre preiudice ce en quoi il se pourroient auoir abusé, ou plustost, cōme estiment les aucuns, à fin qu'on diroit. *S'il à seu executer cela estant ainsi destourbé, qu'eust il fait s'il en eust esté libre?* Nous sçaurions faire le semblable en ce que

have not been able to study the subject exhaustively, in order that it may be said "if he has been able to do this under so many distractions, what would he have done if he had been free?" Stevin has had every opportunity of consulting ancient and modern writers and of discussing this subject with contemporaries.

Usually we hear that unity is not a number, but only its principle or beginning [see our Introduction], just as a point is on a line. This is denied by a syllogism:

"The part is of the same matter as its whole,

Unity is part of a multitude of unities,

Hence unity is of the same matter as the multitude of unities;

DES DEFINITIONS.

2

que nous voulons ici dire de l'Vnité, mais non pas en vérité, car ie n'ay point seulement leu à bon loisir, & sans empeschement d'autres affaires, tous les Philosophes anciens & modernes, que ie trouuois traicter de ceste matiere, mais i'en ay auili communiqué de bouche avec quelques doctes, certes de ce temps pas des moindres, & en ceste matiere d'autre opinion que nous: Mais pourquoi cela? par ce que ie doubtois en ce que ie propoisois de l'vnité? non certes, car i'en estois ainsi assuré, comme si la Nature mesme me l'eust dict de sa propre bouche, voire ie le voiois (comme feront auili de brief ceux qui ne sont pas du tout aueugles) par infiniz effets, qui n'ont point mestier de preue: Pourquoi donc? A fin que ie ferois d'autant mieux pourueu, contre toutes obiections que i'en attendois.

Or doncques pour venir à la matiere; Il est notoire que l'on dict vulgairement; que l'vnité, ne soit point nombre, ains seulement son principe, ou commencement, & tel en nombre comme le poinct en la ligne; ce que nous nions & en pouuons argumenter en ceste sorte:

*La partie est de mesme matiere qu'est son entier,
Vnité est partie de multitude d'vnitez,
Ergo l'vnité est de mesme matiere qu'est la multitude
d'vnitez;*

*Mais la matiere de multitude d'vnitez est nombre,
Doncques la matiere d'vnité est nombre.*

Et qui le nie, faict comme celui, qui nie qu'une piece de pain soit du pain. Nous pourrions auili dire ainsi:

*Si du nombre donné l'on ne soustraiçt nul nombre, le
nombre donné demeure,*

** 3

Soit

But the matter of a multitude of unities is number,

Hence the matter of unity is number.

Who denies this behaves like one who denies that a piece of bread is bread.

We can also say:

If we subtract no number from a given number, then the given number remains,

If three is the given number, and if from this we subtract one, which — as
you claim — is no number,

Then the given number remains, that is, three remains, which is absurd."

When, in the olden days, men wanted to explain the quantity of things, they called a simple thing, one; and when a similar thing was added to it, they called it two; and when it had to be divided into equal parts, they called each part one

LE I. LIVRE D'ARITH.

Soit trois le nombre donné, & du mesme soustrahons vn, qui n'est point nombre comme tu veux.

Doncques le nombre donné demeure, c'est à dire qu'il y restera encore trois, ce qui est absurd.

Nous pourrions aussi reciter plusieurs subtiles & sophistiques questions, qui nous ont esté proposées de bouche par les susdictes personnes, ensemble nostre refutation d'icelles, & mille absurdités en suiuates : mais les omettant (car il empliroit bien vn particulier & grand volume) & à fin de ne perdre huile & labeur, venons aux causes mesmes, la cognoissance desquelles done parfaite intelligence. Il faut doncques sçauoir, que les Hommes i'adis voians, qu'il leur estoit mestier de parler & auoir intelligence de la quantité des choses ils nommoient chascque chose simple, vn; & quand à la mesme estoit appliquée encore vne autre, les appelloient ensemble deux, & quand la proposée simple chose estoit diuisée en deux parties egales, ils nommoient chascune partie demi, &c.

Puis considerans que vn, deux, trois, demi, tiers, &c. estoient noms propres, & conuenables, pour l'explication de ladicte quantité, ils ont veu qu'il estoit necessaire de comprendre toutes ces especes sous vn genre (car telle est leur maniere de faire en tous autres semblables comme bled, orge, auoine, ils le nomment en genre Grain; aigle, tourterelle, rosignol, en genre Oseau) lequel genre ils appelloient nombre; Estant doncques par les principes ou causes mesmes chascun d'iceux nombre, sans doute ils suiuent leur opinion errante, qui en apres sans consideration des causes, ont exclu l'vnité. Mais quelcun me pourra maintenant dire selon la commune sentence des Philosophes, que
pour

half. And just as wheat, barley, oats, etc. were called grain, so one, two, three, one half, one third, etc. were all proper names, used to express that quantity, which they called number. But some people might say that in order to treat a given quantity properly we must begin with its principle, as in extension, where the manifest principle is the point. However, it was an "unfortunate hour in which this definition of the principle of number was first produced. Oh, cause of difficulty and obscurity of what in Nature is easy and clear!" What do unity and point actually have in common? Two unities (one is wont to hear) form a number, "but two, yea a thousand points do not form a line". Unity is divisible into parts (which cannot be gainsaid, see e.g. Diophant IV, 33; V 12, 13, 14, 15), a point is indivisible; unity is a part of number, a point is not a part of a line. To point

LE I. LIVRE D'ARITH. 3

pour traicter ordonnéement de quelque quantité, la Nature tesmoigne qu'il faut commencer de son principe, comme il appert en la quantité grande, de laquelle le manifeste principe est le poinct, mais il y a ici question de la quantité qui se dict nombre, il y faut donc dire du principe ou commencement du nombre: Certes ie ne le concede pas simplement, ains l'affirme par la suiivante 3^e définition, car veu que la communauté & similitude de grandeur & nombre, est si vniuerselle qu'il ressemble quasi identité, sans doute le nombre aura quelque chose en soi, qui se refere au poinct. Mais que sera ce? Ils disent l'vnité: O heure infortunée en laquelle fut premierement produicte ceste definition du principe du nombre! O cause de difficulté & d'obscurité de ce qui en la Nature est facile & clair! O dommageable aduis de ceux qui l'ont concedé, ce qui nous a fait tel auancement en l'Arithmetique, comme il eust esté à la Geometrie, s'ils eussent concedé que le poinct soit quelque partie de la ligne, car comme de cestui la n'eust suiui que absurd, ainsi (parce que du faux ne procede que faux) de cestui ci. Mais quelle communauté (ie vous supplie) y a il entre l'vnité & le poinct? certes nulle seruant au propos; car deux vnitez (comme ils disent) font nombre, mais deux, voire mille poincts ne font nulle ligne: L'vnité est diuisible en parties (vrai est qu'ils le nient mais mille leurs distinctions ne sont pas suffisantes, de pouuoir ainsi opprimer la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es Arithmetiques operations de plusieurs Authours, comme entre autres par l'absolue partition de l'vnité de la 33^e question du 4^e liure & la 12, 13, 14, 15. question du cinquiésme liure

corresponds 0, commonly called zero, which we call beginning in the following Definition III. This results not only from what 0 and point have in common, but also from their effects. What they have in common are the following facts:

"Just as a point is an adjunct to a line and not in itself a line, so 0 is an adjunct to number, and not a number itself.

Just as a point cannot be divided into parts, so 0 cannot be divided into parts. Just as many points, yea an infinity of them, do not make a line, so many 0's, even an infinity of them, do not form a number.

Just as the line AB cannot be increased by the addition of the point C, so the number $D = 6$ cannot be increased by the addition of $E = 0$.

DES DEFINITIONS

liure du Prince des Arithmeticiens Diophante) le point est indiuisible : L'vnité est partie du nombre, le point n'est pas partie de la ligne, & ainsi des autres : L'vnité doncques n'est point telle en nombre comme le point en ligne. Qu'est ce donc qui lui correspond ? Je di que cest 0 (qui se dict vulgairement Nul, & que nous nommons commencement en la suiuate 3^e definition) ce que ne tesmoignent pas seulement leurs parfaites & generales communautez, mais aussi les irrefutables effects. Les communautez sont telles :

Comme le point est aoinct de la ligne, & lui mesme pas ligne, ainsi est 0 aoinct du nombre, & lui mesme pas nombre.

Comme le point ne se diuise pas en parties, Ainsi le 0 ne se diuise en parties.

Comme beaucoup de points, voire & qu'ils fussent de multitude infinie, ne font pas ligne; ainsi beaucoup des 0 encore qu'ils fussent en multitude infinie ne font nul nombre.

Comme la ligne AB ne se peut augmenter par addition du point C, ainsi ne se peut le nombre D6, augmenter par l'addition de E 0, car aiousant 0 à 6 ils ne font ensemble que 6.

Mais si l'on concede que AB soit prolongée iusques au point C, ainsi que AC soit vne continue ligne, alors AB s'augmente par l'aide du point C; Et semblablement si l'on concede que D6, soit prolongé iusques en E 0, ainsi que DE 60 soit vn continue nombre faisant soixante,

"But if we concede that AB can be produced to the point C, so that AC is a continuous line, then AB is increased by means of point C. Similarly, if we concede that $D = 6$ can be produced to $E = 0$, so that $DE = 60$ is a continuous number making sixty, then $D = 6$ is increased by means of $E = 0$ ".

From the following Def. XIV and Def. II of *The Tenth* it is clear that 0 is the true and natural beginning.

[Note: The Diophant quotations are labelled IV 31, V 9, 10, 11, 12 in T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*, Cambridge, 2e ed., 1910. They all deal with divisions of one into parts, e.g. IV, 31: to divide unity into two parts such that, if given numbers are added to them respectively, the product of the two sums

gives a square. Answer: e.g. $\frac{6}{25}, \frac{19}{25}$ if the given numbers are 3 and 5.]

DES DEFINITIONS. 4

soixante, alors D 6 s'augmente par l'aide du nul o, & ainsi en plusieurs autres que nous passons outre pour brieveté.

Quant aux effects nous pourrions dire du commencement de quantité algebraique, defini à la sui-
uante 14^e definition, aussi du commencement defini à la deuxiesme definition de la N I S M E, par les constructions desquelles, il appert suffisamment, que le o est le vrai & naturel commencement, lequel comme ferme fondament nous a conduit à quelques inuentions descriptes (telles qu'elles sont) au suiuant : Mais à fin que l'on n'estime que ie veux proposer outre cuideement, mes inuentions à telle preuue, nous prendrons autre matiere suffisante, non pas d'auteurs de peu d'estime, mais entre autres les tables de Ptolemée, Alfonso, Nicolas Coperne, Jehan de Montroial, & semblables, esquelles la description, ou signification du point geometrique, se rencontre souuent entre les nombres. Prennons pour exemple les tables des Sinus de Jehan de Montroial, la ou chascun degré est vne ligne oblique, de laquelle la longueur est la $\frac{1}{360}$ de la peripherie du circle, l'extremité de laquelle ligne, est le point Mathematique dont nous auons dict ci dessus: Mais avec quoi est signifié chascun d'iceux, qui sont iusques à nonante? certes (en mon exemplaire) par o au commencement de chascun premiere colonne, & semblables exemples sont fort communs en plusieurs autres tables. Or si encore le o ne fust pas cela en nombre, ce que le point est en ligne, lesdicts grans mathematiciens, voire la nature avec eux, ont en ceci tous falli; Soit ainsi, doncques au point se refere quelque autre chose que o, posons que ce soit

A selon

[Note: The meaning of the next paragraph seems to be the following. Take the sine table of Regiomontanus, based on $\sin 90^\circ = 107$, see our Introduction to the *Trigonometry* and *The Tent*. It looks as follows:

minutae	sinus	minutae	sinus
gradus	0	gradus	3
0	0	0	523360
1	2909	1	526265

In other words: $\sin 3^\circ = 523360$, $\sin 3^\circ 1' = 526265$, $\sin 1' = 2909$. Hence $\sin 1'$ may not be taken as "beginning", since $\sin 3^\circ 1'$ is not the same as $\sin 3^\circ$, but $\sin 3^\circ 0'$ is the same as $\sin 3^\circ$. The line (half-chord of the double arc) representing $\sin 3^\circ$ is not increased by a point, but the line representing $\sin 3^\circ 1'$ is increased by (about) 2909.]

LE I. LIVRE D'ARITH.

selon vostre opinion 1, & en examinons la verité, mettant 1 pour le commencement ou extreme poinct (par exemple) du 3^e degré, auquel correspond 523360 (ie parle de la table de Jean de Montroial, la ou le demi-diametre fait 1000000) mais ceci est faux, car à 1 comme demonstre ladicte table, correspond 526265: Ou bien pour veoir double rencontre, il appert que 0, commencement du nombre, correspond à 0, poinct & commencement du quadrant, alencontre duquel tu veux mettre 1, mais à 1 correspond 2909. Doncques 1 ne signifie pas le poinct, mais 0; Et qui ne le peut veoir l'auteur de Nature aye pitie de ses infortunez yeulx, car la faute n'est pas en l'objet, ains à la veue que nous ne lui scauons pas donner.

QUE NOMBRE N'EST POINCT
QUANTITE DISCONTINUE.

Nous pourrions ici descrire plusieurs inconueniens, procedez du susdict faux fondement, mais veu qu'il auroit bien mestier d'un traicte particulier, ce ne sera pas ici son lieu: Mais parce que nous auons dict ci dessus, que 6, prolongé iusques en 0, fait vn continue nombre de soixante, contre le vulgaire. *Nombre est quantité discontinue ou disoincte.* il nous faut encore refuter ceste impropre definition ainsi:

Tout ce qui n'est qu'une quantité, n'est poinct quantité disoincte;
Soixante selon qu'il est nombre, est vne quantité (à scauoir vn nombre.)
Soixante doncques selon qu'il est nombre, n'est point quantité disoincte.

Quant

Stevin then argues THAT NUMBER IS NOT DISCONTINUOUS QUANTITY. He presents the syllogism:

"All that is only a quantity is not a discontinuous quantity. Sixty, since it is number, is a quantity (to wit, a number). Hence sixty, since it is number is not a discontinuous quantity".

It cannot be argued that because this integer quantity can be divided into sixty unities, thirty dualities or twenty trinities, it is discontinuous, since the proposed magnitude [represented by sixty] can equally be divided into such parts, which would show that a magnitude is discontinuous. "To a continuous magnitude corresponds the continuous number to which it is attributed". "Number is something in magnitude as humidity is in water, it penetrates like this into every part of its magnitude; and just as to a continuous water corresponds a continuous humidity, so a continuous number corresponds to a continuous magnitude", and

DES DEFINITIONS. 5

Quant à ce que vous diuisez par vostre imagination, ceste proposée vnique & entiere quantité en soixante vnitez (ce que pourriez faire par mesme raison en trente dualitez, ou vingt trinites, &c.) & que puis apres vous definez le diuisé, ce n'est pas definition du proposé dont il est question : vous pourriez semblablement diuiser la proposée grandeur par l'imagination en soixante parties, & puis par mesme raison la definir estre quantité discontinue, ce qui est absurd. Comme doncques la generale communauté de grandeur & nombre aux autres, ainsi en cestui ci; à sçauoir à vne continue grandeur, correspond le continue nombre qu'on lui attribue, & telle discontinuité que puis apres recoit la grandeur par quelque diuision, semblable discontinuité reçoit aussi son nombre. Et à fin d'en parler par exemple, le nombre est quelque chose telle en grandeur, comme l'humidité en l'eau, car comme ceste ci s'estend par tout & en chascue partie de l'eau; Ainsi le nombre destiné à quelque grandeur s'estend par tout & en chascue partie de sa grandeur: Item comme à vne continue eau correspond vne continue humidité, ainsi à vne continue grandeur correspond vn continue nombre: Item comme la continue humidité de l'entiere eau, souffre la mesme diuision & disioinction que son eau; Ainsi le continue nombre souffre la mesme diuision & disioinction que sa grandeur; De sorte que ses deux quantitez ne se peuuent distinguer par continue & discontinue, dont nous pourrions exhiber plusieurs argumens, mais nous le concludrons par ceste leur contradiction. *Nombre* (disent ils) *est quantité disioincte*, & ailleurs au contraire *Nombre est quantité conioincte ou composée de multi-
A 2 siude*

is subjected to the same division and disjunction. Stevin refers to his *Mathematical Thesis I* (p. 202).

[Stevin uses the terms *nombre*, *quantité*, *grandeur*, here translated by *number*, *quantity*, *magnitude*. The relation of number to quality is expressed by Def. I; magnitude is more concrete. Stevin says that number explains quantity, but exists in magnitude as humidity in water. See further p. 10. Stevin here wrestles with what we now understand as the arithmetic continuum, that is, with the notion of real number, see our Introduction]).

LE I. LIVRE D'ARITH.

itude d'vnitez : Certes si les vnitez sont conioinctes, elles ne sont pas disioinctes, ny par consequent leur conioction, ne produict poinct quantité disioincte. Nous accomplirons la reste par la premiere these de noz theses Mathematiques.

DEFINITION III.

Les caracteres par lesquels se denotent les nombres sont dix : à sçauoir 0 signifiant commencement de nombre, Et 1 vn, Et 2 deux, Et 3 trois, Et 4 quatre, Et 5 cinc, Et 6 six, Et 7 sept, Et 8 huit, Et 9 neuf.

DEFINITION IIII.

Chasques trois caracteres d'un nombre s'appellent membre, desquels le premier, sont les premiers trois caracteres à la dextre, Et le second membre, les trois caracteres suiuaus vers la senestre, Et ainsi par ordre du troisieme membre, & autres suiuaus, tant qu'il y en aura au nombre proposé.

EXPLICATION.

Soitquelque nombre tel 3 5 7 8 7 6 2 9 7. Les 297. s'appellent premier membre, & 8 7 6 second, & 3 5 7 troisieme.

DEFI-

In Defs. III—XIII the number symbols 0, 1, . . . , 9 are introduced, together with some elementary concepts, such as prime and composite number. In Def. VI *Arithmetical Number* is defined as abstract number, conceived as devoid of magnitude. In Def. VII Stevin stresses his position: "An integer number is unity or a composite multitude of unities" [a direct challenge of Euclid VII Def. 2, see our Introduction.]

DES DEFINITIONS.

6

DEFINITION V.

Le premier caractere du premier membre commençant à dextre vers la fenestre, signifie simplement sa valeur, le second autant de fois dix qu'il contient vnitez, le troisieme, autant des fois cent qu'il contient vnitez; Et le premier caractere du second membre, autant de fois mille qu'il contient vnitez; Et ainsi par dixiesme progression des autres caracteres contenuz en tout nombre propose.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre tel 7 5 6 8 7 1 3 0 7 8 9 2 7 6.
Doncques selon ceste definition le premier caractere 6, fait six, & le 7 suiuant septante, & le 2 suiuant deux cent, & le 9 neuf mille, & ainsi des autres. Pour doncques expliquer ce nombre, on mettera sur chaque premier caractere de chaque membre (excepté le premier) vn point; Puis on dira, septante cinq mille mille mille (à sçauoir autant des fois mille qu'il y a des points depuis le 7 iusques à la fin) six cents huitantsept mille mille, cent trente mille mille, sept cens huitantneuf mille, deux cens septante six.

DEFINITION VI.

Nombre Arithmetique est celui qu'on explique sans adiectif de grandeur.

A 3

EXPLI-

LE I. LIVRE D'ARITH.

EXPLICATION.

Le nombre à deux especes, deſquelles l'une eſt expliquée par adiectif de grandeur, comme les nombres quarez, cubiques, racines, quantitez, &c. leſquels nous appellons nombres Geometriques, & ſeront deſiniez à la ſeconde partie ſuiuante; l'autre eſpece eſt ſimplement expliquée ſans ledict adiectif, comme vn, deux, trois, trois cinquiemes, &c. Nous appellons tels nombres par diſtinction de l'autre eſpece, nombres Arithmetiques.

DEFINITION VII.

Nombre entier eſt vnité, ou compoſée multitude d'vnitez.

DEFINITION VIII.

Nombres entre eux premiers ſont ceux qui n'ont point de multitude d'vnitez pour commune meſure.

EXPLICATION.

Comme 5 & 7 ou 10 & 13 &c ſemblables: par ce qu'ils n'ont point de multitude d'vnitez, qui leur ſoit commune meſure, ſ'appellent nombres entre eux premiers.

DEFINITION IX.

Nombres entre eux compoſez ſont ceux qui ont multitude d'vnitez pour commune meſure.

EXPLI-

DES DEFINITIONS. 7

EXPLICATION.

Comme 9 & 12 par ce que nombre de multitude d'vnitez à ſçauoir 3, eſt leur commune meſure, ils ſ'appellent, nombres entre eux compoſez.

DEFINITION X.

Nombre rompu, eſt partie ou parties de nombre entier.

EXPLICATION.

Comme eſtant vn diuiſé en trois parties egales, vne des meſmes eſt nombre rompu, qu'on deſcript ainſi $\frac{1}{3}$ & ſ'appelle vn tiers. Ou eſtant 1 parti en quatre parties egales, trois des meſmes eſt nombre rompu: lequel ſe deſcript ainſi $\frac{3}{4}$ & ſ'appelle trois quarts, ou eſtant 1 parti en trois parties egales, ſept de telles parties eſt nombre rompu qu'on deſcript ainſi $\frac{7}{3}$. & ſ'appelle ſept troiſieſmes

DEFINITION XI.

Numerateur de rompu, eſt le nombre ſupérieur explicant la multitude des parties y contenues.

EXPLICATION.

Soient trois quarts deſcripts ainſi $\frac{3}{4}$, doncques le 3 ſ'appelle numerateur, par ce qu'il explique ou nombre la multitude des parties contenues au meſme rompu: car $\frac{3}{4}$ eſt vn rompu compoſé de quartes, & le 3 nous

A 4 montre

8 LE I. LIVRE D'ARITH.
 montre (comme en nombrant) que des mesmes quartes il en y a trois, d'ou il est appellé numerateur.

DEFINITION XII.

Nominateur de rompu, est le nombre inferieur explicant sa qualite.

EXPLICATION.

Soient trois quarts descripts ainsi $\frac{3}{4}$: l'inferieur nombre donc 4 parce qu'il explique sa qualite ou qu'il nomme quel rompu c'est, à sçavoir un rompu de quartes, on l'appelle nominateur.

DEFINITION XIII.

Rompu premier, est celui duquel le numerateur & nominateur sont nombres entre eux premiers.

EXPLICATION.

Comme $\frac{1}{7}$ ou $\frac{3}{8}$ & semblables.

L A

LA SECONDE PARTIE,⁹
DES DEFINITIONS DES
NOMBRES GEOMETRIQUES.

A PRES que les anciens auoient apperceu la vertu de la progression des nombres comme ceux ci 2. 4. 8. 16. 32. &c. ou 3. 9. 27. 81. 243, &c. la ou le premier multiplié par soi, donne pour produit le second de l'ordre, puis le second autrefois multiplié par le premier, donne le troisieme de l'ordre, & le troisieme multiplié par le premier donne le quatrieme de l'ordre & ainsi des autres; car 2 par soi fait 4, le mesme par 2 fait 8, & cestui ci par 2 fait 16, &c. Semblablement 3 par soi fait 9, le mesme par 3 fait 27, & cestui-ci par 3 fait 81, &c. Ils ont veu qu'il estoit necessaire, de donner des propres noms à ces nombres, par lesquels on les pourroit distinctement signifier, appellans le premier en l'ordre *Prime*, que nous signifierons par (1), & le deuxiesme en l'ordre ils le nommoient *Seconde*, que nous denoterons par (2), & ainsi des autres, par exemple:

(1) 2. (2) 4. (3) 8. (4) 16. (5) 32. (6) 64, &c.

Item

(1) 3. (2) 9. (3) 27. (4) 81. (5) 243. (6) 729, &c.

Puis voians que ce premier nombre, estoit comme costé de quarré, & le second son quarré, & le troisieme le cube du premier, &c. & que ceste similitude des nombres & grandeurs, manifestoit plusieurs secrets des nombres, ils leur ont aussi attribué les noms des

A 5 grandeurs

Second Part

If we take sequences like 2, 4, 8, 16, 32, etc., or 3, 9, 27, 81, 243, etc. [a, a^2, a^3, a^4, \dots], the first number is called prime and denoted by (1), the second is called second and denoted by (2), etc. [These symbols thus stand here for exponents of arbitrary numbers.] "In view of the fact that this first number is like the side of a square, and the second like its square, and the third like the cube of the first, etc., and that in this similitude of numbers and magnitudes

10 LE I. LIVRE D'ARITH.
 grandeurs, appellans le premier *Costé*, le second *Quarré*, le troisieme *Cube*, &c. & conséquemment tous ces nombres en general *Nombres Geometriques*. Mais considéré l'utilité de la parfaite intelligence de la communauté de ces nombres avec leurs grandeurs, nous descripons ces grandeurs par ordre comme leur fondement, en ceste sorte:

DESCRIPTION DV FONDE-
 MENT DES NOMBRES
 GEOMETRIQUES.

SOIT tirée la ligne A, de laquelle la quantité soit plus grande que vunité comme 2 (2 doigts ou pieds, ou ce que l'on voudra) Puis soit escript le quarré B, duquel le costé soit egal à la ligne A, & semblablement le cube C, duquel le costé soit egal à A. Item le docide D (cest à dire poutre ou solide rectangle, qui a le costé entre deux quarrés opposites plus long que le costé du quarré) en telle raison au cube C, comme le nombre expliquant le quarré B, au nombre expliquant la A, & que sa base quarrée (comme aussi de tous les docides suiivans) soit egal au quarré B. Puis le docide E, en telle raison à D, comme D à C. Item le docide F, en telle raison à E, comme D à C: & ainsi on pourroit continuer plus auant. Puis soit tirée la ligne G, respondante à l'vnité: à sçavoir à telle vunité, comme A en fait 2. Item soit tirée la ligne H, moienne proportionnelle entre G & A. Item la ligne I antecedente de deux moiennes proportionnelles entre G & A. & les quantitez des grandeurs seront telles A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64. H. racine quarrée de racine quarrée de 4 (à sçavoir

many secrets of the numbers are revealed, the Ancients also gave these numbers the names of magnitudes, calling the first *Side*, the second *Square*, the third *Cube*, etc., and consequently all these numbers in general *Geometrical Numbers*". [On the different names given to the powers, see J. Tropske II, pp. 132-162; Stevin's contention that "the Ancients" called the first power "costé", "side", is only partly correct, since there were other expressions. A term in common use was "cosa", Latin "res", usually for the first power of the unknown quantity, but in P. Ramus' *Arithmetices libri duo*, Basle, 1569, we find the name "latus", which means "side".]

DES DEFINITIONS. II

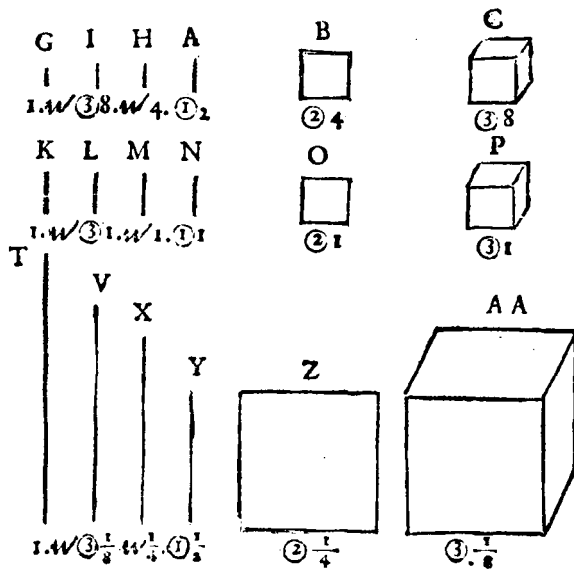
ſçavoir du quarré B) & I racine cubique, de racine cubique de 8 (à ſçavoir du cube C) & L vaudra 1. Et fera acheué le premier reng procedant de la ligne A maicure que vnité.

Soit auffi deſcript de meſme ſorte le reng K. L. M. N. O. P. Q. R. S. deſquelles N, ſoit ligne reſpondante à la A, & ſa quantité ſoit de vnité, & O ſoit quarré, quantité reſpondante à la B, & ainſi des autres, & toutes les quantitez comme P. Q. R. S, ſeront cubes & la quantité de chafcune grandeur ſera 1. Et fera acheué le ſecond reng procedant de la ligne N, de laquelle la quantité eſt vnité.

Et de meſme ſorte ſoit deſcript le reng T. V. X. Y. Z. A. A. B. B. C. C. D. D. deſquelles Y ſoit ligne reſpondante à la A, & ſa quantité ſoit moindre que vnité, comme $\frac{1}{2}$, & Z ſoit quarré, quantité reſpondante à la B, & ainſi des autres, & les quantitez B. B. C. C. D. D. ſeront proportionels plinthides, c'eſt à dire tuilles ou ſolides rectangles, qui ont le coſté entre deux quarréz oppoſites plus court que le coſté du quarré, & leurs quarréz ſont egaux au quarré Z. Et les quantitez des grandeurs ſeront telles Y $\frac{1}{2}$. Z $\frac{1}{4}$. A A $\frac{1}{8}$. B B $\frac{1}{16}$. C C $\frac{1}{32}$. D D $\frac{1}{64}$. X racine quarrée de racine quarrée de $\frac{1}{4}$, à ſçavoir du quarré Z, & V racine cubique de racine cubique de $\frac{1}{8}$, à ſçavoir du cube A A, & T vaudra 1. Et fera parfait le troiſieſme reng procedant de la ligne Y moindre que vnité.

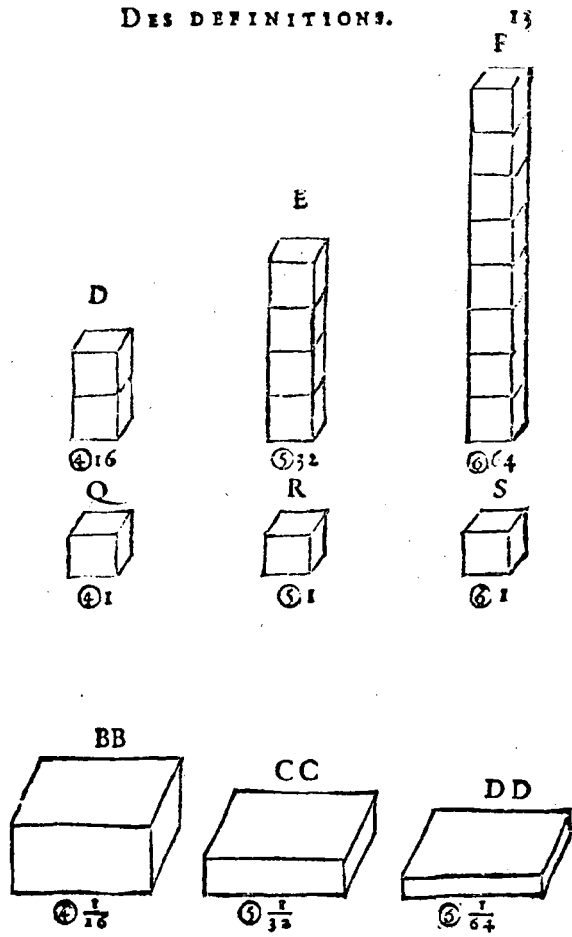
G. I.

Stevin then shows how well these numbers correspond to their magnitudes. [See the figures: here the line segment A represents $a > 1$, Stevin's ①, here equal to 2; square B represents a^2 , cube C stands for a^3 . To represent $a^4 = a^3 \cdot a$ Stevin piles cubes C a times in top of each other and gets a "docid" D, i.e. a rectangular block for which the side between opposite square faces is longer than the side of the square, here $D : C = B : A$. For the representation of $a^5 = a^3 \cdot a^2$ cubes C are piled up in number a^2 , a^2 now taken as an abstract (arithmetical)



number; the result is a docid E, $E : D = C : B$, etc. This is repeated for the case $a = 1$, which gives the sequence N, O, P, Q, etc., and $a < 1$, which gives the sequence Y, Z, AA, BB, etc.; AA is called a "plinthid", i.e. a rectangular block for which the side between opposite square faces is shorter than the side of the square, from $\pi\lambda iv\theta os$ brick. Some people represent $F = a^6 = (a^2)^3$ as a cube with side a^2 , but then we must say that the side of F is a^2 , of which the

DES DEFINITIONS.



side is a , and Stevin does not like this. — Stevin writes $\mathcal{W} 4$ for our $\sqrt[3]{4}$, $\mathcal{W} ③8$ for our $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2}$. To represent $\sqrt{2}$ (see figure) he takes a line of unit length G , and then constructs a line H as the mean proportional between G and A ; $G : H = H : A$, $G = 1$, $A = 2$. When $G : I = I : J = J : A$, he gets $I = \sqrt[3]{2}$. The same is done for $a \leq 1$, where K and T are unit segments. Hence ④ is defined by $1 : ④ = ④ : ④$.

14 LE I. LIVRE D'ARITH.

Voila acheuée la description du fondement des nombres Geometriques, par lequel nous esperons facilement demonstrier leurs vraies proprietéz, & refuter legitimement quelques absurditez en vse.

Premierement faut considerer, que au lieu de nostre sexte quantité F qui est docide, & de la sexte quantité D D qui est plinthide, il est vulgaire d'en faire vn cube qu'ils appellent cube de quarré, ou quarré de cube. Et semblable difference y a il en toutes les figures suiuant la quarte quantité : mais que ces formes ci sont les vraies & naturelles & pas celles la, appert entre beaucoup d'autres par la racine, ou le costé des mesmes quantitez. Par exemple l'on requiert la racine ou le costé de ladicte sixiesme quantité F 64, nous disons tous qu'il est 2, Or voions quelle des figures est propre, vraiment c'est le docide, & point le cube : car il appert en nostre figure F, que chafque costé des bases est egal à A, qui fait 2 par l'Hypothese : mais quand au lieu de F docide, sera fait vn cube, son costé sera 4 : on dira doncques que le costé de 4 est 2, qui est absurd. Et de mesme sorte quand le costé de tel cube sera 100, tu le diras estre 10. Item quand pour la sixiesme quantité D D $\frac{1}{64}$ qui est plinthide, on met vn cube, nous dirons tous que son costé sera $\frac{1}{2}$, ce qui est vrai au plinthide, mais au cube il sera manifeste qu'en tout son corps n'y a aucune ligne si longue, car son costé sera seulement de $\frac{1}{4}$, ergo absurd. Et semblable impropriété se pourra demonstrier aux autres quantitez. Telles figures doncques ne nous expliquent pas les vrais fondemens.

Au second; veu que la proportion des quantitez est continue, c'est equitable & vtile, que la mesme continuité

DES DEFINITIONS. 15

nuité appert aussi à l'œil aux figures, comme au precedent fondement. La reste dependant de ceste matiere sera declairée au suiuant chascun en son lieu, la ou il viendra à poinct.

DEFINITION XIII.

Commencement de quantité, est tout nombre Arithmetique ou radical quelconque, son caractere est tel ④.

EXPLICATION.

Comme (par exemple) c'est autre chose au zodiaque le commencement du Bellier, autre le premier degré du Bellier: car l'un est poinct, l'autre ligne: à sçavoir la $\frac{1}{360}$ de son circle. Ainsi voulons nous ici par commencement de quantité signifier autre chose que par premiere quantité de laquelle la definition sensuit. Doncques tout nombre Arithmetique ou radical quelconque, qu'on vŕe en computation algebraique comme 6 ou $\sqrt{3}$ ou $2 + \sqrt{3}$, &c. nous l'appellons commencement des quantitez, le caractere le signifiant est tel ④: mais fera seulement vŕe quand les nombres Arithmetiques ou radicaux, ne seront pas absolument descriptes.

DEFINITION XV.

Prime quantité, est vne ligne droite nombre expliquée, son caractere est tel ①.

EXPLICATION.

COMME la ligne A, nombre expliquée à sçavoir

Defs. XIII—XVIII define the beginning ④, prime quantity ①, etc. to fourth quantity ④. The beginning of quantity is an arithmetical number or a radical, such as 6, $\sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$. [Stevin here makes a remark similar to that on p. 4: the beginning of Aries is different from the first degree of Aries. We notice that Stevin's ④, unlike our a^0 , is not identified with 1. Stevin has to discriminate between an arithmetical number and a radical, since a radical is a geometrical number, see Def. XXXI.]

16 LE I. LIVRE D'ARITH.
 ſçavoir 2 s'appelle prime quantité, & de meſme ſorte
 eſt prime quantité la ligne N, de laquelle le nombre
 l'explicant eſt 1. Item la ligne Y de laquelle le nombre
 l'explicant eſt $\frac{1}{2}$.

DEFINITION XVI.

*Seconde quantité, eſt vn quarré deſcript
 d'une ligne egale à la prime quantité, ſon cha-
 ractere eſt tel ②.*

EXPLICATION.

Comme le quarré B, s'appelle ſeconde quantité, &
 de meſme ſorte ſont ſecondes quantitéz les quarréz
 O & Z.

DEFINITION XVII.

*Tierce quantité, eſt vn cube duquel le coſté
 eſt egal à la prime quantité, ſon caractere eſt
 tel ③.*

EXPLICATION.

Comme le cube C, s'appelle tierce quantité, & de
 meſme ſorte ſont tierces quantitéz les cubes P & A A.

DEFINITION XVIII.

*Quarte quantité, eſt vn ſolide rectangle, du-
 quel deux baſes oppoſites ſont quarréz egaux à
 la ſeconde quantité, & en telle raiſon à la tierce
 quan-*

DES DEFINITIONS.

17

quantité, comme le nombre de la seconde quantité au nombre de la prime quantité: son caractere est tel ①. Quinte quantité est vn solide rectangle duquel deux bases opposites sont quarrées egaux à la seconde quantité, & en telle raison a la quarte quantité, comme la quarte à la tierce: son caractere est tel ②. Et la mesme raison a toute autre quantité consequente à son antecedente.

EXPLICATION.

Comme les solides rectangles D. Q. B B. s'appellent quartes quantitez. Item les solides rectangles E & R & C C s'appellent quintes quantitez, & F. S. D D. sextes quantitez & ainsi des autres semblables.

NOTA.

Il est à noter que les trois premieres quantitez desquelles auons dict ci dessus (à sçauoir prime, seconde, & tierce quantité) ne changent point de forme, comme fait la quatriesme & autres en suiuanes: c'est à dire ① est tousiours quelque ligne droicte, & ② tousiours quarré. Et la troisieme quantité tousiours cube, mais la quarte quantité & autres suiuanes ne sont pas tousiours figures de mesme forme: car quand le nombre de la ① est maieur que vnité, seront tous docides, & estant vnité seront tous cubes: mais estant moindre que vnité seront tous plinthides.

B

Que

18 LE I. LIVRE D'ARITH
 QUE LES DIGNITEZ OV DENOMINATEURS DES QUANTITES
*ne sont pas necessairement nombres entiers,
 mais potentiellement nombres rompus &
 nombres radicaux quelconques.*

Il est assez notoire à ceux qui s'exercent en computations algebriques (car c'est à eux que nous parlons ici) que quand il y a à extraire racine quarrée de ①, ou de ③, ou bien racine cubique de ② & de semblables, qu'il faut dire, que c'est racine d'autant. Par exemple racine quarrée de 4 ① se dict $\sqrt{4}$ ①, la raison est, qu'il n'y a en vse aucunes algebriques quantitez qui pourroient autrement significr telles racines. Toutesfois le $\frac{1}{2}$ en circle seroit le caractere de racine de ①, parce que le mesme (suiuant la reigle de multiplication des autres quantitez) multiplié en soy donne produict ①, & par consequent $\frac{1}{3}$ en vn circle seroit le caractere de racine quarrée de ③, par ce que telle $\frac{1}{3}$ en circle multipliée en soi donne produict ③, & ainsi des autres; de sorte que par tel moien on pourroit de toutes simples quantitez extraire especes de racines quelconques, comme racine cubique, de ② seroit $\frac{1}{3}$ en circle, &c.

Or par la consideration de ces choses nous est deuenu manifeste ce qui au parauant nous estoit plus obscur, à sçauoir que la prime quantité, laquelle les algebriaciens vsent pour l'inferieure ne l'est pas, consideré ce qui consiste potentiellement en eux: mais comme il y a vn infini maieur progres des quantitez depuis l'vnité, ou de la prime quantité en ascendant, comme ① ② ③, &c. ainsi y a il semblable infini moindre progres de la prime

It is not necessary to consider only integers inside the circles ①, since $\frac{1}{2}$ can stand for the square root of ①, and $\frac{1}{3}$ for the cube root of ②. [The number inside the circle is called "dignity" or "denominator", our "exponent". Stevin does not think much of their use in the theory of equations; perhaps they might be convenient if equations more complicated than biquadratic ones could be solved with their aid, but he did not succeed in doing so. As a matter of fact, even now we solve equations with fractional exponents by reducing them to equations

DES DEFINITIONS. 19

la prime quantité en descendant, qui se pourroit signifier par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en circles, & si pourroit on par les mesmes proceder comme par denominateurs entiers.

Or si l'usage de telles quantitez pouuoit auancer en la reigle de trois algebratique (vulgairement dicte equation) à sçauoir que par icelles vn sceust venir au dessus des quantitez ④ ③ ② ① ① de Lois de Ferrare (ce qu'auons tenté, mais cōbien qu'ainsi ie pouuois extraire racines de toutes quantitez; toutes fois n'y auons peu auenir, comme à son lieu en dirons plus amplement) certes leur usage seroit par raison à conceder. Mais n'estant cela pour l'heure pas ainsi, vserons seulement les vulgaires entieres, d'autant plus que toutes computations algebratiques se peuuent acheuer sans icelles. Car à la fin autant faisons par racine de 4 ①, comme par 2 mis deuant $\frac{1}{2}$ en circle. Tellement que par ce discours auons seulement voulu manifester ce qui consiste potentiellement en la matiere, à fin que par ainsi rendissions le subiect plus notoire. Il pourroit aussi auenir que cette souenance causeroit à vn autre quelque auancement.

DEFINITION XIX.

Nombre algebratique entier, est quantité ou composée multitude de quantitez.

EXPLICATION.

Il est à considerer qu'integrité ou fraction de nombre algebratique, ne se refere point au nombre de multitude, ou valeur de la quantité; mais seulement à la denomination ou dignité d'icelle, car $\frac{1}{2}$ ① ou $\sqrt{2}$ ③ & semblables, sont autant nombres algebratiques entiers cōme 3 ①, par c. que cōme nous auons dict nous

B 2 prenons

with integer exponents. Stevin seems to have played with the idea that just as there exists a specific theory for equations of degree 1, 2, 3, and 4, there might be a specific theory for equations of degree $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... The Louis de Ferrare of p. 19 is Ludovico Ferrari (1522—1561), who reduced the solution of the bi-quadratic equation to that of an equation of the third degree, see our Introduction.]

20 LE I. LIVRE D'ARITH.
 prenons seulement regard à la denomination de la
 quantité, qui est ici entiere: mais fraction algebraique
 est telle comme la definition en suit.

DEFINITION XX.

*Nombre algebraique rompu, est partie ou
 parties de nombre algebraique entier.*

EXPLICATION.

Comme $\frac{1}{2}$ est nombre algebraique rompu, qui
 s'explique ainsi; deux primes diuisées par trois se-
 condes.

DEFINITION XXI.

*Quantitez entre elles premieres, sont celles
 qui n'ont point de diuerses especes de quantitez
 pour commune mesure.*

DEFINITION XXII.

*Quantitez entre elles composees sont celles,
 qui ont diuerses especes de quantitez pour com-
 mune mesure.*

DEFINITION XXIII.

*Rompu algebraique premier est celui duquel
 le numerateur & nominateur sont nombres
 entre eux premiers.*

DEFINITION XXIII.

*Quantitez continues en l'ordre, sont celles
 entre*

Defs. XIX—XX give the definition of *Algebraic Number*. An integer algebraic number is a quantity or a composite multitude of quantities, a fractional algebraic number is a part or consists of parts of integer algebraic numbers. Hence $\frac{1}{4}$ ①, $\sqrt{2}$ ③, 3 ① are integer algebraic numbers, $\frac{2}{3}$ ② is a fractional one. [Thus we have: a) arithmetical numbers, which are abstract numbers, b) geometrical numbers, which are of the type a , a^2 , a^3 , ..., $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, ..., and c) algebraic numbers, which are multiples of these with arbitrary coefficients, or quotients of such multiples, hence numbers we should write with negative exponents.]

DES DEFINITIONS. 21

entre lesquelles ne defaut aucune quantité de leur naturelle progression.

EXPLICATION.

Comme ⑥ & ①. Item ② & ③. Item ① ② ③ ④ &c. s'appellent quantitez continues. Et par le contraire est manifeste qu'elles quantitez sont discontinues, à sçavoir comme ① & ③, ou ② & ④, &c.

DEFINITION XXV.

Superieure quantité est celle, de laquelle le nominateur l'explicant est maieur.

EXPLICATION

Comme ④ appellons superieure ou plus haute quantité que ② ou ③, & par le contraire est manifeste qu'elle est quantité inferieure. Nous appellons telle quantité, quantité superieure; à fin d'oster l'ambiguité qui se rencontre en les appellans quantitez maieures: par exemple soient 6 ① & 3 ②, Or si l'on parle ici de maieure quantité sera chose ambigue quel des deux sera la maieure: à sçavoir si le vocable maieure se deura referer au nôbre de la multitude des quantitez: en quel respect seront maieures les 6 ①; ou en respect des nominateurs des quantitez, selon lequel sont maieures, les 3 ②. Ou en respect de leurs valeurs, selon lequel chacun pourra estre le maieur. Par exemple si la valeur de 1 ④ fust 2, les trois ② seront maieures, car vaudront 24; & les 6 ① seulement 12: mais si la valeur de 1 ① fust 1, alors au contraire les 6 ① seront maieures: car elles vaudront 6, & les 3 ② seulement 3: mais quand nous difons de la superieure quantité, ce sera sans doubte parlé des 3 ②.

B 3

DEFI-

[In Defs. XXI—XXVI we find a number of elementary properties of algebraic numbers defined; Def. XXVI introduces us to algebraic multinomials, or, as we say, polynomials, such as $3a^3 + 5a^2 - 4a + 6$. Mark that Stevin here uses + and — signs, which he does not use in some other places.

Multinomie algebraique est vn nombre consistant de plusieurs diuerses quantitez.

EXPLICATION.

Comme $3 \textcircled{3} + 5 \textcircled{2} - 4 \textcircled{1} + 6$ s'appelle multinomie algebraique. Et quand il aura deux quantitez comme $2 \textcircled{1} + 4 \textcircled{2}$ s'appellent binomie, & de trois quantitez s'appellera trinomie, &c.

DEFINITION XXVII.

$\textcircled{1}$ appliquée a $\textcircled{2}$ nous nommons quantitez primitives. Et quantité quelconque superieure que $\textcircled{1}$ appliquee a $\textcircled{2}$ leurs deriuatiues, & toutes quantitez appliquees a $\textcircled{2}$ ausquels n'existent autres inferieurs denominateurs de quantitez à leurs denominateurs proportionels nous nommons primitives, & icelles proportionelles leurs deriuatiues.

EXPLICATION.

Comme $\textcircled{1}$ & $\textcircled{2}$ nous nommons quantitez primitives, & leurs deriuatiues comme $\textcircled{2} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{3} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{4} \textcircled{2}$, &c. Mais quand il y a plus d'une quantité appliquée a $\textcircled{2}$ comme $\textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{3} \textcircled{1} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{4} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{2}$, ou $\textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{2}$, &c. ausquels n'existent autres inferieurs denominateurs à leurs denominateurs proportionels & de mesme multitude, nous les nommons primitives; & quand autres appliquez

Def. XXVII makes a distinction between polynomials such as $ax + b$, $px^2 + qx + r$, $lx^3 + mx + n$, which are called primitive, and such as $ax^2 + b$, $cx^3 + d$, $px^4 + qx^2 + r$, $lx^6 + mx^2 + n$, which can be obtained from primitive polynomials by replacing x by a power of x . These are called derivative. Stevin observes that the theory of derivative equations is the same as that of the primitive ones. On his mode of calling the theory of equations "the rule of proportion of quantities", see p. 264 and our Introduction.

DES DEFINITIONS.

23

pliquez nominateurs font à iceux appliquez denominateurs proportionels nommons iceux autres leurs deriuatifs, côme ④ ② ① sont deriuatifs desdicts ② ① ① parce que comme 2 a 1 (denominateurs) ainsi 4 a 2, & pareillement dirons ⑦ ③ ① estre deriuatifs desdicts ② ① ①, par ce que côme 2 a 1 ainsi 6 a 3. Et de mesme forte dirons ④ ② ① estre deriuatifs de ③ ① ①. Et semblablement ⑧ ④ ② ①, ou ⁽¹⁴⁾ ⑨ ⑥ ③ ① estre deriuatifs de ④ ③ ② ① ①, & ainsi des autres.

Mais pour dire de l'vilité de ceste definition faut sçauoir qu'en la regle de proportion des quantitez, la ou par trois termes donnez, nous cherchons vn quatriesme proportionel, les deriuatifs ont la mesme maniere d'operation que leurs primitifs. Côme si les deux premiers termes furent deriuatifs, tels ② ①, ou ③ ① ils auront vne operation semblable à celle de leurs primitifs ① & ①. Item si les deux premiers termes furent ④ & ② ①, ou ⑥ & ③ ①, &c. ils auront vne operation semblable à icelle de leurs primitifs ② & ① ①. Et ainsi de tous autres: d'ou s'ensuiura qu'en vn seul probleme, à sçauoir le 78. comprehendrons tous les deriuatifs (qui sont en infini) des antecedens primitifs; Pourtant celui qui voudra bien entendre ledict 78 prob. il sera necessaire de bien entendre ceste definition.

DEFINITION XXVIII.

Quantitez postposees sont celles qui en l'algebre se posent aucunes fois apres les positives.

EXPLICATION

Toutes les quantitez d'vne algebraique operation,

B 4 qui

24 LE I. LIVRE D'ARITH.

qui ne font pas notées du signe des postposées quantitez sont toujours positives ou premières posées, & d'une mesme progression, mais par ce que en aucunes operations est necessaire de poser quantitez d'une autre progression que n'est la première, appellons les mesmes postposées quantitez, & leurs signes sont tels, 1 sec ① signifie vne seconde ①, c'est à dire 1 ① secondement posée, car toutes quantitez qui n'ont point tel vocable comme 1 ① ou 3 ②, &c. sont positives ou premièrement posées. Item 1 ter ① signifie vne tierce ①; c'est à dire 1 ① tiercement posée. Item 2 sec ③ signifie 2 secondes ③, à sçavoir 2 ③ procedans de la 1 sec ①. Item 3 ① M sec ① signifie 3 ① multipliées par 1 sec ①, ou le produit de 3 ① multipliées par 1 sec ①. Item 3 ① M sec ① M ter ② signifie 3 ① multipliées par 1 sec ① & le mesme multiplié par 1 ter ②.

Item 5 ② D sec ① M ter ② signifie 5 ② diuisées par 1 sec ①, & le mesme multiplié par 1 ter ②, &c.

DEFINITION XXIX.

La prime quantité qui est égale au costé de chaque quantité, s'appelle aussi racine, la marque de costé ou racine est telle √.

EXPLICATION.

La prime quantité de la 15 definition s'appelle aussi metaphoriquement racine; & cela à cause que comme la racine est source de tout ce qui croist sur lui, ainsi ressemble la prime quantité la source ou racine de toutes les quantitez de son reng, & est toujours égal à chaque costé du mesme, comme A au fondement est égale au costé

In Def. XXVIII 1sec① is introduced as a second ①, an operation which we perform by writing b instead of a , or y instead of x . When we need a third symbol c , or z , Stevin writes 1ter①. In this case ① is called positive or first-posed, sec ①, ter ①, . . . postposed, more specifically, posed secondly, posed thirdly, etc. Stevin's 3①Msec① is our $3ab$, $3xy$, $3pq$, etc., his 3①Msec①Mter② our $3abc^2$, etc., his 5②Dsec①Mter② is our $\frac{5a^2}{b}c^2$, etc.

DES DEFINITIONS.

25

au costé de B, de C, de D (à sçavoir au moindre costé de D.) La marque signifiant racine ou costé est telle $\sqrt{\quad}$, laquelle mise deuant $\textcircled{3}$ comme $\sqrt{\textcircled{3}}$ denote racine de cube, ou racine de tierce quantité: & semblablement $\sqrt{\textcircled{4}}$ signifie racine de quarte quantité. Et de mesme forte pourrions dire $\sqrt{\textcircled{2}}$ signifier racine de quarré, ou de seconde quantité, mais pour la signifier il est en vſe (a cause de brieveté) de delaisser le signe $\textcircled{2}$, & mettre seulement $\sqrt{\quad}$, par lequel on entend racine ou costé de quarré.

QUE RACINE EST VOCABLE
CONVENABLE A L'ART.

Il y a des aucuns qui reiectans le vocable racine, disent, costé de quarré ou de cube, ne se pouvoir nommer racine sinon ineptement, mais à mon auis ils n'exhibēt pas convenable distinction. Car combien que racine est tousiours egale à costé; toutesfois autre quantité, est racine comme A, que costé de B ou de C: pourtant quand nous difons racine de B, c'est à dire A: car A est sa racine ou source: mais quand nous difons costé de B, qui est a la A egal, adonc nous parlons du costé essentiel de B. Nous vſerons donc à bon droict avec les anciens le vocable racine là ou il viendra à point.

DEFINITION XXX.

Racine de quarré de racine de quarré, est vne ligne moyenne proportionnelle entre la prime quantité, & vne ligne respondante à l'unité de la mesme: sa marque est telle $\sqrt{\sqrt{\quad}}$. Et racine cubique de racine cubique, est l'antecedente ligne
B 5 de deux

In Defs. XXIX—XXX the symbols for square root, fourth root = square root of square root, etc. are explained. $\sqrt{\quad}$ means square root, or $\sqrt{\textcircled{2}}$. The meaning of Stevin's symbols in our notation is as follows:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{\textcircled{2}}a = \sqrt{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{2}} & \sqrt{\sqrt{\textcircled{2}}}a = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{4}} & \sqrt{\sqrt{\sqrt{\textcircled{2}}}}a = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}} = a^{\frac{1}{8}} \\ \sqrt{\textcircled{3}}a = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{3}} & \sqrt{\sqrt{\textcircled{3}}}a = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{9}} & \sqrt{\sqrt{\sqrt{\textcircled{3}}}}a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{27}} \\ \sqrt{\textcircled{4}}a = \sqrt[4]{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{4}} & \sqrt{\sqrt{\textcircled{4}}}a = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{16}} & \text{etc.} \end{array}$$

26 LE I. LIVRE D'ARITH.
*de deux lignes moyennes proportionnelles entre
 la prime quantité & vne ligne respondante à
 l'vnité de la mesme, sa marque est telle $\sqrt{\textcircled{1}}$. &
 ainsi des autres semblables.*

EXPLICATION.

Comme la ligne H s'appelle racine quarrée de racine quarrée, à sçauoir du quarré B, car par la construction du fondement elle est moyenne proportionnelle entre A & G, laquelle G respond à l'vnité de la A, Semblablement dirons la M. & X estre racines quarrées de racines quarrées. Et de mesme forte entendra on la racine quarrée de racine quarrée de racine quarrée de B estre la moyenne ligne proportionnelle entre G & H, de laquelle la marque est telle $\sqrt{\sqrt{\textcircled{1}}}$. & semblablement procedera on en infini pour les racines quarrées de racines quarrées quelconques.

Item la ligne I s'appelle racine cubique de racine cubique (à sçauoir du cube C) car par la construction du fondement elle est antecedente ligne de deux moyennes proportionnelles entre la prime quantité, & vne ligne respondante à l'vnité de la mesme, qui est entre G & A. Et semblablement dirons les lignes L & V estre racines de racines cubiques.

De mesme forte entendra on la racine cubique de racine cubique de racine cubique de C estre l'antecedente ligne de deux moyennes proportionnelles entre G & I, sa marque sera telle $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\textcircled{1}}}}$. & ainsi procedera on en infini pour racines de racines cubiques de racines cubiques quelconques.

Et ainsi procedera on en toutes les autres quantitez,
 car

Hence $\sqrt{\textcircled{4}}$ is the same as $\sqrt{\textcircled{1}}$ numerically, but there is a difference in dimension (p. 30). The prime quantity $\textcircled{1}$ of Def. XV is considered the root, or source of all other quantities, and is also the side of square $\textcircled{2}$, and hence can be written $\sqrt{\textcircled{2}}$. This $\textcircled{1}$ is also the side of cube $\textcircled{3}$ and can thus be written as $\sqrt{\textcircled{3}}$, or $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$. Hence $\sqrt{\textcircled{1}}$ stands for "root" or "side".

The term "root" is appropriate despite the objection of some people, who claim that a side cannot be called a root, because in the figure A is always the "root"

DES DEFINITIONS. 27

car la racine de racine de quarte quantité, est l'antecedente ligne de trois lignes moiennes proportionelles entre G & A, de laquelle la marque sera telle $\sqrt[4]{\textcircled{4}}$.

NOTA 1.

Nous auons dict à la 29. definition que racine de quarré à marque telle $\sqrt{\textcircled{4}}$. Item à la 30. definition, que racine de quarré, de racine de quarré à marque telle $\sqrt{\sqrt{\textcircled{4}}}$, mais faut bien noter ceste syllabe *de*, car $\sqrt{\textcircled{4}}$, ne signifie pas simplement racine, mais il y faut encore adiouster ledict *de*, veu qu'il y a grande difference entre racine, & racine de. Comme par exemple $\sqrt{4}$ signifie racine de quarré 4, laquelle vaut 2, mais racine quarrée 4, vaut 4, comme le quarré 16, à la racine 4, & point $\sqrt{4}$. Ledict auertissement du vocable *de*, appliquera on aussi à toutes autres racines comme $\sqrt{\textcircled{3}}$, $\sqrt{\textcircled{4}}$, &c.

NOTA 2.

Ceste marque signifiant racine de quarré telle $\sqrt{\textcircled{4}}$, & de racine de racine de quarré telle $\sqrt{\sqrt{\textcircled{4}}}$, est par plusieurs en vſe, est aussi fort commode pour telle signification, & continuant telle progression s'enſuit que $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\textcircled{4}}}}$ doit signifier racine de racine, de racine de quarré. Ils font donques improprement ceux qui par $\sqrt{\sqrt{\textcircled{4}}}$ veulent signifier racine de cube, veu qu'autre chose est racine de cube, que racine de racine, de racine de quarré. Car la ligne A au fondement est (comme aussi de toutes les quantitez suiuanes) egale à la racine du cube C. Mais racine de racine, de racine de quarré, est la ligne moiennne proportionelle entre G & H. laquelle est bien d'autre quantité (excepté quand la racine est 1, comme au second reng des figures du fondement) Et pour en donner exemple en nombres, il est notoire que $\sqrt{\sqrt{\textcircled{4}}}$ 256. est 2, mais $\sqrt{\textcircled{3}}$ 256, est plus que 6.

Con-

or "source" of square B or cube C. [Stevin always regards the various fractional powers $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, with unit fractions as exponents, as line segments. In Nota 1 we are warned that there is a difference between "root" and "root of", $\sqrt{\textcircled{4}}$ means "root of", $\sqrt{4}$ is the root of 4, or 2, but when we speak of 4 as "root", we think of 16. "Which warning about the vocable *of* will also apply to all other roots such as $\sqrt{\textcircled{3}}$, $\sqrt{\textcircled{4}}$, etc." In Nota 2 stress is laid on the difference

28 LE I. LIVRE D'ARITH.

Concluons doncques que \mathcal{W} ne peut distinctement signifier racine cubique.

Quant aux figures comme \mathcal{V} \mathcal{Z} &c. qu'aucuns suiuaus les anciens vsent au lieu de noz marques ① ② ③ (qu'aussi a vsé Raphael Bombelle, excepté ④) peut estre que les mesmes ont vulgairement (comme aupres de nous L cinquante, C cent, M mille, &c.) aupres les Arabes inuenteurs de l'algebre signifie les mesme que 1. 2. 3. &c. ou ① ② ③. Mais quoi qu'il en soit l'entens la signification de telles caracteres necessaires à l'Arithmeticien pour entendre les auteurs qui les vsent: mais en nostre Arithmetique ne les vsérons pas, ny aussi ceux qui seront selon nostre conseil: car l'vtilité des marques ④ ① ② ③ ④, &c. est telle, que l'operation qui par iceux caracteres est obscure, laborieuse, & ennuieuse, (par ce que telles figures ne nous signifient pas vulgairement ce qu'ils denotoient d'aenture aux Arabes) sera par ces marques claire, legiere, & plaifante. Car comme les caracteres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. (en respect de plusieurs autres marques signifians nombres) ne sont seulemēt brieues, mais necessaires: voire il semble que sans leur conuenable & naturel ordre, il eust esté impossible à l'homme de paruenir aux secrets d'Arithmetique qu'il a acquis; Et de mesme forte entendra on que ceci sont les caracteres qui au naturel ordre sont requis; lesquels aux quatre numerations generales, & principalement aux rompuz des mesmes qui souuentesfois se rencontrent, voire par toutes computations algebraiques, donnent telle facilité, que ce qu'a plusieurs seront autrement impossible de comprendre, leur sera facile, mettant le tout au iugement de ceux qui entendent la chose.

Or

between \mathcal{V} , \mathcal{W} , \mathcal{W} , etc. and roots such as $\sqrt{③}$; \mathcal{W} 256 = 2, this being

$\sqrt[3]{28}$, and $\sqrt{③}$ 256 is more than 6, this being $2^{\frac{8}{3}} \approx 6.35$ On p. 28 Stevin proclaims the advantage of his symbols ①, ②, etc. over the "cossist" notation used by many sixteenth-century mathematicians, in which system every power of the unknown is represented by its own sign. His symbols are those of Raphael Bombelli (see our Introduction), with the exception of ④. Stevin errs when he states that the "cossist" symbols are of Arabic origin; see J. Tropicke II, pp. 148 et seq.]

DES DEFINITION 29

Or estant ainsi definies les grandeurs du fondement, faut maintenant venir à leurs nombres.

DEFINITION XXXI.

Nombre expliquant la valeur de quantité geometrique, s'appelle nombre geometrique, & obtient le nom conforme à l'espece de la quantité qu'il explique.

EXPLICATION.

Comme le nombre 2. explicant la valeur de la prime quantité A, ou le nombre 1. la valeur de la prime quantité N, ou le nombre $\frac{1}{2}$ la valeur de la prime quantité Y, s'appellent (par ce que les mesmes primes quantitez sont racines) nombres radicaux.

Item le nombre 4. explicant la valeur de la seconde quantité B, & semblablement 1 de O, & $\frac{1}{4}$ de Z, se nomment (par ce que les mesmes secondes quantitez sont quarez) nombres quarez.

Item le nombre 8. explicant la valeur de la tierce quantité C, & semblablement 1 de P, & $\frac{1}{8}$ de A A, s'appellent (parce que les mesmes tierces quantitez sont cubes) nombres cubiques.

Item le nombre 16 explicant la valeur de la quarte quantité D, & semblablement 1. de Q, & $\frac{1}{16}$ de B B, s'appellent (par ce que les mesmes sont quartes quantitez) nombres de quarte quantité; & ainsi des autres semblables.

Item le nombre 2 explicant la valeur du costé de B, & semblablement 1 du costé de O, & $\frac{1}{2}$ du costé de Z, se nomment (parce que se sont costez de quarez) costez de quarez. Et 2 explicant la valeur

[Though the geometrical number has already been introduced on p. 10, its definition is only given in Def. XXXI as the "number expressing the value of a geometrical quantity and receiving its name in conformity with the operation it expresses".] Hence a , a^2 , a^3 , ... are called radical number, square number, cubic number, ..., \sqrt{a} , $\sqrt[3]{a}$, ... side of square, side of cube, ... Then follows a polemic against those who deny THAT ANY NUMBERS CAN BE SQUARES, CUBES, ETC., or that any root is a number; who deny, for instance, that 6, 7,

30 LE I. LIVRE D'ARITH.
 valeur du costé de C, s'appelle costé cubique, & de D,
 costé de quatre quantité, &c.

Item le nombre $\sqrt[4]{4}$ explicant la valeur de H, &
 semblablement $\sqrt[4]{1}$ de M, & $\sqrt[4]{8}$ de X, se nomment
 racines quarrées de racines quarrées, parce que telles
 lignes par la 30 definition sont racines quarrées de ra-
 cines quarrées.

Item le nombre $\sqrt[3]{8}$ explicant la valeur de I, &
 semblablement $\sqrt[3]{1}$ de L, & $\sqrt[3]{8}$ de V, s'appel-
 lent racines cubiques de racines cubiques; parce que
 telles lignes par la 30 definition sont racines cubiques
 de racines cubiques. NOT A.

Il est vrai que $\sqrt{4}$ vaut le mesme que $\sqrt[4]{16}$, comme
 $\sqrt[4]{81}$ vaut 3, comme fait aussi $\sqrt[4]{81}$. Mais entant
 que l'une est ligne comme H, & l'autre costé de quan-
 tité comme D, elles sont par raison à distinguer.

QUE NOMBRES QUELCONQUES
 PEUVENT ESTRE NOMBRES QUARREZ,
 cubiques, etc. Aussi que racine quelconque est nombre.

Puis que les nombres explicans les valeurs des
 quantitez geometriques, reçoivent vn nom conforme à
 la mesme quantité (comme 4 ou 9 & semblables expli-
 cans les valeurs des quarrés, s'appellent pourtant nom-
 bres quarrés. Item 8 & 27, &c. explicans les valeurs
 de cubes, s'appellent pourtant nombres cubiques) s'en-
 suit que 6 ou 7 ou 8, & semblables explicans les valeurs
 des quarrés, se nommeront pourtant aussi nombres
 quarrés. Et 9 ou 10, etc. explicans les valeurs des cubes
 s'appelleront pourtant aussi nombres cubiques. Ce que
 estant apertement ainsi, s'en suit que ceux la fausent
 qui

8 can be called square numbers, or 9 and 10 cubic numbers. Stevin's main argu-
 ment is that $\sqrt{8}$ is part of 8, and hence of the same matter, which is number. It is,
 he says, only possible to say that the roots of 4 and 9 are commensurable with
 them, while the roots of numbers like 8 are incommensurable with them.

DES DEFINITIONS.

31

qui veulent le contraire. Mais quelle est leur raison ? 8 me dira quelque aduersaire ne peut estre nombre carré, par ce qu'il n'y a nul nombre qui multiplie en soi, produise 8. Il est vrai (dirait il) que racine de 8 en soi les produit, mais elle n'est pas nombre : Or ie luy pourrois nier qu'aucun nombre soit pourtant nombre carré, par ce qu'il se trouue nombre qui multiplié en soi produit le mesme nombre, considéré qu'il obtient seulement le nom de carré, pour ce qu'il explique sa valeur, & point pour quelque autre accident: de sorte que 4 ou 9, ou semblables considerez simplement, & abstraicts de quarez, ne sont pas nombres quarez: Mais passant tout ceci, nous respondrons à son propos, prouuant que la $\sqrt{8}$, est nombre en ceste sorte: La partie est de la mesme matiere qu'est son entier; Racine de 8 est partie de son carré 8: Doncques $\sqrt{8}$ est de la mesme matiere qu'est 8 : Mais la matiere de 8 est nombre; Doncques la matiere de $\sqrt{8}$ est nombre: Et par conséquent $\sqrt{8}$, est nombre. Aussi que seroit ce de dire, le carré de $\sqrt{8}$ est 8, mais 8 n'est point carré ? vraiment c'est absurd, & ne se peut par distinction tant faire, que tel fondement ne demeure confus. Doncques $\sqrt{8}$ est nombre, & par conséquent 8, voire & nombre quelconque, comme $\sqrt{6}$, ou $\sqrt{3}$ & semblables expliquant la quantité d'un carré, ou en effect, ou seulement par l'hypothese, est nombre carré. Il est vrai que 4 & 9, & semblables sont quarez de quelque autre propriété que n'est nombre carré 8, & requierent distinction, mais pas faulce, n'y causant confusion, mais plustost facilité, laquelle sera; que ceux la sont nombres quarez à leurs racines commensurables, ceux ci incommensurables.

Nous

Nous pourrions faire plus long discours sur ceste matiere; mais transportant le different entre noz theses mathematiques; Concluons ici pour les raisons susdictes, que tous nombres quels qu'ils soient peuuent estre nombres quarrez, cubiques, &c. Aussi que racine quelconque est nombre.

QUE LA QVINTE QVANTITE'

NE SE DOIBT POINT NOMMER

sursolidum, ou plus long d'un costé.

Les aucuns nomment la quinte quantité *sursolidum*; les autres plus long d'un costé: par *sursolidum* denotent ilz vne sourde quantité solide; Sourde (disent ilz) par ce qu'elle n'a ny racine quarrée, ny racine cubique discrete; enquoi ils s'abusent: car combien que tel accident auient à aucunes, il n'auindra point à infinies autres, car racine de quinte quantité 1024, est 4, & la racine quarrée du mesme nombre 1024, est 32. Item la racine de quinte quantité 32768, est 8, & racine cubique du mesme nombre est 32. Aussi la puissance de quinte quantité de 64, aura (par la 9 proportion du 9 liure d'Eucl.) racine de quinte quantité, & racine quarrée, & racine cubique; Et encore que cela ne fust pas ainsi, ce seroit mauuaise consequence de dire; la quinte quantité n'a point de racine quarrée, ou cubique discrete; ergo elle est absurde; car comme le quarré tient sa racine quarrée, & le cube sa racine cubique, ainsi tient la quinte quantité, sa racine de quinte quantité. Doncques la quinte quantité n'est point sourde, ny *sursolidum*.

Quant à l'appellation de plus long d'un costé, elle est aussi

Stevin states that THE FIFTH QUANTITY SHOULD NOT BE CALLED "SURSOLIDUM", or "longer at one side". Some people use the term *sursolidum* for ⑤ because it is a surd solid, having no square or cubic root. But this is not so, since 1024 has both a fifth root 4 and a square root 32, and 32768 has a fifth root 8 and a cubic root 32. Just as a square has its square root, so ⑤ has its fifth root. [This term *sursolidum* is found in Riese, Rudolff, and others for a^5 , but

DES DEFINITIONS. 33

est aussi mal propre; veu que la quinte quantité R, est vn cube; aussi que plusieurs autres quantitez comme les quartes D, & BB, qui sont aussi plus longues d'un costé, toutesfois ne sont pas quintes quantitez. A fin doncques d'oster d'une part toutes ambiguités, & impropriétés, & que d'autre part aurions vocables ser-uans à la facilité de la doctrine, nous les appellons quarte, quinte, sexte quantité, &c.

QVIL NY A AVCVNS NOMBRES
 ABSVRDES, IRRATIONELS, IR-
 reguliers, inexplicables, ou sourds.

C'est chose tresvulgaire entre les Auteurs d'Arith. de traicter de nombres comme $\sqrt[4]{8}$, & semblables, qu'ils appellent absurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, sourds, &c. Ce que nous nions, à quelque nombre auenir: Mais par quelle raison l'aduerfaire le prouuera ilesprouuer? Il me dict premieremēt, que racine de huit est à nombre Arithmetique (cōme 3 ou 4) incōmensurable, ergo $\sqrt[4]{8}$, est absurde irrationelle, &c. Mais la conclusion est absurde, veu que l'incommensurancē ne cause pas absurdité des termes incommensurables, ce que l'esprouue par la ligne & superficie qui sont grandeurs incommensurables; c'est à dire, qu'ils ne reçoient point de commune mesure, toutesfois ny ligne, ny superficie n'est quantité absurde ny inexplicable car disant que celle là est ligne, & ceste ci superficie, nous les expliquons. Et encore que ceste incommensurancē procreast (ce que toutesfois ne peut estre; mais posons les cas) absurdité à l'une des quatitez comparées, nous trouuerons le nombre Arithmetique

C autan

Stevin's derivation of this term from "surdus" and "solidum" is not generally accepted.] The term "longer at one side" is also wrong, since the fifth quantity R (p. 13) is a cube, and the fourth quantities D and BB are also longer at one side. [This term may also have been taken from Rudolff, who remarks that Boethius calls our $\sqrt[4]{8}$ "altera parte longior". See J. Tropicke II, pp. 148-149, and our Introduction.]

autant coupable, que le radical, car comme la Sphere
 autant que le cube, & le cube autant comme la Sphere,
 est cause de leur dissimilitude; ainsi de ces nombres.
 Mais pour faire encore autre preuue par deux quantitez
 d'un mesme genre de grandeur, prenons le costé & dia-
 gonale d'un quarré, qui sont lignes entre eux (par la der-
 niere proposition du 10. liure d'Euclide) incommensu-
 rables, toutesfois ny diagonale, ny costé (abstrait de
 nombre) n'est ligne absurde ou irrationnelle, l'incommen-
 surance doncques des quantitez, n'est pas l'absurdité d'i-
 celles, mais c'est plustost leur naturelle mutuelle habi-
 tude. L'aduersaire me replique qu'il y a lignes rationel-
 les, & irrationnelles (desquelles traite Euclide en son di-
 xiesme liure) les definitions desquelles (selon Campane
 defi. 5 & 7. que Zambert met la 7 & 8) sont telles: *Toute
 ligne droite proposée s'appelle rationelle. Et les lignes
 à icelle incommensurables, se nomment irrationnelles:*
 Dont il conclud que les nombres explicans ces lignes
 irrationnelles, sont nombres irrationelz. Je respons qu'il
 est notoire que cest argument soit inartificiel consistant
 en seule authorité, à laquelle il faut preferer l'irrefutable
 raison, qui est; Premièrement que demonsturons con-
 tradiction en ceste sorte: Soit ligne proposée la dia-
 gonale (car la definition dict de toute ligne) d'un quarré
 duquel le costé est 2: Or ceste ligne proposée (dict il) est
 rationelle, & le nombre l'explicant fera de mesme qua-
 lité; parquoy le nombre explicant ceste ligne qui est $\sqrt{8}$.
 sera rationel: & d'autre part dict que $\sqrt{8}$, est irra-
 tionelle, ce qui est contradiction. Au second nous pou-
 uons demonsturer (mesmes selon le dire de l'aduersaire)
 que nulle ligne n'est par soi irrationelle: car si l'on dict que
 c'est celle la (à sçauoir diagonale ou costé de quarré)
 qu'on

Now Stevin draws his conclusion "THAT THERE ARE NO ABSURD, IR-
 RATIONAL, IRREGULAR, inexplicable or surd numbers". Such numbers as
 $\sqrt{8}$ are often treated in this way. It is true that $\sqrt{8}$ is incommensurable with an
 arithmetical number, but this does not mean that it is absurd, etc. Or take, for
 instance, a line and an area, which are incommensurable magnitudes, since they
 have no common measure. Moreover, if $\sqrt{8}$ and an arithmetical number are in-
 commensurable, then it is as much (or as little) the fault of $\sqrt{8}$ as of the arith-
 metical number. The side and the diagonal of a square are incommensurable lines,
 but are not absurd. [Here Stevin quotes Euclid X Prop. 118, see *Appendice* p.
 200.] If, following Euclid, in the Campanus and Zamberti edition, we introduce

DES DEFINITIONS. 35

qu'on explique par nombre Arithmetique; & l'autre irrationnelle, s'ensuit que selon l'attribution du nombre Arithmetique, le costé pourra l'une fois estre rationel, autrefois irrationel; doncques il ne l'est pas par soi, mais en respect d'un nombre dont il y a ici question: Tel argument doncques n'est pas pour lui; ains plustost vne declaration de la confusion consistante en son opinion. Qu'est ce qu'il a encore?

Il me mande que ie lui explique quelle chose soit $\sqrt{8}$. Je luy respons qu'il m'explique quelle chose soient $\frac{3}{4}$ (qui selon son dire sont rationels) & puis ie la lui expliquerai. Il me dira d'adventure que $\frac{3}{4}$ (pour changer de voix) sont $\frac{3}{8}$. Et ic lui respons que $\sqrt{8}$ est $\sqrt{\frac{16}{2}}$. Il dict que $\frac{3}{4}$ sont à tout nombre Arithmetique commensurable, & $\sqrt{8}$ à nul d'iceux; Je lui respons que $\sqrt{8}$, est à infiniz nombres comme $\sqrt{2}$. $\sqrt{32}$. commensurable, & $\frac{3}{4}$ à nul d'iceux. Il me dict, que si on partist vne chose en 4 parties egales, que $\frac{3}{4}$ est cela qui denote la quantité de trois d'icelles parties; & ie lui respons que si la grandeur d'un carré fust 8, que $\sqrt{8}$ est le nombre qui denote la quantité de son costé. Item si on luy demande combien soit le quotient de la diuision de 3, par 4, il respondra que c'est le quotient de la diuision de 3 par 4: Et tout par mesme elegance dis-je qu'en extrahant racine quarrée de 8, ce qui en sort est racine quarrée de 8. Ou s'il pense de satisfaire par quelque changement de voix, qui en effect est le mesme, disant que tel quotient sont trois quarts, ie lui ferai le semblable sur la racine, disant que c'est le costé de carré 8. Il veult que nous appliquons les nombres comme $\frac{3}{4}$ & $\sqrt{8}$, à quelque matiere, comme à vne aulne, & dict qu'il me pourra monstret legitimement les $\frac{3}{4}$ d'une aulne

C 2

aulne

the definition "Every given straight line is called rational. And the lines incommensurable with them are called irrational", then we must not believe that the numbers which express these irrational lines are themselves irrational. If the given line is the diagonal of the square of side 2, then $\sqrt{8}$ is rational, and $\sqrt{8}$ cannot be rational and irrational at the same time. Indeed, just as $\frac{3}{4}$ is commensurable with all arithmetical numbers, so is $\sqrt{8}$ commensurable with an infinity of numbers such as $\sqrt{2}$, $\sqrt{32}$, etc. And when you think that you can refute this by a change of expression, then I can answer the same way. If my opponent quotes Euclid VI Prop. 9 to show how to construct $\frac{3}{4}$ of an ell in a legitimate way, then I quote Euclid VI Prop. 13 to show how to construct legitimately $\sqrt{8}$ of an ell. [The "Campanus and Zamberti" probably refers to

36 LE I. LIVRE D'ARITH.
 aulne par la 9 proposition du 6 liure d'Euclide; Et moi
 ie lui monstrerai legitiment la racine quarrée de 8,
 d'une aulne par la 13 proposition du 6 liure du mesme
 Euclide. Car la ligne moyenne proportionelle entre
 toute l'aulne & vne huitiesme partie d'icelle, est $\sqrt[4]{8}$,
 de la mesme aulne.

Les qualitez doncques de $\sqrt[4]{8}$ & $\frac{1}{3}$ (en tant que
 touche ceste question) sont semblables. Or de cho-
 ses semblables se fait mesme iugement; par quoi si
 $\sqrt[4]{8}$, est nombre absurd, irrationel, irregulier, inexpli-
 cable, & sourd: les $\frac{1}{3}$ le seront aussi; Mais l'aduerfaire
 ne concede cela aucunement; ains veut tout au con-
 traire, il faut donc de necessité qu'il confesse que $\sqrt[4]{8}$
 est excellente, rationelle, reguliere, explicable, & bien
 oyante. Ce que nous avons demonsté de $\sqrt[4]{8}$, fera
 aussi entendu de $\sqrt[4]{3}$, & autres racines quelconques:
 car cōbien que de tout ligne ne pouuons legitimemet
 couper racine cubique (à cause que les deux lignes
 moyennes proportionelles entre deux lignes donnees,
 ne sont encore geometriquement inuentees) comme
 faisons racine quarrée, cela n'est pas la coulpe des
 nombres; car ce qu'en lignes ne scauons faire, nous
 l'acheuons par nombres facilement.

Mais a fin que parlions aussi de l'utilité de ceste
 matiere, & que l'on n'estime que ce soit dispute de
 l'ombre de l'asne, faut scauoir que ceste absurde opi-
 nion de nombres absurds, que ce ne seroient pas nom-
 bres, &c. a tellement obscurci la doctrine des incom-
 mensurables grandeurs, que la difficulté du dixiesme
 liure d'Euclide (qui traicte de ceste matiere) est à plu-
 sieurs deuenue en horreur, voire iusques a l'appeller la
 croix des mathemaiciens, matiere trop dure à digerer,
 & en

Euclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum geometricorum libri XV, Basileae, 1546, which has printed the expositions by Bartholomeo Zamberti as well as those by Johannes Campanus. The Campanus version, of the middle of the thirteenth century, was used for the first printed Euclid (Ratdolt, Venice, 1482), and, in a modified form, for the Euclid edition by L. Pacioli (Venice, 1509). The original Zamberti edition of Euclid. appeared in Venice, 1505, and was a Latin translation of the Greek text; the Campanus text was from the Arabic. Euclid VI Prop. 9 shows how "from a given straight line to cut off a prescribed part", and proves it for the case that this part is one third; VI Prop. 13 shows how "between two given straight lines to find a mean proportional".] The same holds for cubic and other roots, even though we cannot construct the

DES DEFINITIONS 37

& en laquelle n'apperçoient aucune vtilité: C'est aussi ce ferme fondement, qui nous à auancé en la description d'icelles qui s'enſuiuera en vn traicté particulier, la ou ſont rendu faciles & claires (à mon auis) en 3 problemes ſeulement, lez difficiles & obscures propositions dudiect Dixiefme, qui en contient ſelon Zambert 118. Voire non pas ſeulement ce qui eſt contenu audiect dixiefme mais encore vn facile infini progres des choſes y commencees, lequel (infini progres diſ-ſe) ſemble incomprehenſible par tel fondement. Et celui qui donnera plus de lieu à la raiſon, qu'à vaine opinion, plus de credit aux deſenſeurs des parfaites & diuines Mathematiques, qu'à ceux qui l'accuſent d'imperfection & d'abſurdité, ne trouuera pas moindre facilité, en pluſieurs operations Mathematiques, qui ſemblent autrement fort difficiles.

Nous concluons doncques qu'il n'y a aucuns nōbres abſurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou ſourds mais qu'il y a en eux telle excellence, & concordance, que nous auons matiere de mediter nuit & iour en leur admirable perfection: Et ſil falloit dire d'abſurdité, ie la concederois pluſtoſt en noſtre entendement, lequel ne peut autant comprendre des ſecrets qui conſiſtent en la nature, qu'il ſoit digne de comparaiſon à ce qu'il ignore. Finalement ce que nous n'auons ſatisfait en ceſte matiere par les argumens precedens, nous l'accomplirons contre tous aduerſaires, par la 4^e theſe de noz theſes Mathematiques.

NOTA.

Aucuns au lieu de la quarte quantité diſent carré
C 3 de

cubic root of a line (since it involves two mean proportionals). This is not the fault of the numbers, since we can achieve easily with numbers what we cannot do with lines.

"This absurd opinion of absurd numbers, that they are not numbers, etc., has obscured the theory of incommensurable magnitudes to such an extent that to many people the difficulty of the tenth book of Euclid (which deals with these matters) has become such a horror that they have called it the cross of mathematicians, a subject too hard to digest and without any use". Stevin has devoted a special essay to its explanation. *Appendice*, pp. 187-201, see also the fourth of his *Mathematical Theses*, *ib.*, p. 202.

38 LE I. LIVRE D'ARITH.
 de quarré; Et de la sexte quantité, quarré de cube, ou cube de quarré; Et de la huitiefme, quarré de quarré de quarré; Et de la neufiefme, cube de cube, &c. ce qui sont des noms de ce qui ne consiste point en grandeur, vrai est qu'ils ont quelque similitude à leur subiect en tant qu'il est nombre, mais trop obscure: Nous n'vfurons doncques pas de ces noms, d'une part pour les incommoditez qui en procedent, d'autre part pour la facilité des autres, comme apparoiſtra aux computations qui s'en feront ci apres.

DEFINITION XXXII.

Racine quarrée algebratique de quantité, est celle qui multipliée en ſoi, produit la meſme quantité. Racine cubique algebratique de quantité, est celle qui multipliée cubiquement, produit la meſme quantité; Et ainſi de la quarte quantité & autres ſuiuantes.

EXPLICATION.

Comme ; ① s'appellent la racine quarrée algebratique de 9 ②, parce que multipliees en elles produiſent 9 ②; Et pour meſme raiſon 4 ② ſe diſent la racine quarrée de 16 ④; Et 2 ② + 3 ①, la racine quarrée de 4 ④ + 12 ③ + 9 ②; Et 2 ① la racine cubique de 8 ③; Et 3 ② + 2 ① la racine cubique de 27 ⑥ + 54

In the *Nota* Stevin warns his readers against the use of expressions such as square of square for the fourth quantity, square of cube for the sixth, etc., as too obscure. [This is directed against the use of such terms as *zenu de zenu*, *zencubus*, etc., used by Rudolff and Riese, see J. Tropfke II, p. 199; also pp. 136, 137.]

DES DEFINITIONS.

39

③ + 36 ④ + 8 ③. Et $\sqrt[3]{3}$ ②, la racine de 3 ②, & ainsi d'autres semblables.

DEFINITION XXXIII.

Le nombre Arithmetique devant la marque de quantité, s'appelle nombre de multitude des quantitez; & dedans la marque, denominateur, ou dignité de quantité: mais derriere la marque, valeur de quantité.

EXPLICATION.

En toute quantité qu'on use en operation algebratique, il y a à considerer trois nombres differens; comme de multitude, denominateur, & valeur de quantité. Par exemple 3 ② 12, c'est à dire trois secondes quantitez vallans douze, de sorte que le 3 est nombre de multitude des quantitez, & 2 denominateur de quantité, mais 12 valeur des quantitez.

Consideré bien ceste definition, à fin que au suiuant la disposition des caracteres ne vous abuse: car comme 19 sont les mesmes cyfres que 91, toutesfois l'une est maieure quantité que l'autre. Tout ainsi ③ 8, sont les mesmes caracterés que 8 ③, mais c'estui ci est bien vn autre que cestui la: car ③ 8 signifie cube, duquel la valeur est 8. Mais 8 ③, denote huit cubes desquels la valeur est ici encore incognue.

DEFINITION XXXIV.

Le nombre radical mis devant la marque de quantité est separé par signe tel X, sera nombre de multitude des quantitez: mais sans

Defs. XXXII—XXXVIII introduce a number of concepts. In our notation: $2x^2 + 3x$ is the square root of $4x^4 + 12x^3 + 9x^2$; in $3x^2 = 12$ the 3 is called "the number of multitudes", the 2 the "denominator" or "dignity", 12 the "value" of the quantity, [Stevin writes 3②12, the sign = for equality does not appear until the 17th century]; $x^3 = 8$ is different from $8x^3$ [③ 8 is different from 8③]; and $x^2\sqrt{9} = \sqrt{9} \cdot x^2$ is different from $\sqrt{9x^2} = 3x$. In Def.

40 LE I. LIVRE D'ARITH.

icelui signe de separation, alors $\sqrt{\quad}$ denote la racine du nombre de multitude, ensemble la racine de la quantité.

EXPLICATION.

Comme $\sqrt{9} \chi \textcircled{2}$, c'est à dire racine de 9 secondes, mais considéré que la $\sqrt{\quad}$ se refere seulement au 9, & point à $\textcircled{2}$, ce que denote la marque de separation χ : de sorte que $\sqrt{9} \chi \textcircled{2}$, vaut autant (veu que $\sqrt{9}$, fait 3) comme 3 $\textcircled{2}$; Mais quand le nombre radical sera a nombre Arithmetique incommensurable, comme $\sqrt{5} \chi \textcircled{2}$, il faut qu'il demeure ainsi; Mais sans icelle separation de la marque χ , comme $\sqrt{9} \textcircled{2}$, Ce sera aussi à dire racine de 9 secondes, mais considéré (par ce qu'il n'y a point de marque de separation) que la $\sqrt{\quad}$ se refere & a 9, & a $\textcircled{2}$, de sorte que $\sqrt{9} \textcircled{2}$ vaut autant comme 3 $\textcircled{1}$. Item $\sqrt{3} 8 \textcircled{3}$ autant comme 1 $\textcircled{1}$.

DEFINITION XXXV.

Toute quantité s'appelle la puissance de sa racine.

EXPLICATION.

Comme carré 9 s'appelle la puissance carrée de sa racine 3; Et 8, puissance carrée de $\sqrt{8}$; & 27, puissance cubique de sa racine 3; & 81, puissance de quarte quantité de sa racine 3. & ainsi des autres en infini.

DEFINITION XXXVI.

+ Signifie plus & - signifie moins.

EXPLICATION.

Il aient à cause de l'incommensuration des nom-

XXXIV the first case is expressed by $\sqrt{9} \chi \textcircled{2}$, the second by $\sqrt{9} \textcircled{2}$; every number is the "power" of its root; + means plus, - minus [here Stevin follows Riese and Rudolff rather than Bombelli]. Defs. XXXVII and XXXVIII introduce commensurable and incommensurable numbers [though Stevin has used the terms before, see p. 35]. In the *Nota* to Def. XXXVIII Stevin makes a distinction between three types of binomials, following distinctions made in Euclid's tenth book: 1) like $5 + 6$, $\sqrt{3} + \sqrt{12}$, where the two terms are com-

DES DEFINITIONS. 41

bres qu'il les faut coniondre ou disioindre, par les motz de plus & moins. Mais par ce que les mefmes se rencontrent fouuent aux operations arithmetiques, tant des nombres algebratiques ou quantitez, que des nombres radicaux, l'on vſe pour briefueté des signes fort commodes, à ſçauoir + ſignifiant plus, & — denotant moins.

DEFINITION XXXVII.

Nombres commensurables ſont ceux aufquels existe quelque nombre qui leur ſoit commune meſure.

EXPLICATION.

Tous nombres Arithmetiques comme 7 & 9 (aufquels l'vnité eſt la commune meſure) ſ'appellent nombres commensurables. Semblablement beaucoup des nombres geometriques comme $\sqrt{27}$, & $\sqrt{3}$, leſquels ont pour commune meſure $\sqrt{3}$, comme apparoiſtera par le 20 probleme.

DEFINITION XXXVIII.

Nombres incommensurables ſont ceux aufquels n'exiſte quelque nombre qui leur ſoit commune meſure.

EXPLICATION.

Comme 4 & $\sqrt{6}$, & autres ſemblables, par ce qu'il n'y a aucun nombre qui leur ſoit commune meſure, ſ'appellent nombres incommensurables.

NOTA.

Les commensurances & incommensurances des nombres qui ſe rencontrent aux binomies (car ceſt des

meſurable, 2) like $4 + \sqrt{7}$, where the ſquares 16, 7 are commensurable, 3) like $4 + \sqrt[3]{7}$, where the ſquares 16, $\sqrt{7}$ are incommensurable. To call [with Euclid] 4 and $\sqrt{7}$ "commensurable in the ſquare" ſeems to Stevin confuſing; he prefers to ſay "4 and $\sqrt{7}$ are incommensurable, but their ſquares are commensurable" — that is language which even the dulleſt people can underſtand.

42 LE I. LIVRE D'ARITH.
binomies que traicterons d'oresnauant) se distinguent
communement en trois especes, desquelles la premie-
re selon nostre maniere est telle:

Quelques deux nombres sont de telle condition,
qu'ils sont commensurables, comme 5 & 6, ou $\sqrt{3}$ &
 $\sqrt{12}$ & semblables.

DEUXIEME ESPECE.

Autres deux nombres y a il de telle qualité, qu'ils
sont incommensurables, mais leurs quarez sont com-
mensurables. Comme 4 & $\sqrt{7}$, sont incommensura-
bles: Mais leurs quarez comme 16 & 7, sont com-
mensurables.

TROISIEME ESPECE.

Il y a autres deux nombres de telle condition, qu'ils
sont incömensurables, & leurs quarez sont aussi incö-
mensurables; comme 4 & $\sqrt{7}$ sont incömensurables
& leurs quarez 16 & $\sqrt{7}$ sont aussi incömensurables.

Or pour distinction de ces trois differences, les au-
tres nomment la premiere vulgairement (par similitu-
de des lignes desquelles traicte Euclide es definitions
de son dixiesme liure) commensurables en longitude;
La seconde incommensurables en longitude; mais
commensurables en potence. Et la troisieme incom-
mensurables en potence & longitude.

Mais selon mon opinion nous nommons ces diffe-
rences plus clairement, disans absolument que tous
deux nombres proposez sont commensurables, ou in-
commensurables. Quant à la commensurance ou in-
commensurance qu'il y a entre leurs potences ou
quarez, celle la ne faut il pas attribuer aux proposez,
mais absolument à leurs potences. Et pour en par-
ler par exemple, qu'est ce si quelcun dict que la peri-

DES DEFINITIONS. 43

pherie d'un circle est droicte en son diametre? Vraiment veu que toutes peripheries sont obliques, il n'y a point de sens, mais si l'on dict que les peripheries sont obliques, & que leur diametres sont droicts, on explique la vraie qualite de l'un & l'autre: Ainsi de dire que 4 & $\sqrt{7}$ sont commensurables en leurs quarez ou potences (veu qu'ils sont incommensurables) il n'y a point de sens. Mais si l'on dict, que 4 & $\sqrt{7}$, sont incommensurables & que leurs potences sont commensurables les plus rudes le pourront entendre.

DEFINITION XXXIX.

Multinomie radical, est vn nombre consistant de plusieurs nombres incommensurables.

EXPLICATION.

Comme $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, parce qu'il consiste de plusieurs nombres incommensurables, s'appelle multinomie radical: Radical, pour distinction du multinomie algebratique de la 26 definition.

DEFINITION XL.

Binomie radical, est multinomie consistant de deux nombres incommensurables: Trinomie radical, de trois. Et ainsi des autres le multinomie s'appelle selon la multitude des nombres incommensurables desquels il existe.

EXPLICATION.

Comme $2 + \sqrt{3}$ est binomie, par ce que 2 & $\sqrt{3}$

44 LE I. LIVRE D'ARITH.
 font deux nombres incommensurables, & pour me-
 me raison s'appelle $2 - \sqrt{3}$ aussi binomie. Et $\sqrt{2} +$
 $\sqrt{3} + 5$ (par ce qu'il a trois nombres incommensu-
 rables) trinomie.

COROLLAIRE.

D'où s'ensuit que $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ & semblables ne sont
 pas binomies, par ce qu'ils sont commensurables, &
 qu'on les peut expliquer par vn nombre, comme sera
 démontré au 14 problème. Toutesfois il auindra
 d'aventure que nous mettrons quelque fois en vn
 multinomie quelques nombres commensurables; mais
 ce sera pour exemple & brieffeté, & on les vsera par
 hypothese, comme s'ils fussent incommensurables,
 comme le semblable se rencontre souuentefois en la
 Geometrie, la ou quelque figure sera d'aventure tra-
 peze, qui doit estre quarré. Mais pour en parler pro-
 prement, deux noms commensurables ne font pas
 deux noms en vne multinomie, veu (comme nous
 auons dict) que l'on en peut faire vn.

DEFINITION XLI.

*Chascun nombre d'vn multinomie s'appelle
 nom, desquels le maieur se dict maieur nom, &
 le moindre, moindre.*

EXPLICATION.

Comme de binomie $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, la $\sqrt{3}$, s'appelle
 maieur nom, & la $\sqrt{2}$ moindre nom.

DEFINITION XLII.

*Multinomie conioinct, est celui duquel les
 noms sont conioincts par plus.*

DES DEFINITIONS. 45

EXPLICATION.

Comme $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, est binomie conioinct, & ainsi $\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3}$ trinomie conioinct.

DEFINITION XLIII.

Multinomie disioinct, est celui duquel les noms sont disioincts par moins.

EXPLICATION.

Comme $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ est binomie disioinct, qu'autres appellent aussi apotome, residu, ou reste. Item $8 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ est trinomie disioinct.

NOTA.

La binomie disioinct, est par Euclide appellé apotome ou reste, & semble qu'il ne l'a voulu nommer binomie, par ce que l'apotome est vne ligne, qui ne contient point en soy l'un des noms qu'on explique. Mais veu que l'appellation de multinomie n'est point en respect de quantité, selon laquelle tout multinomie est aussi bien vne seule ligne comme celle d'un nom; Mais en respect de qualité: Sensuit que l'apotome sera aussi bien binomie; à sçavoir disioinct (veu qu'en l'explicant, il faut vser de deux noms) comme le conioinct. Doncques par binomie disioinct (qui par plusieurs autres, est aussi en vusage, & à mon auis il est plus propre) entendra on le mesme; ce que Euclide signifie par apotome.

DEFINITION XLIIII.

Multinomie en partie conioinct & en partie disioinct, est celui qui a noms conioincts par plus, & autres disioincts par moins.

Def. XXXIV—XLIII introduce "multinomials" — binomials, trinomials, etc. — as numbers consisting of two or more incommensurable numbers, "conjoint" with +, "disjoint" with —. Our "term" is rendered by "name" (Def. XLI).

EXPLICATION.

Comme $\sqrt{7} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$, est multinomie en partie conioinct & en partie disioinct. Ceste definition ne compete point au binomie qui est seulement ou conioinct ou disioinct.

NOTA.

Entre les multinomies les binomies font de la plus grande consideration, à cause que toutes leurs especes font plus notoires, les mesmes à Euclide diligemment defini & dististingué es lignes en son 10 liure; lesquelles appliquerons aux nombres comme sensuit:

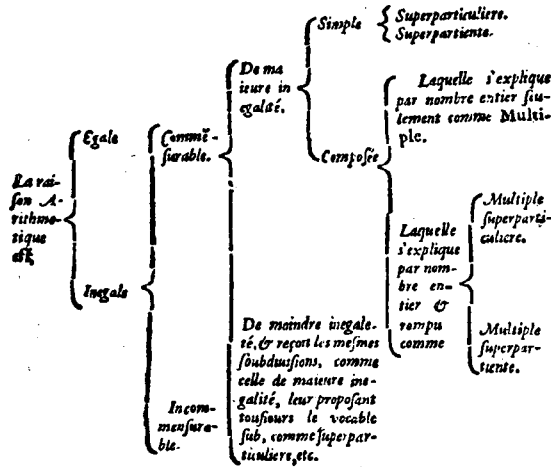
Il y a douze especes de binomies, desquelles les 6 font conioinctes, & 6 disioinctes, & chascune fixaine a deux sortes; desquelles les trois font telles, que la difference des potences quarrées de leurs noms, tient racine quarrée à son maieur nom commensurable. Les autres trois binomies font telles, que la difference des potences quarrées de leurs noms tient racine à son maieur nom incommensurable; Et de chascun de ces trois binomies, les deux ont chascun vn nom à nombre Arithmeticque commensurable; mais le troisieme à ses deux noms, à nombre Arithmeticque incommensurables. Et pour plus grand esclarcissement distinguons leurs differences par telle table.

[Here, in the *Nota* following Def. XLIV, followed by Defs. XLV to LVI, Stevin presents the classification of binomials into 12 classes according to the tenth book of Euclid, using numbers where Euclid uses line segments, e.g. Def. XLV: "first binomial", exemplified by $3 + \sqrt{5}$, where $3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$, $\sqrt{4}$ is commensurable with 3; general expression: $\lambda\rho + \lambda\rho\sqrt{1-\mu^2}$, λ, μ positive rational fractions, $\lambda\rho$ in Stevin's examples is an integer. The full list of these twelve binomials, in modern algebraic notation, can be found in T. L. Heath, *The thirteen Books of Euclid's Elements* III (Cambridge, 1908), pp. 104—109].

Note: Def. LVII defines as "respondent conjoint and disjoint binomials" those with equal terms. We use the expression: conjugate binomials.

DES DEFINITIONS. 55
TROISIÈME PARTIE
 DES DEFINITIONS DE LA
 RAISON ET PROPORTION
Arithmétique, & de leurs dependances.

Table demonstrent l'ordre de la raison Arith-
 metique des definitions suivantes.



QVE 2.4.8.OV 2.3.4.6. ET
SEMBLABLES, NE FONT PAS PROPOR-
tion geometrique. Aussi que nombres comme 1. 2. 3. ou
12. 10. 6. 4. & pareils, ne font pas proportion Arithme-
tique. Item que 15 3. 14 4. 136. & semblables, ne font
pas proportion harmonique.

Third part

[While in Part II Stevin has explained subject matter pertaining to Euclid X, in this Third Part we find Stevin's adaptation of Euclid V and VII, the theory of proportions.]

The table gives a survey of the different orders of ratio to be discussed. Stevin then explains that "proportion, to discuss it somewhat in general before we come to the particular, is the similitude of two equal ratios. Ratio is the comparison of two terms of a similar kind of quantity. And if all the terms of a proportion were magnitudes, it would be a geometrical proportion. But if they were all numbers, the proportion would be an arithmetical one, and if they were all harmonic sounds, it would be a harmonic proportion. Similarly, if the terms are parts of predication or proposition, the proportion is a dialectical one. Thus every proportion receives its name in conformity with the nature of its terms".

56 LE I. LIVRE D'ARITH.

La proportion pour en parler vn peu en general, auant que paruenir au particulier, est la similitude de deux raisons egales. Raison est comparaison de deux termes d'une mesme espee de quantité. Et si tous les termes d'une proportion fussent grandeurs, ce sera proportion geometrique. Mais s'ils estoient tous nombres, sera proportiou Arithmetique. Est estant tous sons harmonieux, c'est proportion harmonique. Semblablement quand les termes sont parties de predication ou de proposition, c'est proportion dialectique. De sorte que toute proportion obtient le nom conforme à la matiere de ses termes. Ce qui estant ainsi, sensuit que ceux la s'abusent, disans que nombres comme 2. 4. 8. ou 2. 3. 4. 6. font proportion geometrique, l'une continue l'autre discontinue, veu qu'il n'y a ici nulles grandeurs, qui toutesfois pour la raison que dessus & par la 3 & 4 definition du 5 liure d'Eucl. sont en toute proportion geometrique requises, veu aussi que c'est vne manifeste proportion Arithmetique. Item, que nombres comme 153. 144. 136. seroient proportion harmonique, puis que les sons entre eux en telle raison, ne font qu'une absurde resonance. Item que 1. 2. 3. & 12. 10. 6. 4. soit proportion Arithmetique, l'une continue l'autre discontinue, considéré que c'est contre la 21 definition du 7 liure d'Euclide, approuvée de tous sonnans ainsi: *Nombres sont proportionels, quand le premier est telle multiplicité partie ou parties du second, comme le troisieme du quatriesme.* Nous pourrions argumenter de ceste matiere plus amplement, esprouuant en beaucoup des manieres, nostre propos, & que le concedé du contraire est vne confusion en la discipline mathematique, laquelle n'enseigne pas que

Numbers such as 2, 4, 8 and 2, 3, 4, 6 form not a geometrical, but an arithmetical proportion [$2 : 4 = 4 : 8$, called by Boethius and others "proportio continua" $2 : 3 = 4 : 6$, "proportio discontinua".] And 1, 2, 3, or 12, 10, 6, 4 do not form a proportion at all, because of Euclid VII Def. 21: "Numbers are proportional when the first is the same multiple or the same part, or the same parts of the second that the third is of the fourth". [This definition is at present labelled 20; $3 - 2 = 2 - 1$ is called a continuous arithmetical proportion in the Pythagorean school, and since $12 - 10 = 6 - 4$, these numbers form a discontinuous arithmetical proportion. Stevin here opposes a number of definitions which via the Pythagoreans and Boethius had entered into sixteenth-century literature, and adheres more closely to Euclid. See J. Tropske III, pp. 1—19.]

DES DEFINITIONS.

57

c'est proportion: mais plustoit empêche à plusieurs de pouvoit suffisamment comprendre si grand mystere. Ce qui est aussi l'occasion pourquoi la theorie de musique est (au respect de ce qui consiste potentiellement en la nature) si obscure & de si peu de personnes exercée, dont entre les compositeurs d'icelle (pour le default de vrai & ferme fondement) naissent plusieurs dissensions, comme en son lieu en traicterons quelque fois plus amplement. Mais veu que ce different sera transféré entre noz theses mathematiques, nous en ferons ici vne fin; Concluans, que proportion geometrique est celle, de laquelle les termes sont grandeurs proportionnelles, les definitions desquelles nous auons descript autre part: Item que proportion harmonique est celle, de laquelle les termes sont sons harmonieux, desquels descriprons les definitions ailleurs: Aussi que la proportion Arithmetique est celle, de laquelle les termes sont nombres proportionels, desquels declairerons les definitions en ceste sorte.

[In Defs. LVIII—LIX arithmetical term and arithmetical ratio are defined, and in Defs. LX—LXXIV different kinds of ratios, e.g. Def. LXVIII: multiple superparticular, $(ka + 1) : a$, k integer > 1 . See our Introduction. In Defs. LXXV—LXXIX, LXXXI—LXXXIV different kinds of proportions are defined, again in accordance with Euclid V and later authors, such as Boethius, e.g. continuous and discontinuous proportions, see above (Defs. LXXVIII, LXXIX), or *invertendo*, from $a : b = c : d$ to $b : a = d : c$ Def. LXXXII.)] Def. LXXX introduces homologous terms of a proportion, such as a , c or b , d in $a : b = c : d$. Def. LXXXV introduces the concept of double and triple ratio in proportional terms: if $a : b = b : c = c : d$, then $a : c$ is said to be the double ratio of $a : b$, and $a : d$ the triple ratio of $a : b$. Since $a/c = (a/b)^2$, and $a/d = (a/b)^3$, we here have to do with the ancient nomenclature for fractions found in such writers as Boethius, see our Introduction.

BRIEFVE COLLECTION
DES CHARACTERES QVON
VSERA EN CESTE ARITH.

VEV que la cognoissance des caracteres est de grande consequence, par ce qu'on les vse en l'Arithmetique au lieu de motz, nous les aiousterons ici, (combien qu'au precedent chascun à esté amplement declairé en sa definition) par ordre tous ensemble comme s'ensuit.

Les caracteres signifians quantitez, desquels l'explication se trouue es 14. 15. 16. 17. 18. defin. sont tels.

- ⊙ Commencement de quantité qui est nombre Arith. ou radical quelconque.
- ① prime quantité.
- ② leconde quantité.
- ③ tierce quantité.
- ④ quarte quantité, &c.

Les caracteres signifians postposées quantitez, desquels l'explication se trouue à la 18 definition, sont tels:

[The Fourth Part, with Defs. LXXXVI—C, deals with “rational computations, such as addition, subtraction, multiplication, division, and what depends on it; the illustrations use simple integers, e.g. 3 times 2 is 6. The Fifth Part, Defs. CI—CIII, introduces the rule of three, the rule of proportional partition, and the *regula falsi*. In the first we compute x from $a : b = c : x$, in the second we solve the equations $x + y = p$, $x : y = a : b$, here p, a, b, c , are given numbers, see Euclid VI Prop. 12, 10, where these problems are solved geometrically. The *regula falsi*, not explained by Stevin, is considered so important that “Algebra (also called *Almucabala*, *Ars magna*, *Regula de cosa*) can be called the *regula falsi* of the quantities”. On the meaning of the *regula falsi* and the three ancient terms, see our Introduction].

- 1 sec ① Vne prime quantité seconde-ment posée.
 4 ter ② Quatre secondes quantitez tierce-ment posées, ou procedans de la prime quantité tierce-ment posée.
 1 ① sec ① Produict d'une prime quantité par vne prime quantité seconde-ment posée.
 5 ④ ter ② Produict de cinq quartes quantitez par vne seconde quantité tierce-ment posée.

Les caracteres signifians racines desquels l'ex-
 plication se trouue à la 29 & 30 definition sont tels:

- √ Racine de quarré.
 √√ Racine de racine de quarré.
 √√√ Racine de racine de racine de quarré.
 √③ Racine de cube.
 √③ Racine de racine de cube.
 √④ Racine de quarte quantité.
 √④ Racine de racine de quarte quantité, &c.

Le caractere signifiant la separation entre le si-
 gne de la racine, & la quantité, duquel l'ex-
 plication se trouue à la 34 definition, est tel.

- X. Comme √3 X② n'est pas le mesme que √3②,
 comme dict est à ladicte 24. definition.

Les caracteres signifians plus & moins, comme
 à la 36 definition, sont tels:

- + Plus.
 — Moins.

Et pour expliquer la racine d'un multinomie (qu'
 aucuns appellent racine vniuerselle) nous vsérons le
 vocable du multinomie comme:

- √ bino 2 + √ 3, cest à dire racine quarrée de bino-
 mie, ou de la somme de 2 & √ 3.

80 LE I. LIVRE D'ARITH. DES DEF.

$\sqrt{\text{trino}} \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$, c'est à dire racine quarrée de trinomie, ou de la somme de $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ & $-\sqrt{5}$.

$\sqrt{\textcircled{3}} \text{bino} \sqrt{2} + \sqrt{3}$, c'est à dire racine cubique de binomie $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$\sqrt{\text{bino}} 2 \textcircled{2} + 1 \textcircled{1}$, c'est à dire racine quarrée de binomie $2 \textcircled{2} + 1 \textcircled{1}$.

$\sqrt{\textcircled{3}} \text{bino} 2 \textcircled{2} + 1 \textcircled{1}$, c'est à dire racine cubique de binomie $2 \textcircled{2} + 1 \textcircled{1}$, &c.

FIN DV I. LIVRE.

Then follows an explanation of the seven terms *problem, given, required, construction, preparation of the demonstration, demonstration and conclusion*; further *theorem and hypothesis*.

[For the explanation of the symbols, see above. It will be seen that Stevin has no fixed convention for the sign of equality. The last three expressions mean $\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, $\sqrt{2a^2 + a}$, $\sqrt[3]{2a^2 + a}$, where a may be replaced by any other symbol, e.g. x].

81

LE SECOND LIVRE
D'ARITHMETIQUE
DE L'OPERATION.

*Premiere partie de l'operation des nombres
Arithmetiques.*

Premiere distinction des quatre nu-
merations des nombres Arith-
metiques entiers.

*De l'addition des nombres Arithme-
tiques entiers.*

PROBLEME I.

ESTANT donnez nombres Arithmetiques entiers a aiouster: Trouuer leur somme.

Explication du donné. Soient les nombres donnez à aiouster telz 379, & 7692, & 4545. *Explication du requis.* Il faut trouver leur somme. *Construction.* On disposera les nombres donnez comme ci deffoubz; de sorte que leurs premieres caracteres vers la dextre, correspondent l'un sous l'autre, & que pareillement correspondent leurs deuxiesmes caracteres, & autres ensuiuans, tirant au deffoubz vne ligne; Puis en aiousterà tous les caracteres du premier reng vers la dextre, disant 9 & 2 font 11, & 5 font 16, desquels on met-

We omit most of the First and Second Parts of this Second Book. The First Part, Probs. I—XVII, deals with operations on arithmetical numbers. Prob. I shows how to add, Prob. II how to subtract, Prob. III how to multiply, Prob. IV how to divide integers. Prob. V shows how to find the greatest common divisor of two integers. The next problems deal with analogous operations on fractions. We reproduce Probs. III and IV to show how Stevin multiplied and divided, and Prob. IX to show how he reduced fractions to a common denominator, using a x sign.

De la multiplication des nombres Arithmetiques entiers.

PROBLEME III.

ESTANT donné nombre Arithmetique entier à multiplier, & nombre Arithmetique entier multiplicateur : Trouver leur produit.

Explication du donné: Soit donné nombre à multiplier 546, & multiplicateur 37. *Explication du requis.* Il faut trouver leur produit. **N O T A.** Pour facilement soluer ceste proposition, il conuient de sçauoir par memoire, la multiplication des neuf simples caracteres 1.2.3.4.5.6.7.8.9. entre eux: comme, que 5 fois 7 font 35, & que 9 fois 6 font 54, & ainsi des autres: Or pour facilité du mesme on prepare communement vne table

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

comme ci dessous, vulgairement dicte la table Pythagorique, son vsage est tel: voulant sçauoir le produit de deux caracteres proposez, on cherche l'un en la premiere colonne à la fenestre, & l'autre en la superieure ligne, & le nombre en l'angle commun demonstre le produit. Par exemple voulant

DE L'OPERATION. 85

ſçavoir combien ſoit 8 fois 3, on cherche 8 en la premiere colonne à fenestre, & 3 en la ſuperieure ligne, & en l'angle commun y a 24, qui denote 8 fois 3 faire 24, & ainſi des autres. *Conſtruction.* On mettera les nombres l'un ſous l'autre, tirât vn tret comme ci deſſous; Puis on dira 7 fois 6 font 42, mettant 2 ſous le 7, & retenant (à cauſe des quatre dixaines) 4 à la memoire; puis 7 fois 4 font 28, & 4 qu'on tient à la memoire, font 32, deſquels on mettera le 2 ſous le 3, retenant 3; puis 7 fois 5 font 35, & 3 qu'on a retenu font 38; leſquels on mettera pareillement deſſous le tret: De meſme forte multipliera on les 546 par le 3 du multiplicateur, diſant 3 fois 6 font 18, mettant le 8 ſous le 3, & ainſi des autres: puis on tirera vn tret aiouſtant par le 1 probleme tout ce qui eſt entre les deux lignes en ceſte forte.

Nombre à multiplier	546	le di que	20202 eſt
Multiplicateur	37	le produict	requis.
	3822	<i>Demonſtration.</i>	Le
	1638		20202 contient le 37
Produict	20202		autant de fois, qu'il

y a vnitez en 546; Doncques par la 93 definition c'eſt multiplication legitime, & 20202 eſt leur produict; ce qu'il falloit demonſtrer. *Conclusion.* Eſtant doncques donné nombre Arithmetique entier à multiplier, & nombre Arithmetique entier multiplicateur, nous auons trouué leur produict; ce qu'il falloit faire.

De la diuiſion de nombres Arithmetiques entiers.

ESTANT donné nombre Arithmetique entier à diuifer, & nombre Arithmetique entier diuiseur : Trouuer leur quotient.

Explication du donné. Soit donné nombre à diuifer 995, & diuiseur 18. *Explication du requis.* Il faut trouuer leur quotient. *Construction.* On mettera le nombre à diuifer & diuiseur en ordre, tirant vne ligne oblique comme ci deffous: disant combien de fois 2 en 9: fait 3 fois (il est vrai qu'il en y a 4 fois restant 1, mais nous dirons ci deffous la raison pourquoy il faut dire seulement 3 fois) qui denote 3 pour premier caractere du quotient, lequel 3 on mettera derriere la ligne oblique, & le 3 restant sur le 9, trenchant le 2 & 9. Puis on multipliera le 8 du diuiseur, par le 3 du quotient, fait 24 lesquels soubstrait de 39 (ici appert l'occasion pourquoy nous auons dict ci dessus, que le 2 est en 9 seulement 3 fois, car si nous eussions dict 4 fois restant 1 sur le 9, & que nous eussions alors multiplié le 8 par tel 4, ce seroit 32, lequel seroit à soubstraire de 19 restant par dessus le diuiseur, ce qui seroit impossible, pourtant il faut toujours mettre tel nombre à la ligne oblique, qu'on puisse soubstraire tel produit d'icelle reste) reste 15, lesquels on mettera dessus le 39, trenchant & le 39, & le 8, & sera alors la disposition des caracteres telle.

1	Or pour trouuer le second caractere
85	du quotient, il faut mettre autrefois le
885 (3	diuiseur sous le nombre a diuifer,
28	mettant le 8 du diuiseur sous le 5, &
	le 2 sous le 8 du premier diuiseur, disant
	combien de fois 2 en 15? fait 5 fois

PROBLEME VIII.

ESTANT donné fraction Arithmetique maieure que vnité : Trouuer combien des vnitez, & plus quelle fraction moindre que vnité, la fraction donnée contienne.

Explication du donné. Soit fraction donnée maieure que vnité $\frac{14}{3}$. *Explication du requis.* Il faut trouuer combien des vnitez, & plus quelle fraction moindre que vnité, ladicte fraction $\frac{14}{3}$ contienne. *Construction.* On diuifera le numerateur 14, par le nominateur 3, donne quotient $4\frac{2}{3}$. Je di que $4\frac{2}{3}$ est le nôbre requis. *Demonstration.* Premièrement que $4\frac{2}{3}$ font quatre vnitez, & plus fraction $\frac{2}{3}$ moindre que vnité, est par soi manifeste: Au second, que les $4\frac{2}{3}$ sont egaux à $\frac{14}{3}$, appert par le 7 probleme; ce qu'il falloit demonstret. *Conclusion.* Estant doncques donnée fraction Arithmetique, &c. ce qu'il falloit faire.

PROBLEME IX.

ESTANT donnez nombres Arithmetiques rompuz d'inegaulx nominateurs: Les reduire en rompuz de commun nominateur.

Explication du donné. Soient les rompuz donnez $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$. *Explication du requis.* Il les faut reduire en nombres rompuz de commun nominateur, c'est à dire qu'il faut trouuer deux autres rompuz egaulx aux donnez, & aians egaulx nominateurs. *Construction.* On multipliera le 4 par 3 fait 12, lequel se mettera sur le 4, semblablement on multiplicra 2 par 5, fait 10, les mesmes mettera on sur le 2, puis 3 par 5 fait 15, lequel on mettera

DE L'OPERATION. 91

deffoubs en ceste forte. Je di que $\frac{10}{3}$ & $\frac{12}{5}$ font les nombres requis, à ſçauoir aians vn commun
 10 12
 1 4
 3 5
 nominateur 15. *Demonſtration.* Que ces nombres trouuez ont 15 pour commun
 nominateur eſt manifeſte, & que les $\frac{10}{15}$
 font egales a $\frac{2}{3}$, apert en cela, que $\frac{2}{3}$ font le premier rompu de $\frac{10}{15}$ par le 6 probleme; Semblablement font les $\frac{12}{15}$ egales à les $\frac{4}{5}$; ce qu'il falloit demonſtrer. *Autre exemple.* Si les nombres donnez fuſſent plus que deus, comme par exemple ces trois $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$. On multipliera 3 par 5 faiſt 15, leſquels autrefois multipliez par 7 font pour commun nominateur requis 105; puis pour trouuer le numerateur reſpondant aux $\frac{2}{3}$ donnez, on multipliera les 105 par les 2 des $\frac{2}{3}$ faiſt 210: les meſmes diuiſez par le 3 des meſmes $\frac{2}{3}$, donné quotient 70, pour numerateur reſpondant à les $\frac{2}{3}$ donnez. Et par meſme moien on trouuera que aux $\frac{4}{5}$ reſpondent 84 & aux $\frac{6}{7}$. 90; Doncques $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ font les trois nombres aiant vn cômun nominateur 105, cômme il eſtoit requis, dont la demonſtration depend de la precedente. Et la diſpoſition des caracteres de l'operation eſt telle. *Conclusion.* Eſtant
 70 84 90 doncques donnez nombres rompuz
 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$ d'inegaulx nominateurs, nous les
 105 auons reduict en rompuz de commun nominateur; ce qu'il falloit faire.

The Second Part, Probs. XVII—LII, deals with operations on geometrical numbers, that is, operations on radicals. Prob. XVIII demonstrates the extraction of the square, cube, fourth and fifth roots of an integer, beginning with $\sqrt{186624}$ ($= 423$) and ending with $\sqrt[5]{3570467226624}$ ($= 324$). For this purpose Stevin, following Stifel, constructs a "Pascal triangle" (p. 106). Prob. XIX shows how two roots of different kinds, such as $\sqrt{5}$ and $\sqrt[3]{6}$, are reduced to roots of the same kind, here $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{36}$. Prob. XX how to find out whether two roots are commensurable or incommensurable. Here we find a first illustration of Stevin's method of dealing geometrically with an arithmetical theorem, that is, by referring to Euclid. To show that $\sqrt{50}$ is commensurable with $\sqrt{2}$, two squares are taken, A of area 50, B of area 2, and two other squares, C of area $50/2 = 25$, D of area 1. Since $A : B = C : D$, Euclid VI Prop. 2 teaches that side A : side B = side C : side D, or $\sqrt{50} : \sqrt{2} = 5 : 1$, so that $\sqrt{50}$ is 5 times $\sqrt{2}$. (Euclid VI Prop. 2: If four straight lines be proportional, then the rectilinear figures similar and similarly described upon them will also be proportional; and if the rectilinear figures similar and similarly described upon them be proportional, then the straight lines will themselves be also proportional, see T. L. Heath II, pp. 240-247). In an analogous way Euclid XI Prop. 37 is invoked in order to prove that $\sqrt[3]{24}$ and $\sqrt[3]{3}$ are commensurable. The next problems, XXI-XXV, deal with multiplication, division, addition, and subtraction of roots. As to Prob. XXV, see Prob. LII.

166 LE II. LIVRE D'ARITH
Troisième distinction des quatre numerations
de multinomies radicaux entiers.

THEOREME.

Plus multiplié par plus, donner produit plus,
& moins multiplié par moins, donner pro-
duit plus, & plus multiplié par moins, ou moins
multiplié par plus, donner produit moins.

Explication du donné. Soit $8-5$ multiplié par $9-7$, en
cette sorte; -7 fois -5 , font $+35$ ($+35$, par ce que
comme dict le theoreme, $-$ par $-$, fait $+$) Puis -7
fois 8 , fait -56 (-56 , par ce que comme dict est au
theoreme, $-$ par $+$, fait $-$) Et semblablement soit
 $8-5$, multiplié par le 9 , & donneront produits 72
 -45 ; Puis aioustez $+22+35$ font 107 . Puis aioustez
les $-56-45$, font -101 ; Et soustraict le 101 de 107
reste 6 , pour produit de telle multiplicatiō. De laquelle
la disposition des caracteres de l'operation est telle:

Explication du requis. Il faut de-

$8-5$	montrer par ledict donné, que $+$
$9-7$	multiplié par $+$, fait $+$, & que $-$
$-56+35$	par $-$, fait $+$, & que $+$ par $-$, ou
$72-45$	$-$ par $+$, fait $-$. <i>Demonstration.</i> Le
6	nombre à multiplier $8-5$, vaut 3 , &

le multiplicateur $9-7$ vaut 2 ; Mais
multipliant 2 par 3 , le produit est 6 ;
Doncques le produit ci dessus aussi 6 , est le vrai pro-
duit: Mais le même est troué par multiplication, la
ou nous auons dict que $+$ multiplié par $+$, donne
produit $+$, & $-$ par $-$ donne produit $+$ & $+$ par

This Theorem teaches that $+$ times $+$ gives $+$, $-$ times $-$ gives $+$, $+$ times $-$ and $-$ times $+$ gives $-$. The arithmetical and the geometrical demonstration are both based on the identity $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$. This proof, based on the distributive law combined with the associative law for addition (the commutative law is taken for granted), is essentially identical with the modern way of proving the theorem (in the theory of rings). It will be seen how freely Stevin uses the notation of negative numbers: -7 times $:5$ gives $+35$, etc.

DE L'OPERATION. 167

— ou — par + donne produict — doncques le theoreme est veritable.

Autre demonstration geometrique.

D 2 F 7

5	10	35	5
B	6	21	G
3	6	21	3

A 2 C 7 E

Soit A B 8 — 5
(à sçavoir A D 8
— D B 5) Puis
A C 9 — 7 (à sçavoir
A E 9 — E C 7)
leur produict fera
C B: ou bien selon
la multiplication
precedente
E D 72 — E F 56
— D G 45 + G

F 35, Lesquelles nous demonstresons estre egales a
C B en ceste sorte. De tout le E D + G F, soustraict
E F, & D G, reste C B. *Conclusion.* Plus doncques multi-
plié par plus, donne produict plus, & moins multi-
plié par moins, donne produict plus, & plus multiplié
par moins, ou moins multiplié par plus, donne pro-
duict moins; ce qu'il falloit demonstret.

Then follows in Prob. XXVI an application to the multiplication of radical multinomials, illustrated by the multiplication of $\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$ by $\sqrt{4} - \sqrt{8} + \sqrt{3}$, and another Theorem with the sign rule for division, Prob. XXVII serving as example. This is followed by addition, subtraction, multiplication and division of radical multinomials, integer as well as fractional ones. This brings us to Prob. XXXIV, which shows how to find out which of two multinomials is the largest; the example is $3 + \sqrt{8}$ and $8 - \sqrt{5}$ ($3 + \sqrt{8} \gtrless 8 - \sqrt{5}$? then $\sqrt{8} \gtrless 5 - \sqrt{5}$, $8 \gtrless 30 - \sqrt{500}$, $0 \gtrless 22 - \sqrt{500}$, $\sqrt{500} \gtrless 22$, $\sqrt{500} \gtrless \sqrt{484}$, hence $>$). Probs. XXXV—XXXVII are substantially arithmetical expressions of the two lemmas of Euclid X Prop. 28: To find two square numbers such that their sum is either also a square, or not a square, see T. L. Heath, III pp. 63—66; for the history of these numbers before Stevin see L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* II, Washington, 1920, pp. 165—167. Then in Prob. XXXVIII Stevin returns to the topic already taken up on pp. 46—54, and shows how to find examples of the twelve binomials of Euclid X.

This is followed in Prob. XXXIX by 16 examples showing how to extract the square root of the twelve Euclidean binomials and of some multinomials,

the 16th example being $\sqrt{17 + \sqrt{140} + \sqrt{84} + \sqrt{60} - \sqrt{56} - \sqrt{40} - \sqrt{24}}$ ($= \sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$). Stevin points out, pp. 209—211, that not all cases have been sufficiently investigated, for example the case in which the square root of a quadrinomial is also a quadrinomial: such cases exist, since

$\sqrt{15 + \sqrt{216} + \sqrt{200} + \sqrt{192}}$ is $\sqrt{6} + \sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (the square of $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ is a quadrinomial if $a : b = c : d$). In Probs. XL—XLIII we find a discussion of the multiplication, division, addition, and subtraction of the roots of radical multinomials, e.g. the division of

$\sqrt{\sqrt{35} + \sqrt{30} + \sqrt{14} + \sqrt{12}}$ (written $\sqrt{\text{quadrinomie } \sqrt{35} + \sqrt{30} + \sqrt{14} + \sqrt{12}}$) by $\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ (written $\sqrt{\text{bino } \sqrt{5} + \sqrt{2}}$), ans.:

$\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$. Prob. XLIII shows how to subtract $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ from $\sqrt{\sqrt{243} + \sqrt{162}}$.

De la soustraction des racines de multinomies radicaux.

PROBLEME XLIII.

Estant donnée racine de multinomie radical de laquelle on soustraiçt, & racine de multinomie radical à soustraire : Trouver leur reste.

Explication du donné. Soit donné racine de multinomie de laquelle on soustraiçt telle : $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{243}$

DE L'OPERATION.

217

+ $\sqrt{162}$, & $\sqrt{\text{bino.}}$ à soustraire telle: $\sqrt{\text{bino.}}$
 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. *Explication du requis.* Il faut trouver leur
 reste. *Construction.* On diuifera la $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{243} +$
 $\sqrt{162}$, par $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, donne (par le 41 pro-
 bleme) quotient 3 (s'ils fussent incommensurables, on
 les solueroit par —) du mesme, pour regle generale,
 soustraiçt 1, reste 2, qui vaut $\sqrt{16}$, & par la mesme
 diuisé le diuiseur $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, faiçt $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{48} +$
 $\sqrt{32}$ laquelle ie diestre la racine requise. *Demon-*
stration. Tout quotient moins vn multiplié par son
 diuiseur, donne produict egal au reste de la soustra-
 ction du diuiseur de nombre à diuifer, par le theore-
 me deuant le 25 probleme.

Nostre quotient moins vn (qui est $\sqrt{16}$) est mul-
 tiplié par diuiseur $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. donnant pro-
 duiçt $\sqrt{48} + \sqrt{32}$. Ergo $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{48} + \sqrt{32}$ est
 egale au reste du soustraction de le diuiseur $\sqrt{\text{bino.}}$
 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, du nombre à diuifer $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{243} + \sqrt{162}$,
 c'est à dire que $\sqrt{\text{bino.}}$ $\sqrt{48} + \sqrt{32}$, est la reste
 requis; ce qu'il falloit demonstret. *Conclusion.* Estant
 doncques donnée racine de multinomie radical, de la-
 quelle on soustraiçt, & racine de multinomie radical
 à soustraire; Nous auons trouué leur reste; ce qu'il
 falloit faire.

THEOREME I.

L *E multinomie ne se peut diuifer en autres
 noms de mesme multitude.*

NOTA. Il faut entendre que nous parlons ici de
 propre multinomie, c'est duquel tous les noms sont
 entre eux incommensurables, car $\sqrt{2} + \sqrt{8}$, n'est pas

In Theorem I we are taught that a binomial of the form $a + \sqrt{b}$, or $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, where the terms are incommensurable, cannot be reduced, that is, if $a + \sqrt{b} = a_1 + \sqrt{b_1}$, $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p_1} + \sqrt{q_1}$, then $a = a_1$, $b = b_1$, $p = p_1$, $q = q_1$. An analogous property holds for multinomials. Theorem II states that $k(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$ is not only commensurable with $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, if k is integer, but is also of the same type in the Euclidean classification of binomials (comp. pp. 46-54).

218 LE II. LIVRE D'ARITH.

binomie, comme nous avons dict au corollaire de la 40 definition. *Explication du donné.* Soit donné binomie tel: $4 + \sqrt{32}$. *Explication du requis.* Il nous faut demonstret que le binomie donné $4 + \sqrt{32}$, ne se peut diuifer en autres deux noms: C'est à dire, qu'on ne peut trouuer deux autres noms, lesquels ensemble soient egaux, ausdicts $4 + \sqrt{32}$; Et pour encore expliquer plus clairement le sens de ce theoreme, posons $6 + 4$, comme s'il fust binomie, le mesme se peut diuifer en autres deux parties, comme $7 + 3$, qui valent aussi 10: Or il nous faut demonstret, que le semblable est impossible en vrai binomie. *Demonstration.*

Soubstrahons premierement du nom $\sqrt{32}$ quelque partie comme 2, commensurable au 4, & restera $\sqrt{32} - 2$, puis aiouons le 2 premierement soubstraiçt, à 4 font 6, & nous aurons alors $6 + \sqrt{32} - 2$, qui est egal à $4 + \sqrt{32}$, mais ce n'est pas binomie.

Soubstrahons au second, de $\sqrt{32}$, quelque partie telle, que le reste soit simple nom comme $\sqrt{2}$, & restera $\sqrt{18}$; Puis aiouant la $\sqrt{2}$, à 4 fera $4 + \sqrt{2}$, & le tout ensemble sera $4 + \sqrt{2} + \sqrt{18}$, lequel combien qu'il est egal à $4 + \sqrt{32}$, toutesfois ce n'est pas binomie.

Soubstrahons au troisieme, de $\sqrt{32}$, quelque partie incommensurable, à chascun nom du binomie donné, comme $\sqrt{7}$, l'aiouant à 4, & demeurera alors $4 + \sqrt{7} + \sqrt{32} - \sqrt{7}$, qui est aussi egal à $4 + \sqrt{32}$, toutesfois ce n'est pas binomie. Le mesme se demonstret en tous autres semblables. *Conclusion.* Le multinomie doncques, ne se peut diuifer en autres noms de mesme multitude; ce qu'il falloit demonstret.

THEOREME II.

Si on multiplie ou diuise multinomie radical, par nombre Arithmetique: Le produict ou quotient sera multinomie, de mesme multitude de noms, & de mesme ordre, comme le multinomie multiplié, ou diuisé. Il sera aussi commensurable audiect multinomie multiplie ou diuisé.

Explication du donné. Soit donné binomie à multiplier ou diuiser tel $\sqrt{12} - \sqrt{24}$; Et nombre Arithmetique multiplicateur ou diuiseur 2. *Explication du requis.* Il faut demonstrier que le produict, ou quotient, sera binomie de mesme multitude de noms, & de mesme ordre, comme $\sqrt{12} - \sqrt{24}$: Item que tel produict ou quotient sera commensurable audiect binomie $\sqrt{12} - \sqrt{24}$. *Preparation de la demonstration.* Multiplions $\sqrt{12} - \sqrt{24}$, par 2, & donne produict par le 26 probleme $\sqrt{48} - \sqrt{96}$; Puis diuisons le mesme binomie $\sqrt{12} - \sqrt{24}$, par 2, & donne quotient par le 27 probleme $\sqrt{3} - \sqrt{6}$. *Demonstration.* Que le produict $\sqrt{48} - \sqrt{96}$; Item le quotient $\sqrt{3} - \sqrt{6}$ sont binomie comme le donné, est manifeste. Il appert aussi par la 56 definition qu'ils sont de mesme ordre: à scauoir toutes trois le douziésime en l'ordre: Item que ledict produict & quotient, sont commensurable au binomie donné, est aussi manifeste; car par la preparation de la demonstration, le produict est le duple du donné & le quotient son subduple. *Conclusion.* Si doncques on multiplie ou diuisé multinomie nombre, par nombre

220 LE II. LIVRE D'ARITH.
Arithmetique; Le produit ou quotient, &c. ce qu'il
falloit demonstret.

COROLLAIRE I.

S'enfuit par le reuers de ce 2 theoreme, que si deux
multinomies font commensurables, qu'ils seront de
mesme multitude de noms, & de mesme ordre.

COROLLAIRE II.

Il est aussi notoire par le precedent theoreme, que si
on multiplie, ou diuise quelque simple racine, par nô-
bre Arithmetique, que le produit ou quotient, sera ra-
cine de mesme qualité comme la racine multipliée, ou
diuisée. Par exemple $\sqrt[4]{3}$ (qui est à nombre Arithmeti-
que incômensurable) multipliée par 2 donne produit
 $\sqrt[4]{4}$ qui est aussi racine de racine, & à nombre Arith-
metique incommensurable.

NOTA. Les precedens deux theoremes, nous serui-
ront entre autres, pour quelques demonstrations en
nostre traité des incommensurables grandeurs.

Prob. XLIV shows how to find a fourth proportional to three given radical numbers, in our notation $\sqrt{7} : \sqrt{5} = \sqrt{6} : x$, ans.: $x = \sqrt{\frac{30}{7}}$; Prob. XLV how to find mean proportionals to two numbers, examples: 1) $2 : x = x : 10$, ans. $x = \sqrt{20}$; then 2) $2 : x = x : y = y : 10$, ans. $x = \sqrt[3]{40}$, $y = \sqrt[3]{200}$, then similarly three, four, and five mean proportionals. In Prob. XLVI we learn how to divide a geometrical number in a given proportion; the example is $\sqrt{7}$, to be divided in ratio of $\sqrt{2}$ to $\sqrt{5}$ (Stevin's answer is incorrect). Probs. XLVII and XLVIII deal with the rule of the false and of the double false position for radicals.

228
TROISIÈME PARTIE
 DE L'OPÉRATION, DES
 NOMBRES ALGÈBRIQUES.

Première distinction, des quatre numérations
 des nombres algébriques entiers.

THEOREME.

Quantité algébrique multipliée par quantité algébrique, donner produit quantité, de laquelle le numérateur est égal, à la somme des numérateurs de la quantité à multiplier, & du multiplicateur.

Exemple 1.

Explication du donné. Soient au fondement des nombres géométriques deuant la 14 définition, la seconde quantité B 4, & la tierce quantité C 8. *Explication du requis.* Il faut démonstrer que B, multiplié par C, donnent produit quinte quantité, à sçavoir la somme de leurs numérateurs qui sont 2 & 3, faifans ensemble 5, numérateur de la quinte quantité. *Démonstration.* Multiplications 4 de B, par 8 de C, font 32, qui est la quinte quantité E.

Exemple II.

Nous auons démontré ci dessus que simple quantité, multipliée par simple quantité, donne produit certaine simple quantité; Il nous faut démonstrer le mesme, en quantités composées. A laquelle

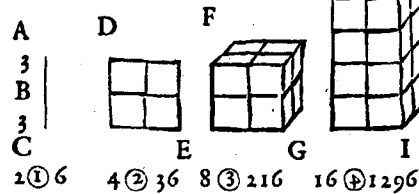
Third part
 First section

The theorem states that an algebraic quantity multiplied by an algebraic quantity gives a product quantity of which the exponent [Stevin's term is nominator] is equal to the sum of the exponents of the quantity to be multiplied and of the multiplier [for the definition of algebraic quantity see Def. XIX-XX]. The theorem states that $ma^p \cdot na^q = mna^{p+q}$ and is demonstrated by an arithmetical and a geometrical proof for the case that p and q are positive integers. Prob. XLIX then shows how to multiply "integer algebraic numbers", that is,

DE L'OPERATION.

229

fin, soit descript la ligne AB, qui soit 1 ① vallant 3, & BC egale à la AB, soit aultre 1 ①, de sorte que toute la AC sera 2 ①; Puis soit descript le quarré DE, duquel le costé soit egal à la AC, le mesme sera de 4 ②, ou 4 quarez, descripts de AB; Puis soit descript le cube FG, duquel le costé soit egal à AC, le mesme sera de 8 ③, ou 8 cubes descripts de 1 ① AB; Puis soit descript le solide rectangle HI, de 16 ④, & ainsi pourroit on proceder es aultres quantitez en infini. Doncques 1 ① AB vallant 3, les 2 ① AC vaudront 6, & les 4 ② DE 36, & les 8 ③ FG 216, & les 16 ④ HI 1296. *Explication du donné.* Soient donnez aux figures ci dessus 2 ① AC 6, & 8 ③ FG 216.



Explication du requis. Il faut demonstret que AC, multiplié par FG, donnent produict quartes quantitez HI, à sçavoir la somme de leurs nominateurs, qui sont 1 & 3, faisans ensemble 4, nominateur de la quarte quantité. *Demonstration.* Multiplions 6 de AC, par 216 de FG, font 1296, qui est la quarte quantité HI. *Conclusion.* Quantité doncques algebraique multipliée par quantité algebraique donne produict quantité, de la-

algebraic multinomials such as $2a^3 - 4a^2 + 3a$ and $2a^4 + 3a^3$, ans.: $4a^7 - 2a^6 - 6a^5 + 9a^4$, a procedure which also holds for radicals such as $\sqrt{3a^2 + 2a}$ and $\sqrt{5a^2 + 4a}$, ans.: $\sqrt{15a^4 + 22a^3 + 8a^2}$.

The "Démonstration" on p. 231 has misprints, corrected by Stevin at the end of his book. The first sentence should be "La démonstration de ce problème est manifeste par les démonstrations des problèmes des multiplications précédentes. Ou autrement....."

230 LE II. LIVRE D'ARITH.
 quelle le nominateur est egal à la somme des nomina-
 teurs de la quantité à multiplier, & du multiplicateur;
 ce qu'il falloit demonstret.

NOTA.

On entendra par ce theoreme, que ② multiplié
 par ④, donne produict ⑧, comme 3 ②, multipliés
 par 7 ④, font 21 ⑥; Et 2 ③, par 4 ①, fait 8 ④; Et 5
 ③, par 2, (qui est par 2 ②) faire 10 ③, &c.

*De la multiplication des nombres alge-
 braiques entiers.*

PROBLEME XLIX.

Estant donné nombre algebratique entier à
 multiplier, & nombre algebratique entier
 multiplicateur: Trouver leur produict.

Explication du donné. Soit donné nombre algebratique
 entier à multiplier tel: $2 \textcircled{3} - 4 \textcircled{2} + 3 \textcircled{1}$; Et
 multiplicateur $2 \textcircled{4} + 3 \textcircled{3}$. *Explication du requis.* Il
 faut trouver leur produict. *Construction.* On disposera
 les donnez en ordre vulgaire comme dessoubz, disant
 $+ 3 \textcircled{1}$ fois $+ 3 \textcircled{3}$, font $+ 9 \textcircled{4}$ (car tel produict estre
 $+ 9$ appert par le theoreme deuant le 26 probleme. Aussi
 que c'est $\textcircled{4}$, appert par ce precedent theoreme, la ou il
 est demonstret, que $\textcircled{1}$ multiplié par $\textcircled{3}$, donne pro-
 duict $\textcircled{4}$) & ainsi des autres; Puis aiouste ce qu'il y a en-
 tre les deux lignes; il y aura produict $4 \textcircled{7} - 2 \textcircled{6} - 6$
 $\textcircled{5} + 9 \textcircled{4}$; La disposition des caracteres de l'opera-
 tion est telle.

DE L'OPERATION.

231

$$\begin{array}{r}
 \text{Nombre à multiplier} \quad 2 \textcircled{3} - 4 \textcircled{2} + 3 \textcircled{1} \\
 \text{Multiplieateur} \quad \quad \quad + 2 \textcircled{4} + 3 \textcircled{3} \\
 \hline
 \quad \quad \quad + 6 \textcircled{6} - 12 \textcircled{5} + 9 \textcircled{4} \\
 4 \textcircled{7} - 8 \textcircled{6} + 6 \textcircled{5} \\
 \hline
 \text{Produict} \quad \cdot \quad 4 \textcircled{7} - 2 \textcircled{6} - 6 \textcircled{5} + 9 \textcircled{4}
 \end{array}$$

Je di que ledict produict, est le produict requis. Et de mesme sorte multipliant $\sqrt{3} \textcircled{1}$, par $\sqrt{2} \textcircled{2}$, fait $\sqrt{6} \textcircled{3}$.

Item multipliant $\sqrt{3} \chi \textcircled{1}$, par $\sqrt{2} \chi \textcircled{2}$, fait $\sqrt{6} \chi \textcircled{3}$.

Item pour multiplier $\sqrt{3} \chi \textcircled{1}$ par $\sqrt{2} \textcircled{2}$, on convertira la prime quantité, aussi en racine, qui est $\sqrt{3} \textcircled{2}$, & leur produict sera $\sqrt{6} \textcircled{4}$.

Item multipliant $\sqrt{\text{bino. } 3 \textcircled{2} + 2 \textcircled{1}}$, par $\sqrt{\text{bino. } 5 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1}}$ font $\sqrt{\text{trino. } 15 \textcircled{4} + 22 \textcircled{3} + 8 \textcircled{2}}$.

Item multipliant $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} \textcircled{2} + \sqrt{2} \textcircled{1}}$, par $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{5} \textcircled{2} + \sqrt{4} \textcircled{1}}$, font $\sqrt{\text{quadrino. } \sqrt{15} \textcircled{4} + \sqrt{12} \textcircled{3} + 10 \textcircled{3} + 8 \textcircled{2}}$.

Demonstration.

La demonstration des ces exemples, des multiplications precedentes est manifeste par les demonstrations des problemes; Ou autrement par la diuision du suiuant probleme. *Conclusion.* Estant doncques donné nombre algebratique entier à multiplier, & nombre algebratique entier multiplieateur; nous auons trouué leur produict; ce qu'il falloit faire.

THEOREME.

Quantité algébrique divisée par quantité algébrique, donner quotient quantité, de laquelle le numérateur est égal à la reste de numérateur du diviseur, soustrait du numérateur de la quantité à diviser.

Exemple 1.

Explication du donné. Soient au fondement des nombres geometriques devant la 14 definition la sexte quantité F 64, & la seconde quantité B 4. *Explication du requis.* Il faut demonstrier que F, divisée par B, donne quotient quarte quantité D, qui est quantité de laquelle le numérateur est égal à la reste de 2, soustrait de 6, numérateurs des donnez. *Demonstration.* Divisons 64 de F, par 4 de B, donne quotient 16, qui est la quarte quantité D.

Exemple II.

Explication du donné. Et pour demonstrier le mesme en quantitez composees; Soient aux figures devant le 49 probleme 16 ④ HI 1296, & 8 ③ FG 216. *Explication du requis.* Il faut demonstrier que HI, divisé par FG, donnent quotient primes quantitez A C; qui sont quantitez de laquelle le numérateur est égal à la reste de 3, soustrait de 4, numérateurs des donnez. *Demonstration.* Divisons 1296 de HI, par 216 de FG, donne quotient 6, qui sont les 2 ④ A C. *Conclusion.* Quantité doncques algébrique, divisée par quantité algébrique, donne quotient quantité de laquelle, &c. ce qu'il falloit demonstter.

Then follows another Theorem, stating that $ma^p : na^q = m/n \cdot a^{p-q}$ for $p > q$, demonstrated for p, q positive integers. In a Note Stevin remarks that 8 ③ divided by 2 is the same as 8 ③ divided by 2 ①, hence 4 ③. Prob. I gives examples of this theorem, the first being $9a^4 - 14a^3 + 6a - 5$ divided by $3a^2$, answer $3a^2 - 4\frac{2}{3}a + \frac{6a}{3a^2} - \frac{5}{3a^2}$ (Stevin has no negative exponents), which is also written as $\frac{9a^4 - 14a^3 + 6a - 5}{3a^2}$; the third example is $32a^3 + 4$ divided by $4a + 2$, answer $8a^2 - 4a + 2$.

DE L'OPERATION. 233

NOTA On entendra par ce theoreme que ④ diuisee, par ②, donner quotient ③, comme 6 ④, diuisees par 3 ②, donnent quotient 2 ③; Et 8 ④, diuisees par 2, (qui est 2 ②) donner quotient 4 ③, &c.

De la diuision des nombres algebrayques entiers.

PROBLEME L.

E Stant donné nombre algebrayque entier à diuiser, & nombre algebrayque entier diuiseur: Trouuer leur quotient.

Exemple 1.

Explication du donné. Soit donné nombre algebrayque entier à diuiser tel: $9 \textcircled{4} - 14 \textcircled{3} + 6 \textcircled{1} - 5$; Et diuiseur 3 ②. *Explication du requis.* Il faut trouuer leur quotient. *Construction.* On disposera les nombres donnez comme ci dessous, disant combien de fois 3 ②, en $9 \textcircled{4}$? fait $+ 3 \textcircled{2}$ (+ par le theoreme deuant le 27 probleme & ② par le theoreme deuant ce 50 probleme) lesquels 3 ②, on mettera au vulgaire lieu du quotient, & alors leur disposition sera telle.

$$\begin{array}{r} 9 \textcircled{4} - 14 \textcircled{3} + 6 \textcircled{1} - 5 \\ 3 \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3 \textcircled{2}) \\ \end{array}$$

Puis on mettera autrefois le diuiseur 3 ②, soubz $- 14 \textcircled{3}$, & on dira, combien de fois $+ 3 \textcircled{2}$, en $- 14 \textcircled{3}$? fait $- 4 \frac{2}{3} \textcircled{1}$; Puis mettât autrefois le diuiseur soubz $+ 6 \textcircled{1}$, on dira combien de fois $+ 3 \textcircled{2}$ en $+ 6 \textcircled{1}$? fait $+ 2 \frac{0}{3} \textcircled{0}$ (ce que deuint tousiours telle fraction algebrayque, quand le nominateur du diuiseur est maieur que le nombre à diuiser) Puis on mettera autre fois le

234. LE II. LIVRE D'ARITH.
 diuiseur foubz — 5, difant; combien de fois 3 ②, en —
 5 ? fait $-\frac{5}{3}$ ③. Et la disposition des caracteres de l'o-
 peration acheuée fera telle:

$$\begin{array}{r} 9 \textcircled{4} - 14 \textcircled{3} + 6 \textcircled{1} - 5 \\ 3 \textcircled{2} \quad 3 \textcircled{2} \quad 3 \textcircled{2} \quad 3 \textcircled{2} \end{array}$$

Le di que $3 \textcircled{2} - 4 \frac{2}{3} \textcircled{1} + \frac{6}{3} \textcircled{0} - \frac{5}{3} \textcircled{0}$ est le quotient
 requis.

Lon pourroit aussi pour solution mettre le nombre
 à diuifer sur vne ligne, & le diuiseur deffoubs, & le
 quotient requis seroit fraction telle.

$$\frac{9 \textcircled{4} - 14 \textcircled{3} + 6 \textcircled{1} - 5}{3 \textcircled{2}}$$

Exemple II.

Explication du donné. Soit donné nombre algebrai-
 que entier à diuifer $4 \textcircled{7} - 2 \textcircled{6} - 6 \textcircled{5} + 9 \textcircled{4}$. Et
 diuiseur $2 \textcircled{4} + 3 \textcircled{3}$. *Explication du requis.* Il faut
 trouuer leur quotient. *Construction.* La construction
 fera par la construction du precedent premier exemple
 assez notoire, parquoi nous metterons seulement
 la disposition des caracteres de l'operation acheuée
 telle:

$$\begin{array}{r} 8 \textcircled{6} \quad 8 \textcircled{5} \\ 4 \textcircled{7} - 2 \textcircled{6} - 6 \textcircled{5} + 9 \textcircled{4} (2 \textcircled{3} - 4 \textcircled{2} + 3 \textcircled{1}) \\ 2 \textcircled{4} + 3 \textcircled{3} + 3 \textcircled{3} + 3 \textcircled{3} \\ 2 \textcircled{4} + 2 \textcircled{4} \end{array}$$

Le di que $2 \textcircled{3} - 4 \textcircled{2} + 3 \textcircled{1}$, est le quotient requis.

Exemple III.

Explication du donné. Soit donné nombre alge-

DE L'OPERATION. 235

braique entier à diuifer 32 ③ + 4, & diuifeur 4 ① + 2.
Explication du requis. Il faut trouuer leur quotient. *Construction.* On difpofera les donnez en ceste forte:

Puis on dira, combien de fois 4 ①
 32 ③ + 4 en 32 ③? fait 8 ② fois, les mettant
 4 ① + 2 au lieu du quotient, puis on multipliera
 le 2 par 8 ②, font 16 ②, qui foub-
 traictes de ce qu'il y a deffus, reftera — 16 ② + 4 &
 leur difpofition fera alors telle:

Puis on mettera autrefois le
 diuifeur, difant, combien de fois
 — 16 ② 4 ① en — 16 ②? fait — 4 ①
 32 ③ + 4 ⑧ ② 4 ① en — 16 ②? fait — 4 ①
 4 ① + 2 fois, les mettant au lieu du quo-
 tient; puis on multipliera le 2
 par — 4 ① fait — 8 ①, qui foubtraict de ce qu'il y a
 deffus, reftera 8 ① + 4, & leur difpofition fera alors
 telle: Puis on mettera autrefois le diuifeur, di-

fant, combien de fois
 8 ① 4 ① en 8 ①? fait 2
 — 16 ② fois, le mettant au lieu
 32 ③ + 4 ⑧ ② — 4 ① du quotient, puis on
 4 ① + 2 multipliera le 2 du
 4 ① + 2 diuifeur, par 2 du
 quotient font 4, qui
 foubtraict de ce qu'il y a deffus, ne reftera rien; & leur
 difpofition acheuee fera alors telle:

8 ① Le di que 8 ②
 — 16 ② — 4 ① + 2, est
 32 ③ + 4 ⑧ ② — 4 ① + 2 le quotient requis.
 4 ① + 2 Et de mefme for-
 4 ① + 2 te, eftant à diuifer
 4 ① + 2 6 ③ + 12, par 2

236 LE II. LIVRE D'ARITH.

① + 2 on trouuera (suiuant le precedent exemple) pour quotient, $3 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1} + 3 + \frac{6}{10+}$.

Item diuisant $\sqrt{6 \textcircled{3}}$, par $\sqrt{3 \textcircled{1}}$, donne quotient $\sqrt{2 \textcircled{2}}$.

Item diuisant $\sqrt{6 \textcircled{X} \textcircled{3}}$, par $\sqrt{3 \textcircled{X} \textcircled{1}}$, donne quotient $\sqrt{2 \textcircled{X} \textcircled{2}}$.

Item pour diuiser $\sqrt{6 \textcircled{4}}$, par $\sqrt{3 \textcircled{X} \textcircled{1}}$, on conuertira la prime quantité aussi en racine, qui est $\sqrt{3 \textcircled{2}}$, & leur quotient sera $\sqrt{2 \textcircled{2}}$.

Item diuisant $\sqrt{\text{trino. } 15 \textcircled{4} + 22 \textcircled{3} + 8 \textcircled{2}}$, par $\sqrt{\text{bino. } 3 \textcircled{2} + 2 \textcircled{1}}$, donne quotient $\sqrt{\text{bino. } 5 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1}}$.

Item diuisant $\sqrt{\text{quadrino. } 15 \textcircled{4} + 12 \textcircled{3} + 10 \textcircled{2} + 8 \textcircled{1}}$, par $\sqrt{\text{bino. } 3 \textcircled{2} + 2 \textcircled{1}}$, donne quotient $\sqrt{\text{bino. } 5 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1}}$.

La demonstration des susdicts exemples, est manifeste par les demonstrations des problemes des diuisions precedentes. Ou autrement par la multiplication du precedent probleme. *Conclusion.* Estant doncques donné nombre algebratique entier à diuiser, & nombre algebratique entier diuiseur, nous auons trouué leur quotient; ce qu'il falloit faire.

Probs. LI and LII show addition and subtraction of algebraic numbers. One example, using a method already previously explained, is

$$\sqrt{27a^2 + 18a} - \sqrt{3a^2 + 2a} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{27a^2 + 18a}{3a^2 + 2a}} - 1 \right) \sqrt{3a^2 + 2a} = (3 - 1) \sqrt{3a^2 + 2a} = \sqrt{12a^2 + 8a}.$$

Seconde distinction des quatre numerations
des nombres algebriques rompuz, &
d'autres computations à icelles
apartenantes.

PROBLEME LIII.

Estant donnez deux multinomies algebriques : Trouver leur plus grande commune mesure.

NOTA. Petrus Nonius au commencement de la troisieme partie de son Algebre, estimoit qu'alors ce probleme n'estoit par generale reigle inuenté, parquoi il en descripuoit quelque maniere a tastons. Nous descriprons sa legitime construction, qui sera semblable à l'operation de l'invention, de la plus grande commune mesure des nombres Arithmetiques entiers du 5 probleme: à sçavoir on diuifera premierement le majeur par le moindre, & puis le diuifeur autrefois par la reste, iusques, à ce qu'il n'y reste rien, &c. comme le tout sera plus clair par exemple.

Explication du donné. Soient donnez deux multinomies algebriques tels: l'un $1 \textcircled{3} + 1 \textcircled{2}$, l'autre

Prob. LIII demonstrates Stevin's method of finding the greatest common divisor of two algebraic numbers. See our Introduction p. 462. The method is illustrated by finding the G.C.D. of $a^3 + a$ and $a^2 + 7a + 6$, ans. $6a + 6$. We do not find the remark that any multiple of $a + 1$ will serve the same purpose.

The method is applied in Prob. LIV, where $\frac{a^3 + a^2}{a^2 + 7a + 6}$ is reduced to

$$\frac{\frac{1}{6} a^2}{\frac{1}{6} a + 1}$$

DE L'OPERATION. 241

$x^2 + 7x + 6$. *Explication du requis.* Il faut trouver leur plus grande commune mesure. *Construction.* On diuifera le multinomie auquel est la superieure quantité, comme est ici le premier donné $x^3 + x^2$, par l'autre (du quotient qui est x) comme audiçt 5 probleme, ne prenons ici cure) en ceste sorte:

$$\begin{array}{r} -6x - 6 \\ x^3 + x^2 \quad \phi \quad (x) \\ \hline x^2 + 7x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ x^2 + 7x + 6 \quad (\frac{1}{x}) \\ \hline 6x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x - 6 \\ 6x + 6 \quad (-1) \\ \hline 6 \end{array}$$

Et restera $-6x - 6$, par les mesmes on diuifera autre fois le precedent diuifeur en ceste sorte:

Et restera $6x + 6$, par les mesmes se diuifera autre fois le precedent diuifeur en ceste sorte:

Et n'y reste rien, parquoy ie di que $6x + 6$, est la plus grande commune mesure requise.

Demonstration. Si l'on mesure combien de fois il y a $6x + 6$, en $x^3 + x^2$, (c'est à dire si on diuise $x^3 + x^2$ par $6x + 6$) se trouue (par le 50 probleme) $\frac{1}{6}x$ fois: Semblablement combien de fois les mesmes $6x + 6$, sont en $x^2 + 7x + 6$, se trouue $\frac{1}{6}x + 1$ fois: Mais que c'est aussi la plus grande commune mesure, est manifeste par ce que $\frac{1}{6}x$ & $\frac{1}{6}x + 1$, sont quantitez (par la 21 definition) entre elles premieres; ce qu'il falloit demonstret. *Conclusion.* Estant doncques donnez deux multinomies algebriques, nous auons trouué leur plus grande commune mesure; ce qu'il falloit faire.

E Stant donné nombre algebratique rompu:
Trouuer son premier rompu.

Explication du donné. Soit donné rompu algebratique tel $\frac{1 \textcircled{2} + 1 \textcircled{2}}{1 \textcircled{2} + 7 \textcircled{2} + 6}$. *Explication du requis.* Il faut trouuer son premier rompu. *Construction.* On trouuera la plus grande commune mesure, de $1 \textcircled{3} + 1 \textcircled{2}$, & $1 \textcircled{2} + 7 \textcircled{1} + 6$, qui par le 33 probleme sera $6 \textcircled{1} + 6$; par les mesmes se diuifera $1 \textcircled{3} + 1 \textcircled{2}$, donne quotient (par le 50 probleme) $\frac{1}{6} \textcircled{2}$, lequel on mettera sur vne ligne; puis on diuifera les $1 \textcircled{2} + 7 \textcircled{1} + 6$, par lesdicts $6 \textcircled{1} + 6$, donne quotient $\frac{1}{6} \textcircled{1} + 1$, lesquels on mettera soubz ladicte ligne en ceste sorte:

le di que le mesme est le premier rompu requis. *Demonstration.* Estant numerateur & nominateur de* nombres entre eux premiers par la 21 definition ils seront le premier rompu, du rompu $\frac{1 \textcircled{2} + 1 \textcircled{2}}{1 \textcircled{2} + 7 \textcircled{2} + 6}$, par la 23 defin. ce qu'il falloit demonstret. *Conclusion.* Estant doncques donné nombre algebratique rompu, Nous auons trouué son premier rompu; ce qu'il falloit faire.

$$\frac{\frac{1}{6} \textcircled{2}}{\frac{1}{6} \textcircled{1} + 1}$$

$$* \frac{\frac{1}{6} \textcircled{2}}{\frac{1}{6} \textcircled{1} + 1}$$

Probs. LV—LX go on to deal with fractional algebraic numbers, *e.g.*
 $\frac{9a^3}{3a^4} - \frac{4a}{2a^2} = \frac{18a^5 - 12a^5}{6a^6} = \frac{6a^5}{6a^6}$ (Prob. LX). Stevin does not reduce the

latter fraction, which he leaves in the form $\frac{6}{6} \frac{5}{6}$. In Prob. LXI we find 5 rules for the extraction of square roots from multinomials, and 4 rules for the extraction of cube roots, with examples, *e.g.* $3a$ is the square root of $9a^2$, $2a^2 + 3a$ is the square root of $4a^4 + 12a^3 + 9a^2$, $2a + 3$ is the cube root of $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$. Stevin recognizes that the square root may have two values: the square root of $4a^4 - 12a^3 + 9a^2$ is $2a^2 - 3a$ as well as $-2a^2 + 3a$, but he only points it out in cases where the multinomial has both + and - terms, not in a case like $4a^4 + 12a^3 + 9a^2$, where $2a^2 + 3a$ is the only root.

Probs. LXII—LXV deal with the elementary operations performed on what we call algebraical forms in more than one variable, in the notation of Def. XXVIII, pp. 24-25. Example: $(4b^2 + 5a)(3b^2 + 2a)$, written: 4 sec ② + 5 ① per 3 sec ② + 2 ①. Ans.: 12 sec ④ + 23 ① M sec ② + 10 ②, or $12b^4 + 23ab^2 + 10a^2$ (Prob. LXII).

Cinquième distinction, de la règle de
trois des quantitez.

V E V que les nombres Arithmetiques, & radicaux, à la précédéte 1^e. & 2^e. partie de ce second liure, ont eu apres leurs computations rationelles, aussi leurs cōputations proportionelles; Senfuit (selon qu'il a esté promis en l'argument) qu'en ceste troisième partie, apres les precedentes computations rationelles des quantitez, il nous faut aussi descripre leurs computations proportionelles, & premierement leur règle de trois. Mais auant que d'y venir nous annoterons quelques articles necessaires, desquels le premier est tel:

LA RAISON POVRQVOI

NOUS APPELLONS REIGLE DE
*trois, ou inuention de quatriesme pro-
portionel des quantitez; ce que
vulgairement se dict equa-
tion des quantitez.*

V E V que les noms conuenables, sont en les sciences de grande importance, & principalement es difficiles, ce n'est point a tort, que nous les choisissons,

If we follow the same order of treatment as in Parts I and II of this Second Book, with respect to arithmetical numbers and radicals, then we must now come to proportional computations with quantities, and in the first place to the rule of three. But we must first explain **THE REASON WHY WE CALL RULE OF THREE**, *or invention of the fourth proportional of quantities, that which is commonly called equation of the quantities.*

Since convenient names are of great importance in the sciences, it is not without reason that we select them, and so we call invention of the fourth proportional what is commonly called equation. There are indeed always three terms to which a fourth proportional has to be found. If we ask how much 3 ells the value of 2 lb. is equated. But the word equation has made students think that

DE L'OPERATION. 265

au lieu des inconuenables: ce qui sera ici, de l'inuention de quatriefme proportionel des quantitez, qui se dict vulgairement equation; Nous le nommons ainsi, parce qu'il est plus commode à la doctrine; Car puis qu'il y a tousiours donnez trois termes, ausquels on cherche vn quatriefme proportionel (comme apparoitra en son lieu) pourquoi ne s'appelleroit ceci pas aussi bien inuention de quatriefme proportionel, comme en tous autres? Quant à ce que l'on me dira, que c'est aussi equation, certes ie le concede, & non pas seulement en quantitez algebriques, mais en tous autres. Par exemple 6 aulnes coustent 4 lb , combien; aulnes? l'on trouue son quatriefme proportionel 2 lb , ce qui est aussi equation, car on egale à la valeur des 3 aulnes, la valeur de 2 lb : toutesfois il n'est point en vse, de le nommer equation; mais on l'appelle (& à bon droit, puis qu'il est plus propre) inuention de quatriefme proportionel: Et pour la mesme raison le nommons nous ici ainsi, à fin que le grand mistere de proportion en quantitez, ensemble les causes des choses, soient plus faciles & notoires, que oncques au parauant. Car ce mot d'equation à faict penser aux apprentifs, que c'estoit quelque matiere singuliere, laquelle toutefois est commune en la vulgaire arithmetique, car nous cherchons à trois termes donnez, vn quatriefme proportionel. Mais comme cela qu'ils nomment equation, ne consiste point en egalité des quantitez absolues, ains en egalité de leurs valeurs; Ainsi consiste ceste proportion en la valeur des quantitez, comme le semblable est vulgaire, aux communes choses corporelles. Par exemple vn beuf vaut 2 moutōs avec 8 lb , ergo 1 mouton vaut 4 lb , lesquels sont quatre termes pro-

it is something singular, though it is really something common in ordinary arithmetic, since we seek a fourth proportional to three given terms. When we speak of equation we do not mean equality of absolute quantities, but of their values, so that we can write, if one ox costs 16 lb., equal to two sheep plus 8 lb.:

1 ox	2 sheep + 8 lb.	1 sheep	4 lb.
16 lb.	16 lb.	4 lb.	4 lb.,

and 16 is to 16 as 4 is to 4. Equally, when 1 ② is equal to 2 ① + 8, then 1 ① is worth 4 [if $x^2 = 2x + 8$, then $x = 4$], and one can write

1 ②	2 ① + 8	1 ①	4
16	16	4	4.

266 LE II. LIVRE D'ARITH.

portionaux, non pas selon la quantité, en respect de laquelle, le produit des extremes, n'est point egal au produit des moiens, mais selon la valeur: car comme 16 lb valeur du beuf, a 16 lb valeur de 2 moutons avec 8 lb, ainsi 4 lb valeur de 1 mouton, a 4 lb valeur du quatrieme terme, lesquels termes proportionels, nous mettrons en ordre, pour plus grande euidence, en ceste sorte:

1 beuf.	2 moutons + 8 lb.	1 mouton.	4 lb
16 lb.	16 lb.	4 lb.	4 lb

Le mesme sentend aussi des quantitez: car quand nous disons, 1 ② est egale, ou vaut 2 ① + 8, ergo. 1 ① vaut 4, ce sont quatre termes proportionaux; mais au respect de leurs valeurs, desquelles le produit des extremes, est seulement egal au produit des moiens. Leur disposition conforme à la precedente est telle:

1 ②.	2 ① + 8.	1 ①.	4.
16.	16.	4.	4.

DES TROIS TERMES

DONNEZ, AVSQUELS POVR LE
temps present, on scait legitimement
trouver un quatrieme
proportionel.

COMME tous problemes en la geometrie, ne sont encore inuentez; Car l'on y desire la quadrature du circle, aussi l'inuention de deux lignes moiennes proportionelles entre deux lignes donnees, &c. lesquelles toutesfois nous sentons par la raison, se pouuoir

[Hence $x^2 : (2x + 8) = x : \text{fourth term}$, and as $x^2 = 2x + 8$, x is equal to the fourth term. The symbols ①, ②, ... here stand for unknown, so that we can render them by x, x^2, \dots . The distinction between known quantities a, b, c, \dots and unknown quantities x, y, z, \dots dates from Descartes' *La Géométrie* of 1637, in which x, x^2, \dots are also for the first time consistently considered as quantities of the same dimension. For Stevin there is always a distinction between a "quantity" such as 2 and its value, which is a number].

OF THE THREE GIVEN TERMS TO WHICH AT THE *present time* a fourth proportional can legitimately be found.

DE L'OPERATION. 267

trouver ; Ainsi nous auient le semblable en l'Arithmetique à l'invention du quatriefme terme proportionel des quantitez ; Car quand le premier & fecond, font composez de ces cinq quantitez ④ ③ ② ① ①, ou de partie d'icelles, ou de leurs deriuatifs, ou qu'il nous soit possible de conuertir les donnez à telles especes, par la reduction (laquelle reduction se declairera ci dessous) alors l'on en peut trouuer (soit le troisieme terme de quantitez quelconque) le quatriefme proportionel: excepté quelque difficulté qui se rencontre aucunesfois en ③ egale a ① + ①, comme nous en dirons plus amplement, à la fin de la premiere difference du 69 probleme. De tous les autres n'est pour l'heure (combien qu'il est possible) trouuée legitime generale reigle. Les différences qui se rencontrent desdictes cinq quantitez (desquelles nous descriuons onze problemes) sont telles:

①	}	①	①	①
②		②	②	②
③		③	③	③
④		④	④	④
④		④	④	④
④		④	④	④
④		④	④	④
④		④	④	④
④		④	④	④
④		④	④	④
④		④	④	④

Il est vrai qu'il y auroit des differences beaucoup d'auantage, prenant ② egale à ②, pour vne & ④ egale à ③ ①, pour autre, &c. Mais veu que ceci sont deriuatifs des autres par la 27 definition, desquels l'operation sera semblable à celle de leurs primitifs nous les comprendrons tous sous vn probleme, qui sera le 78. Et apres le mesme, suiueront encore deux problemes, de l'invention de quatriefme terme proportionel des postposées quantitez.

Il est vrai qu'il y auroit des differences beaucoup d'auantage, prenant ② egale à ②, pour vne & ④ egale à ③ ①, pour autre, &c. Mais veu que ceci sont deriuatifs des autres par la 27 definition, desquels l'operation sera semblable à celle de leurs primitifs nous les comprendrons tous sous vn probleme, qui sera le 78. Et apres le mesme, suiueront encore deux problemes, de l'invention de quatriefme terme proportionel des postposées quantitez.

Not all problems in geometry have been solved, since we should like to find the quadrature of the circle or the construction of two mean proportionals between two given lines [see *Problemata Geometrica*, Introduction.] It is the same in arithmetic, where we can only find the fourth proportional if the first and second terms are composed either of x^4 , x^3 , x^2 , x^1 , x^0 , or some of them, or derived forms [Def. XXVII], or if we can reduce our problems to these. [From now on we render ④, ③, etc. by x^4 , x^3 , ..., but we must not forget that Stevin's symbols may mean any multiple of x^4 , x^3 , ...: if Stevin wants to express our x^4 , he writes 1 ④]. An exception must be made for $x^3 = ax + b$, where there is some difficulty, as we shall see in Prob. 69. For all other cases there is a legitimate

268 LE II. LIVRE D'ARITH.
DES INVENTEURS DE CES
REIGLES DE TROIS DES
QUANTITEZ.

Les inuenteurs de ces reigles de trois des quantitez ont esté.

Mahomet filz de Mose Arabien de { ① egale à ②.
Leurs deriuatifs.
② egale à ① ②.

Et quelque autheur incognu Leurs deriuatifs.

Quelque autre autheur incognu { ③ egale à ① ②.
③ egale à ② ③.

Louys de Ferrare ④ ega. à ③ ② ① ②.

Quant à Diophante, il semble qu'en son temps les inuentions de Mahomet aient seulement esté cognees, comme se peult colliger de ses six premiers liures; Il est vrai qu'il folue de merueilleuses questions, comme nous declarerons en son lieu, mais il conduict communement ses operations par vne admirable subtilité, ainsi, que le premier & second terme, deuiennent ① egale à ②, ou leurs deriuatifs, & aucunesfois, mais rarement, a ② egale a ① ②.

Les deriuatifs de ② egale a ① ②, inuentez par le susdict premier autheur incognu, sont descripts par Lucas Pacciolo.

Quant aux inuentions du second autheur incognu, Cardane se dict les auoir trouué par escript; mais qu'elles n'estoient point diuulgees; Aussi que Scipio Ferreus de Boloigne, aie trouué la premiere sorte, qui est de ③ egale a ① ②; Auquel suiuoit Nicolas Tar-

general rule. They are [Stevin always takes the term with the highest exponent on the left hand side and gives it the coefficient 1, see Rule II, p. 272]: $x = a$, $x^2 = ax + b$, $x^3 = ax^2 + b$, $x^3 = ax^2 + bx + c$, $x^4 = ax + b$, $x^4 = ax^2 + bx + c$, $x^4 = ax^3 + b$, $x^4 = ax^3 + bx + c$, $x^4 = ax^3 + bx^2 + c$, $x^4 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. [a, b, c, d may be positive or negative]. Equations such as $x^2 = a$, $x^4 = ax^2 + b$ can be reduced to previous types, see Def. 27 and Prob. 78.

DE L'OPERATION. 269

Italia Bressian, mais par occasion de quelque dispute qu'il eust de ceste matiere, avec Antonio Maria Florido Venetien, disciple dudit Scipio, en laquelle il discourra quelque chose, par laquelle Nicolas le coniectura, & trouua; Lequel apres beaucoup de prieres de Cardane: le lui à declairé, ce que luy Cardane estoit fondement, par lequel il est venu au bout de plusieurs demonstrations geometriques, de ③ egale à ② ① ④, & leurs dependances, dont il à descript vn liure intitulé *Ars magna*.

Mais l'invention de Louys de Ferrare est n'agueres diuulgée en langue Italienne par Raphael Bombelle grand Arithmeticien de nostre temps.

DE LA REDVCTION.

AVANT que venir à ces problemes de la reigle de trois des quantitez, il nous faut considerer, que souuentesfois lesdicts premier & second, ou egaux termes donnez, ne semblent au premier regard point de ceux dont nous auons dict ci dessus, à sçauoir desquels on sçait trouuer le quatriesme proportionel; toutesfois estant reduicts, on trouuera qu'ils le seront. Il nous faut doncques declairer apertement ceste reduction. & pour l'expliquer premierement par quelque exemple vulgaire; Posons le cas qu'il y a proposé trois termes desquels on requiert le quatriesme proportionel, tels: 8 aulnes de drap, plus 2 liures de poiure, moins 3 liures de canelle, valent 2 liures de poiure, plus 24 escuz, moins 3 liures de canelle, combien vaudront 2 aulnes de drap? Or par ce que le premier & second terme, ont des aoincts de plus & moins, il y a proposé quelque question, qui

[This historical survey ascribes to Al-Khwarizmi ("Mahomet son of Moses the Arabian") the solution of the equations $x = a$, $x^2 = ax + b$ and the "derivatives" of $x = a$ (Def: 27), to an unknown author the derivatives of $x^2 = ax + b$, to another unknown author the solution of $x^3 = ax + b$ and $x^3 = ax^2 + b$, and to Ferrari that of $x^4 = ax^3 + bx^2 + c$. At present, with better information available, we may allow ourselves a smile when we read that Diophantos (c. 250 A.D.) may have known of the inventions of Al-Khwarizmi (c. 800 A.D.). The book by Pacioli which Stevin mentions is his *Summa* of 1494. As to the solution of the cubic equation, Stevin knows of Scipio Del Ferro, Tartaglia and his dispute of 1535 with Florido, of Cardan, Ferrari, and Bombelli; so that he is well-informed on the history of the subject in his own century].

semble confusé, car de multiplier le troisieme par le second, & diuifer le produict par le premier, comme ilz sont proposez (pout en trouuer le quatrieme proportionel) ce seroit chose tresfacheuse, & obscure, parquoy il faut remedier à ce plus & moins (lequel remede s'appelle ici reduction) en ceste sorte: Puis que le premier & second terme donnez, sont par l'hypothese d'egale valeur, s'ensuit que si d'un & d'autre costé, nous aiouſtons, & soustrahons, choses egales; que sommes & restes seront egales, lesquelles nous seruent au lieu des premiers donnez (comme le semblable est chose vulgaire en autres computations communes. Par exemple si l'on dict, 4 aulnes vallent 6 lb, cōbien 5 aulnes? ou autrement 2 aulnes vallent 3 lb, cōbien 5 aulnes? l'un & l'autre dōne vn mesme quatrieme) Soustrahons doncques de chascun terme, à sçauoir du premier & second 2 liures de poiure, & demeurerōt 8 aul. de drap, moins 3 liures de canelle; & qui uallēs à 24 escuz, moins 3 liures de canelle: Puis aiouſtons (par ce qu'il y a moins) à chascun desdicts termes 3 liures de canelle, & la somme de l'un sera 8 aulnes de drap, & de l'autre 24 escuz, lesquels seront autrefois d'egale valeur & ceci sont les termes reduicts, par lesquels on pourra facilement venir au requis; Car disant 8 aulnes de drap valent 24 escuz, combien 2 aulnes? le requis sera par vulgaire solution 6 escuz. Tout de mesme sorte faut il entendre, qu'en la reigle de trois des quantitez (pour le plus & moins & autres semblables occurrences qui se rencontrent en icelle) est aucunefois necessaire telle reduction, aucunefois n'est il pas besoing, comme apparostrā en son lieu par les exemples. Et s'appelle ceci reduction, parce qu'on reduict les termes donnez, en

ON REDUCTION

There are problems which at first sight do not seem to belong to the rule of three of the quantities, but still can be reduced to them. For instance, what is the price of 2 ells of linen if 8 ells of linen plus 2 lb. of pepper minus 3 lb. of cinnamon are worth the same as 2 lb. of pepper plus 24 goldpieces minus 3 lb. of cinnamon? [$8x + 2y - 3z = 2y + 24 - 3z$]. This problem cannot be solved by applying the rule of the fourth proportional because of the terms

DE L'OPERATION. 271

autres termes, qui font de maieure ou moindre valeur, que les premiers, combien qu'ilz demeurent entre eux en la mesme egale raison.

Or aiant declairé quelle chose est reduction, nous viendrons à la pratique de reduire, & la comprendrons en 10 reigles, desquelles la premiere est telle:

with plus and minus, [solving the unknown u from $(8x + 2y - 3z) : (2y + 24 - 3z) = 2 : u$ would be wrong], but can be reduced to it by addition or subtraction of the terms with plus and minus on both sides [subtract $2y$, add $3z$, hence $8x = 24$]. Now we can apply the rule of three: if 8 ells cost 24 goldpieces, how much do 2 ells cost? [$8 : 24 = 2 : x$, $x = 6$]. We shall give 10 rules for such reductions to the rule of three.

The ten rules for reducing equations to the standard forms of p. 267 can be illustrated as follows:

Rule I: Given $2x^4 = 6x^3$, reduce to $2x = 6$.

Rule II: Given $3x^3 = 9x^2 + 12$, reduce to $x^3 = 3x^2 + 4$ (coefficient of x^3 is made 1).

Rule III: Given $4x^3 - 7x = 2x^2 + 3x$, reduce to $4x^3 = 2x^2 + 10x$.

Given $\sqrt{27x^2 + 18x} = 3 + \sqrt{3x^2 + 2x}$, reduce to

$\sqrt{12x^2 + 8x} = 3$, or (Rule VI): $12x^2 + 8x = 9$.

Rule IV: Given $9x^3 + 5x^2 = 4x^3 + 7x$, reduce to $x^3 = \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$.

Rule V: Given $\frac{4x}{5x^2 + 6} = \frac{2}{3}$ reduce to $10x^2 + 12 = 12x$.

Rule VI: Given $3x = \sqrt{2}$, reduce to $9x^2 = 2$.

Given $2x = \sqrt{3x^3 + 4x}$, reduce to $4x^2 = 3x^3 + 4x$.

Stevin remarks that if $2x^3 + \sqrt{3x^2} = 5x^2$, then the common method is to write $\sqrt{3x^2} = -2x^3 + 5x^2$, from which follows

$x^4 = 5x^3 - \frac{25}{4}x^2 + \frac{3}{4}$. There is, however, a shorter method, explained in Rule VII.

Rule VII: Write in the previous example $2x^2 = 5x - \sqrt{3}$, which is easier to solve by means of the fourth proportional than the

$x^4 = 5x^3 - \frac{25}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ obtained by Rule VI. Other example:

$2x^3 + \sqrt{9x^2} = 7x^2$, which according to Rule VII becomes

$2x^3 + 3x = 7x^2$, of which (Prob. 68) the root is 3; however, according

to Rule VI it becomes, by squaring, $x^4 = 7x^3 - 12\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$, which also gives $x = 3$ (Prob. 76).

Stevin does not pay attention to the possible introduction or suppression of roots. This rule of taking square roots does not lead to

results in a case like $\sqrt[3]{x^2}$, or $x^{\frac{2}{3}}$ (which Stevin writes " $\frac{2}{3}$ en circle").

Rule VIII: Given $16x^4 + 24x^3 + 9x^2 = 25$, reduce to $4x^2 + 3x = 5$ by taking the square root on both sides. The possibility $4x^2 + 3x = -5$ is omitted.

Rule IX: Given $200x^2 = 300x + 400$, reduce to $2x^2 = 3x + 4$ by dividing by the G.C.D. of the coefficients.

Rule X: Given $8x^5 + 6x^3 = 12x^4 + 20x^3 + 9x^2 + 15x$, reduce to $2x^2 = 3x + 5$ by dividing by the G.C.D. $4x^3 + 3x$ of both sides. Stevin discards the possibility $4x^3 + 3x = 0$, which has no roots recognized by him.

In a *Nota* he points out that there are also other forms of reduction, such as the transformation of $x^3 = ax + b$ into $x^3 = c$, or $x^4 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

PROBLEME LXVI.

Estant donnez trois termes, desquels le premier 1 ①, le second 4, le troisieme nombre algebratique quelconque: Trouuer leur quatrieme terme proportionel.

Explication du donne. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ①, le second 4, le troisieme 5 ①. *Explication du requis.* Il faut trouuer leur quatrieme terme proportionel. *Construction.* On multipliera le troisieme terme donne 5 ①, par le second 4, fait 20 ①; Puis on diuifera les mesmes par le premier terme donne, qui est 1 ①, & donne quotient (par le 50 probleme) 20: le di que 20 est le quatrieme terme proportionel requis. *Demonstration.* Puis que nous difons par ce probleme, que 5 ① valent 20 la 1 ① vaudra 4. Mettons doncques sous chascun terme sa valeur en ceste sorte:

1 ①.	4.	5 ①.	20.
4.	4.	20.	20.

Et appert que 20 est leur quatrieme terme proportionel, car comme 4 à 4, ainsi 20 à 20; ce qu'il falloit demonstrier.

N O T A. Et de mesme sorte s'entendra, que 1 ① vallant 4, les 5 ① + 3, vaudront 23, car les 5 ① valent par ce probleme 20, & plus 3 font 23.

Item 1 ① vallant 4, les 5 ① - 3, vaudront 17, car 5 ① valent 20, par ce probleme, desquels sousttraict 3 reste 17.

into $x^2 = px + q$, which will be specially discussed in later problems. These are the cases treated by standard rules. From now on begins the discussion of these standard rules.

Prob. LXVI. [Given $x = a$, what is the value of any multinomial in x , or quotient of two multinomials? In the *Nota* this is extended to such cases as: given $x^3 = 3x + 2$, what is $3x^2 + 4x$? For this, first solve $x^3 = 3x + 2$, answer $x = 2$ (Prob. 69). Then $3x^2 + 4x = 20$].

282 LE II. LIVRE D'ARITH.

Item 1 ① vallant 3, alors 1 ② (veu que 1 ③ est la potence quarrée de 1 ①) vaudra 9.

Item 1 ① vallant 3, les 4 ② vaudront 4 fois 9, qui est 36.

Item 1 ① vallant 3, la 1 ③ (veu que 1 ③ est la potence cubique de 1 ①) vaudra 27.

Item 1 ① vallant 3, les 4 ③ vaudront 4 fois 27 qui est 108.

Item 1 ① vallant 5, les 2 ② + 6 ① vaudront 80, car 2 ② vallent 50, & 6 ① vallent 30, font ensemble 80.

Item 1 ① vallant 2, les 3 ③ + 4 ② - 5 ① + 7 vaudront 37, car les 3 ③ vallent 24, & 4 ② vallent 16, & 7 vaut 7, desquels la somme (à sçavoir de 24. 16. 7) est 47, des mesmes soustraiçt 10 pour les - 5 ①, reste pour solution comme dessus 37.

Item 1 ① vallant 3, les $\frac{2 \textcircled{3} + 3 \textcircled{1} - 7}{3 \textcircled{3} - 4 \textcircled{2} + 6}$ vaudront $\frac{20}{51}$, car les 2 ② + 3 ① - 7 vallent 20, & les 3 ③ - 4 ② + 6 vallent 51.

Item 1 ① vallant $\sqrt{2}$, alors 3 ① vaudront trois fois $\sqrt{2}$, qui est par le 22 probleme $\sqrt{18}$.

Item 1 ① vallant $\sqrt{2}$, alors 1 ② (veu que 1 ② est potence quarrée de 1 ①) vaudra 2, & 3 ② vaudront 6.

Item 1 ① vallant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, les 3 ① vaudront trois fois autant, qui est $\sqrt{18} + \sqrt{27}$.

Item 1 ① vallant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, la 1 ② vaudra le quarré de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ qui est $5 + \sqrt{24}$. Et ainsi d'autres semblables. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois termes desquels le premier 1 ①, le second ②, le troisieme nombre algebratique quelconque, nous auons trouué leur quatriesme terme proportionel; ce qu'il falloit faire.

NOTA. Ce 66 probleme differe du suiuant seule-

DE L'OPERATION. 283

ment en cela, que son premier terme donné est d'une prime quantité; mais le suivant de multitude de primes quantitez quelconque, aussi que les exemples du probleme precedent ont le troisieme terme donné de plusieurs quantitez mais le suivant toujours de 1 ①.

Et pour dire de son vtilité & propriété, faut sçavoir, qu'aux problemes suiuaus de trois termes donnez, le troisieme sera toujours nombre algebrique quelconque. toutesfois nous ne donnerons en les exemples des mesmes pour troisieme terme, autre que 1 ①. Comment doncques (pourroit quelcun dire) fera on quant le troisieme terme sera quelque multinomie algebrique, selon la proposition? Le respos que par double operation; Premièrement on trouuera la valeur de 1 ①, par son probleme, qui estant cognu, on trouuera alors par ce 66 probleme la valeur du multinomie proposé pour troisieme terme donné, disant 1 ① donne autant, combien tel multinomie? Par exemple, si les trois termes donnez fussent tels: le premier 1 ③, le second 3 ① + 2, le troisieme 3 ② + 4 ①: On diroit premierement, 1 ③ vaut 3 ① + 2, combien 1 ①? fait par le 69 probleme 2. Puis pour seconde operation, on diroit autrefois 1 ① vaut 2, combien 3 ② + 4 ①, fait par ce 66 probleme pour le quatrieme terme proportionel requis, 20. Et ainsi d'autres semblables. Ce probleme seruira aussi, pour les demonstrations Arithmetiques, des problemes suiuaus, comme le tout apparoustra par les exemples, chascun en son lieu.

E Stant donnez trois termes, desquels le premier ①, le second ②, le troisieme nombre algebratique quelconque: Trouver leur quatriesme terme proportionel.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 2 ①, le second 6, le troisieme 1 ③. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. *Construction.* On diuiera le 6 du second terme, par 2 du premier terme (car puis que le nombre du troisieme terme est 1, il ne fera befoing de faire la vulgaire multiplication du troisieme & second terme, qui seroit 6 ④) donne quotient 3. Je di que 3 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration.* Puis que nous disons par ce probleme, 1 ③ valoir 3, doncques par le 66 probleme, 2 ① vaudront 6, mettons doncques sous chascun terme sa valeur en ceste sorte:

2 ①.	6.	1 ③.	3.
6.	6.	3.	3.

Et appert que 3 est leur quatriesme terme proportionel, car comme 6 a 6, ainsi 3 a 3; ce qu'il falloit demonstret. Quant à la demonstration geometrique, la chose est si notoire, que il ne semble point de mestier.

N O T A. Si les trois termes donnez fussent tels: le premier 5 ①, le second $\sqrt{3}$, le troisieme 1 ③, on diuiera (comme dessus) $\sqrt{3}$, par 5, donne solution $\sqrt{\frac{3}{25}}$. Autrement on pourroit soluer ceste question reduisant

Prob. LXVII. [This is the modification of the previous problem for the case $ax = b, a = 1$].

DE L'OPERATION.

285

les termes egaux par la 6 reigle de la reduction, à sca-
 uoir prenant la potence quarrée, de chaque terme, &
 feront 5 ②, egales à 3, & seroit alors question, requi-
 rant l'operation du 78 probleme.

Item si les trois termes donnez fussent tels: ie pre-
 mier 3 ①, le second $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, le troisieme 1 ①, On
 diuifera (comme dessus) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ par les 3 (des 3 ①)
 donne solution $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{9}}$. Et ainsi d'autres sem-
 blables. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois ter-
 mes desquels le premier ①, le second ②, le troisieme
 nombre algebratique quelconque; Nous auons trouué
 leur quatrieme terme proportionel; ce qu'il falloit
 faire.

Prob. LXVIII. This is the theory of the quadratic equation. There are three cases ("differences"): 1) $x^2 = ax + b$, 2) $x^2 = -ax + b$, 3) $x^2 = ax - b$, where a and b are positive. The case $x^2 = -ax - b$ is omitted, because it only leads to negative solutions, see Art. VIII after Prob. 70. Stevin claims that, contrary to Stifel and Cardan *, he will solve all cases by one method "so that, without change of one syllable the operation will be the same in all

*Cardan's rule: *Querna, da bis*, refers to the case $x^2 = ax + b$; *querna* is abbreviation of *quadratus aequatur rebus et numero*; *da bis* means: *add twice*, namely $\frac{a^2}{4}$ to b in

the radical, and $\frac{a}{2}$ to the radical. *Nuquer, requan* refers similarly to $b = ax + x^2$, $x^2 + b = ax$ (*Ars magna*, Ch. V). On Stifel's *Amasias* see the Introduction.

PROBLEME LXVIII.

E Stant donnez trois termes, desquels le premier ②, le second ① ③, le troisieme nombre algebräique quelconque: Trouver leur quatrieme terme proportionel.

NOTA. Le binomie du second terme donné de ce probleme se peut rencontrer en trois differences à sçavoir:

① + ③. Desquelles les autres en donnent trois
diuerses operations, ausquels Michel
Stiffle à accommodé ce mot *Amisias*.
① - ③. & Cardane liure 10 chap. 5 ce carme,

Querna, dabis. Nuquer, admi. Requon, Minue dami.

Mais nous demonstresons vne seule maniere, par laquelle sans varier d'une syllabe, l'operation sera en toutes trois la mesme: Parquoi faut sçavoir que nous ne les

these cases". This rule, in our notation, is that if $x^2 + px + q = 0$ (p, q pos. or neg.), $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, on the understanding that only positive values of x are selected (negative roots form a subject of later discussion, see Prob. 70). The method is first verified by direct substitution of the answer in the equation ("arithmetical demonstration"), then verified geometrically in the manner familiarized by the Greek and Arab writers (see our Introduction), and finally proved algebraically in a section called *On the origin of the construction of the preceding problem*. Here follows a paraphrase of the "arithmetical" and of the "geometrical" demonstration in the case of $x^2 = ax + b$, Stevin's "first difference", example $x^2 = 4x + 12$, solution: $x = 6$.

286 LE II. LIVRE D'ARITH.
 appellons pas Differences, en respect des operations;
 car comme nous difons, l'operation est en toutes la
 mefme, mais en respect des diuerfitez, de la difpo-
 fition des quantitez, du fecond terme donné.

PREMIERE DIFFERENCE DE
 SECOND TERME ① + ③.

Explication du donné. Soient donnez trois termes
 felon le probleme tels: le premier 1 ②, le fecond 4 ①
 + 12, le troifiefme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut
 trouver leur quatriefme terme proportionel.

Construction.

La moitié de 4 (des 4 ①) est	2
Son carré	4
Au mefme aioufté le ③ donné qui est	12
Donne fomme	16
Sa racine quarrée	4
A la mefme aioufté 2 premier en l'ordre fait	6

le di que 6 est le quatriefme terme proportionel requis:
Demonstration Arithmetique. Puis que nous difons 1 ①
 valoir 6, doncques par le 66 probleme, 1 ② vaudra
 36, & 4 ① + 12 vaudront auffi 36; Parquoi mettons
 fous chacun terme fa valeur en ceste forte:

1 ②.	4 ① + 12.	1 ①.	6.
36.	36.	6.	6.

Et appert que 6 est leur quatriefme terme pro-
 portionel.

Given $x^2 = ax + b$ ($x^2 = 4x + 12$). To find x .

Construction. Take $\frac{a}{2}$ ($= 2$), square it: $\frac{a^2}{4}$ ($= 4$, add b to it:

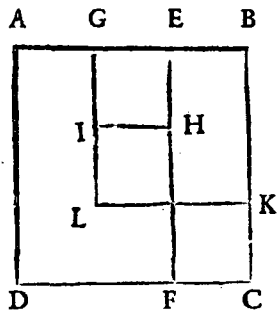
$\frac{a^2}{4} + b$ ($= 16$), take the square root: $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ ($= 4$), to this add $\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ ($= 6$). This is x .

DE L'OPERATION. 287

Autre demonstration geometrique.

Soit descript le quarré A B C D, denotant 1 ②; doncques son costé B C (lequel prouuerons valoir 6, à la fin de la demonstration) sera 1 ①, car multipliant 1 ①



en soi, fait 1 ②. Puis soit menée la ligne EF, parallele avec A D, & soit A E 4; Ergo le rectangle A F (veu que A D est 1 ①) sera 4 ①. Or puis que tout le quarré A B C D, qui est 1 ②, est egal à 4 ① + 12, & que le rectangle A F fait 4 ①, le rectangle E C sera 12.

Doncques les trois termes donnez en nombres, nous les auons ici en grandeurs, à sçauoir A B C D 1 ②, egale à A F 4 ① + E C 12; Et B C est la 1 ①. Or faisons maintenant la construction par ces grandeurs, semblable à la precedente des nombres est ceste sorte:

La moitié de A E 4, qui est G E est	2
Son quarré G E H I	4
Au mesme aiouste le ② donné c'est à dire E C	12
Donc somme, pour le gnomon HIGBCF, ou pour le quarré G B K L (qui est egal audict gnomon)	16
Sa racine B K	4
A la mesme aiouste G E 2 premier en l'ordre, ou en son lieu K C (car K C est egal à G E) fait pour B C	6
Ce qu'il falloit demonstret.	

Other demonstration, a geometrical one. Let square ABCD be x^2 , hence side $BC = x$ (which will be shown to be equal to 6). Draw EF parallel to AD, let AE be a ($= 4$). Hence rectangle $AF = ax$, and rectangle $EC = x^2 - ax = ax + b - ax = b$ ($b = 12$). Hence x^2 , ax , and b are each represented by areas, and x by a line. Now construct $GE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} a$ ($= 2$); area square $GEHI = \frac{1}{4} a^2$ ($= 4$). Add to this $EC = b$ ($= 12$). Then gnomon $HIGBCF =$ square $GBKL = \frac{1}{4} a^2 + b$ ($= 16$). Then $BK = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b}$ ($= 4$). Add to this $GE = \frac{1}{2} a = KC$. Then $BC = \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} a^2 + b = x$.

288 LE II. LIVRE D'ARITH.

NOTA. Le quatriesme terme proportionel vient aucunesfois à nombre Arithmetique incommensurable, duquel nous metterons deux exemples.

Soient premierement les trois termes, desquels on requiert le quatriesme proportionel, tels: le premier 1 ②, le second 6 ① + 3, le troisieme 1 ①.

Construction.

La moitié de 6 (des 6 ①) est 3
 Son carré 9
 Au mesme aiouste le ② donné qui est 3
 Donne somme 12
 Sa racine quarrée $\sqrt{12}$
 A la mesme aiouste 3 premier en l'ordre, fait
 pour solution $\sqrt{12} + 3$

Soient au second les trois termes desquels on requiert le quatriesme proportionel tels: le premier 1 ②, le second $\sqrt{8} \times ①$ le troisieme $\sqrt{3}$.

Construction.

La moitié de $\sqrt{8}$ (de $\sqrt{8} \times ①$) est $\sqrt{2}$
 Son carré 2
 Au mesme aiouste le ② donné, qui est $\sqrt{3}$
 Donne somme $2 + \sqrt{3}$
 Sa racine quarrée $\sqrt{\text{bino. } 2 + \sqrt{3}}$
 A la mesme aiouste $\sqrt{2}$ premier en l'ordre,
 fait pour solution $2 + \sqrt{\text{bino. } 2 + \sqrt{3}}$

Seconde maniere de construction.

Autre maniere d'operation y a il, laquelle demonstres en toutes les trois differences, aussi la mesme, par laquelle il ne fera mestier de conuertir par la 2 reigle de reduction le nombre de multitude de ②, en

This is the construction given by Al-Khwarizmi, see the Introduction. A "gnomon" is the L shaped figure which remains when from a square, e.g. ABCD, a smaller square, e.g. GBKL is cut out (squares may be replaced by rectangles or parallelograms). The term appears in Euclid's *Elements* II, Def. 11. See T. L. Heath, *Manual*, l.c. footn. 12) of our Introduction, pp. 44-45.

DE L'OPERATION. 289
vnité. Et celui qui voudra suiure ceste reigle euitera
aucunefois les rompuz, qui procedent de telle re-
duction.

Soient par exemple les trois termes, desquels on re-
quiert le quatriesme proportionel, tels: le premier 3 ②,
le second 8 ① + 16, le troisieme 1 ①.

Construction.

La moitié de 8 (des 8 ①) est	4
Son carré	16
Au mesme aiouste le produit de 3 (des 3 ②) par le ② donné, qui est	48
Donne somme	64
Sa racine quarrée	8.
A la mesme aiouste 4 premier en l'ordre, fait	12
Qui diuisé par 3 (des 3 ②) donne quotient & so- lution	4

DE VXiESME DIFFERENCE,
DE SECOND TERME — ① + ②.

Explication du donné. Soient donnez trois termes se-
lon le probleme tels: le premier 1 ②, le second — 6 ①
+ 16, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut
trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

La moitié de — 6 (des — 6 ①) est	— 3
Son carré (car — 3 par — 3 fait + 9) est	9
Au mesme aiouste le ② donné, qui est	16
Donne somme	25
Sa racine quarrée	5
A la mesme aiouste — 3 premier en l'ordre, fait	2

Stevin's examples are: for case 1): $x^2 = 4x + 12$; $x = 6$; $x^2 = 6x + 3$;
 $x = \sqrt{12} + 3$; $x^2 = x\sqrt{8} + \sqrt{3}$; $x = \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ (there is a mis-
print 2 for $\sqrt{2}$); $3x^2 = 8x + 16$; $x = 4$. In this last example a "second
way of construction" is shown, in which the two members of the equation are not

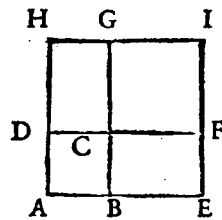
290 LE II. LIVRE D'ARITH.

le di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis.

Demonstration Arithmetique. Puis que nous difons 1 ① valoir 2, ergo par le 66 probleme 1 ② vaudra 4, & -6 ① $+ 16$ vaudront aussi 4, Mettons doncques fous chascun terme sa valeur en ceste sorte :

$$\begin{array}{cccc} 1 \text{ ②.} & -6 \text{ ①} + 16. & 1 \text{ ①.} & 2. \\ 4. & 4. & 2. & 2. \end{array}$$

Et appert que 2 est leur quatriesme terme proportionel requis.

Autre demonstration Geometrique.

Soit descript le quarré A B C D, denorant 1 ②, ergo son costé A B (lequel prouuerons valoir 2 à la fin de la demonstration) fera 1 ①. Puis soit produicte la ligne A B, en E, qui soit B E, & de B E, & B C, soit descript le rectangle B E F C, & semblablement soit produicte B C, en G, & soit C G 3, & de C G, & C D, soit descript le rectangle D C G H, Ergo le rectangle B E F C, (veu que E B est 3, & B C 1 ①) fera 3 ①. Et semblablement fera le rectangle C D G H 3 ①. Or puis que le quarré A B C D 1 ②, est egal a -6 ① $+ 16$, & que les deux rectangles C E, C H font 6 ①. sensuit que le gnomon C F E A H G, fera 16. Doncques les trois termes donnez en nombres nous les auôs ici en grandeurs; à sçauoir A B C D 1 ②, egale a $-C E C H$ 6 ① $+ C F E A H G$ 16; Et

first divided by 3. This second way amounts to the use of the formula

$$x = \frac{1}{a} \left\{ \frac{p^2}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + aq} \right\}, \text{ if } ax^2 = px + q. \text{ Case 2) is illustrated by}$$

$x^2 = -6x + 16$; $x = 2$; $4x^2 = -4x + 24$; $x = 2$. The last example admits of some variations of the previous formula:

DE L'OPERATION. 291

AB est la 1 ①. Or faisons maintenant la construction par ces grandeurs, semblable à la précédente des nombres en ceste sorte:

La moitié des deux lignes FC, & CG, qui soit
 FC est — 3
 Son carré CF IG 9
 Au même aioulté le ② donné, c'est à dire le gnomon CFE AHG 16
 Donne somme pour le carré AEIH 25
 Sa racine AE 5
 A la même aioulté — FC 3 premier en l'ordre, ou en son lieu — BE 3, fait pour AB 2
 Ce qu'il falloit démonstrer.

Seconde maniere de construction, qui est sans convertir le nombre de multitude de ② en unité.

Soient les trois termes, desquels on requiert le quatrième proportionel, tels : le premier 4 ②, le second — 4 ① + 24, le troisième 1 ①.

Construction.

La moitié de — 4 (des — 4 ①) est — 2
 Son carré 4
 Au même aioulté le produit de 4 (des 4 ②) par le ② donné, qui est 96
 Donne somme 100
 Sa racine carrée 10
 A la même aioulté — 2 premier en l'ordre, fait 8
 Qui diuisé par 4 (des 4 ②) donne quotient & solution 2

Et encore pourroit on par l'origine des constructions de ce probleme (laquelle origine nous descriprons der-

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{p}{2\sqrt{a}} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4a} + q} \right\}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{p}{2\sqrt{a}} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2\sqrt{a}}\right)^2 + q} \right\}$$

(Stevin forgets in the "Autrement" to square his $p/2\sqrt{a}$ ($= 1$). Case 3) is illustrated by $x^2 = 6x - 5$, $x = 1$, $x = 5$; both roots are accepted since they are positive. Special attention is paid to the equation $x^2 = 12x - 36$, $x = 6$, which we consider an equation with a double root, but for Stevin it is just one root instead of two, to be found in the same way as all others by the general rule.

292 LE II. LIVRE D'ARITH.
 riere ce probleme) former beaucoup d'autres reigles,
 des mesmes constructions, & viendroient toutes à vne
 mesme solution. Nous en donnerons deux sur la que-
 stion precedente (qui se pourroit aussi appliquer tant à
 la difference precedente, qu'à la suiivante) en ceste forte:
 La moitié de — 4 (des — 4 ①) est — 2
 Son carré 4, qui diuisé par 4 (des 4 ②) donne
 quotient 1
 Au mesme aiouste le ③ donné, qui est 24, donne
 somme 25
 Sa racine carrée 5
 De la mesme soustraiçt la racine de 1, second en
 l'ordre, qui est 1, reste 4
 Qui diuisé par la racine de 4 (des 4 ②) qui est par
 2, donne quotient & solution comme dessus 2

Autrement.

Racine de 4 (des 4 ②) est 2; son double 4, par le
 mesme diuisé 4 (des 4 ①) donne quotient 1
 Au mesme aiouste le ③ donné, qui est 24, donne
 somme 25
 Sa racine carrée 5
 De la mesme soustraiçt la racine de 1, second en
 l'ordre, qui est 1, reste 4
 Qui diuisé par la racine de 4 (des 4 ②) qui est par
 2, donne quotient & solution comme dessus 2
 Mais la premiere de ces trois constructions est la plus
 commode pour euitier computations radicales, qui se
 rencontrent souuentefois en la deuxiesme & troisiem-
 me maniere, lesquelles nous mettons, plus pour rendre
 notoire les causes (qui par l'origine apparoiſteront)
 qu'autrement.

As he explains in *Nota I*: though some call this an exceptional case, it is only another application of the general rule. In *Nota II* Stevin explains how reasonable the case of two roots can be: if it is asked to divide 6 into two parts of product 8, then both roots 4 and 2 are solutions.

DE L'OPERATION. 293
TROISIÈME DIFFÉRENCE,
 DE SECOND TERME ① — ②.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels : le premier 1 ②, le second 6 ① — 5, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatrieme terme proportionel.

Construction.

La moitié de 6 (des 6 ①) est	3
Son carré	9
Au mesme aiouste le ② donné, qui est	— 5
Donne somme	4
Sa racine quarrée	2
A la mesme aiouste 3 premier en l'ordre, fait	
pour maieure solution	5
Ou autrement soustraiet ledict 2. de 3 premier en l'ordre (ce qui est le propre de ceste troisieme difference, dont la raison sera manifeste, par l'origine de ces constructions suiuanes) reste pour moindre solution	1

Je di que 5 & 1 est le quatrieme terme proportionel requis. *Demonstration Arithmetique.* Puis que nous difons 1 ① valoir 5; ergo par le 66 probleme, 1 ② vaudra 25, & les 6 ① — 5 vaudront aussi 25; Mettôs doncques sous chascun terme sa valeur en ceste sorte:

1 ②.	6 ① — 5.	1 ①.	5.
25.	25.	5.	5.

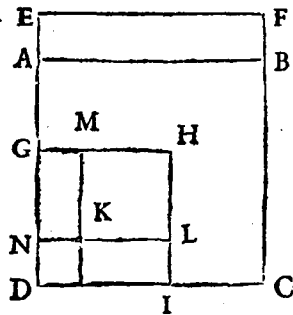
Et appert que 5 est leur quatrieme terme proportionel requis.

294 LE II. LIVRE D'ARITH.

Mais que la solution 1 est aussi véritable, se demonstre par mesme maniere. Mettons sous chascun terme sa valeur en ceste sorte :

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{2}. & 6 \textcircled{1} - 5. & 1 \textcircled{1}. & 1. \\ 1. & 1. & 1. & 1. \end{array}$$

Et appert que 1 est leur quatriesme terme proportional requis.

Autre demonstration Geometrique.

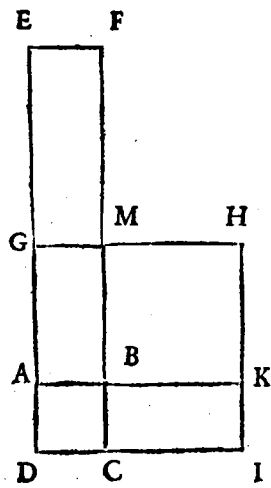
Soit descript le quarré ABCD, denotant 1 $\textcircled{2}$, ergo son costé AD (lequel prouuerons valoir 5 à la fin de la demonstration) sera 1 $\textcircled{1}$. Puis soit produict la ligne DA, en E, & soit toute la DE 6, & de AE, & AB, soit descript le rectangle

A EFB, ergo le rectangle DEFC (veu que DE est 6, & DC 1 $\textcircled{1}$) sera 6 $\textcircled{1}$: Or puis que le quarré ABCD, qui est 1 $\textcircled{2}$, est egal à 6 $\textcircled{1} - 5$, & que le rectangle DEFC fait 6 $\textcircled{1}$, ergo le rectangle AF sera 5. Doncques les trois termes donnez en nombres nous les auons ici en grandeurs, à sçauoir ABCD 1 $\textcircled{2}$, egale à DF 6 $\textcircled{1} - AF$ 5; Et AD est la 1 $\textcircled{1}$. Or faisons maintenant la construction par ces grandeurs, semblable à la precedente des nombres en ceste sorte:

DE L'OPERATION.

La moitié de ED 6, qui soit GD, sera	295
Son carré GHID	3
Au mesme aioufté le — 5 donné, c'est à dire moins le gnomon KLIDGM, qui soit egal au rectangle AF	9
Donne somme pour le carré MHLK	— 5
Sa racine MK ou GN est	4
A la mesme aioufté GD 3 premier en l'ordre, ou en son lieu GE 3, fait pour NE 5. Mais AD est egal à NE (lequel se prouue, soustrahant AD 5 de ED 6, reste AE 1, qui multiplié par AB 5, donne son vrai produit 5) fait doncques pour AD	2

Ce qu'il falloit demonstret.



Mais que la solution 1 est aussi veritable se demõstre geometrique-ment ainsi: Soit descript le carré ABCD, denotant 1 ②, ergo son costé AD, (lequel nous prouuerons valoir 1 à la fin de la demonstration) fera 1 ①. Puis soit produit DA en E, & soit toute la DE 6, & de AE, & AB, soit descript le rectangle AEFB; Ergo le rectangle DEFC (veu que DE est 6 & DC, 1 ①) fera 6 ①. Or puis que le carré ABCD, qui est 1 ②, est egal à

LE II. LIVRE D'ARITH.

296
 6 ① — 5, & que le rectangle D E F C fait 6 ①, ergo le rectangle A F sera 5. Doncques les trois termes donnez en nombres, nous les auons ici en grandeurs, à sçauoir A B C D 1 ②, egale à D E F C 6 ① — A F 5; Et A D est la 1 ①. Or faisons maintenant la construction par ces grandeurs, semblable à la precedente des nombres en cette sorte :

La moitié de E D 6, qui soit G D sera	3
Son carré G H I D	9
Au mesme aiouste le — 5 donné, c'est à dire moins le gnomon B K I D G M, qui soit egal au rectangle A F	— 5
Somme pour le carré M H K B	4
Sa racine M B ou G A est	2
La mesme soustraiçt de G D 3, premier en l'ordre reste pour A D	1
Ce qu'il falloit demonstret	

NOTA I. Quant à l'exception qu'aucuns font en ceste troisieme difference ce ne doit (à mon auis) point estre d'exception; veu que nous venons au vrai requis par generale reigle, & par vne mesme maniere. Prenons pour exemple, que les trois termes, desquels on requiert le quatrieme proportionel soient tels: le premier 1 ②, le second 12 ① — 36, le troisieme 1 ①, & faisons en operation, semblable à la precedente en ceste sorte :

La moitié de 12 (des 12 ①) est	6
Son carré	36
Au mesme aiouste le ② donné, qui est	— 36
Donne somme	0
Sa racine quarrée	0

DE L'OPERATION.

297

A la mesme aiouste 6 premier en l'ordre, fait pour
premiere solution 6

Ou autrement o cinquesme en l'ordre sou-
straiete de 6 premier en l'ordre, restera pour se-
conde solution 6

Et appert que celui qui suiura la generale reigle, ne se-
ra en rien deceu.

NOTA 2. Quelqu'un pourroit doubter, que veult
signifier la double solution de ceste troisieme differen-
ce (qui se peuuent rencontrer, comme en aucuns exem-
ples suiuaus en six diuerses sortes) & comment l'une &
l'autre pourra estre bonne. Or combien que ceci appa-
roistra assez en diuerses exemples d'algebre suiuaus ;
Toutesfois pour ceux qui ce pendant pouroient estre
en doute, nous en dirons, ici quelque chose. Posons le
cas, qu'il y a propose de partir 6 en deux parties telles,
que leur produit soit 8. On trouuera par la premiere
maniere que l'une nombre requis sera 4, & par l'autre
maniere, se trouuera 2. Mais que l'un & l'autre solu-
tion soit bonne, & manifeste. Car si on dict que l'un
nombre est 4, doncques soustraiete 4 de 6, reste 2 pour
l'autre nombre, lesquels 4 & 2 donnent produit selon
le requis 8. On si on dict par la seconde maniere que
l'un nombre est 2, ergo soustraiete 2 de 6 reste 4 pour
l'autre nombre, lesquels 2 & 4 donnent le mesme pro-
duit requis 8. En ceste question doncques & sembla-
bles voit on l'usage de ceste double solution.

NOTA 3. Nous pourrions donner exemples en la
seconde & troisieme difference, la ou se rencontrent
nombres radicaux, comme nous auons fait à la prece-
dente premiere difference; Mais veu que l'operation
est en toutes trois la mesme, comme il appert, &

298 LE II. LIVRE D'ARITH.
 comme nous auons promis d'exhiber au commence-
 ment de ce probleme, il ne fera point de mestier.

DE L'ORIGINE DE LA CON-
 STRUCTION DV PRECEDENT LXVIII.
 PROBLEME.

Nous auons amplement fait aux constructions
 precedentes leurs demonstrations tant Geometriques,
 qu'Arithmetiques; Mais encore n'est pas notoire, par
 icelles l'occasion qui a fait inuenter à Mahomet telle
 reigle. A fin doncques que la chose soit entendue par-
 faitement nous la declarerons par ses causes comme
 sensuit.

Quand ② est egale à ① ③, nous la pouuons redui-
 re, en ①, egale à ③, & alors est la valeur de ① no-
 toire par le precedent 67 probleme, & de telle redu-
 ction, est colligée la maniere de ladicte construction
 comme apparoistra. Soit par exemple:

$$1 \text{ ② } \text{ egale à } -6 \text{ ① } + 16.$$

Qui sont le premier & second terme, de la premiere
 construction, de la seconde difference; Et aiousters à
 chaque partie 6 ①, & seront

$$1 \text{ ② } + 6 \text{ ① } \text{ egales à } 16.$$

Reste maintenant de trouver quelque ③, qui aiou-
 sté à 1 ② + 6 ①, que tel trinomie aie racine, qui soit 1
 ① + quelque ③. Or pour trouuer tel nombre, il ne
 faut que multiplier la moitié de 6 (des 6 ①) qui est 3,
 en soi fait 9, & on l'aura (la raison pourquoi le quar-
 ré de la moitié du nombre de ①, est toujours le ③,
 qu'il faut aiouster à tel binomie, est par cela manifeste,
 que le produit du nombre de ②, qui est ici vnité, mul-

Stevin shows how Al-Khwarizmi found the method to solve the quadratic equation, namely by completing the square. Though negative solutions are not admitted, negative numbers are used as elsewhere in *L'Arithmétique*: the equation $x^2 = 6x - 5$ is written $x^2 - 6x = -5$, then $x^2 - 6x + 9 = 4$, hence $x - 3 = 2$ and $-x + 3 = 2$, or $x = 5$ and $x = 1$. The case that the coefficient of x^2 is not unity is also discussed.

DE L'OPERATION. 299

tiplié par le \odot , est toujours egal au quarré de la moitié du nombre de $\textcircled{1}$; Et qui encore veut sçavoir pourquoi tel produict est toujours egal au quarré, de la moitié du nombre de $\textcircled{1}$; Qu'il multiplie $1 \textcircled{1} +$ quelque \odot , en soi, & facilement verra la cause, es nombres precedans de l'operation de telle multiplication) Aioustés doncques 9, à chascune des egales parties, & seront

$$1 \textcircled{2} + 6 \textcircled{1} + 9, \text{egales à } 25.$$

Puis extrahons de chascque partie racine quarrée, & seront:

$$1 \textcircled{1} + 3, \text{egales à } 5.$$

Puis soustrahons de chascune partie 3, & sera

$$1 \textcircled{1} \text{ egale, ou vaudra pour solution } 2.$$

Et par ceste maniere, nous pourrions soluer tous semblables exemples; Mais à fin que telle inuention de valeur de $1 \textcircled{1}$, soit plus commode on l'a redige en ordre, & on en a fait vne reigle; considerant d'ou nous procede tel 2, valeur de $1 \textcircled{1}$, & nous voions apertement, qu'on aiouste toujours le quarré du nombre de $\textcircled{1}$, au \odot , & que nous extrahons de la somme racine quarrée, & que de telle racine, on soustraiét encore la moitié du nombre de $\textcircled{1}$, & pourtant estce, qu'on a appliqué ces choses ainsi en reigle de ladicte construction.

Quant à l'origine de la seconde construction, qu'il y a en chascune difference, elle est semblable à la precedente. Soient par exemple $4 \textcircled{2}$, egales à $4 \textcircled{1} + 24$, qui sont le premier & second terme de la seconde construction, de la seconde difference; Et aioustons à chascune partie $4 \textcircled{1}$, & seront

$$4 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1}, \text{egales à } 24.$$

Reste maintenant de trouuer quelque \odot , qui aiouste

300 LE II. LIVRE D'ARITH
à $4 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1}$, le trinomie aie racine, qui soit $\textcircled{1} +$
quelque $\textcircled{3}$.

Or pour le trouuer, il ne faut que multiplier la moi-
tie de 4 (des 4 $\textcircled{1}$) qui est 2, en soi, fait 4, & diuifer le
mesme par 4 (des 4 $\textcircled{2}$) donne quotient 1, pour tel
nombre requis: la raison pourquoy l'on trouue tel nom-
bre tousiours ainsi, est notoire par ce que nous en auons
dict ci dessus. Aioustrons doncques à chascune partie 1
& seront

$$4 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1} + 1, \text{ egales à } 25.$$

Puis extrahons de chascune partie racine quarrée,
& seront

$$2 \textcircled{1} + 1, \text{ egales à } 5.$$

Puis soustrahons de chascune partie 1, & seront

$$2 \textcircled{1}, \text{ egales à } 4.$$

Diuisant doncques 4 par 2 (des 2 $\textcircled{1}$) on aura la va-
leur de 1 $\textcircled{1}$, qui sera 2; Et appert que de ceste operation
est colligée la reigle de l'un des exemples de ladicte
deuxiesme difference.

Item si l'on considere, que nombre de multitude de
 $\textcircled{1}$ diuisé par le double de la racine du nombre de mul-
titude de $\textcircled{2}$, donne tousiours quotient $\textcircled{3}$, duquel le
quarre aioustré au binomic, lui fait trinomie, aiant ra-
cine composée de $\textcircled{1}$ & $\textcircled{3}$, on en colligera encore vne
autre maniere.

Et par les choses dessus dictes est asses notoire l'ori-
gine des autres deux differences, toutesfois parce que
nous auons dict, qu'en l'origine appert pourquoy la
troisiesme difference a deux solutions, nous la declai-
rerons. Soit 1 $\textcircled{2}$, egale à $6 \textcircled{1} - 5$, qui sont le premier
& second terme de l'exemple de la troisiesme differen-
ce, & soustrahons de chascune partie 6 $\textcircled{1}$, & sera

DE L'OPERATION. 301

$$1 \textcircled{2} - 6 \textcircled{1}, \text{ egale à } - 5$$

Reste maintenant de trouver quelque $\textcircled{0}$, qui aiousté à $1 \textcircled{2} - 6 \textcircled{1}$, le trinomie aie racine qui soit $1 \textcircled{1}$ & quelque $\textcircled{0}$, le mesme pour les raisons que dessus sera 9 (à sçauoir le quarré de $- 3$ moitié de $- 6$ de $- 6 \textcircled{1}$) Aioustons doncques à chascune partie 9, & seront

$$1 \textcircled{2} - 6 \textcircled{1} + 9, \text{ egales à } 4.$$

Puis extrahons de chascune partie racine quarrée, & fera

$$1 \textcircled{1} - 3, \text{ egale à } 2.$$

ou autrement

$$- 1 \textcircled{1} + 3, \text{ egale à } 2.$$

Car autant $1 \textcircled{1} - 3$, comme $- 1 \textcircled{1} + 3$, est racine de $1 \textcircled{2} - 6 \textcircled{1} + 9$; quand doncques nous posons pour racine $1 \textcircled{1} - 3$ egale à 2, il faut aiouster à chascune partie 3 & $1 \textcircled{1}$ sera egale, ou vaudra 5. Mais si nous posons pour racine $- 1 \textcircled{1} + 3$, egale à 2, il faudra soustraire de chascune partie 2, & restera $- 1 \textcircled{1} + 1$, egale à 0; Et aioustant à chascune partie $1 \textcircled{1}$, alors sera $1 \textcircled{1}$ egale ou vallant 1. Et est la cause de la double solution, à ladicte troisieme difference par ces choses si manifeste, qu'il n'est mestier d'en sonner plus mot; Laquelle origine il falloit declairer. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois termes desquels le premier $\textcircled{2}$ le second $\textcircled{1}$ le troisieme nombre algebrique quelconque nous auons trouué leur quatrieme terme proportionel; ce qu'il falloit faire.

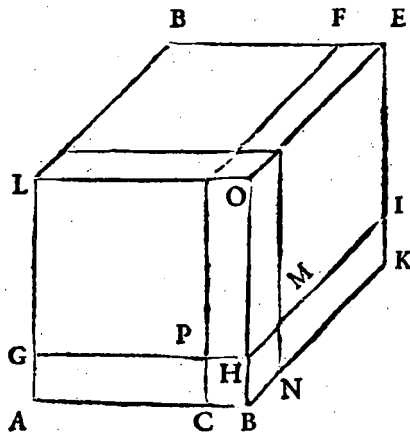
NOTA. Voila acheuée l'inuention du quatrieme terme proportionel iadis practisée par Mahomet. S'enfuiuent celles de ses successeurs; Mais auant que y venir nous descriprons quelque theoreme necessaire à leurs operations & demonstrations, que nous auons

302 LE II. LIVRE D'ARITH.
 colligé du theoreme de Tartalia, descript par Cardane
 chap. 6 liure ALGEB. & formé selon nostre guise, à
 noz demonstrations plus commode, comme f'esuit.

THEOREME.

SI on coupe vne ligne droite en lieu quelcon-
 que, le cube de toute la ligne, sera egal aux
 deux cubes, des parties, & troisfois le solide
 rectangle, contenu soubz les deux parties, &
 toute la ligne.

Explication du donné. Soit la ligne droite AB cou-
 pée ou que ce soit en C. Explication du requis. Il faut



demon-
 strer que
 le cube,
 de la AB,
 est egal,
 aux deux
 cubes de
 AC, &
 CB, &
 troisfois le
 solide re-
 ctangle,
 contenu
 soubz A
 C, & CB
 & AB.

Preparation de la demonstration.

Descrions de la ligne AB, le cube ADEB, qui

Here begins the theory of the cubic equation. It starts with the Theorem, taken from Cardan, *Ars magna*, Ch. VI, and called after Tartaglia. It is the identity $(a + b)^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, geometrically demonstrated according to Cardan, by dividing up a cube AEDB by a plane CF parallel to square BE, then by a plane GHI parallel to the base AK such that $HB = CB$, and

DE L'OPERATION. 303

soit coupé par le plain CF, parallele au quarré BE, & puis par le plain GHI, parallele à la base AK, & ainsi que HB soit egale à CB, puis par le plain LN, parallele au quarré AO, & ainsi que HM soit egale à la HB. *Demonstration.*

Toutes les parties sont egales à leur tout,
Deux cubes de AC, & CB, & les trois rectangles
contenez sous AC, & CB, & AB, ou sous leurs
egales font tout le cube de AB,

Ergo lesdictes parties sont egales au cube de AB.

L'assomption se prouve ainsi, le cube de AC est celui duquel le quarré est LF, & le cube de CB est CHN, & les trois solides rectangles sont LH, & NF, & GC, (nous denotons par GC, le solide rectangle consistant sous la superficie GC) lesquelles sont les parties integrantes du cube AE. Mais que lesdictes trois solides rectangles, sont contenuz soubz trois lignes egales à AC, CB, & AB, se demontre ainsi: du solide LH la HO est egale à la AC, & HM, à la BC, & GH, à la AB, & semblable fera la demonstration des deux autres solides NF, & GC.

L'on pourroit encore prendre les trois solides rectangles d'autre sorte que dessus; à sçavoir LC, & HF, & NI. Nous denotons par NI, le solide rectangle consistant sous la superficie NI.

Application des nombres aux grands ci dessus.

Soit toute la AB quelque nombre comme 10, &
AC soit 8, & BC 2, ergo le cube de AC 512
Et le cube de CB 8
Et le solide rectangle LH 160, son triple pour les

finally by a plane LN parallel to the square AO such that $HM = HB$. Then the cube AE is equal to the cube on LF (L is such that $DL = DF$) plus the cube on CN + the three "solid rectangles" LH, NF and that on GC (hence if AB is divided into $AC = a$, $CB = b$, then cube $AE = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$).

304 LE II. LIVRE D'ARITH.
trois solides rectangles 480
Leur somme 1000
Egale au cube de A B 10 qui est aussi 1000
Conclusion. Si doncques on coupe vne ligne droicte
en lieu quelconque, &c. ce qu'il falloit demonstret.

COROLLAIRE I.

Il appert, que le quarré A B; est egal au quarré de
A C, avec le gnomon P O B A.

COROLLAIRE II.

Il est notoire que le gnomon P O B A, est egal au
quarré de C B, & le double du produict de A C,
& C B.

COROLLAIRE III.

Il est manifeste, que le nombre des trois solides re-
ctangles L H, N F, G C, est egal au nombre de 6 quar-
rez de A C, & 12 lignes de A C. Par exemple les 6
quarrez de A C (veu que nous posons A C 8) font 384,
& 12 fois A C fait 96, qui avec 384 fait 480. Et aussi
font 480 lesdicts trois solides rectangles.

COROLLAIRE IIII.

Il est evident, que le nombre du cube de la ligne A B,
est egal au nombre du cube de A C, & de 6 quarrez de
A C, & de 12 lignes A C, & du cube de C B.

Car, le nombre du cube de A B (posant pour
B 10, & pour C B 2, comme dessus) est

	1000
Qui sera egal au nombre du cube de A C	512
Et de 6 quarrez, de A C	384
Et de 12 lignes A C	96
Et du cube, de C B	8

DE L'OPERATION. 305
Desquels la somme est aussi 1000

COROLLAIRE V.

Il appert, que le carré de AB, excède au carré de AC, ou PG, au gnomon POBA, d'où s'enfuit que six quarez de AB, excèdent à six quarez de AC, en six gnomons POBA, &c.

PROBLEME LXIX.

E Stant donnez trois termes, desquels le premier ③, le second ① ⊕, le troisieme nombre algebratique quelconque: Trouver leur quatrieme terme proportionel.

① + ⊕ NOTA. Le binomie du second terme donné de ce probleme, se peut rencontrer en trois differences, à sçavoir:

① - ⊕ Lesquelles trois differences nous declairerons separement.

PREMIERE DIFFERENCE DE SECOND TERME ① + ⊕.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ③, le second 6 ① + 40, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatrieme terme proportionel.

Construction.

Le carré de la moitié de 40 donné, est 400
Du mesme soustraiçt le cube de 2 (tiers de 6 de 6 ①) qui est 8 reste 392, la racine $\sqrt[3]{392}$, qui

Prob. LXIX. This is the solution of the cubic equation of the form $x^3 = px + q$, with the three cases ("differences"): 1) $x^3 = ax + b$, 2) $x^3 = -ax + b$, 3) $x^3 = ax - b$ (a, b positive, similar to the three cases in the theory of the quadratic equation). There is no announcement that only one comprehensive solution for all cases will be given — this had to wait until the eighteenth and the nineteenth century. In case 1) the solution is in the form

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

An example is $x^3 = 6x + 40$, $x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$.

306 LE II. LIVRE D'ARITH.

aioustée à 20, moitié des 40 donnez

faict $20 + \sqrt[3]{392}$

Sa racine cubique est $\sqrt[3]{\text{bino. } 20 + \sqrt[3]{392}}$

A laquelle aiousté son respondant binomic

disioinct comme $\sqrt[3]{\text{bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}$

Donné somme $\sqrt[3]{\text{bino. } 20 + \sqrt[3]{392}} + \sqrt[3]{\text{bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}$

$\sqrt[3]{\text{bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}$

Laquelle ie di estre le quatriesme terme proportional requis. *Demonstration Arithmetique.* Si la conuersion du multinomie de ceste solution en nombre Arith. fust legitimemēt inuentée (quand il sera possible cōme ici) ce seroit singuliere inuention, seruant autant aux problemes suiuaus, comme à cestui ci; & le trouuerions valoir 4, par lequel nous pouons faire demonstration, mettant sous chascun terme sa valeur en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{3}. & 6 \textcircled{1} + 40. & 1 \textcircled{1}. & 4 \\ 64. & 64. & 4. & 4. \end{array}$$

Et appert que 4 est leur quatriesme terme proportional.

Quant à l'addition, que nous auons dict generale, par le moien du theoreme du 24 probleme; à sçauoir que multipliant le quotient des deux racines cubiques plus vn, par le diuiseur; Elle ne nous faille en rien, mais parce que les parties sont incommensurables, à la fin nous reuiennent les mesmes deux racines cubiques des binomies donnez.

Preparation d'autre demonstration

Geometrique.

Soient à la figure du theoreme deuant ce 69 probleme selon la precedente operation, deux cubes L F 20

If $x = u + v$, then Stevin knows that $u + v = 4$, but has no way of reducing u and v so as to obtain 4 (though, as he observes a little later on in the book, he can approximate to 4 as closely as he likes by evaluating the square and cube roots). He proves the answer, as in the case of the quadratic equations, first by direct substitution of $x = 4$ in the equation ("arithmetical demonstration"), then by using Tartaglia's theorem on the division of a cube into sections ("geometrical demonstration"). This amounts to the following:

since $u^3 + v^3 = 20 + \sqrt[3]{392} + 20 - \sqrt[3]{392} = 40$, and $uv = \sqrt[3]{40} - 392 = 2$, $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 40 + 6x$. A second example is

$$x^3 = 12x + 46, x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{8 + 0} = 4$$

DE L'OPERATION.

307

+ $\sqrt[3]{392}$, & CHN $20 - \sqrt[3]{392}$, leur somme est 40, & leur produit 8; Doncques le costé DF, ou AC, fait $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 + \sqrt[3]{392}}$, & le costé CB, fait $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}$, lesquels deux costez AC, & CB, aioustez, font pour le costé AB, du cube AE, $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 + \sqrt[3]{392} + \sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}}$. Il faut demonstrier, que tout le cube AE vaudra $6 \text{ } \textcircled{1} + 40$, qui estant fait nous aurons le requis; car si on demonstre que le cube qui est AE, de $1 \text{ } \textcircled{1} \text{ AB } \sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 + \sqrt[3]{392} + \sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}}$, vaut $6 \text{ } \textcircled{1} + 40$; Doncques on conclura par la renuerse raison que du cube AE $6 \text{ } \textcircled{1} + 40$; la $1 \text{ } \textcircled{1} \text{ AB}$ vaudra $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 + \sqrt[3]{392} + \sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}}$, & par consequent $1 \text{ } \textcircled{3}$ vallant $6 \text{ } \textcircled{1} + 40$, qu'alors $1 \text{ } \textcircled{1}$ vaudra $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 + \sqrt[3]{392} + \sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}}$.

Démonstration. Le produit de AC $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 + \sqrt[3]{392}}$, par CB $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 20 - \sqrt[3]{392}}$ est (par le 40 probleme) 2, pour la superficie GC, parquoi la superficie MO sera aussi 2 qui multipliée par $1 \text{ } \textcircled{1} \text{ GH}$ (car GH est egale à $1 \text{ } \textcircled{1} \text{ AB}$) donne produit pour le solide rectangle LH $2 \text{ } \textcircled{1}$, & semblablement seront les deux solides rectangles NF, & GC, aussi chascun $2 \text{ } \textcircled{1}$, & tous trois ensemble feront $6 \text{ } \textcircled{1}$. Item les deux cubes LF, & CHN (veu que leurs costez sont comme dessus) sont ensemble 40; doncques tout le cube AE, fait $6 \text{ } \textcircled{1} + 40$; Ergo, &c. ce qu'il falloit demonstrier.

NOTA. Il auient aucunesfois que les racines cubiques de l'operation valent nombre Arithmetique, desquels l'operation peut estre la mesme comme dessus. Par exemple $1 \text{ } \textcircled{3}$ vaut $12 \text{ } \textcircled{1} + 16$, & on requiert la valeur de $1 \text{ } \textcircled{1}$.

There is an "imperfection" for certain cases, which Bombelli has solved with his *plus de moins* and *moins de moins*, in our notation $+\sqrt{-1} = +i$ and $-\sqrt{-1} = -i$. (This is the so-called *casus irreducibilis*, where $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$). Stevin's example is $x^3 = 30x + 36$, $x = \sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i}$; Stevin writes for $26i$: "+ de - 26", and for $-26i$: "- de - 26". He then writes:

"Now, if by means of the numbers of this solution we would know how to approximate infinitely closely to 6 (because that is precisely their value), as is done with the numbers of the solution of the previous example, then certainly this solution would be in the desired perfection. Cardan also

Construction.

Le quarré de la moitié de 16 donné, est 64; du
 mesme soustraiçt le cube de 4 (tiers de 12
 des 12 ①) qui est 64, reste 0, la racine $\sqrt{0}$, qui
 aioustée à 8, moitié de 16 donné, faict 8 +
 $\sqrt{0}$ sa racine cubique est $\sqrt[3]{\text{bino. } 8 + \sqrt{0}}$
 A laquelle aiousté son respondant binomie
 disioinct comme $\sqrt[3]{\text{bino. } 8 - \sqrt{0}}$
 Donne somme pour solution $\sqrt[3]{\text{bino. } 8 + \sqrt{0}}$
 $\sqrt{0} + \sqrt[3]{\text{bino. } 8 + \sqrt{0}}$.

Qui vaut 4. Et ainsi d'autres semblables. Nous appel-
 lons ceci racine cubique de binomie, non pas que vé-
 ritablement il le soit, Mais à fin de démonstrer la gene-
 ralité de l'ordre de la construction. Ceste note soit aussi
 pour auertissement aux problemes suiuians là ou le
 semblable pourroit auenir; Car de descrire diuerses
 reigles (comme font aucuns) de ce qui se peut faire par
 vne reigle generale, il semble inutile.

DE L'IMPERFECTION QVIL Y A
 EN CESTE PREMIERE DIFFERENCE.

Il auient en aucuns exemples de ceste difference, que
 le quarré de la moitié du ② donné, fera moindre que
 le cube du tiers du nombre de multitude de ① donnée;
 D'ou l'enfuit que le mesme cube, ne se pourra sou-
 straire d'iceluy quarré, comme veut la reigle de la pre-
 cedente construction; de sorte que ceste premiere dif-
 ference (ensemble aucuns exemples des problemes
 suiuians, qui se conuertissent en icelle) est encore im-
 parfaicte. Rafael Bombelle la solue par diction de
plus de moins & moins de moins en ceste sorte: Soient les

puts some examples in his *Aliza* *) pertaining to this matter, but not
 general ones, so to say feeling his way, by which after much work one can
 often get nowhere. As to myself, I consider it useless to present here
 similar examples. The reason is that what cannot be found by means of
 a certain rule seems unworthy to take a place between legitimate pro-
 positions. On the other hand, if same problem can be solved in this way,
 then Good Luck deserves as much credit for it as he who carries it through.
 Thirdly, there are enough legitimate things, to wit an infinite amount, to

*) *De Aliza regula*, 111 pp., in Cardan's *Opus novum*, Basiliae, 1570; the term *Aliza*
 appears already in the *Ars magna*, f. 31 v., also in connection with the *casus irreducibilis*.

DE L'OPERATION: 309
 trois termes donnez, desquels on requiert le quatrief-
 me proportionel, tels: le premier 1 ③, le second 30 ①
 + 36, le troisieme 1 ①.

Construction semblable à la precedente.

Le carré de la moitié de 36 donné est 324
 Du mesme soustraiçt le cube de 10 (tiers de
 30 des 30 ① données) qui est 1000, reste
 — 676, sa racine + de — 26, qui aiouste
 à 18, moitié des 36 fait 18 + de — 26
 Sa racine cubique $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 18 + \text{ de } - 26}$
 A laquelle aiouste son respondant binomie
 disioinct, comme $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 18 - \text{ de } - 26}$
 Donne somme & solution $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 18 + \text{ de } - 26}$
 + $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } 18 - \text{ de } - 26}$.

Or si par les nombres de ceste solution, l'on sceust ap-
 procher infinement à 6 (car ils vallent precisement au-
 tant) comme on fait par les nombres de la solution,
 du precedent premier exemple, certes ceste difference
 seroit en sa desirée perfection.

Cardane met aussi en son *Aliza* quelques exemples,
 seruans à ceste matiere, mais pas generaux, ains à ta-
 stons, par lesquels apres grand trauail, on ne peut sou-
 uentesfois rien effectuer. Quant à moi, j'estime inuti-
 le d'en escrire ici de semblables; La raison est, que ce
 qui ne se peut trouuer par certaine reigle, semble indig-
 ne d'auoir lieu entre les propositions legitimes. D'au-
 tre part, que de ce qui se solue en telle maniere, la For-
 tune en merite autant d'honneur, comme l'efficient.
 Au tiers, qu'il y a assez de matiere legitime, voire en
 infini, pour s'en exercer, sans s'occuper, & perdre le
 temps, en les incertaines: pourtant nous les passerons

work on without any need to get busy, and to lose time, on uncertainties;
 therefore we shall let it alone. Those who like such examples can do with
 them what they please."

It may be noted that by the theorems of De Moivre and Euler, discovered
 in the 18th century, Stevin's criticism, that Bombelli's expression of the roots in
 terms of imaginaries could not provide us with an approximation to the real roots,

has been met. In our particular case $\sqrt[3]{18 + 26i} = \sqrt{10} \left(\cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right)$,

$\tan \alpha = \frac{13}{9}$ ($\alpha < 90^\circ$), hence the root $x = 2 \sqrt{10} \cos \frac{\alpha}{3}$.

In "On the origin of this difference" Stevin shows in a geometrical way how

310 LE II. LIVRE D'ARITH.
 outre. Ceux auxquels plairont tels exemples, ils en
 pourront faire à leur plaisir.

DE L'ORIGINE DE CESTE

PREMIERE DIFFERENCE.

L'origine de la precedente construction apparoist à la figure du theoreme deuant ce 69 probleme en ceste sorte: Veü qu'il y a proposé, que 1 ③ qui soit A E, est egale à 6 ① + 40, & que l'on desire sçauoir la valeur de 1 ① A B, nous distribuons ces deux parties, comme 6 ①, & 40, à les parties integrantes du cube A E, & posons que les deux cubes comme L F, & C H N, sont 40, & que les trois solides rectangles comme L H. N F. G C sont les 6 ①; Doncques chaque solide rectangle fera 2 ②; à sçauoir la tierce part des 6 ②; Mais la longueur de chaque solide rectangle est 1 ①, à sçauoir le costé du cube A E: Diuisé doncques le solide 2 ②, par son costé 1 ②, donne quotient 2, pour vne superficie comme A P. Estant doncques la superficie A P 2, il faut que A C, multiplié par P C, face 2; Mais A C, & P C, sont les deux costez des cubes L F, & C H N, qui sont ensemble 40 par l'hypothese: Ergo les nombres de A C, & P C, sont tels que leur produit est 2, & la somme de leurs cubes est 40, Mais C B, est egale à P C, ergo les nombres de A C & C B, sont tels leur produit est 2, & la somme de leurs cubes est 40.

Quand doncques nous aurons trouuez tels deux nombres, la somme des mesmes (veü que A B, est la somme de A C & C B) sera la requise valeur de 1 ① A B. Et pourtant difons nous en ceste premiere difference par reigle generale, que quand deux nombres multipliez, donnent pour produit le tiers du nombre

the solution of $x^3 = ax + b$ has been obtained. In algebraical terms, it amounts to this: take $x = u + v$, then $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = ax + b = a(u + v) + b$. Take $a = 3uv$, $b = u^3 + v^3$, which gives two equations for u and v , which can be solved according to the 7th question of Prob. 81, that is, substitute $v = \frac{a}{3u}$ in $b = u^3 + v^3$, which gives a quadratic equation for u^3 :

$$u^6 = bu^3 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0. \text{ Hence } u = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Take the root with the + sign. Then $v = \frac{a}{3u} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$.

The equation $x^3 = 6x + 40$ thus also solves the problem: to find two numbers u, v such that their product be 2 and the sum of their cubes be 40.

DE L'OPERATION. 311

de multitude de la ① donnée, & que la somme de leurs cubes est egale au ② donné, que la somme d'iceux deux nombres sera la valeur de 1 ①. Qui estant ainsi nous metterons vne question telle: *Trouuons deux nombres tels que leur produit soit 2 (qui est le tiers de 6 des 6 ① donnez) & la somme de leurs cubes 40 (qui est le 40 donné) Et est ceste la 7 question du 81 probleme, par l'operation de laquelle il appert estre colligée la regle de la construction precedente. Laquelle origine il nous falloit declarer.*

SECONDE DIFFERENCE DE
SECOND TERME — ① + ②.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme, tels: le premier 1 ③, le second — 6 ① + 20, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

Le carré de la moitié de 20 donné est 100
 Au mesme aiousté le cube de 2 (tiers de 6 des 6 ①) qui est 8, fait 108, sa racine quarrée est $\sqrt{108}$, qui aiousté à 10, moitié des 20 donnez, fait $\sqrt{108} + 10$
 Sa racine cubique est $\sqrt[3]{\text{bino. } \sqrt{108} + 10}$
 De laquelle sousttraict son respondant binomie disioinct comme $\sqrt[3]{\text{bino. } \sqrt{108} - 10}$
 La reste sera $\sqrt[3]{\text{bino. } \sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\text{bino. } \sqrt{108} - 10}$.

Laquelle ie di estre le quatriesme terme proportionel requis, *Demonstration Arithmetique.* La solution ci dessus pour valeur de 1 ① vaut 2, mettons doncques par le moien du 66 probleme, soubz chascun terme sa valeur en ceste sorte:

The second case ("difference"): $x^3 = -ax + b$ is solved by means of the formula

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}. \text{ Example:}$$

$x^3 = -6x + 20$, $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$, which must be equal to $x = 2$. This is again verified by substitution and geo-

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{3}. & -6 \textcircled{2} + 20. & 1 \textcircled{1}. & 2. \\ 8. & 8. & 2. & 2. \end{array}$$

Et appert que 2 est leur quatriesme terme proportionel.

Preparation d'autre demonstration Geometrique.

Soient à la figure du theoreme deuant ce 69 probl. selon la precedente operation, deux cubes A E $\sqrt[3]{108 + 10}$, & C H N $\sqrt[3]{108 - 10}$, leur difference (qui est le cube L F, avec les trois solides rectangles L H, N F, G C) est 20, & leur produit 8; Doncques le costé A B, fait $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 + 10}}$, & le costé C B $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 - 10}}$; Puis soustraiet le costé C B, du costé A B, reste pour A C, costé du cube L F, $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 + 10} - \sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 - 10}}}$. Il nous faut demonstrier que le cube L F, vaudra $-6 \textcircled{1} + 20$, qui estant fait, nous aurons le requis, car si on demonstre que le cube (qui est L F) de $1 \textcircled{1}$ D F. ou A C $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 + 10} - \sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 - 10}}}$, vaut $-6 \textcircled{1} + 20$: Doncques on conclura par la renuerse raison, que du cube L F $-6 \textcircled{1} + 20$, la $1 \textcircled{1}$ D F ou A C, vaudra $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 + 10} - \sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 - 10}}}$. Et par consequent $1 \textcircled{3}$ vallant $-6 \textcircled{1} + 20$, qu'alors $1 \textcircled{1}$ vaudra $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 + 10} - \sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 - 10}}}$. *Demonstration.* Le produit de A B $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 + 10}}$, par C B $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino. } \sqrt[3]{108 - 10}}$ est 2 (par le 40 probleme) pour la superficie G B, parquoi la superficie L O sera aussi 2, qui multipliée par $1 \textcircled{1}$ H O (car H O est egale à $1 \textcircled{1}$ A C) donne produit pour le solide rectangle L H $2 \textcircled{1}$, & semblable-

metrical demonstration, and "the Origin of this Difference" is geometrically explained by a method which amounts to this: let $x = u - v$, then $u^3 - v^3 + 3uv(u - v) = -ax + b$; take $a = 3uv$, $b = u^3 - v^3$; this pair of equations can be solved according to the 8th question of Prob. 81, that is, by means of the quadratic equation $u^6 = bu^3 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

DE L'OPERATION. 313,

ment seront les deux solides rectangles NF & GC chacun $2 \textcircled{1}$, & tous trois ensemble feront $6 \textcircled{1}$, aux mesmes aiousté le cube LF , font par la preparation 20 , des mesmes autrefois soustraiét les trois solides rectangles vallans $6 \textcircled{1}$ restera le cube LF vallant $-6 \textcircled{1} + 20$. Ergo, &c. ce qu'il falloit demonstret.

**DE L'ORIGINE DE CESTE
SECONDE DIFFERENCE.**

L'origine de la precedente construction, procede (comme celle de la premiere difference) de la figure, du theoreme deuant ce 69 probleme, en ceste sorte: Veu qu'il y a proposé, que $1 \textcircled{3}$, qui soit le cube LF , est egale à $-6 \textcircled{1} + 20$, & que l'on desire sçauoir la valeur de $1 \textcircled{1} DF$, ou AC , nous distribuerons ces deux parties, comme $-6 \textcircled{1} + 20$, ainsi: Posons que le cube LF , avec les trois solides rectangles LH . NF . GC , soit 20 , & que les trois solides rectangles soient $6 \textcircled{1}$, & demeurera, selon l'hypothese, $1 \textcircled{3} LF$ vallant $-6 \textcircled{1} + 20$. Or puis que les trois solides rectangles font $6 \textcircled{1}$, doncques chascun solide rectangle fera $2 \textcircled{1}$; Mais la largeur de chascun solide rectangle est $1 \textcircled{1}$, à sçauoir le costé du cube LF , ou bien la ligne HO , Diuise doncques le solide LH $2 \textcircled{1}$, par son costé HO $1 \textcircled{1}$, donne quotient 2 , pour vne superficie comme LO , ou AH ; Or estant la superficie AH 2 , il faut que AB , multiplié par BH , face aussi 2 ; Mais AB , & BH , sont les deux costez des cubes AE , & CHN , desquels la difference est 20 , car leur difference est le cube LF , avec les trois solides rectangles, qui tous ensemble font 20 par l'hypothese: Ergo les nombres de AB , & BH , sont tels,

314 LE II. LIVRE D'ARITH.

que leur produit est 2, & la difference de leurs cubes, est 20; Mais CB est egale à BH; ergo les nombres de AB. & CB, sont tels, que leur produit est 2, & la difference de leurs cubes est 20; Quand doncques nous aurons trouué tels deux nombres, la difference des mesmes (veu que AC est la difference entre AB & CB) sera la requise valeur de 1 ① AC: Et pourtant nous disons en ceste seconde difference par reigle generale; que quand deux nombres multipliez, donnent pour produit le tiers du nombre de multitude de la ① donnée, & que la difference de leurs cubes, est egale au ② donné, qu'alors la difference d'iceux deux nombres, sera la valeur de 1 ①. Qui estant ainsi nous mettrons question telle: *Trouuons deux nombres tels, que leur produit soit 2. (qui est le tiers de 6 des 6 ① donnez) & la difference de leurs cubes 20 (qui est le 20 donné) Et est ceste la 8 question du 81 probleme. Et appert que par l'operation de la mesme, est colligée la reigle de la construction precedente. Laquelle origine il nous falloit declarer.*

DIFFERENCE TROISIEME
DE SECOND TERME ① — ②.

Explication du donné. Soient donez trois termes selon le probleme, tels: Le premier 1 ③, le second 7 ① — 6, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatrieme terme proportionel.

Construction.

On mettera (par reigle) + au lieu du — donné, de sorte que 1 ③, se posera egale à 7 ① + 6, desquels la valeur de 1 ①, par la precedente premiere difference, est 3, auquel appliqué ① sera 3 ①

DE L'OPERATION. 315

Et le carré dudit 3, est 9, qui soustrait du 7
(des 7 ① donnez) reste — 2

Puis 1 ② (par reigle) donne 3 ① (premier en l'ordre) — 2 (second en l'ordre) combien 1 ①?

faict par le 68 probleme 2 ou 1

Je di que autant 2 comme 1 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration Arithmetique.* Mettons par le moien du 66 probleme, soubs chascun terme sa valeur, en ceste sorte:

Premiere solution.

1 ③.	7 ① — 6.	1 ①.	2.
8.	8.	2.	2.

Seconde solution.

1 ③.	7 ① — 6.	1 ①.	1.
1.	1.	1.	1.

Et appert que 2 ou 1 est leur quatriesme terme proportionel requis.

DE L'ORIGINE DE CESTE

TROISIÈSME DIFFERENCE.

A fin de declairer premierement en general ceste origine, faut scauoir, que nous tachons d'ajouter à chaque partie des egales parties donnees, vn mesme nombre, tel, qu'alors diuisée chaque partie par quelque commun diuiseur, que les quotiens soient ② egale à ① ③, desquels la valeur de 1 ①, fera notoire par le 68 probleme, dont nous dirons maintenant plus particulierement en ceste sorte:

The third case $x^3 = ax - b$ is reduced to the first. Let $x = p$ be a root of $x^3 = ax + b$, hence $p^3 = ap + b$. Then $x^3 + p^3 = a(x + p)$; dividing by $x + p$ we get $x^2 - xp + p^2 = a$, hence a quadratic equation for x . (This is also to be found in Cardan). Example: $x^3 = 7x - 6$; since $p = 3$ is a root of $x^3 = 7x + 6$, we find $x^2 - 3x + 9 = 7$, or

316 LE II. LIVRE D'ARITH.

Quand nous diuifons $1 \textcircled{3} +$ quelque $\textcircled{6}$, par $1 \textcircled{1} +$ quelque $\textcircled{6}$, eftant ce diuifeur commenfurable au nombre à diuifer, il eft notoire, qu'il en fortira neceffairement $1 \textcircled{2} -$ quelque $1 \textcircled{1} +$ quelque $\textcircled{6}$. Il appert auffi par la mefme diuifion, que le $\textcircled{6}$ du nombre à diuifer, fera toujours le cube du $\textcircled{6}$ du diuifeur, pourtant il faut que le nombre que nous aioufterons à chafcune partie, foit le cube du $\textcircled{6}$, qu'il nous faut trouuer, pour appliquer à la $1 \textcircled{1}$. Au fecond il eft manifefte, que pour diuifer les $7 \textcircled{1} - 6$ donnez & $+$ quelque $\textcircled{6}$, par $1 \textcircled{1} +$ quelque $\textcircled{6}$, ainfi que le quotient foit $\textcircled{6}$, il fera neceffaire (comme vn chafcun pourra facilement veoir par l'experience, en toutes telles diuifions) que le quotient multiplié par le $\textcircled{6}$ du diuifeur, le produict foit egal au $\textcircled{6}$ du nombre à diuifer, dont il appert, qu'il nous faut auoir quelque nombre de cefte qualité: *Trouuons vn nombre cubique qui avec $- 6$ (pour le $- 6$ donné) face auant, comme le cofte dudict cube, multiplié par 7 (7 des $7 \textcircled{1}$ donnés) Qui* eft la 9^e. queftion du 81 probleme, & appert par la mefme, que le nombre requis, qu'il nous faudra aioufter à chafque partie donnée, fera 27, duquel la racine cubique 3, eft le nombre, qui faudra eftre aioufté à la dicte $1 \textcircled{1}$, pour auoir ledict commun diuifeur, qui fera $1 \textcircled{1} + 3$. Aiouftons doncques 27 à chafque partie des egales parties données (qui eft à $1 \textcircled{3}$, & à $7 \textcircled{1} - 6$) &

$1 \textcircled{3} + 27$, feront egales à $7 \textcircled{1} + 21$.

Puis diuifons chafque partie par ledict commun diuifeur $1 \textcircled{1} + 3$, & par le 50 probleme,

$1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1} + 9$, feront egales à 7.

Lequels reduictes, $1 \textcircled{2}$ fera egale à $3 \textcircled{1} - 2$, defquels

$x = 2$, $x = 1$. The root $x + p = 0$, in this case $x = - 3$ is not considered, though Stevin is aware of it later (in his remarks on negative roots after Prob. 70, Art. VII). Reference is made to the 9th question of Prob. 81, in which the equation $x^3 - 6 = 7x$ is solved: $x = p = 3$. There is also a special demonstration, in algebraical terms, that $(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2 - 3x + 9$.

DE L'OPERATION.

317

(par le 68 probleme) 1 ① vaudra 2, pour solution comme dessus.

Mais pour demonstrier que ces choses sont l'origine de ladicte construction, auise que le — 6 donné deuict au susdict 9 exemple du 81 probleme, apres la reduction faicte, à estre + 6; pourtant nous auons dict en la precedente construction, qu'on mettera par reigle +, au lieu du — donné, & que selon tels termes (parce que audict 9 exemple, l'on trouuoit la valeur de 1 ①, estant 1 ③ egale à 7 ① + 6) l'on prendra la valeur de 1 ①, qui est 3.

Mais pour clairement demonstrier la reste, nous mettrons ici les caracteres de la diuision, qui se faisoit de 1 ③ + 27, par 1 ① + 3, parce que le suiuant en depend: en ceste sorte: Or nous voions que le sus-

$\begin{array}{r} \cancel{3} \textcircled{1} \\ - \cancel{3} \textcircled{2} \\ \hline x \textcircled{3} + x \cancel{7} (1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1} + 9) \\ x \textcircled{1} + \cancel{3} \\ x \textcircled{1} + \cancel{3} \\ x \textcircled{1} + \cancel{3} \end{array}$	<p>dict 3, valeur de 1 ① se trouue deuât la ①, de ce quotient. & le dernier nombre du mesme quotient (cōme ici 9) est toujours le quarré de</p>
--	---

ladicte valeur de 1 ① (comme icide 3) Puis il apert aussi en la reduction ci dessus, de 1 ② — 3 ① + 9 egales à 7; en 1 ② egale à 3 ① — 2, que l'exces — 2 dudiect 7 (qui est le 7 de 7 ① donnés) par dessus le 9, est toujours le ③ des derniers termes egaux. Et parce que ceci est ainsi perpetuel en tous exemples, nous de laissons ces laborieuses computations, & le comprenons en vne reigle plus briefue, comme ladicte construction demonstre. Laquelle origine il nous falloit

318 LE II. LIVRE D'ARITH.

declairer. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois termes, desquels le premier ③, le second ①Ⓞ, le troisieme nombre algebratique quelconque, nous auons trouué leur quatrieme terme proportionel; ce quil falloit faire.

PROBLEME LXX.

E Stant donnez trois termes, desquels le premier ③, le second ②Ⓞ, le troisieme nombre algebratique quelconque: Trouuer leur quatrieme terme proportionel.

NOTA Le binomic du second terme donné de ce probleme, se peult rencontrer en trois differences à sçauoir:

Lesquelles trois differences nous auons reduict à vne mesme maniere d'operation, lesquelles nous descripons separement pour plus grande euidence, en ceste forte:

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} + \textcircled{\textcircled{0}} \\ - \textcircled{2} + \textcircled{\textcircled{0}} \\ \textcircled{2} - \textcircled{\textcircled{0}} \end{array}$$

PREMIERE DIFFERENCE DE
SECOND TERME ② + ④.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ③, le second 6 ② + 400, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il nous faut trouuer leur quatrieme terme proportionel.

NOTA. Ceste construction se peut faire en deux fortes; L'une procedant d'origine à laquelle se fait conuersion des termes donnez, en ③ egale à ① + ④;

Prob. LXX. This is the solution of the cubic equation of the form $x^3 = px^2 + q$, again with three cases: 1) $x^3 = ax^2 + b$, 2) $x^3 = -ax^2 + b$, 3) $x^3 = ax^2 - b$. The first case, $x^3 = ax^2 + b$, is solved in two ways: a) by means of the formula (explained in a more complicated way than is strictly necessary)

DE L'OPERATION. 319

L'autre en ③ egale à — ① + ②. Or quand ③ est egale à ① + ②, alors la valeur de 1 ① se trouue par la premiere difference du 69 probleme : Mais quand telle solution ne se pourra faire par icelle, pour les raisons que nous en auons dict à la mesme differēce, alors ne se pourra aussi faire, par telle maniere, en ceste premiere difference ; Pourtant on la pourra soluer par ladicte deuxiesme maniere, à sçauoir, procedant de reduction en ③ egale à — ① + ② ; Laquelle est generale. Parquoy nous descriprons les manieres toutes deux ; Et premierement la construction procedente de conuerfion en ③ egale à ① + ② comme s'ensuit.

Construction.

Le tiers de 6 (des 6 ②) est 2
 Qui multiplié par son double 4 fait 8, au mesme aiousté le carré de 2 premier en l'ordre, fait 12 auquel appliqué ① sera 12 ①
 Puis de 400 donnez soubs traict le cube de 2 premier en l'ordre, qui est 8, reste 392
 Au mesme aiousté le produit de 2 premier en l'ordre, par 12 du second en l'ordre, qui est 24, fait 416
 Puis on dira 1 ③ (par reigle) vaut 12 ① (second en l'ordre) + 416 (quattiesme en l'ordre) combien 1 ① : fait (par la 1 difference du 69 probleme) $\sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 + \sqrt{43200}} + \sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 - \sqrt{43200}}$
 Au mesme aiousté 2 premier en l'ordre, fait $\sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 + \sqrt{43200}} + \sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 - \sqrt{43200}} + 2$.
 Je di que le mesme est le quattiesme terme proportionnel requis.

$y^3 = \frac{a^2}{3}y + 2\frac{a^3}{27} + b$, where $x = \frac{a}{3} + y$. The equation in y belongs to case 1) of Prob. 69. The example is $x^3 = 6x^2 + 400$, reduced to $y^3 = 12y + 416$; $x = 2 + \sqrt[3]{208 + \sqrt{43200}} + \sqrt[3]{208 - \sqrt{43200}}$ (= 10). The other way is b) by means of the formula $y^3 = -aby + b^2$, where $x = \frac{b}{y}$, the equation in y belongs to case 2) of Prob. 69. (On these Cardanic transformation methods see N.L.W.A. Gravelaar, *l.c.* footn. 30) of our Introduction). In our example $y^3 = -2400y + 160000$, $x = \frac{400}{40} = 10$ (Stevin has 1600 instead of 160000, in his "Seconde manière de construction").

320 LE II. LIVRE D'ARITH

Demonstration Arithmetique. La solution ci dessus, pour valeur de 1 ① est egale à 10; mettons doncques par le moi en du 66 probleme, sous chascun terme la valeur en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{3}. & 6 \textcircled{2} + 400. & 1 \textcircled{1}. & 10. \\ 1000. & 1000. & 10. & 10. \end{array}$$

Et appert que 10 est leur quatriesme terme proportionel.

*Preparation d'autre demonstration
Geometrique.*

Soit à la figure du theoreme deuant le 69 probleme, 1 ③ A B, egale ou vallant 6 ② A B + 400; Et soit C B 2, à sçavoir le tiers de 6 des 6 ② donnez.

Il faut demonstrier que son costé ou 1 ① A B vaudra $\sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino}, 208 + \sqrt[3]{43200}} + \sqrt[3]{\textcircled{3} \text{ bino}, 208 - \sqrt[3]{43200}} + 2$. *Demonstration.* 1 ③ A B est par l'hypothese, egale à 6 ② A B + 400

Mais 1 ② A B, est egale à 1 ② A C + le gnomon P O B A, par le 1 Corollaire deuant le 69 probleme; parquoi 6 ② A B, sont egales à 6 ② A C + 6 gnomons P O B A;

Ergo 1 ③ A B, est egale à 6 ② A C + 6 gnomons P O B A + 400.

Mais le gnomon P O B A, est egal à 1 ② C B + le double du produit de 1 ① A C par C B 2 par le 2 Corollaire deuant le 69 probleme parquoi 6 gnomons P O B A, sont egaux à 6 ② C B + 24 ① A C.

Ergo 1 ③ A B, est egale à 6 ② A C + 6 ② C B + 24 ① A C + 400.

Mais 6 ② C B, sont egales à 24 (car C B est 2) par-

The second case, $x^3 = -ax^2 + b$, is similarly reduced by $x = -\frac{a}{3} + y$ to $y^3 = \frac{a^2}{3}y + b - 2\frac{a^3}{27}$, which in Stevin's example $x^3 = -6x^2 + 32$, $y^3 = 12y + 16$, the root $x = 2$ belongs to case 1) of Prob. 69.

The third case, $x^3 = ax^2 - b$ is similarly reduced by $x = \frac{a}{3} + y$ to $y^3 = \frac{a^2}{3}y - b + 2\frac{a^3}{27}$, which in Stevin's example $x^3 = 6x^2 - 32$, $y^3 = 12y - 16$, $x = 4$, belongs to case 3) of Prob. 69 (this $x = 4$ is what we call a double root).

DE L'OPERATION. 321

quoi 6 ② CB (veu que chafque cube de CB vaut 8)
font egales à 3 ③ BC;

Ergo 1 ③ AB, est egale à 6 ② AC + 3 ③ CB
+ 24 ① AC + 400.

Mais 1 ③ AB, est egale à 1 ③ AC + 1 ③ CB +
3 solides rectangles L.H.N.F. GC. par le mefme theo-
reme deuant le 69 probleme.

Ergo 1 ③ AC + 1 ③ CB + 3 solides rectangles
L.H.N.F.GC, font egales à 6 ② AC + 3 ③ CB +
24 ① AC + 400.

Mais les trois solides rectangles L.H.N.F. GC, font
egaux à 6 ② AC + 12 ① AC, par le 3 corollaire de-
uant le 69 probleme;

Ergo 1 ③ AC + 1 ③ CB + 6 ② AC + 12 ①
AC, font egales à 6 ② AC + 3 ③ CB + 24 ① AC
+ 400.

Puis foubstrahons de chafque partie 1 ③ CB + 6
② AC + 12 ① AC;

Ergo restera 1 ③ AC, egale à 2 ③ CB + 12 ①
AC + 400.

Mais 2 ③ CB (parce que CB faiét 2) vallent 16;

Ergo 1 ③ AC, fera egale à 12 ① AC + 416.

Mais eftant 1 ③ AC egale ou vallant 12 ① AC +
416, alors par le 69 probleme 1 ① AC vaudra $\sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 + \sqrt[3]{43200} + \sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 - \sqrt[3]{43200}}$.
A la mefme AC, aioufté CB 2, faiét pour 1 (1 AB $\sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 + \sqrt[3]{43200} + \sqrt[3]{\text{③ bino. } 208 - \sqrt[3]{43200} + 2}$; ce qu'il falloir demonftrer.

The solutions are again accompanied by an "arithmetical" and a "geometrical" demonstration, as well as a proof in the sections "On the Origin of the construction". The "geometrical" demonstration in the case of the first "difference", $x^3 = ax^2 + b$, example $x^3 = 6x^2 + 400$, consists in taking the figure belonging to Tartaglia's theorem, with $AB = x$, $AC = y$, $CB = \frac{a}{3}$ ($= 2$),

312 LE II. LIVRE D'ARITH.
 SECONDE MANIERE DE
 CONSTRUCTION, QUI EST GENERALE,
 procedant de conuersion des termes
 donnez, en ③ egale à — ① + ④.

Explication du donné. Soient donnez les mesmes termes de la precedente premiere maniere, tels: le premier 1 ③, le second 6 ② + 400, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme proportionel.

Construction.

Le produit des 400 donnez par le 6 des 6 ②
 donnez, fait 2400, auquel appliqué —
 & ① fait — 2400 ①
 Le carré de 400 donné est 1600
 Puis 1 ③ (par reigle) donne — 2400 ① + 1600
 (premier & second en l'ordre) combien 1 ①?
 fait par la 2 difference du 69 probleme 40
 Par le mesme diuisé le 400 donné donne quotient 10

Il di que 10 est le quatriesme terme proportionel requis, dont l'Arithmetique & geometrique demonstrations sont faites ci deuant, mais l'origine s'enfuiuera à la fin de ce probleme.

SECONDE DIFFERENCE DE
 SECOND TERME — ② + ④.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ③, le second — 6 ② + 32, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

$x = y + \frac{a}{3}$. Then square $ABL = \text{square on } AC + \text{gnomon } POBA$, gnomon $POBA = \text{square on } CB + \text{twice rectangle } AP$, or $x^2 = y^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2\frac{a}{3}y$, or $ax^2 = ay^2 + a\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}ay\right)$. But $x^3 = ax^2 + b$, so that $x^3 = ay^2 + \frac{a^3}{9} + \frac{2}{3}a^2y + b (= 6y^2 + 6\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 24y + 400)$. We also know that according to Tartaglia's theorem $x^3 = y^3 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 + 3\frac{a}{3}y\left(y + \frac{a}{3}\right)$. Hence $ay^2 + \frac{a^3}{9} + \frac{2}{3}a^2y + b = y^3 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 + ay^2 + \frac{a^2}{3}y$,

DE L'OPERATION. 323

Construction semblable à la premiere construction, de la premiere difference.

Le tiers de — 6 (des 6 ②) est — 2
 Qui multiplié par son double — 4, fait 8; au
 mesme aiousté le carré de — 2 premier en
 l'ordre, fait 12, auquel appliqué ① fera 12 ①
 Puis des 32 donnez, soustraict le cube de — 2
 premier en l'ordre, qui est — 8 reste 40
 Au mesme aiousté le produit de — 2 premier
 en l'ordre, par 12 second en l'ordre, qui est —
 24, fait 16
 Puis on dira 1 ③ (par reigle) vaut 12 ① (second en
 l'ordre) + 16 (quatriesme en l'ordre) combien
 1 ① ? fait par le 69 probleme 4
 Au mesme aiousté — 2 premier en l'ordre fait 2

Il se di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration Arithmetique.* Mettons par le moien du 66 probleme soubz chacun terme son valeur en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \text{ ③.} & - 6 \text{ ②} + 32. & 1 \text{ ①.} & 2. \\ 8. & 8. & 2. & 2. \end{array}$$

Et appert que 2 est leur quatriesme terme proportionel.

Preparation d'autre demonstration Geometrique.

Soit à la figure du theoreme deuant le 69 probleme, 1 ③ A C, egale ou vallant — 6 ② + 32; Et soit C B 2, à sçauoir le tiers de 6, des 6 ② donnez. Il faut demonstrier que son costé, ou 1 ① A C vaudra 2.

$(6y^2 + 3(\frac{a}{3})^3 + 24y + b = y^3 (\frac{a}{3})^3 + 6y^2 + 12y)$ or $y^3 = \frac{1}{3} a^2y + \frac{2}{27} a^3 + b (y^3 - 12y + 416)$. It will be observed that where we distinguish between the two variables x and y , Stevin distinguishes between ① AB and ① AC. He does not here use his "quantités postposées" ① and sec ① re-introduced in Prob. 78 and thereafter.

324. LE II. LIVRE D'ARITH.

Demonstration. 1 ③ AC, est par l'hypothese egale à -6 ② AC + 32.

Aioustons doncques à chascune partie 6 ② AC;

Ergo 1 ③ AC + 6 ② AC, seront egales à 32.

Puis aioustons à chascune partie 1 ③ CB + 3 solides rectangles L.H.N.F.G.C;

Ergo 1 ③ AC + 6 ② AC + 1 ③ CB + 3 solides rectangles L.H.N.F.G.C. seront egales à 1 ③ CB + 3 solides rectangles L.H.N.F.G.C + 32.

Mais 1 ③ AC + 1 ③ CB + 3 solides rectangles L.H.N.F.G.C, sont egales à 1 ③ AB par le mesme theoreme deuant le 69 probleme.

Ergo 1 ③ AB + 6 ② AC, sont egales à 1 ③ CB + 3 solides rectangles L.H.N.F.G.C + 32.

Mais les 3 solides rectangles L.H.N.F.G.C. sont egales à 6 ② AC + 12 ① AC, par le troisieme corol. deuant le 69 probleme.

Ergo 1 ③ AB + 6 ② AC, sont egales à 1 ③ CB + 6 ② AC + 12 ① AC + 32.

Puis soustrahons de chascune partie 6 ② AC;

Ergo 1 ③ AB, demeurera egale à 1 ③ CB + 12 ① AC + 32.

Mais 12 ① AC, sont moindres que 12 ① AB, en 12 ③ CB; Parquoi aioustons à chascune partie 12 ① CB;

Ergo 1 ③ AB + 12 ① CB, seront egales à 1 ③ CB + 12 ① AB + 32.

Mais 12 ① CB, sont egales à 3 ③ CB; car estant chascun CB, s'ensuit que 12 ① CB font 24. Item que 3 ③ CB seront aussi 24;

Ergo 1 ③ AB + 3 ③ CB, sont egales à 1 ③ CB + 12 ① AB + 32.

Puis soustrahons de chascune partie 1 ③ CB;

In order to prove the method in case 1) (the "geometrical demonstration" is supposed not to be a proof, but a verification), Stevin, in his "Origine de la Construction", changes $x^3 = ax^2 + b$ into $x^3 - ax^2 = b$, which he transforms into $x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = b + \frac{a^2}{3}x - \left(\frac{a}{3}\right)^3$, or $\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^2}{3}x + b - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^2}{3}x - \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{3} + b - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{3}$, or if $y = x - \frac{a}{3}$: $y^3 = \frac{a^2}{3}y + b + \frac{2a^3}{27}$ ($x^3 = 6x^2 + 400$, $x^3 - 6x^2 = 400$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 400 + 12x - 8$, $(x - 2)^3 = 12x + 392 = 12(x - 2) + 416$).

DE L'OPERATION.

325

Ergo 1 ③ AB + 2 ③ CB demeurera egale à 12
① AB + 32.

Mais 2 ③ CB (veu que chaque CB fait 2) sont
egales à 16;

Ergo 1 ③ AB + 16, sont egales à 12 ① AB + 32.
Puis soustrahons de chascune partie 16;

Ergo 1 ③ AB, demeurera egale à 12 ① AB + 32.

Mais estant 1 ③ AB, egale on vallant 12 ① AB +
16, alors par le 69 probleme 1 ① AB vaudra 4. Puis
de ladicte AB soustraiet CB 2, restera 1 ① AC 2; ce
qu'il falloit demonstrier.

TROISIEME DIFFERENCE

DE SECOND TERME ② — ③.

Explication du donné. Soient donnez trois termes
selon le probleme tels: le premier 1 ③, le second 6 ②
— 32, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut
trouver leu quatrieme terme proportionel.

Construction.

Le tiers de 6 (des 6 ②) est 2

Qui multiplié par son double 4 fait 8 au mes-
me aiouste le carré de 2 premier en l'ordre,
fait 12, auquel appliqué ① sera 12 ①

Puis des — 32 donnez, soustraiet le cube de 2 pre-
mier en l'ordre qui est 8, reste 40

Au mesme aiouste le produit de 2 premier en l'or-
dre, par 12 second en l'ordre qui est 24, fait — 16

Puis on dira 1 ③ (par reigle) vaut 12 ① (second
en l'ordre) — 16 (quatrieme en l'ordre) com-
bien 1 ①? fait par le 69 probleme 2

In order to prove the second method in case 1) Stevin replaces the problem by another one: to find two numbers x and y such that $xy = 400$, $x^3 - 6x^2 = 400$; then applying the solution of Question 10 of Prob. 81, he finds for y the equation $y^3 = -2400y + 160\,000$, equivalent to our $y^3 = -aby + b^2$.

326 LE II. LIVRE D'ARITH.
 Au mesme aiousté 2, premier en l'ordre fait 4
 le di que 4 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration Arithmetique.* Mettons par le moien du 66 probleme sous chascun terme sa valeur en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{3}. & 6 \textcircled{2} - 32. & 1 \textcircled{1}. & 4. \\ 64. & 64. & 4. & 4. \end{array}$$

Et appert que 4 est leur quatriesme terme proportionel requis.

*Preparation d'autre demonstration
 Geometrique.*

Soit à la figure du theoreme deuant le 69 probleme
 $1 \textcircled{3} AB$, egale ou vallant $6 \textcircled{2} AB - 32$; Et soit $CB 2$
 à sçavoir le tiers de 6 des $6 \textcircled{2}$ donnez; Il faut demon-
 strer que son costé ou $1 \textcircled{1} AB$ vaudra 4. *Demonstration.*
 $1 \textcircled{3} AB$, est par l'hypothese egale à $6 \textcircled{2} AB - 32$.

Mais $1 \textcircled{2} AB$, est egale à $1 \textcircled{2} AC +$ le gnomon
 $POBA$, par le 1 Corollaire deuant le 69 probleme,
 parquoi $6 \textcircled{2} AB$, sont egales à $6 \textcircled{2} AC + 6$ gnomons
 $POBA$;

Ergo $1 \textcircled{3} AB$, est egale à $6 \textcircled{2} AC + 6$ gnomons
 $POBA - 32$.

Mais le gnomon $POBA$, est egal à $1 \textcircled{2} CB +$ le
 double du produit de $1 \textcircled{1} AC$ par $CB 2$, par le 2 co-
 rollaire deuant le 69 probleme, parquoi 6 gnomons
 $POBA$, sont egaux à $6 \textcircled{2} CB + 24 \textcircled{1} AC$;

Ergo $1 \textcircled{3} AB$, est egale à $6 \textcircled{2} AC + 6 \textcircled{2} CB$
 $+ 24 \textcircled{1} AC - 32$.

Mais $6 \textcircled{2} CB$, sont egalcs à 24 (car CB est 2) par-

DE L'OPERATION. 327

quoil 6 ② CB (veu que chaque cube de CB vaut 8)
font egales à 3 ③ CB;

Ergo 1 ③ AB, est egale à 6 ② AC + 3 ③ CB
+ 24 ① AC — 32.

Mais 1 ③ AB, est egale à 1 ③ AC + 1 ③ CB +
3 solides rectangles L.H.NF.GC par le mesme theo-
reme deuant le 69 probleme;

Ergo 1 ③ AC + 1 ③ CB + 3 solides rectan-
gles L.H.NF.GC, font egales à 6 ② AC + 3 ③ CB
+ 24 ① AC — 32.

Mais les trois solides rectangles L.H.NF.GC. font
egaux à 6 ② AC + 12 ① AC par le 3 corollaire de-
uant le 69 probleme.

Ergo 1 ③ AC + 1 ③ CB + 6 ② AC + 12 ①
AC font egales à 6 ② AC + 3 ③ CB + 24 ①
AC — 32.

Puis soustrahons de chaque partie 1 ③ CB + 6
② AC + 12 ① AC;

Ergo restera 1 ③ AC egale à 2 ③ CB + 12 ①
AC — 32;

Mais 2 ③ CB (parce que CB fait 2) vallent 16;

Ergo 1 ③ AC sera egale à 12 ① AC — 16;

Mais estant 1 ③ AC egale ou vallant 12 ① AC —
16, alors par le 69 probleme 1 ① AC vaudra 2, à la
mesme AC aiouste CB 2, fait pour 1 ① AB 4; ce qu'il
falloit demonstret. *Conclusion.* Estant doncques donnez
trois termes, desquels le premier ③, le second ②, le
troisiesme nombre algebratique quelconque: Nous
auons trouué leur quatriesme terme proportionel; ce
qu'il falloit faire.

328 LE II. LIVRE D'ARITH.
 DE L'ORIGINE DE LA CON-
 STRUCTION DV PRECEDENT
 PROBLEME.

Quand ③ est egale à ② & ④, nous les pouuons re-
 duire, en ③, egale à ①, & ④, ou en ② egale à ④, &
 alors deuiet la valeur de 1 ① notoire par le precedent
 69 probleme, & de telle reduction est colligée la ma-
 niere de ladicte construction comme il apparoiſtra.
 Soit par exemple:

$$1 \text{ ③ egale a } 6 \text{ ② } + 400.$$

Qui ſont le premier & ſecond terme de la premiere
 difference; Et ſouſtrahons de chaſque partie 6 ②;

$$\text{Ergo } 1 \text{ ③ } - 6 \text{ ②, demeurera egale à } 400.$$

Puis aiouſtons à chaſque partie quelque ①, & ④,
 telles que la premiere partie aie racine cubique de 1 ①
 + quelque ④. Or pour trouuer telles quantitez, ne
 faut que multiplier en ſoi cubiquement 1 ① — le tiers
 de 6, des 6 ②, qui eſt 1 ① — 2 (la raiſon pourquoi il
 faut prendre le tiers de 6 des 6 ②, eſt, que la potence
 cubique de 1 ① — ④, a toujours le nombre de ſes ②,
 triple au ④ de la racine, dont la raiſon appert, es
 nombres procedans de l'operation de telle cubique
 multiplication) Et donne produict 1 ③ — 6 ② + 12
 ① — 8; du meſme ſouſtraiſt la premiere des egales
 parties 1 ① — 6 ②, reſte 12 ① — 8 qui aiouſtez à chaſ-
 que partie, fera que la premiere partie aura racine cu-
 bique de ① & ④; aiouſtons les doncques à chaſque
 partie;

$$\text{Ergo } 1 \text{ ③ } - 6 \text{ ② } + 12 \text{ ① } - 8, \text{ feront egales à } 12 \text{ ① } + 392.$$

Puis extrahons de chaſque partie racine cubique.

DE L'OPERATION. 329

Ergo 1 $\textcircled{1} - 2$, seront egales à $\sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 12} \textcircled{1} + 392}$.

Or parce que la seconde partie n'a point de racine seruant à nostre propos, il nous faudra acheuer la reste par l'aide de la figure du theoreme deuant le 69 probleme en ceste sorte : Soit chascune $\textcircled{1}$ de noz egales parties la ligne A B;

Ergo 1 $\textcircled{1} A B - 2$, sera egale à $\sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 12} \textcircled{1} A B + 392}$.

Puis posons que C B soit 2;

Ergo 1 $\textcircled{1} A C$, sera egale, à $\sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 12} \textcircled{1} A B + 392}$.

Puis prenons la potence cubique de chascue partie;

Ergo 1 $\textcircled{3} A C$ sera egale à $12 \textcircled{1} A B + 392$.

Mais $12 \textcircled{1} A B$, valent $12 \textcircled{1} A C + 24$ (car 12 fois C B 2, fait 24) osons doncques les $12 \textcircled{1} A B$, & en son lieu posons $12 \textcircled{1} A C + 24$;

Ergo 1 $\textcircled{3} A C$, sera egale a $12 \textcircled{1} A C + 416$.

Et ainsi au lieu des donnez 1 $\textcircled{3} A B$, egale à $6 \textcircled{2} A B + 400$, nous auons 1 $\textcircled{3} A C$, egale à $12 \textcircled{1} A C + 416$. Desquelles estant trouué la valeur de 1 $\textcircled{1} A C$, qui par le 69 probleme est $\sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 208} + \sqrt{43200} + \sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 208} - \sqrt{43200}}$; s'en suit que pour auoir la valeur de toute la A Brequise, qu'il y faut encore aiouster la C B, qui par l'hypothese est 2, & sera pour solution comme dessus $\sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 208} + \sqrt{43200} + \sqrt{\textcircled{3} \textit{bino. 208} - \sqrt{43200} + 2}$.

Or que ceci est l'origine de ladicte construction, est manifeste; toutesfois pour plus grande euidence nous repeterons en brief le susdict en ceste sorte:

Premierement il appert (par les nombres faisans la cubique multiplication de 1 $\textcircled{1} - 2$) que le tiers de 6

330 LE II. LIVRE D'ARITH.
 des 6 ② qui est 2, multiplié par son double fait 8, &
 au mesme aiousté le carré dudit 2 fait (toujours
 pour nombre des ① reduictes) 12 & les appliquant ①
 sont 12 ①

Il appert aussi que des 400 donnez, on à soustrait
 le cube du susdict 2, qui est 8, & restoit 392, aux mes-
 mes s'aiousta le produit dudit 2, par ledict 12, qui est
 24, fait (toujours pour le ③ reduict) 416

Puis il appert, qu'estant 1 ③ égale à 12 ① AC +
 416, qu'on en cherche la valeur de 1 ① par le 69 pro-
 bleme qui est $\sqrt[3]{\text{bino. } 208 + \sqrt[3]{43200} + \sqrt[3]{\text{bino. } 208 - \sqrt[3]{43200}}$

Puis qu'au mesme on aiouste encore ledict tiers de
 6 des 6 ②, qui est 2, fait pour solution $\sqrt[3]{\text{bino. } 208 + \sqrt[3]{43200} + \sqrt[3]{\text{bino. } 208 - \sqrt[3]{43200} + 2}$.

De sorte qu'il appert de point en point, que ceci est
 la vraie origine de la construction de la premiere diffe-
 rence; Et celui qui entendra bien ceste ci, entendra aussi
 celles des deux autres differences. Laquelle origine il
 nous falloit declarer.

DE L'ORIGINE DE DE LA

SECONDE CONSTRUCTION DE LA precedente premiere difference.

Quand ③ est égale à ② + ①, nous la pouvons re-
 duire en ③ égale à -① + ②, & alors deviét la valeur
 de 1 ① notoire par la seconde difference du 69 proble-
 me, & de telle reduction est colligée la maniere de la
 seconde construction de la precedente premiere diffe-
 rence, comme il apparaitra. Soit par exemple 1 ③,
 égale à 6 ② + 400, qui sont le premier & second ter-

DE L'OPERATION.

331

me de ladicte difference. Mais pour clairement expliquer le proposé, nous metterons dessoubs noz quatre termes leurs valeurs, en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{3}. & 6 \textcircled{2} + 400. & 1 \textcircled{1}. & 10. \\ 1000. & 1000. & 10. & 10. \end{array}$$

Or il est notoire par les mesmes, que le cube de la valeur de 1 $\textcircled{1}$, est egal à six quarrez du mesme valeur + 400: Pourtant si nous auions nombre tel, que de son cube soustraiçt les six quarrez du mesme nombre, & que la reste fust 400, il est manifeste, que tel nombre seroit la valeur de 1 $\textcircled{1}$ requise. Pourtant mettons ceci en question telle: *Trouuons vn nombre tel, que de son cube soustraiçt les six quarrez dudidit nombre, la reste soit 400.* Or si nous commençames à besoigner selon la vulgaire maniere, qui sera enseignée au 81 probleme, nous trouuerions à la fin, egalité de termes, qui seroient les mesmes que les termes donnez; de sorte que ne prouffiterions ainsi rien; Parquoi il nous faut mettre autre question que la precedente, laquelle est inuentée en ceste sorte: le voi aux susdicts quatre termes, que si ie diuifois le 400 donnez, par le 10 valeur de 1 $\textcircled{1}$, le quotient seroit 40: Doncques 40 & 10 sont deux nombres tels, que leur produict est 400, & du cube de l'vn (à sçauoir du 10) soustraiçt les 6 quarrez du mesme nombre, reste 400, parquoi ie propose ceci en question telle: *Trouuons deux nombres tels, que leur produict soit 400. & du cube de l'vn, soustraiçt les six quarrez du mesme nombre, la reste soit 400.* Et est notoire qu'estant trouuez tels deux nombres, l'vn sera celui que nous cherchons: Or ceste question est la 10 du 81 probleme, par l'operation de laquelle, il est notoire estre colligée ladicte

332 LE II. LIVRE D'ARITH.
 construction; Car apres la reduction, $1 \textcircled{3}$ se trouua
 egale a $-2400 \textcircled{1} + 160000$, mais ce 2400, est le pro-
 duit de 6 & 400 donnez, auquel precede $-$, & leur
 quantité est $\textcircled{1}$: Et le 160000 est le quarré du 400 don-
 né, ce qui auient ainsi en tous exemples semblables; &
 pourtant est ce, que l'on à mis tout ceci en reigle plus
 briefue. Quant au 400 qui se diuise finalement par le
 40 trouué; La raison en est notoire audict 10 exemple
 du 81 probleme. Laquelle origine il nous falloit
 declarer.

DES SOLUTIONS QUE L'ON PEUT
 FAIRE PAR $-$ SVR LES PRECEDENS
 PROBLEMES.

Aucuns des precedens problemes, de la proportion
 des nombres algebriques, reçoient par dessus les so-
 lutions ci deuant données, encore d'autre solution par
 $-$; Et combien les mesmes ne semblent que solutions
 songées, toutesfois elles sont viles, pour venir par les
 mesmes aux vraies solutions des problemes suiuañs par
 $+$; La cause est, qu'au valeur de $1 \textcircled{1}$ trouué par quel-
 que des problemes precedens, il faudra aucunesfois
 encore aiouster quelque certain nombre, comme appa-
 roitra; d'ou s'enfuit, que quand le nombre à aiouster,
 fera maieur que ladicte solution par $-$, que leur dif-
 ference sera vraie solution par $+$. Or lesdictes solu-
 tions par $-$ (lesquelles nous expliquerons par articles
 selon l'ordre des problemes, & leurs differentes prece-
 dentes sont telles:

ARTICLE I. Estant $1 \textcircled{1}$ egale à $\textcircled{2}$, la valeur de
 $1 \textcircled{1}$, ne peut estre $-$, la raison est, que la valeur du

Now follows Stevin's introduction of negative roots:

OF THE SOLUTIONS THAT CAN BE MADE BY $-$ ON THE
 PRECEDING PROBLEMS.

"Some of the preceding problems have in addition to the given solutions also
 other ones by $-$. And though they only seem to be imagined solutions, they are
 at any rate useful in order to come to true solutions of the following problems
 by $+$. The reason is that we sometimes have to add a certain number to the x
 which is found in preceding problems, so that if that added number is larger
 than that solution by $-$, their difference shall be a true solution by $+$ [what
 is probably meant is that an equation such as $x^3 = 6x - 5$, if solved by

DE L'OPERATION. 333

premier terme seroit toujours —, & du second terme toujours +, lesquels ne peuvent estre egaux.

ARTICLE II. Estant ② egale a ① + ③, la solution se peut faire par —; Par exemple 1 ② vaut 4 ① + 21, combien 1 ①? On changera le second terme donné ainsi: 1 ② vaut — 4 ① + 21, combien 1 ①? fait par le 68 probleme 3, lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 3. L'Arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ②.} \quad 4 \text{ ①} + 21. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 3. \\ 9. \quad - 12 + 21. \quad - 3. \quad - 3. \end{array}$$

ARTICLE III. Estant ② egale a — ① + ③, la solution se peut faire par —. Par exemple 1 ② vaut — 4 ① + 21, combien 1 ①? On changera le second terme donné ainsi: 1 ② vaut 4 ① + 21 combien, 1 ①? fait par le 68 probleme 7, lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 7; L'Arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ②.} \quad - 4 \text{ ①} + 21. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 7. \\ 49. \quad 28 + 21. \quad - 7. \quad - 7. \end{array}$$

ARTICLE IIII. Estant ② egale à ① — ③, la valeur de 1 ① ne peut estre —: la raison est, que la valeur du second terme: seroit toujours +, & du second terme toujours —, lesquels ne peuvent estre egaux.

ARTICLE V. Estant ③ egale à ① + ②, on verra si le produit des $\frac{2}{3}$ du nombre de ①, par la racine quarrée de $\frac{1}{3}$ du mesme nōbre, est Egal, Maieur, ou Moindre, que ③ donné. Car quand tel produit est egal, ou maieur, ils auront chascune vne solution

$x = y + 2$, gives $y^3 = 12y + 1$ with a root $y = -1$, which gives $x = +1$; rejection of $y = -1$ would result in rejection of $x = +1$]. Such solutions by — are as follows:

Article I. If $x = a$ (a positive), then there is no solution by —.

Article II. If $x^2 = ax + b$ (a, b positive), then there is a solution by —, e.g. if $x^2 = -4x + 21$, $x = 3$ (Prob. 68, No. 3), then $x^2 = 4x + 21$ has a root $x = -3$.

Article III. If $x^2 = -ax + b$, then there is a solution by —; e.g. if $x^2 = 4x + 21$, $x = 7$ (Prob. 68, No. 7), then $x^2 = -4x + 21$ has a root $x = -7$. [In other words, $x^2 = 4x + 21$ has two roots $x = 7, x = -3$; $x^2 = -4x + 21$ has two roots $x = 3, x = -7$].

334 LE II. LIVRE D'ARITH.
 par —, mais estant moindre il ne l'aura pas. Et pre-
 mierement nous donnerons exemple, auquel se ren-
 contre egaleté, ainsi: 1 ③ vaut 12 ① + 16, combien
 1 ①? Car le produit de 8 (pour les $\frac{2}{3}$ de 12 des 12 ①)
 par 2 (pour la racine de $\frac{1}{3}$ desdicts 12) fait 16, qui est
 egal au ③ donné, ils auront doncques vne solution par
 —, laquelle on trouue en ceste sorte: On changera le
 second terme donné ainsi: 1 ③ vaut 12 ① — 16, com-
 bien 1 ①? fait par le 69 probleme 2, lequel appliqué
 à nostre question nous dirons, que la solution sera — 2.
 L'arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ③.} \quad 12 \text{ ①} + 16. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 2. \\ - 8. \quad - 24 + 16. \quad - 2. \quad - 2. \end{array}$$

Et estant ledict produit Maieur, les donnez auront
 aussi (comme nous auons dict) solution par —. Par
 exemple, 1 ③ vaut 12 ① + 9, combien 1 ①? On
 changera le second terme donné ainsi: 1 ③ vaut 12 ①
 — 9, combien 1 ①? fait par le 69 probleme, pour
 maieure solution 3, lequel appliqué à nostre question,
 nous dirons que la solution est — 3. L'arithmetique
 demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ③.} \quad 12 \text{ ①} + 9. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 3. \\ - 27. \quad - 36 + 9. \quad - 3. \quad - 3. \end{array}$$

Mais estant ledict produit moindre, ils ne peuuent
 (comme nous auons dict dessus) auoir solution par —,
 la raison est que la valeur du deuxiesme terme donné
 seroit tousiours necessairement maieur, que celui du
 premier.

ARTICLE VI. Estant ③ egale à — ① + ③, la

Article IV. If $x^2 = ax - b$, there is no solution by —, since the second member
 would always be —, and the first always +.

Article V. If $x^3 = ax + b$, we must find out whether $\frac{2}{3}a \sqrt{\frac{1}{3}a} \cong b$.
 If \cong , there is a solution by —; if $<$, there is none. For instance, if $x^3 = 12x + 16$,
 where $8\sqrt{4} = 16$, we write $x^3 = 12x - 16$, $x = 2$ (Prob. 69, No. 2); hence
 $x^3 = 12x + 16$ has the root $x = -2$.

DE L'OPERATION. 335

valeur de 1 ① ne peut estre —, la raison est, que la valeur du premier terme seroit toujours —, & du second terme toujours +, lesquels ne peuvent estre egaux.

ARTICLE VII. Estant ③ egale à ① — ②, la solution se peut faire par —. Par exemple 1 ③ vaut 2 ① — 21; combien 1 ①? On changera le second terme ainsi: 1 ③ vaut 2 ① + 21, combien 1 ①? fait par le 69 probleme 3, lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 3. L'arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ③.} \quad 2 \text{ ①} - 21. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 3. \\ - 27. \quad - 6 - 21. \quad - 3. \quad - 3. \end{array}$$

ARTICLE VIII. Et si l'on posoit 1 ③ egale à — 3 ① — 4, la solution se pourroit aussi faire par — changeant le second terme cōme dessus, en ceste sorte: 1 ③ vaut — 3 ① + 4, combien 1 ①? fait par le 69 probleme 1; lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 1. L'arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ③.} \quad - 3 \text{ ①} - 4. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 1. \\ - 1. \quad + 3 - 4. \quad - 1. \quad - 1. \end{array}$$

ARTICLE IX. Estant ③ egale à ② + ④, la valeur de 1 ① ne peut estre —, la raison est, que la valeur du premier terme, seroit toujours —, & du second terme toujours +, lesquels ne peuvent estre egaux.

ARTICLE X. Estant ③ egale à — ② + ④; On verra si le produit de $\frac{2}{3}$ du nombre de ②, par le carré des $\frac{2}{3}$, du mesme nombre, est Egal, ou Maieur, ou Moindre, que ④ donné. Car quand tel produit est

[This example is one taken from Cardan, *Ars magna*, f.4 r, where $x = 4$ is an *aestimatio vera* of $x^3 = 12x + 16$, and $x = -4$, written $m : 4$, an *aestimatio ficta* of $x^3 + 16 = 12x$]. And if $x^3 = 12x + 9$, where $8\sqrt{4} > 9$, we write $x^3 = 12x - 9$, $x = 3$ (Prob. 69), hence $x^3 = 12x + 9$ has the root $x = -3$. But if $\frac{2}{3}a \sqrt{\frac{1}{3}a} < b$, then $b + ax$ will always be $> x^3$, hence there is no solution by —. [This reason is rather cryptic, but it can readily be seen from the Cardanic formula that in this case x is positive, since both u and v in $x = u + v$ are positive.

Article VI. If $x^3 = -ax + b$, there is no solution by —.

336 LE II. LIVRE D'ARITH

egal, ils auront vne solution par —. Et estant maieur, ils auront deux solutions par —: mais estant moindres, ils n'auront point de solution par —. Et premierement nous donnerons exemple, auquel se rencontre egalité, ainsi 1 ③ vaut — 3 ② + 4, combien 1 ①? Car le produit 1 (pour $\frac{1}{3}$ de 3 des 3 ②) par 4 (pour le quarré des $\frac{2}{3}$ de dictz 3) fait 4, qui est egal au ③ donné. Ils auront d'ocques vne solution par —, laquelle on trouue en ceste sorte: On changera le second terme donné ainsi 1 ③ vaut 3 ② — 4 combien 1 ①? fait par le 70. probleme 2, lequel applique à nostre question, nous dirons que la solution est — 2. l'Arithmetique demonstration en sera telle:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ ③.} & - 3 \text{ ②} + 4. & 1 \text{ ①.} & - 2. \\ - 8. & - 12 + 4. & - 2. & - 2. \end{array}$$

Et estant ledict produit maieur, nous aurons alors deux solutions par —. Par exemple 1 ③ vaut — 11 ② + 72, combien 1 ①? On changera comme dessus, le second terme ainsi: 1 ③ vaut 11 ② — 72, combien 1 ①? fait par le 70 probleme, pour maieure solution 3, & pour moindre solution $\sqrt[4]{40-4}$, lesquels appliquez à nostre question, nous dirons que la solution est & — 3, & — $\sqrt[4]{40-4}$. l'Arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ ③.} & - 11 \text{ ②} + 72. & 1 \text{ ①.} & - 3. \\ - 27. & - 99 + 72. & - 3. & - 3. \end{array}$$

Item.

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ ③.} & - 11 \text{ ②} + 72. & 1 \text{ ①.} & - \sqrt[4]{40-4}. \\ -\sqrt[3]{309760-344}. & -\sqrt[3]{309760-616} + 72. & -\sqrt[4]{40-4}. & -\sqrt[4]{40-4} \end{array}$$

Mais estant ledict produit moindre, alors ne se

Article VII. If $x^3 = ax - b$, then a solution by — is possible, e.g. $x^3 = 2x - 21$; since $x^3 = 2x + 21$ has the root $x = 3$ (Prob. 69, No. 3), $x^3 = 2x - 21$ has the root $x = -3$.

Article VIII. If $x^3 = -ax - b$, a solution by — is also possible, e.g. $x^3 = -3x - 4$ has the root $x = -1$ because $x^3 = -3x + 4$ has the root $+1$.

Article IX. If $x^3 = ax^2 + b$, there is no solution by —.

Article X. If $x^3 = -ax^2 + b$, for $\frac{1}{3}a(\frac{2}{3}a)^2 = b$ there is one solution by —; if $>$, there are two such solutions, and if $<$, there are no such

DE L'OPERATION. 337

pourra (comme nous auons dict dessus) auoir solution par —: la raison est que la valeur du deuxiesme terme, deuiet tousiours necessairement maieure, que celui du premier.

ARTICLE XI. Estant ③ egale à ② — ①, la solution se peut faire par —. Par exemple 1 ③ vaut 6 ② — 400, combien 1 ①? On changera le second terme ainsi, 1 ③ vaut 6 ② + 400, combien 1 ①? fait par le 70 probleme 10. lequel appliqué à nostre question nous dirons que la solution est — 10. L'arithmetique demonstration en est telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ③.} \quad 6 \text{ ②} - 400. \quad 1 \text{ ①.} \quad - 10. \\ - 1000. \quad - 600 - 400. \quad - 10. \quad - 10. \end{array}$$

solutions. [Indeed, from $\frac{1}{4} \left(b - \frac{2a^3}{27} \right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{9} \right)^3$, see Prob. 70, case 2) follows $\frac{4a^3}{27} \geq b$]. For example, $x^3 = -3x^2 + 4$ has the root $x = -2$ because $x^3 = 3x^2 - 4$ has the root $x = 2$; $x^3 = -11x^2 + 72$ has the roots $x = -3$, $x = -\sqrt{40} - 4$, because $x^3 = 11x^2 - 72$ has the roots $x = 3$, $x = 4 + \sqrt{40}$. [Stevin writes $\sqrt{40} - 4$].

Article XI. If $x^3 = ax^2 - b$, a solution by — is possible. [Among Stevin's examples that of $x^3 = 6x^2 - 400$, is wrong, the solution by — is not — 10, but — α , $5.8 < \alpha < 5.9$]

[The cases $x^2 = -ax - b$, $x^3 = -ax - b$, $x^3 = -ax^2 - b$ are not discussed].

Prob. LXXI contains the theory of the general cubic equation, in 7 cases, all discussed separately:

1) $x^3 = ax^2 + bx + c$, 2) $x^3 = -ax^2 - bx - c$, 3) $x^3 = ax^2 + bx - c$,
 4) $x^3 = -ax^2 + bx - c$, 5) $x^3 = ax^2 - bx + c$, 6) $x^3 = -ax^2 - bx + c$, 7) $x^3 = ax^2 - bx - c$, but not $x^3 = -ax^2 - bx - c$, which has no positive roots. If we cast all types into the form $x^3 = px^2 + qx + r$ (p, q, r

pos. or neg.), they are solved by the substitution $x = y + \frac{p}{3}$, which leads to the

equation $y^3 = y \left(q + \frac{p^2}{3} \right) + \frac{2p^3}{27} + \frac{pq}{3} + r$, to be solved by the methods of

Prob. 69. The number of (positive) roots presented by Stevin is for the different cases:

1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1 or 2; 6) 1 or 2; 7) 1 or 2.

The equation in y is obtained by writing

$$x^3 - px^2 + \frac{p^2}{3}x - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qx + r + \frac{p^2}{3}x - \left(\frac{p}{3}\right)^3, \text{ or}$$

$$\left(x - \frac{p}{3}\right)^3 = \left(q + \frac{p^2}{3}\right)x - \left(q + \frac{p^2}{3}\right)\frac{p}{3} + \left(q + \frac{p^2}{3}\right)\frac{p}{3} + r - \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

$$y^3 = \left(q + \frac{p^2}{3}\right)y + \frac{2p^3}{27} + \frac{pq}{3} + r.$$

The sections in *L'Arithmétique* dealing with cubic equations have been analyzed by H. Bosmans, *Mathésis* 37 (1923). See footnote 35) of the Introduction. In this article several examples of Stevin's text have been given in the original and in the modern notation.

PROBLEME LXXII.

E *Stant donnez trois termes, desquels le premier $\textcircled{+}$, le second $\textcircled{+}\textcircled{-}$, le troisieme nombre algebräique quelconque : Trouver leur quatrieme terme proportionel.*

NOTA Le binomie du second terme donné, de ce probleme, se peut rencontrer en trois differences à sçavoir:

Probs. LXXII—LXXVII bring the theory of the Biquadratic equation, Prob. LXXII that of $x^4 = px + q$, LXXIII that of $x^4 = px^2 + qx + q$, Prob. LXXIV that of $x^4 = px^3 + q$, Prob. LXXV that of $x^4 = px^3 + qx + r$, Prob. LXXVI that of $x^4 = px^3 + qx^2 + r$, Prob. LXXVII that of $x^4 = px^3 + qx^2 + rx + s$ (p, q, r, s pos. or neg.). Only in Probs. 72-74 all possibilities as to the signs of the coefficients are taken into account; in the discussion of the last three problems only some examples are given, with the statement: "The con-

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$
 $-\textcircled{1} + \textcircled{3}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{3}$

Desquelles trois differences les autres en donnent trois diuerfes manieres d'operations, mais nous en donnerons vne simple & generale en ceste sorte:

PREMIERE DIFFERENCE

DE SECOND TERME $\textcircled{1} + \textcircled{2}$.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 $\textcircled{4}$, le second 12 $\textcircled{1}$ + 5, le troisieme 1 $\textcircled{1}$. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

$\frac{1}{4}$ $\textcircled{3}$ (par reigle) + 5 $\textcircled{1}$ (pour le 5 donné, luy applicant $\textcircled{1}$) valent 36 (quarré de 6, moitié de 12 des 12 $\textcircled{1}$ donnez) combien 1 $\textcircled{1}$? fait par le 69 probleme

Le quarré de sa moitié 2 est	4
Au mesme aioufté 5 donné, fait	9
Sa racine quarrée	3
De la mesme sousttraict 2 moitié de 4 premier en l'ordre, reste	1

La racine quarrée de 4 premier en l'ordre, est 2, laquelle quand au + ou - sera par reigle comme les 12 $\textcircled{1}$ donnez, qui sont +, sera doncques + 2, à laquelle appliqué $\textcircled{1}$ par reigle seront 2 $\textcircled{1}$

Puis on dira 1 $\textcircled{2}$ (par reigle) vaut 2 $\textcircled{1}$ (sixiesme en l'ordre) + 1 (cincquiesme en l'ordre) combien 1 $\textcircled{1}$? fait par le 68 probleme $\sqrt{2} + 1$

Le di que $\sqrt{2} + 1$ est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration Arithmetique.* Mettons par

struction will be similar to that of the preceding problem." The method used is that of Ferrari, familiar through Cardan's *Ars magna*. In the case of Prob. 72 Stevin explains it as follows (in "Of the origin of the construction of the preceding problem"):

Given $x^4 = px + q$. Add to the left and the right side terms of the form $lx^2 + m$, such that we obtain in $x^4 + lx^2 + m$ as well as in $lx^2 + m + px + q$

350 LE II. LIVRE D'ARITH.
le moien du 66 probleme, sous chascune terme sa va-
leur en ceste sorte:

$$1 \textcircled{4}. \quad 12 \textcircled{1} + 5. \quad 1 \textcircled{1}. \quad \sqrt{2+1}.$$

$$17 + \sqrt{288}. \quad 17 + \sqrt{288}. \quad \sqrt{2+1}. \quad \sqrt{2+1}.$$

Et appert que $\sqrt{2+1}$, est leur quatriesme terme
proportionel.

DEUXIEME DIFFERENCE

DE SECOND TERME — $\textcircled{1} + \textcircled{6}$.

Explication du donné. Soient donnez trois termes se-
lon le probleme tels: le premier $1 \textcircled{4}$, le seconde — 32
 $\textcircled{1} + 60$, le troisieme $1 \textcircled{1}$. *Explication du requis.* Il
faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

$\frac{1}{4} \textcircled{3}$ (par reigle) + $60 \textcircled{1}$ (pour le + 60 donné,
lui appliquant $\textcircled{1}$) vallent 256 (quarré de — 16 , moitié
de — 32 des — $22 \textcircled{1}$ données) combien $1 \textcircled{1}$? fait

par le 69 probleme. 4

Le quarré de sa moitié 2 est 4

Au mesme aioufté 60 donné, fait 64

Sa racine quarrée 8

De la mesme sousttraict 2, moitié de 4 premier 6

en l'ordre, reste 6

La racine quarrée de 4 premier en l'ordre est 2, la-

quelle quant au + ou —, sera par reigle com-

me les — $32 \textcircled{1}$ donnez, qui sont —, sera donc

— 2, à laquelle appliqué $\textcircled{1}$ (par reigle) sera — $2 \textcircled{1}$

Puis on dira — $1 \textcircled{2}$ (par reigle) vaut — $2 \textcircled{1}$ (sixies-

me en l'ordre) + 6 (cincquiesme en l'ordre)

a perfect square. Hence, if $m = (\frac{y}{2})^2$, $l = y$, the condition that

$lx^2 + px + m + q = yx^2 + px + (\frac{y}{2})^2 + q$ is a perfect square is

$y \left\{ (\frac{y}{2})^2 + q \right\} = (\frac{p}{2})^2$, or $\frac{1}{4} y^3 = -qy + (\frac{p}{2})^2$. Thus we must find

two numbers y and z such that $(\frac{y}{2})^2 = z$, $y(z + q) + (\frac{p}{2})^2$, a problem solved
in Prob. 81, No. 11, and this amounts to the solution of the cubic equation in y . The

DE L'OPERATION. 351

combien 1 ④, fait par le 68 probleme $\sqrt{7}-1$
 Le di que $\sqrt{7}-1$ est le quatriesme terme propor-
 tionnel requis. *Demonstration Arithmetique.* Mettons par
 le moi en du 66 probleme soubz chascun terme sa va-
 leur en ceste forte:

$$1 \text{ ④. } \quad -32 \text{ ①} + 60. \quad 1 \text{ ①. } \sqrt{7}-1$$

$$92-\sqrt{7}168. \quad 92-\sqrt{7}168. \quad \sqrt{7}-1. \quad \sqrt{7}-1$$

Et appert que $\sqrt{7}-1$ est leur quatriesme terme
 proportionnel.

TROISIEME DIFFERENCE

DE SECOND TERME ①—②.

Explication du donné. Soient donnez trois termes
 selon le probleme tels : le premier 1 ④, le second 4 ①
 — 3, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut
 trouuer leur quatriesme terme proportionnel.

Construction.

$\frac{1}{4}$ ③ (par reigle) — 3 ① (pour le — 3 donné, lui
 applicant ①) vallent 4 (quarré de 2 moitié de 4 des
 4 ①) combien 1 ①? fait par le 66 probleme 4
 Le quarré de sa moitié 2 est 4
 Au mesme aionsté — 3 donné fait 1
 Sa racine quarrée 1
 De la mesme sousttraict 2, moitié de 4 premier en
 l'ordre, reste — 1
 La racine quarrée de 4 premier en l'ordre, est 2, la-
 quelle quand au + ou —, sera par reigle com-
 me les 4 ① donnez, qui sont +, sera donc + 2
 à laquelle appliqué ① (par reigle) fera 2 ①

root y then gives $(x^2 + \frac{y}{2})^2 = (\sqrt{y}x + \sqrt{(\frac{y}{2}) + q})^2$, or $x^2 + \frac{y}{2} = \sqrt{xy} +$
 $\sqrt{(\frac{y}{2})^2 + q}$, $x^2 = \sqrt{y}x - \frac{y}{2} + \sqrt{(\frac{y}{2})^2 + q}$. Stevin's example is
 $x^4 = 12x + 5$, $\frac{1}{4}y^3 = -5y + 36$; $y = 4$, $z = 4$, $x^2 + 2 = 2x + 3$,
 $x = \sqrt{2} + 1$, which is indeed the only positive root. Nowhere, in his theory
 of the biquadratic equation, does Stevin ask for negative roots.

352 LE II. LIVRE D'ARITH
 Puis on dira 1 ② (par règle) vaut 2 ① (sixiesme
 en l'ordre — 1 cinqiesme en l'ordre) com-
 bien 1 ①? fait par le 68 probleme

Et de que 1 est le quatriesme terme proportionel re-
 quis. *Demonstration Arithmetique.* Mettons par le
 moien du 66 probleme, sous chascun terme sa valeur
 en ceste sorte :

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{4} & 4 \textcircled{1} - 3 & 1 \textcircled{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Et appert que 1 est leur quatriesme terme proportio-
 nel requis. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois
 termes, desquels le premier ④, le second ① ②, le troi-
 siemesme nombre algebratique quelconque; Nous auons
 trouué leur quatriesme proportionel; ce qu'il fal-
 loit faire.

DE L'ORIGINE DE LA CON-
 STRUCTION DV PRECEDENT
 PROBLEME.

Quand ④ est egale à ① ②, nous les pouuons redui-
 re, en ②, egale à ① ②, & alors deuient la valeur de 1 ①
 notoire par le 68 probleme, comme apparoittra. Soit
 1 ④, egale à 12 ① + 5; Qui sont le premier & second
 terme de la premiere differéce. Il faut d'ócques trouuer
 quelque ② & ③ telles, que aioustées à la 1 ④ la somme
 soit trinomie, duquel la racine soit 1 ② + quelque ③.
 Puis lesdictes ② ③ aioustez aux 12 ① + 5, que la
 somme soit trinomie, duquel la racine soit ① & ③. Or
 pour les trouuer, il sera premierement necessaire, que
 le quarré de la moitie du nombre de multitude des ②,

The general solution is outlined in Prob. LXVII. Here the equation is written
 $x^4 - px^3 = qx^2 + rx + s$. Make the left hand side the square of a form
 $x^2 + lx + m$:

$$(x^2 + lx + m)^2 = x^4 + 2lx^3 + (l^2 + 2m)x^2 + 2lmx + m^2,$$

hence $l = -\frac{p}{2}$. Write $m = y$:

$$\begin{aligned} (x^2 - \frac{p}{2}x + y)^2 &= qx^2 + rx + s + (\frac{p^2}{4} + 2y)x^2 - pyx + y^2 \\ &= x^2 (\frac{p^2}{4} + q + 2y) + x(r - py) + y^2 + s. \end{aligned}$$

DE L'OPERATION.

353

soit egal au \odot , car autres $\textcircled{2}$ & $\textcircled{3}$ aioustez a $1 \textcircled{4}$, ne peuuent faire que la somme aie racine seruant à nostre propos. Au second, que le produict du nombre des $\textcircled{2}$, par la somme de tel $\textcircled{3}$ trouué & le 5 donné soit egal à 36 , à sçauoir au quarré de 6 , moitié de 12 des $12 \textcircled{1}$, car autres $\textcircled{2}$ & $\textcircled{3}$ aioustez à $12 \textcircled{1} + 5$ ne peuuent faire, que la somme aie racine seruante à nostre propos. Il nous faut doncques trouuer deux nombres tels, que le quarré de la moitié du premier soit egal au second, & que le produict du premier par le second $+ 5$ soit 36 , & est ceste question la 11 du 81 probleme, par laquelle il appert, que le premier est 4 , & le second aussi 4 , le premier doncques sera le nombre des $\textcircled{2}$, & le second le $\textcircled{3}$. De sorte que les deux quantitez requises, seront $4 \textcircled{2} + 4$. Aiousteons mesmes à chascune de noz egales parties données;

Ergo $1 \textcircled{4} + 4 \textcircled{2} + 4$, seront egales à $4 \textcircled{2} + 12 \textcircled{1} + 9$.

Puis extrahons de chascune partie racine quarrée;

Ergo $1 \textcircled{2} + 2$, seront egales à $2 \textcircled{1} + 3$.

Puis soustrahons de chascune partie 2 ;

Ergo $1 \textcircled{2}$, demeurera egale à $2 \textcircled{1} + 1$.

Et ainsi au lieu de $1 \textcircled{4}$, egale à $12 \textcircled{1} + 5$, nous auons $1 \textcircled{2}$, egalé à $2 \textcircled{1} + 1$. Et la valeur de $1 \textcircled{1}$, par le 68 probleme est $\sqrt{2 + 1}$. Et est manifeste que ceci est l'origine de nostre construction du precedent probleme. Laquelle il nous falloit declarer.

PROBLEME. LXXIII.

E Stant donnez trois termes desquels le premier $\textcircled{4}$, le second $\textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{3}$, le troisieme

We have to find y such that

$$\left(\frac{p^2}{4} + q + 2y\right)(y^2 + s) = \frac{1}{4}(r - py)^2,$$

which is Prob. 81, Nos. 21, 22, and leads to an equation solved by the methods of Prob. 71. If y is solved from this cubic equation, then

$$x^2 - \frac{p}{2} + y = x \sqrt{\frac{p^2}{4} + q + 2y + \sqrt{y^2 + s}},$$

from which quadratic equation x can be found.

Stevin's example is $x^4 = -4x^3 + 4x^2 + 40x + 33$:

354 LE II. LIVRE D'ARITH.
*nombre algebratique quelconque : Trouver leur
 quatriefme terme proportionel.*

NOTA. Le trinomie du second terme de ce pro-
 bleme se peut rencontrer en sept differences à çavoir:

② + ① + ①	Lesquelles sept differences re-
- ② + ① + ①	çoient plusieurs diuerles manie-
② + ① - ①	res d'operations selon les autres
- ② + ① - ①	autres auteurs, mais nous en
② - ① + ①	auons faiçt vne feule & generale,
- ② - ① + ①	comme l'ensuit.
② - ① - ①	

PREMIERE DIFFERENCE

DE SECOND TERME ② + ① + ①.

Explication du donné. Soient donnez trois termes
 selon le probleme tels: le premier 1 ④, le second 3 ②
 + 30 ① + 16, le troiefme 1 ① *Explication du requis.*
 Il faut trouuer leur quatriefme terme proportionel.

Construction.

$\frac{1}{4}$ ③ (par reigle) + $\frac{3}{4}$ ② (pour le $\frac{1}{4}$ par reigle des 3 ② donnez) + 16 (pour le 16 donné lui ap- plicant ①) vallent 177 (exces de 225 quarré de la moitié de 30 des 30, ① donnez, sur 48 produit de 16 donné par 3 (des 3 ② donnez) combien 1 ① ? faiçt par le 70 probleme	6
Auquel aioufté 3, des 3 ② donnez, faiçt	9
Le quarré de 3, moitié de 6 premier en l'ordre est	9
Au mefme aioufté 16 donné, faiçt	25

$$(2y + 8)(y^2 + 33) = \frac{1}{4}(40 + 4y)^2$$

$$y^3 = -2y^2 + 7y + 68; y = 4.$$

$$\text{Hence } x^2 + 2x + 4 = 4x + 7; x = 3,$$

indeed the only positive root (there is a negative root $x = -1$, not mentioned by Stevin). Stevin also solves an equation in which the coefficient of x^4 is different from unity:

$$9x^4 = -12x^3 + 30x^2 + 204 + 171; x = 3.$$

I L'OPERATION. 355

Sa racine quarrée 5
 De la mesme soustraict 3, moitié de 6 premier en
 l'ordre, reste 2
 La racine quarrée de 9 second en l'ordre est 3, à la-
 quelle appliqué ① par reigle feront 3 ①
 Puis on dira 1 ② par reigle, vaut 3 ① (septiesme
 en l'ordre) + 2 (sixiesme en l'ordre) combien
 1 ① ? fait par le 68 probleme $\sqrt{4 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}$
 Le di que les mesmes sont le quatriesme terme pro-
 portionel requis.

Demonstration Arithmetique. Mettons par le moi en
 du 66 probleme sous chascun terme sa valeur en
 ceste sorte :

$$1 \textcircled{4}. \quad 3 \textcircled{2} + 30 \textcircled{1} + 16. \quad 1 \textcircled{1}. \quad \sqrt{4 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}.$$

$$80 \frac{1}{2} + \sqrt{6464} \frac{1}{4}. \quad 80 \frac{1}{2} + \sqrt{6464} \frac{1}{4}. \quad \sqrt{4 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}. \quad \sqrt{4 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}.$$

Et appert que $\sqrt{4 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}$ est leur quatriesme
 terme proportionel; ce qu'il falloit demonstrier.

Veü que la reigle de ceste construction est generale,
 nous n'appliquerons pas (comme nous auons aussi
 fait au 71 probleme) les escriptures aux nombres des
 ordres, pour la multitude des differences.

1 ④ egale a	N O T A. Quant le second
15 ② + 36 ① + 17	terme donné tient racine qui
-6	soit binomie, l'on extraira
9	pour plus grâde facilité (com-
9	bien que la reigle ci dessus est
36	generale) de chascue partie ra-
6	cine. Soit par exemple 1 ④,
9	egale à 4 ② + 12 ① + 9. Or
3 ①	parce que le second terme,
$\sqrt{11 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}$	tient telle racine, on l'extraira

The sections in *L'Arithmétique* dealing with biquadratic equations have been analyzed by H. Bosmans, *Mathesis* 39 (1925), see the Introduction 35). In this article several examples of Stevin's text have been given in the original and in the modern notation.

356 LE II. LIVRE D'ARITH.
de chaque terme & 1 ② sera egale à 2 ① + 3, & par
le 68 problème 1 ① vaudra 3.

DEUXIÈME
DIFFERENCE DE
SECOND TERME
- ② + ① + ③.

1 ④ egale a
- 1 ② + 4 ① + 3
2
1
1
4
2
1
1 ①
 $\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

TROISIÈME
DIFFERENCE DE
SECOND TERME
② + ① - ③.

1 ④ egale a
8 ② + 16 ① - 12
8.
16.
16.
4.
2.
- 2.
4 ①
Soluti- { 2 + $\sqrt{2}$
on ou { 2 - $\sqrt{2}$

QUATRIÈME
DIFFERENCE DE
SECOND TERME
- ② + ① - ③.

1 ④ egale a
- 2 ② + 8 ① - 5
6
4
9
4
2
- 1
2 ①
1

Voila les quatre premie-
res differences acheuées,
& sons celles qui ont tou-
tes euës au second terme,
la moienne quantité +, à
sçavoir + ①; s'en suiuent
maintenant les trois au-
tres, qui ont ladicte moi-
enne quantité -; Et re-
ceuront en la cõstruction
quelque petite mutation;
La raison est, que leurs
origines mesmes, les re-
çoient; qui procede (cõ-

DE L'OPERATION. 357

me apparoitra plus amplement en son lieu) de cela, que $\textcircled{2} - \textcircled{1} + \textcircled{0}$, ont autant $-\textcircled{1} + \textcircled{0}$, pour racine, comme $\textcircled{1} - \textcircled{0}$, desquelles ne sçavons en l'origine mesme qu'elle sera la vraie, par ce que la valeur des quantitez que nous cherchons, nous est incogne. D'ou l'ensuit que desdictes differentes suiivantes on pourra faire deux constructions, qui seront aucunesfois, toutes deux bonnes; aucunesfois seulement l'une, desquelles nous pourrons choisir la vraie.

Or la premiere de ces deux constructions, differe de la precedente seulement en cela, qu'il faut, que le septisme nombre en l'ordre (lequel ci dessus s'a tousiours esté dict +) soit par reigle —.

Et la deuxiesme de ces deux constructions, differe de la precedente seulement en cela, qu'il faut que le cincquiesme nombre en l'ordre (lequel ci dessus s'a tousiours dict +) soit par reigle —.

Lesquelles choses estant fort euidentes, nous en donnerons seulement les exemples par les caracteres des nombres de l'ordre.

CINCOVIESME DIFFERENCE DE

SECOND TERME $\textcircled{2} - \textcircled{1} + \textcircled{0}$.

$1 \textcircled{4}$ egale a	$1 \textcircled{4}$ egale a	$1 \textcircled{4}$ egale a
$14 \textcircled{2} - 16 \textcircled{1} + 3$.	$11 \textcircled{2} - 18 \textcircled{1} + 8$.	$10 \textcircled{2} - 40 \textcircled{1} + 16$
2	2 — 2	— 2 6 6
16	16 9	9 16 16
1.	1 1	1 9 9
4	4 9	9 25 25
2	— 2 3	— 3 5 — 5
1	— 3 4	— 2 2 — 8
$-4 \textcircled{1}$	$4 \textcircled{1} - 3 \textcircled{1}$	$3 \textcircled{1} - 4 \textcircled{1} 4 \textcircled{1}$.
$\sqrt{5} - 2$ ou $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$		ou $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\sqrt{6} - 2$ Cestui n'a point de vraie sol.

358 LE II. LIVRE D'ARITH.

NOTA. Quand le second terme donné, aura racine qui soit binomie, on en pourra faire comme nous auons dict sous la premiere sorte.

SIXIESME DIFFERENCE DE SECOND TERME
 $-\textcircled{2} - \textcircled{1} + \textcircled{0}$.

$1 \textcircled{4}$ egale a
 $-3 \textcircled{2} - 6 \textcircled{1} + 5$

4

1

4

9

3

1

$-\textcircled{1} \textcircled{1}$
 $\sqrt{1 \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$

SEPTIESME DIFFERENCE DE SECOND TERME
 $\textcircled{2} - \textcircled{1} - \textcircled{0}$.

$1 \textcircled{4}$ egale a
 $19 \textcircled{2} - 20 \textcircled{1} - 5$

6

25

9

4

-2

-5

 $3 \textcircled{1}$

ou $\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{1}{2} + \sqrt{1 \frac{1}{4}} \\ 2 \frac{1}{2} - \sqrt{1 \frac{1}{4}} \end{array} \right.$

La demonstration de chascune difference sera semblable à celle de la premiere difference. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois termes desquels le premier 4, le second $\textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{0}$, le troisieme nombre algebratique quelconque; nous auons trouué leur quatrieme terme proportionel ce qu'il falloit faire.

DE L'ORIGINE DE LA CONSTRUCTION DV PRECEDENT PROBLEME.

Quand $\textcircled{4}$ est egale a $\textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{0}$, nous les pouons re-

duire en ②, egale a ① ③, & alors deuient la valeur de 1 ① notoire par le 68 probleme, comme il apparoistra. Soit 1 ④, egale à 3 ② + 30 ① + 16, qui sont le premier & second terme de la premiere difference. Il faut doncques trouuer quelques ② & ③, tels que aioustez à la 1 ④, la somme soit trinomie, duquel la racine soit 1 ② + quelque ③; Puis lesdictes 2 ③, aioustez aux 3 ② + 30 ① + 16, la somme soit trinomie, duquel la racine soit 1 ① & ③; Or pour les trouuer, il sera premierement necessaire, que le quarré de la moitie du nombre de multitude des ② soit egal au ③, car autres ② & ③ aioustez à 1 ④, ne peuuent faire que la somme aie racine seruante à nostre propos, par la note du 2 exemple du 61 probleme. Au second, que le produit de la somme de 3 (des 3 ② donnez) & le nombre des ② trouué, par la somme de 16 donné, & du ③ trouué, soit egal à 225, à sçauoir au quarré de 15, moitie de 30 des 30 ① donnez, car autres ② & ③, aioustez à 3 ② + 30 ① + 16 ne peuuent faire que la somme aie racine seruante à nostre propos, par ladicte note du 61 probleme. *Il nous faut doncques trouuer deux nombres tels, que le quarré de la moitie du premier soit egal au second, & que le produit du premier + 3 par le second + 16 soit 225.* Et est ceste question la 12 du 81 probleme; par laquelle appert, que le premier est 6, & le second 9; le premier doncques fera le nombre des ②, & le second sera le ③. De sorte que les deux quantitez requises seront 6 ② + 9; Aioustrons les mesmes à chascune de noz egales parties donnees;

Ergo 1 ④ + 6 ② + 9, seront egales à 9 ② + 30 ① + 25.

Puis extrahons de chascune partie racine quarrée;

360 LE II. LIVRE D'ARITH.

Ergo $1 \textcircled{2} + 3$, seront egales à $3 \textcircled{1} + 5$.

Puis soustrahons de chascue partie 3;

Ergo $1 \textcircled{2}$, demeurera egale à $3 \textcircled{1} + 2$.

Et ainsi au lieu de $1 \textcircled{4}$ egale à $3 \textcircled{2} + 30 \textcircled{1} + 16$, nous auons $1 \textcircled{2}$ egale à $3 \textcircled{1} + 2$; Dont la valeur de $1 \textcircled{1}$ par le 68 probleme est $\sqrt[4]{4\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}}$.

Et est manifeste, que ceci est l'origine de nostre construction du probleme precedent; Laquelle il nous falloit declairer.

PROBLEME LXXIIII.

E Stant donnez trois termes, desquels le premier $\textcircled{4}$, le second $\textcircled{3} \textcircled{0}$, le troisieme nombre algebratique quelconque: Trouuer leur quatrieme terme proportionel.

NOTA Le binomie du second terme donne de ce probleme se peut rendre en trois telles differences:
 $\textcircled{3} + \textcircled{0}$
 $-\textcircled{3} + \textcircled{0}$
 $\textcircled{3} - \textcircled{0}$
 Desquelles nous donnerons trois constructions, toutes d'une mesme maniere d'operation.

PREMIERE DIFFERENCE

DE SECOND TERME $\textcircled{3} + \textcircled{0}$.

Explication du donne. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier $1 \textcircled{4}$, le second $2 \textcircled{3} + 27$, le troisieme $1 \textcircled{1}$. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatrieme terme proportionel.

Construction.

1 ④ (par reigle) + 2 ① (pour 2 des 2 ③ donnez les applicant ①) vaut 3 (racine cubique des 27 donnez) combien 1 ①? fait par le 72 probleme 1, par le mesme diuisé ledict 3 racine de 27 donne quotient

Je di que 3 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration.* Mettons par le moien du 66 probleme, soubz chascun terme sa valeur en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \text{ ④.} & 2 \text{ ③} + 27. & 1 \text{ ①.} & 3. \\ 81. & 81. & 3. & 3. \end{array}$$

Et appert que 3 est leur quatriesme terme proportionel; ce qu'il falloit demonstret.

SECONDE DIFFERENCE DE

SECOND TERME — ③ + ②.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme, tels: le premier 1 ④, le second — 2 ③ + 32, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

1 ④ (par reigle) — 2 ① (pour — 2 des — 2 ③ donnés, les applicant ①) vaut $\sqrt[3]{32}$ (à sçauoir racine cubique des 32 donnez) combien 1 ①? fait par le 72 probleme $\sqrt[3]{32}$, par la mesme diuisé ladiete $\sqrt[3]{32}$ donne quotient

Je di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration.* Mettons par le moien du 66 probleme soubz chascun terme sa valeur en ceste sorte:

362 LE II. LIVRE D'ARITH.

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{4}. & - 2 \textcircled{3} + 3 \textcircled{2}. & 1 \textcircled{1}. & 2. \\ 16. & 16. & 2. & 2. \end{array}$$

Et appert que 2 est leur quatriesme terme proportionel requis; ce qu'il falloit demonstret.

TROISIEME DIFFERENCE
DE SECOND TERME $\textcircled{3} - \textcircled{0}$.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 $\textcircled{4}$, le second 3 $\textcircled{3} - 8$, le troisieme 1 $\textcircled{1}$. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

1 $\textcircled{4}$ (par regle) + 3 $\textcircled{1}$ (pour 3 des 3 $\textcircled{3}$ donnez, les applicans a $\textcircled{1}$) vaut - 2 (à sçavoir racine cubique des - 8 donnez) combien 1 $\textcircled{1}$? fait par le 72 probleme - 1. par le mesme diuisé ledict, - 2 racine de - 8 donne quotient 2

Le di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis. *Demonstration.* Mettons par le moien du 66 probleme, sous chascun terme sa valeur en ceste sorte:

$$\begin{array}{cccc} 1 \textcircled{4}. & 3 \textcircled{3} - 8. & 1 \textcircled{1}. & 2. \\ 16. & 16. & 2. & 2. \end{array}$$

Et appert que 2 est leur quatriesme terme proportionel requis; ce qu'il falloit demonstret.

DE L'ORIGINE DE LA CON-
STRUCTION DE CELXXIIII.
PROBLEME.

Pofons que 1 $\textcircled{4}$ soit egale à - 2 $\textcircled{1}$ + 3; Ou bien

DE L'OPERATION.

363

(ce qui vaut le mesme) $1 \textcircled{4} + 2 \textcircled{1}$, egales à 3, desquels nous cherchons la valeur de $1 \textcircled{1}$, que nous sçauons estre 1; Diuisons par le mesme le 3 donné, donne quotient 3; doncques 1 & 3, sont deux nombres, desquels le produit fait le 3 donné, & le produit dudit nombre 1 par -2 (des $-2 \textcircled{1}$ donnees) qui est -2 , aiousté à la potence de quarte quantité dudit nombre 1, reste ledict nombre donné 3. Quand doncques nous aurons trouué tels deux nombres comme sont lesdicts 1 & 3, il est notoire que l'un sera la valeur de $1 \textcircled{1}$ requise. Pourtant mettons le susdict en forme de question ainsi: *Trouuons deux nombres tels que leur produit soit 3, & que le produit de l'un nombre par 2 aiousté à la potence de quarte quantité dudit vn nombre, la somme soit aussi 3.* Qui est la 13 question du 81 probleme; Et appert aux termes reduits, que $1 \textcircled{4}$ se trouua egale à $2 \textcircled{3} + 27$ (lequel 27 est le cube du 3 donné, desquels la valeur de $1 \textcircled{1}$ est 3; Par le mesme (pour trouuer l'autre nombre requis) se diuisa le 3 (qui est le 3 du second terme posé ci dessus, Quand doncques $1 \textcircled{4}$, est egale à $-2 \textcircled{1} + 3$, alors pour trouuer la valeur de $1 \textcircled{1}$, nous pouuons (comme par reigle generale) mettre en leur lieu, $1 \textcircled{4}$ egale à $2 \textcircled{3}$ (à sçauoir $+2$ au lieu du -2 donné & 3 au lieu de $1 \textcircled{1}$ donnée) $+ 27$ (pour le cube de 3 donné) diuisant la racine cubique de 27, par ladicte valeur de $1 \textcircled{1}$, lequel quotient sera le requis. Et par le reuers de ces choses, Quand $1 \textcircled{4}$ est egale à $2 \textcircled{3} + 27$, alors pour trouuer la valeur de $1 \textcircled{1}$ nous pouuons mettre en leur lieu $1 \textcircled{4}$, egale à $-2 \textcircled{1} + 3$, diuisant par la valeur de $1 \textcircled{1}$ la racine cubique du 27 donné, qui est l'operation de la susdicte premiere difference semblable aux deux autres. Laquelle origine il nous falloir declarer.

364 LE II. LIVRE D'ARITH.

NOTA 1. L'on pourroit encore descrire autre maniere de construction que n'est la precedente; à sçavoir par l'operation du 14 exemple du 81 probleme; Mais nous le passons outre à cause de briefueté.

NOTA II. Considerant d'une part que l'origine des constructions des trois problemes suiivans, est en tous assez la mesme; Et d'autre part, la multitude des diuersités des differences que reçoivent aucuns d'iceux problemes, nous descriprons leurs origines mesmes, au lieu de construction, commençant à ce 74 probleme, duquel nous donnerons (outre les constructions precedentes) autre maniere de construction, comme l'ensuit.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ④, le second 6 ③ + $3 \frac{1}{3}$, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

NOTA Afin de declarer le sens, autant de ceste construction, comme des trois problemes suiivans, faut sçavoir, que nous tachons d'ajouster à chascque partie, quelques quantitez egales, telles, que chascque somme aie racine de moindre multitude de quantitez que les quantitez donnees; & deuiennent ainsi finalement conuertiz en ② egale à ① ⑥, desquelles la valeur de 1 ① est alors notoire, par le 68 probleme.

Construction.

On appliquera les ③ données, ou par egale addition, ou par egale soustraction, tousiours à la 1 ④, il faut doncques ici soustraite de chascque partie 6 ③;

Ergo 1 ④ — 6 ③, demeureront egales à $3 \frac{1}{3}$.

Puis il faut ajouster à chascune partie quelques ② ① ⑥, ainsi que l'une aie pour racine quarrée, trino-

DE L'OPERATION. 365

mie, & l'autre binomic. Or puis que les deux premiers caracteres de la premiere partie, sont $1 \textcircled{4} - 6 \textcircled{3}$, il est notoire que les deux premiers caracteres de la racine (apres l'addition desdictes $\textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{0}$) seront $1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1}$ (comme il appert par la multiplication de quantitez en eux) à sçavoir -3 (des $-3 \textcircled{1}$) pour moitie de -6 (des $-6 \textcircled{3}$ donnés) Il reste maintenant d'appliquer à iceux $1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1}$, quelque $\textcircled{0}$ tel, que le quarré de tel trinomie aie les quantitez comme $\textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{0}$, telles, que les mesmes aioustez à la seconde partie, qui est $3 \frac{1}{2}$ la somme aie racine qui soit $\textcircled{1} \textcircled{0}$, qui sera (par la note au 2 exemple du 61 probleme) quand le quarré de la moitie du nombre de multitude des $\textcircled{1}$, soit egal au produit du $\textcircled{0}$, par le nombre de multitude des $\textcircled{2}$; Mais veu qu'en l'inuention de ce $\textcircled{0}$, qui doit estre appliqué à $1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1}$, nous n'auons que faire des signes des quantitez, nous les delaisserons, à fin qu'elles ne nous causent confusion, & que ne soions cōtraincts de besoigner par postposees quantitez disant ainsi: *Trouuons vn $\textcircled{0}$ (car cest notoire que $+\textcircled{0}$ ne le pourra estre) qui appliqué a $1 - 3$. Et puis tels trois nombres multipliez par eux mesmes distinctemēt, selon la maniere de multiplication des quantitez algebrayques, Et au dernier nombre du produit aiouste $3 \frac{1}{2}$, qu' alors le quarré de la moitie du cinqiesme, soit egal au produit du quatriesme par le sixiesme.* Et est ceste question la 15 du 21 probleme, par laquelle il appert que le nombre requis est -2 , qui appliqué ausdicts $1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1}$, fera $1 \textcircled{2} - 3 \textcircled{1} - 2$, son quarré $1 \textcircled{4} - 6 \textcircled{3} + 5 \textcircled{2} + 12 \textcircled{1} + 4$. du mesme soustraiēt la premiere de noz egales parties, reste $5 \textcircled{2} + 12 \textcircled{1} + 4$, aioustons les mesmes à chascune de noz egales parties;

Ergo 1 ④ - 6 ③ + 5 ② + 12 ① + 4, seront egales à 5 ② + 12 ① + 7 1/3.

Puis extrahons de chaque partie racine quarrée.

Ergo 1 ② - 3 ① + 2 seront egales à √ 5 X ① + √ 7 1/3.

Lesquels reduits 1 ② sera egale à 3 ① + √ 5 X ① + √ 7 1/3 + 2.

Et par le 68 probleme, 1 ① vaudra 1 1/2 + √ 1/4 + √ bino. 5 1/2 + √ 36 2/30.

La disposition des caractères de l'operation des choses susdictes est telle :

Quantitez donnees	1 ④ - 6 ③.	o.	o.	o.	3 1/3
Quan. à chacune parties atou.	+ 5 ② + 12 ① + 4.				5 ② + 12 ① + 4
Sommes	1 ④ - 6 ③ + 5 ② + 12 ① + 4.	egales à			
Leurs racines quarrées	1 ② - 3 ① - 2.	√ 5 X ① + √ 7 1/3	√ 5 X ② + √ 7 1/3		
Reduictes	1 ②.	3 ① + √ 5 X ① + √ 7 1/3 + 2.			

Et 1 ① vaut par le 68 probleme 1 1/2 + √ 1/4 + √ bino. 5 1/2 + √ 36 2/30.
 Et par semblable disposition de caractères, despecerons nous les constructions des trois problemes suiuaus.

NOTA Le - 2, ci dessus trouué par la 15 question du 81 probleme se peut encore trouuer par la 16 question du mesme probleme.

Stevin does not follow the example of Cardan, who in the 18th chapter of the *Ars Magna* studies some cubic equations such as $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$, finds three roots (all positive), $2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$, and concludes that their sum is equal to the coefficient of x^2 . Stevin's main concern is the finding of positive roots, and, at one place, of negative ones, but even here with an eye to the possible

DE L'OPERATION.

Item si 1④, fust donnée egale à $-8③ + 1\frac{1}{3}$, l'operation & disposition des caracteres semblable à la precedente, sera telle:

$$\begin{array}{l} \text{Quantitez donnees. } 1④ + 8③ \quad \circ. \quad \circ. \quad \circ. \quad \frac{1}{3} \\ \text{Quant. à chascune part. aïouft. } 12② - 16① + 4 \\ \text{Sommes} \quad 1④ + 8③ + 12② - 16① + 4 \quad \text{egales à} \quad \left\{ \begin{array}{l} 12② - 16① + 4 \\ -\sqrt{12} \times ④ + \sqrt{5} \frac{1}{3} \\ -4① - \sqrt{12} \times ① + \sqrt{5} \frac{1}{3} + 2 \end{array} \right. \\ \text{Leurs racines quarees} \quad 1② + 4① - 2. \\ \text{Reduictes} \quad 1②. \end{array}$$

Et 1① par le 68 probleme vaut $-2 - \sqrt{3} + \sqrt{\text{bin. } 9} + \sqrt{85} \frac{1}{3}$.
Item si 1④ fust donnée egale à $8③ - \frac{4}{3}$, l'operation & disposition de caracteres semblable à la precedente sera telle:

$$\begin{array}{l} \text{Quantitez donnees. } 1④ - 8③ \quad \circ. \quad \circ. \quad \circ. \quad -\frac{4}{3} \\ \text{Quant. à chascune partie aïouft. } 20② - 16① + 4 \\ \text{Sommes} \quad 1④ - 8③ + 20② - 16① + 4 \quad \text{egales à} \quad \left\{ \begin{array}{l} 20② - 16① + 4 \\ -\sqrt{10} \times ④ + \sqrt{3} \frac{1}{3} \\ 4① - \sqrt{20} \times ① + \sqrt{3} \frac{1}{3} - 2 \end{array} \right. \\ \text{Leurs racines} \quad 1② - 4① + 2. \\ \text{Reduictes} \quad 1②. \\ \text{Et 1① par le 68 probleme vaut } 2 - \sqrt{5} + \sqrt{\text{bin. } 7} - \sqrt{51} \frac{1}{3}. \end{array}$$

positive roots that he may discover by not neglecting negative ones. Although he usually detects all positive roots, he occasionally omits some just because of his lack of interest in negative roots or in the root $x = 0$. For instance, among his examples in Prob. 71 are the following:

368 LE II. LIVRE D'ARITH.

Dont les demonstrations seront semblables aux precedentes. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois termes desquels le premier ④, le second ③ ① ②, le troisieme nombre algebratique quelconque; nous auons trouué leur quatriesme terme proportionel; ce qu'il falloit faire.

PROBLEME LXXV.

Estant donnez trois termes, desquels le premier ④, le second ③ ① ②, le troisieme, nombre algebratique quelconque : Trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels : le premier 1 ④, le second 4 ③ + 8 ① — 3, le troisieme 1 ①.

Explication du requis. Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction. La construction sera semblable à celle du precedent probleme. Et le 6 (derniere quantité de 1 ② — 2 ① + 6) est trouué par la 17^e ou 18^e question du 81 probleme; la disposition des caracteres de l'operation, semblable aux precedentes est telle :

$$x^3 = 6x^2 + 4x - 24; x = 6$$

$$x^3 = 6x^2 + 3x - 18; x = 6$$

$$x^3 = 6x^2 + 3x - 44; x = 4.$$

The corresponding equations in $y = x - 2$ are:

$$y^3 = 16y \quad ; y = 4$$

$$y^3 = 15y + 4 \quad ; y = 4$$

$$y^3 = 15y - 22 \quad ; y = 2.$$

DE L'OPERATION.

Quantitez donnees $1 \textcircled{4} - 4 \textcircled{3} \cdot 0 \cdot 0$
 Quantitez à chascune partie ajoutees $16 \textcircled{2} - 24 \textcircled{1} + 36$
 Sommes $1 \textcircled{4} - 4 \textcircled{3} + 16 \textcircled{2} - 24 \textcircled{1} + 36$ } egal. à }
 Leurs racines quarrées $1 \textcircled{2} - 2 \textcircled{1} + 6$
 Reduictes $1 \textcircled{2}$

Et $1 \textcircled{1}$ par le 68 probleme vaudra 4 ou 2.

Item si $1 \textcircled{4}$ fust donné egal à $-8 \textcircled{3} + 40 \textcircled{1} - 32$, l'operation & disposition des caractères semblable à la precedente sera telle:

Quantitez donnees $1 \textcircled{4} + 8 \textcircled{3} \cdot 0 \cdot 0$
 Quantitez à chascune partie ajoutees $4 \textcircled{2} - 48 \textcircled{1} + 36$
 Sommes $1 \textcircled{4} + 8 \textcircled{3} + 4 \textcircled{2} - 48 \textcircled{1} + 36$ } egales à }
 Leurs racines quarrées $1 \textcircled{2} + 4 \textcircled{1} - 6$
 Reduictes $1 \textcircled{2}$

Et $1 \textcircled{1}$ par le 68 probleme, vaudra $\sqrt{5} - 1$.
 Item si $1 \textcircled{4}$ fust donné egal à $8 \textcircled{3} + 2 \textcircled{1} + 589$, l'operation & disposition des caractères semblable à la precedente sera telle:

$8 \textcircled{1} - 32$
 $16 \textcircled{2} - 24 \textcircled{1} + 36$
 $16 \textcircled{2} - 16 \textcircled{1} + 4$
 $4 \textcircled{1} - 2$
 $6 \textcircled{1} - 8$

$40 \textcircled{1} - 32$
 $4 \textcircled{2} - 48 \textcircled{1} + 36$
 $4 \textcircled{2} - 8 \textcircled{1} + 4$
 $2 \textcircled{1} - 2$
 $-2 \textcircled{1} + 4$

In the first example Stevin omits the positive root $x = 2$, because he discards $y = 0$ as a root; in the second example he omits $x = \sqrt{3}$, because he discards $y = -2 + \sqrt{3}$, a negative root; and in the third example he omits $x = 3 + 2\sqrt{3}$, $y = 1 + 2\sqrt{3}$, because the equation $y^3 = 15y + 22$, which, according to his method of Prob. 69, he needs in order to solve $y^3 = 15y - 22$,

LE II. LIVRE D'ARITH.

Quantitez donnees 1④—8③. 0. 0. 0. 0.
 Quantitez à chacune partie ajoütees 4②+48①+36.
 Sommes 1④—8③+4②+48①+36. } egales à
 Leurs racines quarrées 1②—4①—6. }
 Reduictes 1②. }
 Et 1① par le 68 probleme vaut 3+√40.

2①+589②
 4②+48①+36
 4②+50①+625
 2①+25
 6①+31

Et semblable sera l'operation en toutes les autres differences. *Demonstration.* Mettons par le moien du 66 probleme, soubz chacun terme du precedent premier exemple sa valeur, en ceste sorte :

1④.	4③+8①—32.	1①.	4.
256.	256.	4.	4.
1④.	4③+8①—32.	1①.	4.
16.	16.	2.	2.

Item.

Et appert qu'autant 4 comme 2, est leur quatriesme proportional; ce qu'il falloit demonstret.

has a root $y = -2$, which he discards.

In Prob. 75 he only has the positive root $x = \sqrt{5} - 1$ of the equation $x^4 = -8x^3 + 40x - 32$ and omits $x = \sqrt{17} - 3$, because in extracting the square root from $(x^2 + 4x - 6)^2 = (2x - 2)^2$ he only takes $x^2 + 4x - 6 = 2x - 2$ and omits $x^2 + 4x - 6 = -2x + 2$. It seems that Stevin added

Conclusion. Estant doncques donnez trois termes, de quels le premier ④, le second ③①②, le troisieme nombre algebratique quelconque, nous auons trouué leur quatrieme proportionel; ce qu'il falloit faire.

PROBLEME LXXVI.

Estant donnez trois termes, de quels le premier ④, le second ③①②, le troisieme nombre algebratique quelconque : Trouver leur 4^e terme proportionnel.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme teils: le premier 1 ④, le second 4 ③ + 4 ② - 12, le troisieme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatrieme terme proportionnel. *Construction.*

La construction sera semblable à celle du precedent probleme. Et le 4 (derniere quantité de 1 ② - 2 ① + 4) est trouué par la 19 ou 20 question du 8^e probleme. La disposition des caracteres de l'operation semblable aux precedentes est telle:

Quantitez donnees	1 ④ - 4 ③	o.	o.	c.	4 ②	o - 12
Quantitez à chacune partie atout.	o.	o. 12 ②	- 16 ①	+ 16.	12 ②	- 16 ① + 16
Sommes	1 ④ - 4 ③	+ 12 ②	- 16 ①	+ 16.	16 ②	- 16 ① + 4
Leurs racines quarees	1 ②	- 2 ①	+ 4.	4 ①	- 2	6 ① - 6
Reduictes						

} egales à

the section on negative roots after he had completed the major part of his theory of equations (perhaps after reflection on what he had read in the *Ars Magna* on the relation between the roots of $x^3 + 16 = 12x$ and those of $x^3 - 16 = 2x$, see Stevin's Article V of his section on solutions by —), and did not check up again on all his examples with this new theory in mind.

Et 1 ① par le 68 problème, vaut $3 + \sqrt{3}$, ou $1 - \sqrt{3}$.
 Item si 1 ④ fust donnée égale à $4 ③ - 1 ② - 5$, l'opération & disposition des caractères semblable à la précédente, sera telle:

Quantitez donnees	$1 ④ - 4 ③.$	$0.$	$0.$	$0.$	$0.$	$0 - 5$
Quantitez à chacune partie ajoutées	$10 ② - 12 ① + 9.$					$10 ② - 12 ① + 9$
Sommes	$1 ④ - 4 ③ + 10 ② - 12 ① + 9.$					$9 ② - 12 ① + 4$
Leur racines quarrées	$1 ② - 2 ① + 3.$					$3 ① - 2$
Reduictes	$1 ②.$					$5 ① - 5$

Et 1 ① par le 68 problème vaut $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$, ou $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$.

Et semblable fera l'opération en toutes les autres fortes. *Demonstration.* Mettons par le moyen du 66 problème sous chacun terme du precedent premier exemple sa valeur, en ceste forte.

$1 ④.$	$4 ③ + 4 ② - 12.$	$1 ①.$	$3 + \sqrt{3}.$
$252 + \sqrt{62208}.$	$252 + \sqrt{62208}.$	$3 + \sqrt{3}.$	$3 + \sqrt{3}.$
	Item.		
$1 ④.$	$4 ③ + 4 ② - 12.$	$1 ①.$	$3 - \sqrt{3}.$
$252 - \sqrt{62208}.$	$252 - \sqrt{62208}.$	$3 - \sqrt{3}.$	$3 - \sqrt{3}.$

DE L'OPERATION. 373

Et appert que autant $3 + \sqrt{3}$, comme $3 - \sqrt{3}$, est leur quatriesme proportionel; ce qu'il falloit demonstret. *Conclusion.* Estant doncques donnés trois termes desquels le premier ④, le second ③ ② ①, le troisieme nombre algebratique quelconque. Nous auons troué leur quatriesme terme proportionel; ce qu'il falloit faire.

PROBLEME LXXVII.

Estant donnez trois termes, desquels le premier ④, le second ③ ② ①, le troisieme nombre algebratique quelconque: Trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ④, le second -4 ③ $+ 4$ ② $+ 40$ ① $+ 33$, le troisieme 1 ①.

Explication du requis. Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

La construction sera semblable à celle du precedent probleme. Et le 4 (derniere quantité de 1 ② $+ 2$ ① $+ 4$) est troué par la 21^e ou 22^e question du 81 probleme. La disposition des caracteres de l'operation semblable aux precedentes est telle :

At the end of Prob. 77 Albert Girard, in his edition of Stevin's works (1634), places a *Reigle*, which is no other than the *Appendice algebratique* of 1594, see our Introduction. We republish it separately at the end of *L'Arithmétique*.

Quantitez donnees 1 ④ + 4 ③. 0. 0. 0. 0. 374
 Quantitez à chacune partie ajoütees. 12 ② + 16 ① + 16. $\left\{ \begin{array}{l} 4 ② + 40 ① + 33 \\ 12 ② + 16 ① + 16 \end{array} \right.$
 Sommes $\frac{1 ④ + 4 ③ + 12 ② + 16 ① + 16}{1 ② + 2 ③ + 4.}$ égales à $\frac{16 ② + 56 ① + 49}{4 ① + 7}$
 Leurs racines quarrées. $\frac{1 ④ + 4 ③ + 12 ② + 16 ① + 16}{1 ② + 2 ③ + 4.}$
 Reduißtes $\frac{1 ④ + 4 ③ + 12 ② + 16 ① + 16}{1 ② + 2 ③ + 4.}$

LE II. LIVRE D'ARITH.

Et 1 ① par le 68 probleme vaudra 3, lequel ie di estre le quatriefme terme proportionel requis. *Demonstration.* Mettons par le moien du 66 probleme soubz chacun terme sa valeur en ceste sorte :

$$\begin{array}{r} 1 ④. \\ 8 l. \end{array} \quad \begin{array}{r} - 4 ③ + 4 ② + 40 ① + 33. \\ 8 l. \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 ①. \\ 3. \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 ①. \\ 3. \end{array}$$

Et appert que 3, est leur quatriefme terme proportionel, selon le requis, ce qu'il falloit demonstret.

Et semblable sera l'operation en toutes les autres sortes. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois termes, de quels le premier ④, le second ③ ① ②, le troisieme nombre algebraique quelconque. Nous avons trouvé leur quatriefme proportionel; ce qu'il falloit faire.

NOTA. Nous demonstretions encore, comment l'on trouuera aux problemes precedens, le quatriefme proportionel, n'estant le nombre de multitude de la superieure quantité, pas

vité, comme a esté aux exemples precedens; D'où il ne sera mestier de convertir (par la 2^e règle de reduction) ledit nombre de multiplie en vité, & sera pour euitier aucunes fois les rompuz, qui procedent de telle reduction.

Soient par exemple les trois termes donnez, desquels il faut trouver le quatriesme portione, tels: le premier 9 ④, le second — 12 ③ + 30 ② + 204 ① + 171, le troisieme 1 ①. *Considération.* L'on prendra (par règle) la racine quarrée des 9 ④, qui est — 3 ③. Puis on diuisera la moitié de 12 ③, par iceux 3 ③, donne quotient 2 ②; Doncques 3 ③ + 2 ②, sont les deux premiers caracteres, auxquels il nous faudra trouver quelque ①, comme l'on trouue, par la 22^e question du 8^e probleme, & sera 3. Etpuis la reste comme dessus. La disposition des caracteres de l'operation, semblable aux precedentes, est telle:

DE L'OPERATION.

Quantitez donnees 9 ④ + 12 ③.	0.	0.	0.
Quantitez à chaque partie aionstées. 34 ③ + 20 ② + 25.	34 ③	+ 20 ②	+ 25.
Sommes	9 ④ + 12 ③	+ 34 ③	+ 20 ② + 25.
Leurs racines quarrées	3 ③	+ 2 ②	+ 5.
Reduictes	1 ①	+ 3	+ 3

30 ② + 204 ① + 171	}	egales à
34 ③ + 20 ② + 25.		
64 ② + 224 ① + 196	}	}
8 ① + 14		
2 ① + 3		

Et 1 ① par le 68^e probleme, vaudra 3, dont la demonstration sera semblable aux precedentes.

Prob. LXXVIII deals with equations with "derivative" quantities (Def. 27), which can be reduced to previous types. Examples: $x^9 = 2x^3 + 496$; $x = 2$; $x^{15} = 2x^{12} + 3x^9 + 2x^6 + 22912$; $x = 2$. When reducing this last equation to $y^5 = 2y^4 + 3y^3 + 2y^2 + 22912$ by means of $y = x^3$, Stevin introduces for the first time in his theory of equations (see our remark to Prob. 70, third case) his "quantités postposées" of Def. 28 and Probs. 62-65, that is, he writes 1 *sec* ⑤ for 1 ⑩, or $y^5 = x^{15}$. In order to explain how to operate with these new quantities he adds Probs. LXXIX and LXXX and six theorems.

theorems.

Prob. LXXIX. If py is an expression in x (p being a number), what is y ? This is extended to such problems as: if $4y = 8x^3 - 4x$, what is $2y^2 + 3y$? Ans.: $8x^6 - 8x^4 + 2x^2$.

Prob. LXXX. If xy is an expression in x , what is y ? This is extended to such problems as: if $2x^2y^3 = 6x^4$, what is y ? Ans.: $\sqrt[3]{3x^2}$. It is also noted that $3x^2 \cdot 4y = 12x^2y$. Division is taken into account.

Then follow six theorems, taken from Cardan's *Arts Magna*, Ch. X, and here formulated in our own way:

Theorem I. If $xy + ay = bx$, then $x : y = (x + a) : b$.

Theorem II. If $xy = ay + bx$, then $a : (x - a) = (y - b) : b$.

Theorem III. If $ay = xy + bx$, then $(a - x) : x = b : y$.

Theorem IV. If $x^2 = axy + by$, then 1) $x : y = b : (x - ay)$,
2) $x : y = (ax + b) : x$.

Theorem V. If $xy = ax^2 + by$, then 1) $y : x = (y - xa) : b$,

$$2) x : \frac{y}{a} = (x - b) : x.$$

Theorem VI. If $ay = xy + bx^2$, then 1) $a : (y + bx) = x : y$,

$$2) x : y = \frac{a - x}{b} : x.$$

All these Theorems have been provided with an "arithmetical" and a "geometrical" demonstration. The first is a numerical verification. The geometrical demonstration consists in a reasoning which invokes a theorem of *Euclid's Elements*.

We reproduce Theorem VI:

LE II. LIVRE D'ARITH.
THEOREME VI.

Quand quelques sec. ①, sont égales à 1 ①
M sec. ① + quelques ② : Alors comme
le nombre de multitude des sec. ①, à la somme
de la valeur de 1 sec. ①, & le produit du nom-
bre de multitude des ②, par la valeur de 1 ①,
ainsi la valeur de 1 ①, à la valeur de 1 sec. ①.
Item la valeur de 1 ② est moien proportionel
entre la valeur de 1 sec. ①, & le quotient pro-
cedant de la diuision de l'exces du nombre de
multitude des sec. ①, sur la valeur de 1 ①, par
le nombre des ②.

Explication du donné. Soient 4 sec. ① égales à 1 ①
M sec. ① + 6 ②. Et la valeur de 1 ① soit 2, & de 1
sec. ① sera necessairement 12. *Explication du requis.* Il
faut demonstret le requis du theoreme. *Demonstration*
Arithmetique. Comme 4 (nombre de sec. ①) à 24 (som-
me de 12 valeur de 1 sec. ①, & 12 produit de 6 nom-
bre de multitude des ② par 2 valeur de 1 ①) ainsi 2
(valeur de 1 ①) à 12 (valeur de 1 sec. ①)

Item 2 (valeur de 1 ①) est moien proportionel en-
tre 12 (valeur de 1 sec. ①) & $\frac{1}{3}$ (quotient procedant de
la diuision de 2 exces de 4 nombre de multitude des
sec. ①, sur 2 valeur de 1 ①, par 6 nombre des ②.)

Autre demonstration Geometrique. Soit A B 1 sec. ① 12,
& B C 4; Doncques C A feront 4 sec. ① égales par l'hy-
pothese, à 1 ① M sec. ① + 6 ②, les mesmes soient

Theorem VI. Let $4y = xy + 6x^2$, then if $x = 2$, $y = 12$.

Arithmetical demonstration: 1) $4 : 24 = 2 : 12$,

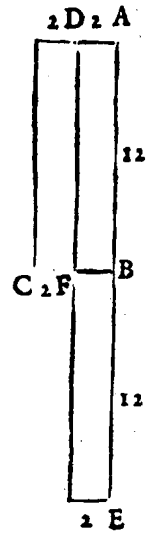
$$2) 2 : 12 = \frac{1}{3} : 2.$$

Geometrical demonstration: Let AB be y ($= 12$), CB be a ($= 4$), then area
CA = ay is equal to $xy + bx^2$. Let AD be x ($= 2$), then DB = xy , if
BE = bx ($= 6x$), then area DE = $xy + b^2$. According to Euclid VI Prop. 16

DE L'OPERATION.

397

DE à ſçavoir DA 1 ① 2, parquoi DB 1 ① M ſec. ①, & BE, ſera ſextuple à FB 1 ①, c'eſt à dire que BE ſera 6 ①, ergo FE 6 ②.



Nous auons doncques en ceſte figure les egales quantitez donnees.

Or que la raiſon de CB 4 (nombre de multitude des ſec. ①) à AE 24 (ſomme de AB 12 valeur de 1 ſec. ①, & BE 12 produit de 6 nombre de multitude des ② par 2 valeur de 1 ①) eſt comme DA 2 (valeur de 1 ①) à AB 12 (valeur de 1 ſec. ①) eſt par leurs nombres manifeſte.

Mais pour demonſtrer le meſme geometriquement faut ſçavoir que CA eſt egal à DE par l'hypotheſe : Ergo par la 16 propoſition du 6 liure d'Euclide comme CB, à AE, ainſi DA, à AB. *Concluſion.* Quand doncques quelques ſec. ① ſont egales à &c. ce qu'il falloir demonſtrer.

Eſtant doncques ainſi acheuée la reigle de proportion des quantitez, nous viendros à leur reigle de faux.

Il eſt bien vrai que ſuiuuant l'ordre des nombres Arithmetiques & Radicaux precedens, qu'il nous faudroit premierement deſcrire la reigle de proportionnelle partition des quantitez, qui ſeroit choſe aſſez facile, mais ne voiant pour le preſent leur vtilité nous la paſſerons oultre.

(when four lines are proportional, the rectangle contained by the extremes is equal to that contained by the means, and conuerſely) $CB : AE = AD : AB$, or $a : (y + bx) = x : y$. Also $BF : AB = CF : BE$ or $x : y = (a - x) : bx$. For the purpoſe of this proof a has the dimension of a line, b of a number. Now follow 22 Questions, which end the book. They are ſolved "by Algebra".

Sixiesme distinction, de la reigle des faux des
nombres algebrayques, dicte reigle de

A L G E B R E.

PROBLEME LXXXI.

Estant proposé question qui se solue par Al-
gebre: La soluer par Algebre.

Or nous sommes venuz au dernier probleme de ce liure, qui est de la tressinguliere, & admirable Reigle d'Algebre, l'Inexhauste fontaine d'infiniz Theoremes Arithmetiques, Reuelatrice des mysteres cachez en nombres: De laquelle nous auons declairé la methode par similitude, en nombres Arithmetiques, au 16 probleme, nous la demonstrerons maintenant par effect en la chose mesme. Mais auant que nous y venons, il faut encore dire vn mot, à sçauoir: Comme il est mestier à l'apprentif, auant qu'il vienne à la reigle de faux des nombres Arithmetiques (que nous auons descript audict 16 probleme) qu'il cognoisse les lettres des cyfres, qu'il sçache les quatre generales numerations, & la reigle de trois des nombres Arithmetiques, qui au parauant auoient esté descriptes, sans lequel il comenceroit desordonnement, & à peu de prouffit, à icelle Reigle des faux, parce qu'elles sont matiere & instrumens, par lesquelles il faut operer: Tout ainsi est il necessaire, auant que venir à ceste Reigle de Faux, ou Algebre, que l'on cognoisse ses propres caracteres, ses quatre numerations generales, Reduction, & Reigle de proportion de ses nombres Algebrayques. Lesquelles

*Sixth distinction, of the rule of false position
of the algebraical numbers, called rule of ALGEBRA*

Prob. LXXXI. Let a question be proposed that can be solved by Algebra: solve it by Algebra.

"Now we have come to the last problem of this book, which is on the highly singular and admirable Rule of Algebra, the Inexhaustible fountain of infinite Arithmetical Theorems, Revealer of the mysteries hidden in numbers. Of which we have declared the method by similitude, in Arithmetical numbers, in Prob. 16; we shall now demonstrate it in effect in terms of x ". ["chose" = "cosa" =

DE L'OPERATION. 399

sont copieusement descriptes aux precedens, & sans la cognoissances d'icelles, on commencera desordonnement, & à peu d'utilité, parce qu'elles sont aussi matiere & instrumens, necessaires à l'operation d'icelle.

Item comme il n'estoit pas la le lieu, d'enseigner ou repeter la maniere de Aiouster, Soubstraire, Multiplier, Diuiser, &c. des nombres Arithmetiques, Mais cela se faisoit au parauant en son propre lieu : Ainsi ne sera ce pas ici le lieu de repeter en ceste operation la maniere d'Aiouster, Soubstraire, Multiplier, Diuiser, Reduire, trouver quatriesme proportionel, des nombres Algebriques; Car cela confondroit & nostre distinct ordre, & mesme l'appretif; mais il faut que tout ceci s'apprenne aux precedens; Ce que nous conseillons de faire à ceux qui en requièrent facilement paruenir à chef.

QUESTION I.

Trouuons un nombre, qui avec sa moitié, face 18.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis
Sa moitié
Leur somme
Egale à

$$\left. \begin{array}{r} 1 \textcircled{1} \\ \frac{1}{2} \textcircled{2} \\ 1 \frac{1}{2} \textcircled{3} \\ 18 \end{array} \right\}$$

Puis on mettera vne ligne, joignant les nombres algebriques, & alors leur disposition sera comme ci dessus.

Puis on dira $1 \frac{1}{2} \textcircled{3}$ est egale, ou vaut 18, combien $1 \textcircled{1}$ fait par le 67 probl. 12. Doncques $1 \textcircled{1}$ premier en l'ordre vaut 12, & la $\frac{1}{2} \textcircled{2}$ second en l'ordre vaudra (par ledict 67 probleme) 6, & la $1 \frac{1}{2} \textcircled{3}$ troisieme en

"res", the 16th century expression for the unknown x]. The pupil is advised to study the operations with arithmetical numbers before he begins to study the present rule of false position. Problems such as: how to find a number which together with its half gives 18, Question I of Prob. 81, were solved "arithmetically" by saying: let the number be 1, then together with its half it will give $1\frac{1}{2}$. But it must be 18, which is 12 times $1\frac{1}{2}$, hence the required number is 12 times 1, or 12. This rule of similitude was the so-called "rule of false position", or "regula falsi", explained by Stevin in Prob. 16. This rule was extended to all problems leading, in algebra, to linear equations and even to equations of higher order: "double false position". Stevin now shows how to do these problems, and many more, by Algebra, that is, by the use of x in the theory of equations.

400 LE II. LIVRE D'ARITH.
 l'ordre vaudra 18; Lesquelles valeurs se mettront chascune ioignât sa quantité, & fera alors la disposition des caracteres de la construction (lesquelles nous descriurons autre fois en ceste premiere question pour plus grande euidence) comme ci dessous:

Soit le nombre requis	1	①	12
Sa moitié	$\frac{1}{2}$	①	6
Leur somme	1	$\frac{1}{2}$	18
Egale à	.	18	18

Je di que 12 est le nombre requis, *Demonstration.* 12 avec sa moitié 6, fait selon le requis 18; ce qu'il falloit demonstrier.

NOTA. Semblable fera la methode, en toutes les questions suivantes; à sçavoir apres que (par operation conforme à la petition) on aura trouué deux quantitez egales, on trouvera par icelles la valeur de 1 ①, par quelque probleme des problemes 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. à lui respondant; qui estant cognu, on trouvera par la mesme valeur de 1 ①, la valeur de toutes les quantitez en l'ordre, par le 66 probl. & l'on aura les nombres requis à la proposition.

L'on peut aussi souventesfois trouver les autres nombres requis par le premier nombre trouué, sans trouver par les 66 probleme la valeur des quantitez de l'ordre. Par exemple, scachant ci dessus que le nombre requis est 12, nous pourrions prendre sa moitié, qui est 6, & l'ajouter à 12, fait selon le requis 18: de sorte que par l'une & l'autre maniere l'on vient à la desirée solution; Mais par ce qu'il auient souventesfois, que la raison du nombre premier trouué est aux autres nombres requis trop obscure, voire aucunefois pas de-

Questions.

- I. In our notation: $x + \frac{1}{2}x = 18$; $x = 12$. Stevin presents his scheme for easily verifying the answers to his questions:

Required number	x	12
Half of it	$\frac{1}{2}x$	6
Their sum	$1\frac{1}{2}x$	18
Equal to	18	18

$$1\frac{1}{2}x = 18, x = 12 \text{ (Prob. 67).}$$

Questions II—VI lead to quadratic equations.

- II. $x + y = 5$, $xy = 6$, solved, as all questions before No. XXIII, with the notation of only one unknown: $y = x - 5$, $x(5 - x) = 6$; $x = 3$, $y = 2$.

DE L'OPERATION.

401

terminée, comme il apparoitra en plusieurs questions du second liure de Diophante, & autres suiuaus; l'on trouuera alors la valeur des quantitez en l'ordre, comme dessus, par le moien du 66 probleme.

Item la ou (au commencement de la construction) nous auons posé pour le nombre requis 1 ①. On peut poser nombre algebratique quelconque, & tel qui en l'operation nous semblera le plus commode, selon la qualité de la question. Par exemple, si à cause d'euitter fraction, nous eussions voulu poser pour le nombre requis, 2 ①, sa moitié sera 1 ①, font ensemble 3 ①. egales à 18, & par le 67 probleme 1 ① vaudroit 6: Ergo les proposees 2 ① (par le 66 probleme) vaudroient 12, qui est le mesme, ce que dessus valoit la posée 1 ①, & nous vient la mesme solution.

Prennons autrefois pour nombre requis 4 ②, sa moitié sera 2 ② font ensemble 6 ② egales à 18 & par le 78 probleme 1 ① vaudra $\sqrt{3}$; Ergo les 4 ② par le 66 probleme vaudront comme dessus 12. Et ainsi d'autres quantitez quelconques.

QUESTION II.

Partons 5 en deux parties telles, que leur produit soit 6.

NOTA.

Nous dirons ici encore vne fois pour tout, que les nombres derriere la ligne, sont les nombres de la solution; à scaoir les valeurs des nombres algebratiques, auxquels ilz correspondent, & se mettent apres que la valeur de 1 ① est trouuée.

III. $x^2 + y^2 = 7; x^2 - y^2 = 1; x = 2, y = \sqrt{3}.$

IV. $2xy = \sqrt{48}, x^2 + y^2 = 7; x = 2, y = \sqrt{3}.$

V. $2xy = -\sqrt{60}, 2xz = \sqrt{40}, 2yz = \sqrt{-24}; x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{3}, z = \sqrt{2}.$

VI. $2xy = \sqrt{140}, 2xz = \sqrt{84}, 2yz = \sqrt{60}, 2xu = -\sqrt{56}, 2yu = -\sqrt{40}, 2zu = -\sqrt{24}; x = \sqrt{7}, y = \sqrt{5}, z = \sqrt{3}, u = -\sqrt{2};$ the numbers have been selected in such a way that an answer is possible, but Stevin does not comment on this.

Questions VII—XII lead to cubic equations.

402 LE II. LIVRE D'ARITH.
CONSTRUCTION.

Soit l'une partie	$1 \textcircled{1}$	3
Et l'autre sera necessairement	$-1 \textcircled{1} + 5$	2
Leur produit	$-1 \textcircled{2} + 5 \textcircled{1}$	6
Egales à		6

Lesquels termes reduicts, par la 4 reigle deuant le 66 probleme, à sçavoir mettant la superieure quantité seule, &c. $1 \textcircled{2}$ sera egale à $5 \textcircled{1} - 6$, & par le 68 probleme, $1 \textcircled{1}$ vaudra 3 ou 2 soit 3.

Je di que 3 & 2 sont les nombres requis. *Demonstration.* Que 3 & 2 sont les parties de 5 est notoire, & leur produit est 6 selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

QUESTION III. QUI ENSEMBLE
LES IIII^e. V^e. VI^e. QUESTIONS, SUIVANTES,
seruent à l'origine des extractions des
racines quarrées, des multinomies
radicaux du 39 probleme.

Trouuons deux nombres tels, que leurs quarrés fassent 7, & que l'un quarré soustrait de l'autre, reste 1.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	$1 \textcircled{1}$	2
Son quarré pour premier quarré	$1 \textcircled{2}$	4
Ergo le second quarré (puis qu'avec le premier quarré il doit faire 7) sera necessairement	$-1 \textcircled{2} + 7$	3

VII. $xy = 2, x^3 + y^3 = 40; x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}},$
 $y = \sqrt[3]{\frac{8}{20 + \sqrt{392}}} = \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}.$ This question has been referred to in Prob. 69, solution of $x^3 = ax + b.$

VIII. $xy = 2, x^3 - y^3 = 20; x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10},$
 $y = \sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{108} + 10}}.$ This question has been referred to in Prob. 69, solution of $x^3 = -ax + b.$

DE L'OPERATION.

Sa racine quarrée, pour le second nombre requis.	$\sqrt{\text{bino.}} - 1 \textcircled{2} + 7$	403 $\sqrt{3}$
Difference des quarrez	$2 \textcircled{2} - 7$	1
Egale à		1

Lesquels termes reduicts, 2 $\textcircled{2}$ seront egales à 8; Et par le 78 probleme 1 $\textcircled{1}$ vaudra 2.

Je di que 2 & $\sqrt{3}$, sont les deux nombres requis.

Demonstration. Les deux quarrez de 2 & de $\sqrt{3}$, qui sont 4 & 3, sont ensemble 7. Item soustraiet 3 de 4 reste 1, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

NOTA. Lon pourroit encore faire ceste construction ainsi:

Soit le premier nombre requis	1 $\textcircled{1}$	$\sqrt{3}$
Son quarré pour le premier quarré	1 $\textcircled{2}$	3
Ergo le second quarré (puis que du premier il doit differer en 1) sera + 1 ou - 1, soit	1 $\textcircled{2} + 1$	4
Sa racine quarrée pour le second nombre requis	$\sqrt{\text{bino.}} 1 \textcircled{2} + 1$	2
Somme des quarrez	2 $\textcircled{2} + 1$	7
Egale à		7

Lesquels termes reduicts 2 $\textcircled{2}$ seront egales à 6; Et par le 78 probleme 1 $\textcircled{1}$ vaudra $\sqrt{3}$. & les deux nombres requis seront comme dessus 2 & $\sqrt{3}$.

QUESTION III.

Trouvons deux nombres tels, que le double de leur produit soit $\sqrt{48}$, & la somme de leurs quarrez 7.

IX. $x^3 - 6 = 7x; x = 3.$

X. $xy = 400, x^3 - 6x^2 = 400; x = 40, 10.$

XI. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = y, x(y + 5) = 36; x = 4, y = 4.$

XII. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = y, (x + 3)(y + 6) = 225; x = 6, y = 9.$

Questions XIII and XIV deal with biquadratic equations, Questions XV—XXII with those cubic equations (resolvents), to which biquadratic equations of different types are reduced. In Probs. 72-77 there are references to these problems.

XIII. $xy = 3, 2y + y^4 = 3; x = 3, y = 1.$

404 LE II. LIVRE D'ARITH.
CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	2
Ergo le second nombre (puis qu'il faut que le double du produit du premier & second soit $\sqrt{48}$) sera	$\frac{\sqrt{12}}{1 ①}$	$\sqrt{3}$
Le carré du premier nombre est	1 ②	4
Le carré du second nombre est	$\frac{12}{1 ②}$	3
La somme des quarez	$\frac{1 ② + 12}{1 ②}$	7
Egale à	7	

Lesquels termes reduicts 1 ④ sera egale à 7 ③ — 12
Et par le 78 probleme 1 ① vaudra 2.

le di que 2 & $\sqrt{3}$, sont les deux nombres requis.

Demonstration. Le produit de 2 & $\sqrt{3}$, est $\sqrt{12}$, son double $\sqrt{48}$; Item la somme des quarez de 2 & $\sqrt{3}$, est 7, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

NOTA. Lon pourroit encore faire ceste construction ainsi:

Soit le premier nombre requis	1 ①	2
Son carré pour le premier carré	1 ②	4
Ergo le second carré (puis qu'avec le premier carré il doit faire 7) lera necessairement	— 1 ② + 7	3
Sa racine quarrée pour le second nombre requis	$\sqrt{\text{bino.} - 1 ② + 7}$	$\sqrt{3}$
Produit du premier & second nombre, est $\sqrt{\text{bino.} - 1 ② + 7 ②}$, son double	$\sqrt{\text{bino.} - 4 ④ + 28 ③}$	$\sqrt{48}$
Egales à	$\sqrt{48}$	

Lesquels termes reduicts 1 ④ sera egale a 7 ③ — 12;
Et par le 78 probleme. 1 ① vaudra 2, & les deux nombres requis seront comme dessus 2 & $\sqrt{3}$.

XIV. $xy = 27, y^4 - 2y^3 = 27; x = 9, y = 3.$

XV.

XVI. $9y^2 = (-2y + 9)(y^2 + 3\frac{1}{5}), x = -y; x = -2.$

XVII.

XVIII. $\frac{1}{4}(8 - 4x)^2 = 2x + 4(x^2 - 32); x = 6.$

XIX.

XX. $4x^2 = (2x + 8)(x^2 - 12); x = 4.$

XXI.

XXII. $(2x + 20)^2 = (2x + 8)(x^2 + 33); x = 4.$

QUESTION V.

Trouuons trois nombres tels, que le double du produit du premier & second, soit $\sqrt{60}$; Et le double du produit du premier par le troisieme, soit $\sqrt{40}$; Et le double du produit du second par le premier, soit $\sqrt{24}$.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	√ 5
Ergo le second (puis qu'il faut que le double du produit du premier & second soit $\sqrt{60}$) fera	$\frac{\sqrt{15}}{10}$	$-\sqrt{3}$
Et le troisieme (puis qu'il faut que le double du produit du premier & troisieme soit $\sqrt{40}$) fera	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	√ 2
Le produit du second $\frac{\sqrt{15}}{10}$ & troisieme $\frac{\sqrt{10}}{10}$ est	$\frac{\sqrt{600}}{100}$	$-\sqrt{24}$
Egal à	$-\sqrt{24}$	

Lesquels termes reduicts $\sqrt{24}$ ② seront egales à $\sqrt{600}$; Et par le 78 probleme, 1 ① vaudra $\sqrt{5}$.
 Je di que $\sqrt{5}$ & $-\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ sont les trois nombres requis. *Demonstration.* Le produit de $\sqrt{5}$ & $-\sqrt{3}$, est $-\sqrt{15}$, son double $-\sqrt{60}$; Item le produit de $\sqrt{5}$ & $\sqrt{2}$, est $\sqrt{10}$, son double $\sqrt{40}$; Item le produit de $-\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$, est $-\sqrt{6}$, son double $-\sqrt{24}$, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

QUESTION VI.

Trouuons quatre nombres tels, que le double du produit du premier & second, soit $\sqrt{140}$; Et du premier & troisieme $\sqrt{84}$; Et

Each equation in the last eight questions, appears in two of them. In each of the pair the formulation is different. For instance, Prob. XXI has the form: let $(a + b + x)^2 = a^2 + 2ab + (2x + b)^2 + 4x + x^2 = I + II + III +$

IV + V. Then solve $\frac{1}{4}(IV + q)^2 = (III + p)(V + r)$, or $\frac{1}{4}(4x + q)^2 =$

$(2x + b^2 + p)(x^2 + r)$, where $a = 1$, $b = 2$, $p = 4$, $q = 40$, $r = 33$. This equation has the form of the cubic equation of Prob. 77, and the curious way in which the question is stated is due to Stevin's attempt to relate it as closely as possible to Prob. 77. Prob. XXII states the problem as follows: to find an x

such that $(x^2 + 33)$ times $(2x + 2^2 + 4)$ is equal to $\frac{1}{4}(4x + 40)^2$.

The last five questions are formulated with the aid of the "quantités postposées", *sec* ①, *ter* ①, *quar* ①.

406 LE II. LIVRE D'ARITH.
 du second & troisieme $\sqrt{60}$; Et du premier
 & quatrieme $\sqrt{56}$; Et du second & qua-
 trieme $\sqrt{40}$; Et du troisieme & quatrie-
 me $\sqrt{24}$.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	$\sqrt{7}$
Ergo le second	$\frac{\sqrt{35}}{1}$	$\sqrt{5}$
Ergo le troisieme	$\frac{\sqrt{21}}{1}$	$\sqrt{3}$
Ergo le quatrieme	$\frac{\sqrt{14}}{1}$	$-\sqrt{2}$
Double du produit du se- conde & troisieme	$\frac{\sqrt{2940}}{1}$	$\sqrt{60}$
Double du produit du second & quatrieme	$\frac{-\sqrt{1960}}{1}$	$-\sqrt{40}$
Double du produit du troisieme & qua- trieme	$\frac{-\sqrt{1176}}{1}$	$-\sqrt{24}$
Somme de ces trois pro- duits (quand aux au- tres produits requis les memes se trouvet selon la question) est	$\frac{\sqrt{2940}-\sqrt{1960}-\sqrt{1176}}{1}$	$\sqrt{60}-\sqrt{40}-\sqrt{24}$
Egale à $\sqrt{60}-\sqrt{40}-\sqrt{24}$		

Lesquels termes reduits $\sqrt{60} \times \textcircled{2} - \sqrt{40} \times \textcircled{2} - 24 \times \textcircled{2}$ seront egales à $\sqrt{2940} - \sqrt{1960} - \sqrt{1176}$;
 Et par le 78 probleme 1 ① vaudra $\sqrt{7}$.

Je di que $\sqrt{7}$, & $\sqrt{5}$, & $\sqrt{3}$, & $-\sqrt{2}$, sont les qua-
 tre nombres requis. *Demonstration.* Le double du pro-
 duit de $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$, est $\sqrt{140}$; Et de $\sqrt{7}$ & $\sqrt{3}$, est
 $\sqrt{84}$; Et de $\sqrt{5}$ & $\sqrt{3}$, est $\sqrt{60}$; Et de $\sqrt{7}$ & $-\sqrt{2}$

- XXIII. $x - y = 3, xy = 10; x = 5, y = 2.$
- XXIV. $x + y + z = 10, y + z + u = 14, z + u + x = 13,$
 $u + x + y = 11; x = 2, y = 3, z = 5, u = 6.$
- XXV. $3xy + 4x^2 = 2x^2, x^2 + y^2 = 29; x = 5, y = 2.$
- XXVI. $\frac{y}{x} = 3x^2 + 4x, x^2 + 2y = 84; x = 2, y = 40.$
- XXVII. $2xy + 6y = y^2, x + y + 2x + 6 = 26; x = 2, y = 6.$
 $y : x = x : z, x + y + z = 26, 2xy + 6y^2 = y^2.$

From the last equation follows, according to Theorem IV which follows Prob. 80, that $y : x = x : (2x + 6)$, hence $z = 2x + 6$. From the second equation follows $y = -3x + 20$, hence $(-3x + 20)(2x + 6) = x^2; x = 6, y = 2, z = 18$.

DE L'OPERATION.

407

est $\sqrt{56}$; Et de $\sqrt{5}$ & $\sqrt{2}$ est $\sqrt{40}$; de $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$, est $\sqrt{24}$, selon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION VII, LAQUELLE

ENSEMBLE LES QUESTIONS SVIVANTES iusques à la 18 seruent aux origines des constructions des problemes

69. 71. 72. 73. 75. 76. 77.

Trouver deux nombres tels, que leur produit soit 2, & la somme de leurs cubes 40.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	$\sqrt{3} \text{ bino. } 20 + \sqrt{392}$
Ergo le second nombre, à fin que le produit du premier & second soit 2 (qui se trouue diuisant 2 par 1 ①) sera	$\frac{2}{1 ①}$	$\sqrt{3} \frac{8}{20 + \sqrt{392}}$
Le cube du premier nombre	1 ③	$20 + \sqrt{392}$
Le cube du second nombre	$\frac{8}{1 ①}$	$\frac{8}{20 + \sqrt{392}}$
Somme des cubes 1 ③ +	$\frac{8}{1 ①}$	40
Egale à	40	

Lesquels reduicts 1 ⑥ sera egale à 40 ③ — 8; Et par le 78 probleme 1 ① vaudra $\sqrt{3} \text{ bino. } 20 + \sqrt{392}$.

Je di que $\sqrt{3} \text{ bino. } 20 + \sqrt{392}$ & $\sqrt{3} \frac{8}{20 + \sqrt{392}}$ sont les deux nombres requis. *Demonstration.* Leur

408 LE II. LIVRE D'ARITH.
 produit par le 40 problème est 2, & la somme de leurs cubes par le 28 problème est 40, selon le requis; ce qu'il falloit démonstrer.

NOTA. Ceste question (comme nous auons dict à l'origine du 69 problème) sert pour declaration de la construction du mesme 69 problème; Mais il faut scauoir qu'icelle construction est colligée des nombres precedans de l'inuention du valeur de 1 ①, quand 1 ⑥ vaut 40 ③ — 8.

Quant à ce que l'on prend la pour le deuxiesme nombre $\sqrt[3]{\text{bino. } 20 - \sqrt{392}}$, & que nous trouuons ici $\sqrt[3]{\frac{8}{20 + \sqrt{392}}}$ il faut scauoir, que c'est tout le mesme par le 27 problème, car diuisant le numerateur 8 par le nominateur $20 + \sqrt{392}$, &c. Doncques pour euitier fraction, on prend la tousiours le binomie disioinct, respondant au premier conioinct. Et le semblable s'entendra sur la 8^e question suiuaute.

QUESTION VIII.

Trouuons deux nombres tels, que leur produit soit 2, & la difference de leurs cubes 20.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	$\sqrt[3]{\text{bino. } \sqrt{108 + 10}}$
Ergo le second nombre à fin que le produit du premier & second soit 2 sera	$\frac{2}{1 ①}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{108 + 10}}}$
Le cube du premier nombre	1 ③	$\sqrt[3]{108 + 10}$

DE L'OPERATION.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Le cube du second nombre} & \frac{8}{10} \\
 \text{Difference des cubes est } 1 \textcircled{3} - \frac{8}{10} & \sqrt[3]{108+10} \\
 \text{ou bien } - 1 \textcircled{3} + \frac{8}{10} \text{ soit } 1 \textcircled{3} - \frac{8}{10} & 20 \\
 \text{Egale à} & 20
 \end{array}$$

Lesquels reduicts $1 \textcircled{6}$ sera egale à $20 \textcircled{3} + 8$; Et par le 78 probleme $1 \textcircled{1}$ vaudra $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } \sqrt[3]{108+10}}$.

Le di que $\sqrt[3]{3 \text{ bino. } \sqrt[3]{108+10}}$ & $\sqrt[3]{\frac{8}{10}}$ sont les deux nombres requis. *Demonstration.* Leur produit (par le 40 probleme) est 2, & la difference de leurs cubes (par le 29 probleme) est 20, selon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION IX.

Trouuons vn nombre cubique, qui avec — 6, face autant comme le costé dudit cube, multiplié par 7.

CONSTRUCTION.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Soit le nombre cubique} & 1 \textcircled{3} \quad 27 \\
 \text{Auquel aousté — 6 fait} & 1 \textcircled{3} - 6 \quad 21 \\
 \text{Egal à } 1 \textcircled{1} \text{ (costé cubique du premier en l'ordre)} & \\
 \text{multiplié par 7 qui est a} & 7 \textcircled{1} \quad 21 \\
 \text{Lesquels reduicts, } 1 \textcircled{3} \text{ sera egale a } 7 \textcircled{1} + 6; \text{ Et par le} & \\
 \text{69 probleme } 1 \textcircled{1} \text{ vaudra 3.} &
 \end{array}$$

Le di que 27 est le nombre requis. *Demonstration.* 27 est le nombre cubique qui avec — 6 fait 21. Aussi fait 21, le costé 3 dudit cube multiplié par 7; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION X.

Trouuons deux nombres tels, que leur produit soit 400, & du cube de l'un, sou-

410 LE II. LIVRE D'ARITH.
Straiçts les six quarrez du meſme nombre, la reſte ſoit 400.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	40
Le ſecond doncques ſera neceſſairement	400	10
Son cube	64000000	1000
Duquel ſouſtraict les ſix quarrez du ſecond	100	
en l'ordre, qui ſont	960000	600
Reſte	-960000 + 64000000	400
Egal à	10	400

Leſquels reduicts, 1 ③ ſera egale à — 2400 ① + 160000 & par la 2 differ. du 69 prob. la 1 ① vaudra 40.

Je di que 40 & 10, ſont les deux nombres requis.
Demonſtration. Le produit de 40 & 10, eſt 400, & du cube du 10, qui eſt 1000, ſouſtraict 600, pour les ſix quarrez de 10, reſte 400; ce qu'il falloit demonſtrer.

QUESTION XI.

T*Rouuons deux nombres tels, que le quarré de la moitié du premier ſoit egal au ſecond, & que le produit du premier par le ſecond + 5, ſoit 36.*

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	4
Sa moitié eſt $\frac{1}{2}$ ①, ſon quarré $\frac{1}{4}$ ②; ergo le ſecond nombre	$\frac{1}{4}$ ②	4
Produit du premier 1 ①, par le ſecond $\frac{1}{4}$ ② + 5	$\frac{1}{4}$ ③ + 5 ①	36
eſt	$\frac{1}{4}$ ③ + 5 ①	36
Egal à		36

Leſquels reduicts 1 ③ ſera egale à — 20 ② + 144;

DE L'OPERATION.

411

Et par le 69 probleme 1 ① vaudra 4.

Le di que 4 & 4 sont les deux nombres requis. *Demonstration.* Le carré de la moitié du premier nombre est 4, & est égal au second nombre 4; Item le produit de 4 par 4 + 5 (qui est le premier nombre par le second + 5) est 36, selon le requis; ce qu'il falloit démontrer.

QUESTION XII.

Trouuons deux nombres tels, que le carré de la moitié du premier soit égal au second, & que le produit du premier + 3 par le second + 16, soit 225.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①	6
Sa moitié est $\frac{1}{2}$ ①, son carré $\frac{1}{4}$ ②; Ergo le		
second nombre	$\frac{1}{4}$ ②	9
Produit du premier 1 ① + 3, par le second		
$\frac{1}{4}$ ② + 16, est $\frac{1}{4}$ ③ + $\frac{3}{4}$ ② + 16 ① + 48		225
Egales à		225

Lesquels réduits 1 ③ sera égale 2 — 3 ② — 64 ① + 708; Et par le 71 probleme 1 ① vaudra 6.

Le di que 6 & 9, sont les deux nombres requis. *Demonstration.* Le carré de la moitié du premier nombre est 9, & est égal au second nombre 9; Item le produit du premier 6 + 3 par le second 9 + 16, est 225, selon le requis; ce qu'il falloit démontrer.

QUESTION XIII.

Trouuons deux nombres tels, que leur produit soit 3, & que le produit de l'un nom-

412 LE II. LIVRE D'ARITH.
bre par 2, aiouſté à la potence de quarte quantité dudiſt vn nombre, la ſomme ſoit auſſi 3.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis $1 \textcircled{1}$ 3
 Ergo le ſecond nombre ſera $\frac{1}{2}$ 1
 Qui multiplie par 2 faiſt $\frac{1}{10}$ 3
 Le meſme aiouſté à la potence de quarte quantité du ſecond nombre ſecond en l'ordre, qui eſt $\frac{81}{10}$ 1
 Faiſt $\frac{60+81}{10}$ 3
 Egales à 3

Leſquels reduicts, $1 \textcircled{4}$ ſera egale à $2 \textcircled{3} + 27$; Et par le 74 probleme, $1 \textcircled{1}$ vaudra 3.

Je di que 3 & 1 ſont les deux nombres requis. *Demonſtration.* Le produit de 3 & 1, eſt 3; Et le produit de 1 par 2 eſt 2, qui aiouſté à la potence de quarte quantité dudiſt 1, la ſomme eſt auſſi 3; ce qu'il falloir demonſtrer.

QUESTION XIII.

Trouuons deux nombres tels, que leur produit ſoit 27, & de la potence de quarte quantité de l'un, ſouſtraict ſes deux cubes, la reſte ſoit auſſi 27.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis $1 \textcircled{1}$ 9
 Ergo le ſecond nombre ſera $\frac{27}{10}$ 3
 Sa potence de quarte quantité $\frac{331441}{10}$ 81
 De laquelle ſouſtraicts les deux cubes du ſecond nombre ſecond en l'ordre, qui ſont $\frac{39766}{10}$ 54
 Reſte $\frac{-39766+331441}{10}$ 27
 Egales à 27

DE L'OPERATION. 413

Lesquels reduits, 1 ④ sera egale a — 1458 ① + 19683; Et par le 72 probleme 1 ① vaudra 9.

Je di que 9 & 3 sont les deux nombres requis. *Demonstration.* Le produit de 9 & 3 est 27; Puis de la puissance de quarte quantité de 3 qui est 81, soustraiet les deux cubes dudiect 3, qui sont 54, la reste est aussi 27, selon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION XV.

Trouuons un — ②, qui appliqué à 1 — 3 & puis tels trois nombres multipliez par eux mesmes distinctemēt, selon la maniere de multiplication de quantitez algebriques, & au dernier nombre du produit aiousté 3 $\frac{1}{3}$; qu' alors le quarré de la moitié du quatriesme, soit egal au produit du troisieme par le cinquesme.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis — 1 ① — 2
 Qui appliqué a 1 — 3 fait 1 — 3 — 1 ①
 multiplions les par eux mesmes distinctemēt, selon la maniere de multiplication des quantitez algebriques en ceste sorte:

1	— 3	— 1 ①	— 2	
1	— 3	— 1 ①		
— 1 ①.	+ 3 ①.	+ 1 ②		
— 3.	+ 9.	+ 3 ①.		
1.	— 3.	— 1 ①.		
1.	— 3.	— 2 ① + 9.	+ 6 ①.	+ 1 ②

414 LE II. LIVRE D'ARITH.

Doncques le troisieme nombre du produit
est $-2 \textcircled{1} + 9$ | 5
Et le quatriesme $6 \textcircled{1}$ | 12
Et le dernier est $1 \textcircled{2}$, auquel selon la question
aiousté $3 \frac{1}{3}$ le dernier sera $1 \textcircled{2} + 3 \frac{1}{3}$ | $7 \frac{1}{3}$
Reste maintenant que le carré de $3 \textcircled{1}$
(moitié du quatriesme) qui est $9 \textcircled{2}$ | 36
Soit egal au produit du troisieme, par le
dernier qui est $-2 \textcircled{3} + 9 \textcircled{2} - 6 \frac{2}{3} \textcircled{1} + 28 \frac{4}{3}$ | 36

Lesquels reduits $1 \textcircled{3}$ sera egal a $-3 \frac{1}{3} \textcircled{1} + 14 \frac{2}{3}$; Et $1 \textcircled{1}$ par le 69 probleme vaudra 2, & par consequent la posée $-1 \textcircled{1}$ vaudra -2 .

Il di que -2 est le nombre requis. *Demonstration.*
Multipliant $1 - 3 - 2$, par eux mesmes distinctement, selon la maniere de multiplication algebrique, le produit sera $1 - 6 + 5 + 12 + 4$; Doncques le troisieme nombre du produit, est 5, & le quatriesme 12, & le dernier 4: auquel dernier aiousté $3 \frac{1}{3}$, fera $7 \frac{1}{3}$ qui multiplié par le troisieme 5, fait 36 egal au carré de 6, moitié du quatriesme, selon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION XVI

Trouvons un $\textcircled{0}$ tel, que son carré $+ 3 \frac{1}{3}$, multiplié par la somme du double d'icelui $- \textcircled{0}$, & le carré de -3 , le produit soit egal au carré du produit de -3 , par icelui $- \textcircled{0}$ requis.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis $-1 \textcircled{1}$ | -2
Son carré est $1 \textcircled{2}$, auquel aiousté $3 \frac{1}{3}$
fait $1 \textcircled{2} + 3 \frac{1}{3}$ | $7 \frac{1}{3}$

DE L'OPERATION.

Qui multiplié par la somme du double du
 nombre requis, & le quarré de -3 qui
 est par -2 ① + 9 fait

$$\begin{array}{r|l} -2 \text{ ③} + 9 \text{ ②} - 6 \frac{2}{5} \text{ ①} + 28 \frac{4}{5} & 36 \\ \hline \end{array}$$

Egal au quarré du produit de -3 par -1 ①
 premier en l'ordre, qui est a

$$\begin{array}{r|l} 9 \text{ ②} & 36 \\ \hline \end{array}$$

Lesquels reduicts 1 ③ sera egale a $-3 \frac{1}{5} \text{ ①} + 28 \frac{4}{5}$; Et par le 69 probleme 1 ① vaudra 2.

Je di que -2 est le nombre requis. *Demonstration.*
 Le quarré de -2 est 4, auquel aiousté $3 \frac{1}{5}$, fait $7 \frac{1}{5}$,
 qui multiplié par 5 (5 pour la somme du double de
 -2 & le quarré de -3) fait 36, qui sont egales au
 quarré du produit de -3 par icelui -2 ; selon le re-
 quis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION XVII.

Trouuons un ①, qui appliqué à $1-2$, &
 puis tels trois nombres multipliez par eux
 mesmes distinctement, selon la maniere de mul-
 tiplication des quantitez algebriques, & au
 dernier nombre du produit aiousté -32 , & au
 quatriesme nombre du produit aiousté 8: Qu'a-
 lors le quarré de la moitié du quatriesme, soit
 egal au produit du troisieme par le dernier.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis

$$\begin{array}{r|l} 1 \text{ ①} & 6 \\ \hline \end{array}$$

Qui appliqué a $1-2$, fait $1-2+1$ ①,
 qui multipliez par eux mesmes distin-
 ctement, selon la maniere de multiplica-

416 LE II. LIVRE D'ARITH.

tion des quantitez algebriques comme nous
 les auons multiplié à la 15 question, donnent
 produict $1 - 4 \cdot 2 \textcircled{1} + 4 \cdot -4 \textcircled{1} \cdot 1 \textcircled{2}$.
 doncques le troisieme nombre est $2 \textcircled{1} + 4$ 16
 Et le quatriesme $-4 \textcircled{1}$, auquel aiousté 8
 fera $-4 \textcircled{1} + 8$ -16
 Et le dernier est $1 \textcircled{2}$, à laquelle aiousté
 -32 fera $1 \textcircled{2} - 32$ 4
 Reste maintenant que le quarré de
 $-2 + 4$ (moitie du quatriesme)
 qui est $4 \textcircled{2} - 16 \textcircled{1} + 16$ 64
 Soit egal au produict du troisieme nombre,
 par le dernier, qui est $2 \textcircled{3} + 4 \textcircled{2} - 64 \textcircled{1} - 128$ 64
 Lesquels reduicts, $1 \textcircled{3}$ sera egale à $24 \textcircled{1} + 72$; Et
 par le 69 probleme $1 \textcircled{1}$ vaudra 6.

Je di que 6 est le nombre requis. *Demonstration:* Multipliant $1 - 2 + 6$ par eux mesmes distinctement, selon la maniere de multiplication algebrique, le produict sera $1 - 4 + 16 - 24 + 36$. Doncques le troisieme nombre du produict est 16, le quatriesme -24 , le dernier 36, puis au dernier aiousté -32 , & au quatriesme 8, alors sera le troisieme 16, le quatriesme -16 , & le dernier 4; Et le quarré de -8 , moitie du quatriesme, est 64, & est egal au produict du troisieme 16, par le dernier 4, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

QUESTION XVIII.

Trouuons un \textcircled{c} tel, que son quarré -32 multiplié par la somme du double d'icelui \textcircled{c} , & le quarré de -2 , le produict soit egal au quarré de

la moitié de la somme de 8 & du double du produit d'icelui \odot par -2 .

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis	1 $\textcircled{1}$	6
Son carré 1 $\textcircled{2}$, auquel aiousté -32		
fait	1 $\textcircled{2}$ -32	4
Qui multiplié par la somme du double du nombre requis, & le carré de -2 , qui est par 2 $\textcircled{1}$ $+4$, fait 2 $\textcircled{3}$ $+4$ $\textcircled{2}$ -64 $\textcircled{1}$ -128		64
Egal au carré de la moitié de la somme de 8, & du double du produit de 1 $\textcircled{1}$ premier en l'ordre, par -2 . c'est à dire, egal au carré de -2 $\textcircled{1}$ $+4$ qui est		
	4 $\textcircled{2}$ -16 $\textcircled{1}$ $+16$	64

Lesquels reduits 1 $\textcircled{3}$ sera egale à 24 $\textcircled{1}$ $+72$; Et par le 69 probleme 1 $\textcircled{1}$ vaudra 6.

Je di, que 6 est le nombre requis. *Demonstration.* Le carré de 6 est 36, qui avec -32 font 4, qui multiplié par 16 (16 pour la somme du double d'icelui 6 avec le carré de -2) fait 64, qui sont egales au carré de la moitié de la somme de 8, & du double du produit dudit 6 par -2 , selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

QUESTION XIX.

Trouuons un \odot , qui appliqué à $1-2$, & puis tels trois nombres multipliés par eux mesmes distinctement, selon la maniere de multiplication des quantitez algebriques, & au dernier nombre du produit aiousté -12 , & au troisiem-

418 LE II. LIVRE D'ARITH.
*me nombre du produit aiousté 4: Qu' alors le
 carré de la moitié du quatriesme, soit egal au
 produit du troiesme par le dernier.*

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis	1 ①	4
Laquelle appliquée a 1 — 2 fait 1 — 2		
+ 1 ①, qui multipliez par eux mesmes		
distinctemēt, selon la maniere de mul-		
tiplication des quantitez algebriques,		
comme nous les auons multiplié à la		
11 question, donnent produit:		
1. — 4. 2 ① + 4. — 4 ①. 1 ②.		
Doncques le dernier nombre est 1 ②, à		
laquelle aiousté — 12 fait	1 ② — 12	4
Et le quatriesme est	— 4 ①	— 16
Et le troiesme est 2 ① + 4, auquel aiou-		
sté 4, fait	2 ① + 8	16
Reste maintenant que le carré de — 2 ①		
(moitié du quatriesme) qui est	4 ②	64
Soit egal au produit du troiesme 2 ①		
+ 8, par le dernier 1 ② — 12, qui		
est a	2 ③ + 8 ② — 24 ① — 96	64

Lesquels reduits 1 ③ sera egale à — 2 ② + 12 ① + 48; Et 1 ① par le 71 probleme vaudra 4.

Il di que 4 est le nombre requis. *Demonstration.*
 Multipliant 1 — 2 + 4 par eux mesmes distinctement
 selon la maniere de multiplication algebrique, le pro-
 duit sera 1 — 4 + 12 — 16 + 16: Doncques le der-
 nier nombre du produit est 16, & le quatriesme — 16,

DE L'OPERATION.

419

& le troisieme 12: puis au dernier aiousté — 12, & au troisieme 4, alors fera le dernier 4, le quatrieme — 16, & le troisieme 16, & le quarré de — 8, moitie du quatrieme est 64, & est egal au produict du troisieme 16, par le dernier 4, selon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION XX.

Trouuons vn \odot sel, que son quarré — 12 multiplié par la somme du double d'icelui \odot , & le quarré de — 2 & 4, le produict soit egal au quarré du produict de — 2 par icelui \odot requis.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis	1 \odot	4
Son quarré 1 \odot , auquel aiousté — 12		
faict	1 \odot — 12	4
Qui multiplié par la somme du double du nombre requis, & le quarré de — 2 & 4, qui est		
par 2 \odot + 8, faict 2 \odot + 8 \odot — 24 \odot — 96		64
Egal au quarré du produict de — 2, par 1 \odot premier en l'ordre, qui est a	4 \odot	

Lesquels reduicts, 1 \odot fera egale a — 2 \odot + 12 \odot + 48; Et 1 \odot par le 71 probleme, vaudra 4.

Je di que 4 est le nombre requis. *Demonstration.* Le quarré de 4 est 16, qui avec — 12 faict 4, qui multiplié par 16 (16 pour la somme du double d'iceluy 4, & le quarré de — 2 & encore 4) faict 64, qui sont egales au quarré du produict de — 2, par le 4 trouué, selon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION XXI.

Trouuons un \odot qui appliqué à $i + 2$, & puis tels trois nombres multipliez par eux mesmes distinctement, selon la maniere de multiplication des quantitez algebriques, & au dernier nombre du produit aiouste 33, & au quatriesme 40, & au troisieme 4. Qu' alors le carré de la moitié du quatriesme, soit egal au produit du troisieme, par le dernier.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis	$i \textcircled{1}$	4
Qui appliqué à $i + 2$, fait $i + 2 + i \textcircled{1}$, qui multipliez par eux mesmes distinctement, selon la maniere de multiplication des quantitez algebriques, comme nous les auons multiplié à la 11 question donnent produit		
1. 4. $2 \textcircled{1} + 4.$ $4 \textcircled{1}.$ $i \textcircled{2}.$		
Doncques le dernier nombre est $i \textcircled{2}$, auquel aiouste 33, fait	$i \textcircled{2} + 33$	49
Et le quatriesme nombre $4 \textcircled{1}$, auquel aiouste 40, fait.	$4 \textcircled{1} + 40$	56
Et le troisieme nombre $2 \textcircled{1} + 4$, auquel aiouste 4, fait	$2 \textcircled{1} + 8$	16
Reste maintenant que le carré de $2 \textcircled{1}$ + 20 (moitié du quatriesme) qui est	$4 \textcircled{2} + 80 \textcircled{1} + 400$	784

DE L'OPERATION.

Soit egal au produit du troisieme $2 \textcircled{1} + 8$, 421
 par le dernier $1 \textcircled{2} + 33$, qui est
 $- 2 \textcircled{3} + 8 \textcircled{2} + 66 \textcircled{1} + 264$ | 784

Lesquels reduicts $1 \textcircled{3}$ sera egale à $- 2 \textcircled{2} + 7 \textcircled{1}$
 $+ 68$; Et $1 \textcircled{1}$ par le 71 probleme, vaudra 4.

Je di que 4 est le nombre requis. *Demonstration.*
 Multipliant $1 + 2 + 4$ par eux mesmes distincte-
 ment selon la maniere de multiplication algebraique,
 le produit sera 1. 4. 12. 16. 16. Doncques le der-
 nier nombre du produit est 16, auquel aiousté 33,
 fait 49; Et le quatrieme nombre du produit est aussi
 16, auquel aiousté 40, fait 56; Et le troisieme nom-
 bre est 12, auquel aiousté 4, fait 16.

Or le carré de la moitié du quatrieme 56. est 784
 egal au produit du troisieme 16, par le dernier 49, se-
 lon le requis; ce qu'il falloit demonstret.

QUESTION XXII.

Trouuons un $\textcircled{0}$ tel, que son carré $+ 33$
 multiplié par la somme du double d'icelui $\textcircled{0}$,
 & le carré de 2, & encore 4, le produit soit
 egal au carré de la moitié de la somme de 40, &
 du double du produit de 2 par icelui $\textcircled{0}$.

CONSTRUCTION.

Soit le nombre requis $1 \textcircled{1}$ | 4
 Son carré $1 \textcircled{2}$, auquel aiousté 33 fait $1 \textcircled{2} + 33$ | 49
 Qui multiplié par la somme du double du nom-
 bre requis & le carré de 2 & encore 4, qui est
 par $2 \textcircled{1} + 8$, fait $2 \textcircled{3} + 8 \textcircled{2} + 66 \textcircled{1} + 264$ | 784

422. LE II. LIVRE D'ARITH.

Egal au carré de 2 ① + 20 (pour la moitié
de la somme de 40, & du double du pro-
duit de 2 par 1 ① premier en l'ordre)
qui est $4 \textcircled{2} + 80 \textcircled{1} + 400$ 784
Lesquels reduits, 1 ③ sera egale à 2 ② + 7 ① + 68;
Et 1 ① par le 71 probleme, vaudra 4.

Le di que 4 est le nombre requis. *Demonstration.* Le
quarré de 4 est 16, qui avec 33 fait 43, qui multiplié
par 16 (16 pour la somme du double de 4, & le carré
de 2, & encore 4) fait 784 qui font egales au carré de
28 (qui est la moitié de la somme de 40, & du double
du produit de 2 par 4) selon le requis; ce qu'il falloit
demonstrer.

NOTA. Les exemples suiivans seront ceux la, aus-
quels se recontent postposees quantitez: Mais il faut
sçavoir que toute operation qui se fait par icelles, se
peult aussi faire par positives; mais parce que la raison
des nombres requis est aucunesfois fort obscure, de
forte que pour l'absoluer par positives quantitez, l'on
auroit mestier de quelques theoremes, ou autres indu-
ctions, lesquelles souventesfois ne nous viennent à la
memoire, pourtant on les despesche pour le plus com-
mode, par les postposees. Nous donnerons doncques
deux exemples de postposees quantitez point multi-
pliees ou diuisees; Puis vn de postposée quantité mul-
tipliee; Et puis vn autre de diuisee; Et au dernier vn au-
tre par lequel sera demonstree l'usage des 6 theoremes
suiivans au precedent 80 probleme.

QUESTION XXIII.

TRouuons deux nombres desquels la difference
soit 3 & leur produit 10.

DE L'OPERATION.

423

NOTA. Pour declairer ce qui est generalement requis es operations des postposees quantitez, il faut scauoir, qu'apres qu'il y a posees, quelques postposees quantitez il faut operer par les mesmes, selo la question, comme l'on a fait ci deuant par les positues: mais estant venu a l'egalite, on ne trouuera pas par icelle la valeur de 1 ①, comme l'on a fait dessus, mais on trouuera la valeur des postposees en positues, par les 79 & 80 problemes; puis on commencera autre operation semblable a la premiere, mais entierement de positues quantitez, comme les exemples le declaireront plus amplement.

CONSTRUCTION.

Soit le premier nombre requis	1 ①
Et soit le second nombre	1 sec. ①
Leur difference	1 ① — 1 sec. ①
Egale à	3
Lesquels reduicts (mettant la 1 sec. ① seule)	1 sec. ①

sera egale ou vaudra 1 ① — 3.

Or aiant trouué que la 1 sec. ① ci dessus posée second en l'ordre vaut (en quantitez de la mesme progression qu'est la positue 1 ①) 3 ① — 1, on recommencera l'operation semblable a la precedente en ceste sorte:

Soit le premier nombre requis	1 ①	5
Et soit le second nombre (car autant est trouué valoir la 1 sec. ① premierement en la premiere operation posée)	1 ① — 3	2
Leur difference selon le requis est 3, reste que leur produit soit 10; mais il est	1 ② — 3 ①	10
Le mesme doncques est egal à	10	
Lesquels reduicts, 1 ② sera egale à 3 ① + 10;		

424 **LE II. LIVRE D'ARITH.**

Et par le 68 probleme 1 ① vaudra 5.

le di que 5, & 2 font les nombres requis. *Demonstration.* La difference de 5 & 2 est 3. Item le produit de 5 & 2 est 10, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrier.

QUESTION XXIII.

Trouuons quatre nombres tels, que la somme du premier second & troisieme soit 10, & du second troisieme & quatrieme 14, & du troisieme quatrieme & premier 13, & du quatrieme premier & second 11.

CONSTRUCTION.

Soit le quatrieme nombre requis, & 1 ① le premier 1 *sec.* ①, & le second 1 *ter.* ①, & le troisieme 1 *quart.* ①; Doncques la somme du quatrieme nombre avec les trois autres est 1 ① + 10

Et du premier nombre avec les 3 autres, est 1 *sec.* ① + 14

Et du second nombre avec les 3 autres, est 1 *ter.* ① + 13

Et du troisieme nombre avec les trois autres, est 1 *quar.*

$$\textcircled{1} + 11$$

Lesquels quatre sommes sont entre eux egales; ergo

1 *sec.* ① + 14, est egale à 1 ① + 10, soustra-

hons doncques, de chaque partie 14, & demeu-

ra 1 *sec.* ① egale ou vallant 1 ① - 4

Et pour semblable raison, la 1 *ter.* ① vaudra 1 ① - 3

Et la 1 *quart.* ① vaudra 1 ① - 1

Or aiant des postposees quantitez troué leur valeur en positives, nous commencerons par les memes autres operations semblables à la precedente, en ceste sorte:

DE L'OPERATION.

Soit le quatriesme nombre autrefois	1 ①	425 6
Et le premier, (au lieu de 1 <i>sec.</i> ① que nous posames premierement) sera	1 ① — 4	2
Et le second (au lieu de 1 <i>ter.</i> ① que nous posames au commencement) sera	1 ① — 3	3
Et le troisieme (au lieu de 1 <i>quart.</i> ① que nous posames au commencement) sera	1 ① — 1	5
Leur somme	4 ① — 8	16
Egale au quatriesme, & les trois autres	1 ① + 10	16

Lesquels reduicts 3 ① seront egales a 18; Et par le 67 probleme, 1 ① vaudra 6.

Je di que 2. 3. 5. 6. sont les quatre nombres requis.

Demonstration. La somme de 2. 3. 5. est 10. & de 3. 5. 6. est 14, & de 5. 6. 2. est 13, & de 6. 2. 3. est 11, selon le requis, ce qu'il falloit demonstret.

LA
P R A T I Q U E
D'ARITHMETIQUE
D E
S I M O N S T E V I N
De Bruges.



A LEYDE,
En l'Imprimerie de Christóphle Plantin.
c10. c1. LXXXV.

The "first part" of the *Pratique* consists of eleven problems, of which the first four deal with the addition, subtraction, multiplication, and division of money, the others with the theory of ratio. This theory, in geometrical form, was presented in the *Problemata Geometrica*, First Book. In the *Pratique* we find an arithmetical theory. It is based on conventions going back to Books V and VI of Euclid's *Elements*, where the concept of "compounding" of ratios is introduced; if $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$, the ratio $\frac{a}{b}$ is said to be "compounded" of the ratios $\frac{a}{c}$ and $\frac{c}{b}$; if $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ the ratio $\frac{a}{b}$ is called the duplicate of $\frac{a}{c}$; if $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{b}$, and $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{b}$ the ratio $\frac{a}{b}$ is called the triplicate ratio, etc. (See T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2nd ed., 1926, pp. 132-133). This "compounding", which we see as a multiplication, was conceived as an addition. In following this method Stevin explained himself by writing that, though there exists a controversy between the mathematical authors (and principally between the commentators on the 5th Definition of Euclid V) concerning the computation of ratios, — because some call addition and subtraction what others call multiplication and division —, some practice will clear matters up, notably by means of the theory of music and the rule of company. The subject has not been discussed in *L'Arithmétique* because that book deals with numbers, and Ratio is not number. The problems are:

V. Addition of ratios: $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$ (the fifth plus the fourth pro-

duces the octave; in modern notation $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. (We shall write +, —, \times and :, though Stevin does not use any symbols).

VI. Subtraction of ratios: $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{5}{8}$ ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$).

VII, VIII. Ratio multiplied by number: $\frac{3}{2} \times 4 = \frac{81}{16}$, $\frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{8}{27}$

($(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$, $(\frac{a}{b})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}}$), the multiplier is a number.

Ratios cannot be multiplied, no more than we can multiply 3 lb. by 4 lb., but only 3 lb. by 4.

IX. Ratio divided by ratio: $\frac{8}{27}$ (ratio) : $\frac{2}{3}$ (ratio) = 3 (if $\frac{a}{b} = (\frac{c}{d})^p$, p is the quotient of $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$). Although ratios cannot be multiplied, we can divide ratios by ratios as well as by numbers, just as a line can be divided by a line and gives a ratio, and by a number and gives a line. Similarly: $\frac{10}{3}$ (ratio) : $\frac{3}{2}$ (ratio) = 2 + a fraction. Stevin writes $2 \frac{\text{raison } \frac{47}{27}}{\text{raison } \frac{3}{2}}$, which means that $\frac{10}{3} - \frac{3}{2} = \frac{20}{9}$, $\frac{20}{9} - \frac{3}{2} = \frac{40}{27} > 1$, but $\frac{40}{27} - \frac{3}{2} = \frac{80}{81} < 1$.

X, XI. Ratio divided by number: $\frac{81}{16}$ (ratio) : 4 (number) = $\frac{3}{2}$,
 $\frac{4}{6}$ (ratio) : $\frac{2}{3}$ (number) = $\frac{8}{27}$ ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \rightarrow (\frac{a}{b}) \frac{d}{c}$).

On this method of computation with ratios, see Introduction *Problemata Geometrica*, footnote 3); F. Cajori; *A History of Mathematical Notations* (Chicago, 1928) I, pp. 248-250].

[The "second part" of the *Pratique* contains some rules of commercial arithmetic: the rule of three, the rule of five, the rule of company (or fellowship), and the rule of alligation (or mixture), all standard topics in commercial arithmetic for many centuries. These rules are simple applications of the theory of proportions, e.g. when A, B, C trade together with 2, 3, 4 lb. respectively as their capital, and on these 9 lb. make a profit of 5 lb., how is it to be divided? This is an example (given by Stevin) of the rule of company. He then gives the French translation of his *Tables of Interest*, followed by a few examples of the rule of false and of double false position (see Introduction) and some geometrical problems, partly solved by 1), partly by arithmetic. One of the latter is based on a theorem found in Ch. 12 of Ptolemy's *Almagest* (Ch. 13 in modern ed.): If a line BD is drawn through a point B on side AC, and a point D on side CF of a triangle AFC, then $\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DE}{EB}$, where E is the intersection of BD with the continuation of AF. Stevin writes: the ratio of AC to AB is composed of the two ratios CF to FD and DE to EB. This part of the *Pratique* ends with the French translation of *The Tenth*. Then follows the *Treatise on Incommensurable Magnitudes*, which we reproduce.

TRAICTE DES
INCOMMENSVRABLES
GRANDEVRS.

Auec vne Appendice de l'explication
du Dixiesme liure d'Euclide.

Descript par SIMON STEVIN
de Bruges.

Treatise on Incommensurable Magnitudes

Stevin decided to write this treatise after the repeated study of the Tenth Book of Euclid's *Elements* and of several commentators. Some of these had declared it to be the most profound and incomprehensible subject in Mathematics, and others the cross of the Mathematician, but after due study Stevin had become convinced that there are not so many difficulties as is commonly believed.

A V L E C T E V R.

A PRES que nous auions veu & reueu le Dixiesme liure d'Euclide, traitant des Incommensurables Grandeurs, aussi leu & releu plusieurs commentateurs sur le mesme, desquels aucuns le iugeoient pour la plus profonde & incomprehensible matiere de la Mathematique, les autres que ce sont propositions trop obscures, & la croix des Mathematiciens, Et qu'outre cela ie me persuadois (quelle folie ne faict l'opinion commettre aux hommes?) d'entendre ceste matiere par ses causes, & qu'elle n'a en soi telles difficultez comme l'on estime vulgairement, ie me suis addonné d'en descripre ce traité.

Mais à fin que nous disions premierement, d'ou les hommes sont uenez à la cognoissance & exercice de ces Incommensurables Grandeurs, faut sçauoir, que comme beaucoup des theoremes des nombres se descripuent souuent par la cognoissance des grandeurs, lesquels theoremes nous seroient difficiles, voire aucunes fois

In order to learn how the knowledge of these incommensurable magnitudes was acquired, so Stevin writes, we must understand that many theorems about numbers are often described by means of magnitudes, theorems often difficult or impossible to find by simple numbers (as e.g. the theorem on the cube before Prob. 69 of *L'Arithmétique*). And conversely there are often propositions about magnitudes by means of numbers, which could not be discovered by magnitudes alone, e.g. that 1 is incommensurable with $\sqrt{2}$, hence the side of the square is incommensurable with the diagonal, something we could not know without the numbers. Hence, since there are numbers incommensurable

*impossibles de trouuer par les simples nombres
 (comme se peut colliger entre autres par le cube
 avec ses Corollaires deuant le 69 probleme de no-
 stre Arithmetique) ainsi se trouuent au contrai-
 re souuent propositions des grandeurs, par ie
 moien des nombres, lesquelles propositions ne se
 pourroient inuenter par les seules grandeurs.
 Par exemple nous sçauons que 1 est incommen-
 surable a $\sqrt{2}$, Mais comme 1 a $\sqrt{2}$, ainsi le
 costé du quarré à sa diagonale, parquoi le costé
 du quarré est incommensurable à sa diagonale,
 ce qui nous seroit impossible de sçauoir sans les
 nombres. Doncques comme il y a des nom-
 bres entre eux incommensurables, ainsi y a il
 des lignes entre elles incommensurables; Mais
 il y a en la nature douze certaines especes de
 nombres incommensurables, qui s'appellent bi-
 nomies, desquelles l'on extrait douze racines
 de diuerses qualitez; Il y a doncques aussi en la
 nature douze telles especes de lignes, avec sem-
 blables racines, de la construction & propriété
 desquelles, Euclide à descript son dixiesme liure.
 Laquelle raison d'ou les hommes sont venuz*

with respect to each other. there are also lines incommensurable with each other. This holds for the 12 types of incommensurable numbers called binomials and their roots; hence there are 12 such types of lines with their roots, described in Euclid X. To all who know the nature of radical numbers this is easy to understand, though it is the cause of the obscurity of this book X. Hence we know that the inventors of the propositions of this book had binomial

164
à la cognoissance & exercice des incommensurables grandeurs, nous auions proposé de declarer. Mais veu que tout cest affaire est facile, & sans difficulté, aux experts en la nature des nombres radicaux (la cognoissance desquels est necessaire, veu que sans la mesme l'on se tourmente en vain en ceste matiere) il reste encore de dire quelle est la cause de l'obscurité du dict dixiesme liure: Il faut doncques sçauoir, que les inuenteurs des propositions du mesme, se proposoient nombres binomiaux, & par les qualitez qu'ilz trouuoient en leurs noms (lesquelles qualitez sont definies depuis la 45 definition, usques à la 57 de nostre Arithmetique) ils ont descript des lignes de semblable qualité: Outre ce, par les operations des extractions des racines des nombres binomiaux (qui sont descriptes au 39 probleme de l'Arithmetique) ils ont colligé semblables extractions de racines d'icelles binomies lignes, & par les qualitez des racines de ceux la, aussi descript semblables qualitez de ceux ci. Par exemple ils se proposoient $\sqrt{6+2}$, qui est binomie cinquiesme, par la 49

numbers in mind and using their qualities described lines of similar qualities, as described in Defs. 45-47 of *L'Arithmétique*. The same holds for the extraction of the roots of these binomials. For example, they took $\sqrt{6+2}$ (type 5 of Euclid's binomials) and took a line of this length, then took $\sqrt{\sqrt{6+2}} = \sqrt{\sqrt{1\ 1/2} + \sqrt{1/2} + \sqrt{\sqrt{1\ 1/2}} - \sqrt{1/2}}$, from which they inferred that a line of this length is also the root of the binomial line of length $\sqrt{6+2}$, and also has its qualities, such as that the product of the parts $\sqrt{\sqrt{1\ 1/2} + \sqrt{1/2}}$ and $\sqrt{\sqrt{1\ 1/2}} - \sqrt{1/2}$ is an arithmetical number, to wit 1, and that the

definition de l'Arithmetique, d'ou ils voioient
 que la ligne longue de $\sqrt{6+2}$ pieds, estoit bino-
 mie ligne cinqiesme de semblable qualite: Puis
 extrahant racine dudit binomie nombre, selon
 la doctrine du 5 exemple du 39 probleme la
 trouuoient de $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\text{bino. } \sqrt{1\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}}$, d'ou ils cogneurent que la
 ligne de telle longueur estoit aussi racine de la-
 dite binomie ligne, & pour les qualitez qu'ils
 voioient en icelle racine de binomie nombre
 (qui sont que le produit de ses parties, comme
 $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}$, par $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{1\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}}$, est nombre Arithmetique, à sçauoir 1.
 Item que la somme des deux quarrez desdites
 deux parties, est racine de simple nom à son
 quarré incommensurable, à sçauoir $\sqrt{6}$, comme
 nous auons dict à la **NOTA** dudit 5 exemple
 du 39 probleme) ils concludoient semblables qua-
 litez en ceste sa respondante racine de binomie
 ligne: Or ceci leur estant ainsi notoire en toutes
 les douze especes de binomies lignes, & de
 leurs racines, ils en ont descript diuerses propo-
 sitions; Mais ils en ont detenu les nombres, qui

sum of their squares is $\sqrt{6}$, a simple root incommensurable with its square. The
 numbers were then taken away and we were left with the imperfect lines —
 imperfect since the numerical multinomials cannot be separated from line multi-
 nomials, because no line is in itself multinomial, but only with respect to some

leur auoient este guide assuree, pour comprendre parfaitement la proprieté d'icelles lignes, sans lesquels nombres, ils ne pouuoient rien effectuer, & nous ont ainsi laissé ces lignes imparfaites : le di imparfaites, parce que les multinomies nombres sont inseparables de multinomies lignes, veu que nulle ligne n'est par soi multinomie, mais en respect de quelque multinomie nombre explicant sa quantité, car vne mesme ligne se peut dire en quelque ville de 3 pieds, laquelle sera en vne autre peut estre, de $4 + \sqrt{2}$ pieds: De sorte qu'il leur estoit beaucoup plus facile d'inuenter & descripre ces lignes, qu'à autres entendre leurs propositions; De laquelle imparfection s'est ensuiui, que l'on n'a sceu operer en ces lignes, selon ce qui estoit le but de leur description, comme couper lignes proportionnellement selon la raison donnée, non seulement de laquelle les termes sont nombres Arithmetiques comme veullent les exemples de la 9 proposition du 6 liure d'Euclide, ne point satisfaisans à la proposition, mais de nombres radicaux & multinomies quelconques, & puis claire &

number multinomial. In fact, a line can be called 4 feet in one town and $4 + \sqrt{2}$ feet in another. The result of this imperfection has been that we do not know how to operate with these lines, e.g. how to cut them proportional to a given ratio, not only in ratio of arithmetical numbers (as done in Euclid VI, Prob. 9),

parfaicte extraction de toutes racines des multinomies lignes, comme des nombres. Parquoy ces Mathematiciens semblent aucunement auoir leurs raisons, cōfessans ne leur pouuoir auoir auoir aucune vtilité audict dixiesme liure, veu que l'on n'y traicte point absolument, mais le tout par maniere d'obscurs enigmes, & cela à cause (comme nous auons dict) que les inseparables nombres ne leur sont pas auinētts. Mais pourquoy les ont ils ainsi detenuz, plus que d'autres propositions Geometriques, auans mestier de nombres Arithmetiques? Certes ie ne voi autre raison, sinon qu'ils ne les tenoient pas pour nombres, ains pour quantitez irrationnelles, irregulieres, inexplicables, sourdes, absurdes, & pas dignes d'estre citees en propositions Mathematicques: Mais parce que nous auons refuté en son lieu ceste irrationnelle, irreguliere, inexplicable, sourde, & absurde opinion, & que nous esperons en temps oportun d'affirmer plus amplement par la 4^e these de noz theses Mathematicques, que ces nombres sont en perfection & excellence, vn des grans Mysteres

but also in ratio of radical numbers, their multinomials, or their radicals. But why have radical numbers been withheld (and not the arithmetical ones), so that Mathematicians have found no utility in Book X? The reason probably is that these Mathematicians did not consider these radicals as numbers, but as

de la Nature, à la parfaite comprehension duquel elle n'a voulu faire capable tous entendemens; Telle fausse persuasion n'a empesché nostre concept, ains au contraire, le vrai sentiment nous à (selon la nature du vrai, duquel ne procede que vrai) conduit à la cognoissance, de ce que nous cherchions, à sçavoir de la generale description desdictes incommensurables grandeurs, non pas seulement des douze binomies lignes & leurs racines, comme audict dixiesme liure, mais de millenomies lignes & de leurs racines de racines iusques en infini, comme apparoiſtra au traité ſuiuant. Quant à ce que quelcun nous pourroit accuser, d'auoir outrecuidément meſpriſé le Dixiesme liure d'Euclide, certes il pourroit iuger selon ses humeurs, mais pas selon la deuotion, & humble affection que nous portons tousiours à la venerable antiquité, la diligence & travail de laquelle à deſcouuert à ses successeurs la fontaine de plusieurs ſingularitez; Car, à fin de confesser le vrai, quelle chose nous euſt eſmeu, de traiter des incommensurables grandeurs, si leur

irrational, irregular, etc., quantities, not worth being quoted in mathematical propositions. Since we have refuted this opinion (see Thesis IV) and shown that these numbers are perfect and excellent, we can arrive at the comprehension of one of the great Mysteries of Nature, which she has not allowed to all people. Thus we can come to the true understanding, not only of the twelve

deuancement ne nous eust pas enhorté, de chercher ceste matiere à la source d'ou ils l'auoient? peut estre que rien. Au second, quand l'opinion de quelque personne, differe de celle d'un autre, comment pourroit il mieux manifester leur difference, que par equitables raisons des diuersitez consistentes en eux? Nous les laisserons doncques dire, paracheuans ce pendant selon nostre pouuoir, ce qui sera vtile à la commune. Mais (me dira quelcun) quelle peut estre l'vtilité de ceste matiere, veu que les choses qui sont à mesurer ou partir aux negoces des hommes, n'ont point de mestier de ceste extreme perfection, selon la raison des nombres radicaux proposez, par ce que nous trouuons en leur lieu, nombres Arithmetiques si peu differens d'iceux radicaux, qu'il ne pourra monter partie visible, voire es maieures matieres corporelles donnees: nous lui respondons, que l'on pourroit dire pareillement, pourquoi les operations de la Geometrie, comme les elemens d'Euclide, sont faistes par l'extreme perfection; Mais comme cela ne semble pas

binomial lines and their roots, but of millenomial lines and their roots of roots in infinite succession. As to those who might accuse us of presumptuously having shown contempt for this Book X, we testify to our devotion and humble affection for this source of many singular things. Moreover, if a man's opinion

170

*digne de responce, à cause des absurditez sui-
uantes de son contraire (car telles parfaites
operations, donnent parfaites intelligences, qui
sont causes des parfaits & admirables ef-
fects que produit la Mathematique) ainsi de
cestui ci.*

ARGUMENT.

CE traicté aura deux parties, l'une de 5 de-
finitions. L'autre de l'operation, conte-
nant 3 problemes.

Après le susdict suiuera vne Appendice de-
clarant sommairement le contenu du Dixief-
me liure d'Euclide.

differs from that of another, how could he show their difference better than by stating it by fair reasons? But if a man asks what can be the use of dealing with matters of such extreme perfection, we answer him that this can be asked of all operations of geometry such as found in Euclid's Elements. Such perfect operations lead to perfect understanding, which in turn leads to the perfect and admirable results of Mathematics.

171

PREMIERE PARTIE
DES INCOMMENSURABLES
GRANDEURS, QUI EST
DES DEFINITIONS.

Veu que les plus propres definitions, sont celles qui expliquent le mieux l'essence du defini, & que l'incommensuration des grandeurs, est trouuée, & seulement notoire par les nombres, nous vserons des nombres en ces definitions, comme le plus commode instrument à tel effect. Il est vrai qu'Euclide en sa 2^e proposition du 10^e liure, dict ainsi: *Si de deux grandeurs inegales données, l'on coupe toujours la moindre de la maieure, & que la reste ne mesure iamais sa grandeur precedente: Telles grandeurs sont incommensurables.* Mais combien ce theoreme est veritable, toutesfois nous ne pouuons cognoistre par telle experience, l'incommensuration de deux grandeurs proposees; Premierelement parce qu'a cause de l'erreur de noz yeux & mains (qui ne peuuent parfaitement veoir & partir) nous iugerions à la fin, que tous grandeurs tant incommensurables que commensurables, fussent commensurables. Au second, encore qu'il nous fust possible, de soustraire par action, plusieurs cent mille fois la moindre grandeur de la maieure, & le continuer plusieurs milliers d'annees, toutesfois (estant les deux nombres proposez incommensurables) l'on trauiueroit eternellement, demeurant tousiours ignorant, de ce qui à la fin en pourroit encore auenir; Ceste maniere donc de cognition n'est pas legi-

First Part. Definitions.

We shall use numbers in the definitions as the most convenient tools for our purpose. True, Euclid in Book X, Prob. 2 states "If, when the lesser of two unequal magnitudes is continually subtracted in turn from the greater, that which is left never measures the one before it, the magnitudes will be incommensurable" — but this statement gives no means of verification. The reason lies firstly in the errors of our eyes and hands, and secondly in the impossibility of continuing the experiment infinitely often, while at each step we are uncertain of what might occur at the end. Incommensurability is only recognizable for

172 LA PRATIQUE
 time, ains position de l'impossible, à fin d'ainsi aucu-
 nement declairer, ce qui consiste veritablement en la
 Nature; ceste incommensuration doncques est seule-
 ment notoire par les nombres incommensurables; ce
 que Euclide (sachant fort bien, aussi que telle inuen-
 tion d'incommensurabilité n'estoit suffisante pour ses
 propositions suiuanes (car sa dixiesme proposition
 enseigne trouuer grandeurs incommensurables par
 le moien des nombres) il l'a expliqué à la 8^e pro-
 position legitinement selon les nombres, & ainsi le fe-
 rons nous en ceste premiere partie des definitions
 comme l'enfuit.

DEFINITION I.

Grandeurs incommensurables sont celles,
 desquelles les nombres les explicans sont
 incommensurables.

DEFINITION II.

*Multinomie grandeur est celle, qu'on ex-
 plique par multinomie nombre.*

DEFINITION III.

*Binomie grandeur est celle, qu'on explique
 par binomie nombre; & Trinomie grandeur,
 qu'on explique par trinomie nombre, & ainsi
 par ordre des autres.*

DEFINITION IIII.

Binomie ligne premiere est celle, qu'on ex-

numbers, a fact well known to Euclid, who in his Prop. 8 teaches a criterion for incommensurable magnitudes by means of numbers (and in Prop. 10 how to find such magnitudes by means of numbers). We shall do it by means of the following definitions:

- I. Incommensurable magnitudes are those of which the numbers expressing them are incommensurable.
- II. Multinomial magnitude is that which is explained by multinomial number.
- III. Binomial magnitude is that which is explained by binomial number, and trinomial magnitude is that which is explained by trinomial number, and

plique par binomie nombre premier; Et binomie ligne seconde qu'on explique par binomie nombre second; Et ainsi par ordre des autres iusques à la douzième.

DEFINITION V.

Racine quarrée de ligne, est la ligne moyenne proportionnelle entre la ligne donnée nombre expliquée, & la ligne respondante à l'unité de la donnée.

Fin de la première partie.

so the others in due order.

- IV. First binomial line is that which is explained by first binomial number, and second binomial line is that which is explained by second binomial number, and so the others in due order up to the twelfth.
- V. Square root of a line is the mean proportional line between the given line, explained by number, and the line corresponding to the unity of the given line.

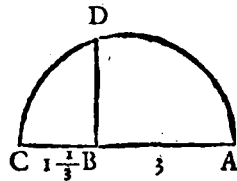
174
 SECONDE PARTIE
 DES INCOMMENSURABLES
 GRANDEURS DE
 L'OPERATION.

PROBLEME I.

E Stant donnée ligne droite, & deux nombres: Trouver vne ligne droite en telle raison à la donnée, comme le nombre au nombre.

EXEMPLE I.

Explication du donné. Soit donné la ligne AB, & les nombres donnez $\sqrt{5}$ & 3. *Explication du requis.* Il faut trouver vne ligne en telle raison à la AB, comme $\sqrt{5}$ à 3. *Construction.* On prendra les potences quarrées des nombres donnez, qui sont 9 & 5, puis on produira AB en C, ainsi que A B aie telle raison à BC, comme 9 à 5, puis se trouuera la ligne moyenne proportionnelle entre AB, & BC, par la 13 proposition du 6^e liure d'Euclide, qui soit BD.



Le di que BD est la ligne requise, aiant telle raison à la AB, comme $\sqrt{5}$ à 3. *Demonstration.* Posons que AB soit 3; Mais comme 9 à 5, ainsi (par la construction) AB à BC, doncques BC fait $1\frac{2}{3}$, mais le

Second Part. Operation.

In Prop. I a line is constructed such that it has to a given line a ratio expressed by two numbers. This is shown by the ratios $\sqrt{5} : \sqrt{3}$, $\sqrt{2} : \sqrt{3}$,

$(\sqrt{10} + \sqrt{15} \pm 2) : \sqrt{7}$, $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) : (\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{2})$, $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} : \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

$\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2} : (\sqrt{3} + \sqrt{2})$. The corollaries show how to construct multinomial lines corresponding to a given multinomial number with an arbitrarily pre-

D'ARITHMETIQUE.

312

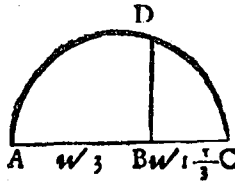
rectangle de AB 3 , en BC $1\frac{2}{3}$ fait 5 , pour le carré de BD (car BD est moyenne proportionnelle entre AB & BC par la construction) parquoy BD fait $\sqrt{5}$. Il y a doncques telle raison de BD , à AB , comme de $\sqrt{5}$ à 3 , ce qu'il falloit demonstret.

NOTA I. Si l'on vult poser pour AB quelque autre nombre que 3 , on viendra toujours à la mesme demonstration. Posons par exemple pour AB 9 , & BC fera 5 , & BD $\sqrt{45}$, lesquels 9 & $\sqrt{45}$, sont en la mesme raison que 3 à $\sqrt{5}$, car diuisant l'un & l'autre par le commun diuiseur 3 , viendra 3 & $\sqrt{5}$.

NOTA II. Si les nombres donnez fussent $\sqrt{5}$ & $\sqrt{10}$, l'operation seroit semblable à la precedente, car l'on produiroit AB en C , ainsi que AB eust telle raison à BC , comme 10 à 5 , quarrez des nombres donnez & puis comme dessus.

EXEMPLE II.

Explication du donné. Soit donné la ligne AB , & nombres donnez $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$. *Explication du requis.* Il faut trouver vne ligne en telle raison à la AB , comme $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$. *Construction.* On prendra les potences quarrées des nombres donnez, qui sont $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$, puis on produira AB en C , ainsi que AB aie telle raison à BC , comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$ (qui se fera par le moien du precedent premier exemple) puis on prendra la ligne moyenne proportionnelle entre AB & BC , par la 13 proposition du 6^e liure d'Euclide qui soit BD .



scribed measure, as $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ by taking an arbitrary line AB as $\sqrt{6}$, to construct a multinomial line corresponding to $\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$, when its term $\sqrt{5}$ is given as a line AB , to construct a line corresponding to $\sqrt{10} + \sqrt{15} + 2$, if AB is given as $\sqrt{7}$, and to construct multinomial areas and solids.

176

LA PRATIQUE

Je di que BD est la ligne requise, aiant telle raison à la AB, comme $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$. *Demonstration.* Posons que AB soit $\sqrt{3}$, mais comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, ainsi (par la construction) AB $\sqrt{3}$, à BC, doncques BC fait $\sqrt{1\frac{1}{3}}$; Mais le rectangle de AB $\sqrt{3}$, en BC $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ fait $\sqrt{2}$, egal au carré de BD, parquoy BD fait $\sqrt{2}$; Il y a doncques telle raison de BD, à AB, comme de $\sqrt{2}$, à $\sqrt{3}$; ce qu'il falloit demonstret.

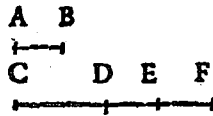
NOTA. Si les nombres donnez fussent $\sqrt{2}$, & 4, l'operation seroit semblable à la precedente, car l'on produiroit AB en C (par le moien du premier exéple) ainsi que AB, eust telle raison à BC, comme $\sqrt{2}$ à 16, qui sont les quarez des nombres donnez, & puis comme dessus.

Mais si les nombres donnez fussent $\sqrt{3}$, & $\sqrt{5}$, l'on produiroit AB en C, ainsi que AB eust telle raison à BC, comme $\sqrt{3}$ à 5, qui sont les quarez des nombres donnez, & puis comme dessus.

Et si les nombres donnez fussent $\sqrt{3}$, & $\sqrt{6}$, l'on produiroit AB en C, par le moien de ce second exemple, ainsi que AB eust telle raison à BC, comme $\sqrt{3}$, à $\sqrt{6}$, qui sont les quarez des nombres donnez & puis comme dessus. Et ainsi en racines de racines quelconques.

EXEMPLE III.

Explication du donné. Soit donné la ligne AB, & nombres donnez $\sqrt{10+}$
 $\sqrt{15+2}$, & $\sqrt{7}$. *Explication du requis.* Il faut trouver vne ligne en telle raison à la AB, comme $\sqrt{10+}$
 $\sqrt{15+2}$, à $\sqrt{7}$.

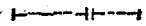


D'ARITHMETIQUE. 177

Construction. On trouvera par le premier exemple la ligne CD , en telle raison à la AB , comme $\sqrt{10}$ à $\sqrt{7}$, semblablement DE en telle raison à la AB , comme $\sqrt{15}$ à $\sqrt{7}$, puis EF en telle raison à AB , comme 2 à $\sqrt{7}$.

Je di que CF , est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste par la construction.

NOTA. Mais s'il y eust eu aux donnez quelque nom avec —, par exemple $\sqrt{10} + \sqrt{15} - 2$, & $\sqrt{7}$ on trouveroit les noms comme dessus, mais le dernier nom EF , ne se aiouteroit pas à la CE comme dessus, mais se couperoit de la mesme, comme en ceste figure; de sorte que CF seroit la ligne requise.

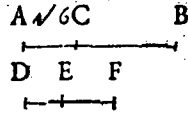


EXEMPLE IIII.

Explication du donné. Soit donné la ligne AB , & les nombres donnez $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, & $\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$.

Explication du requis. Il faut trouver vne ligne en telle raison à la AB , comme $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, à $\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$.

Construction. Posons que AB face $\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$, & coupons de la mesme quelque son nom (par le suiuant 2 probleme) qui soit AC , faisant $\sqrt{6}$. Puis se trouvera la ligne DE , (par le 1 exemple) en telle raison à la AC , comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{6}$, puis la ligne EF , en telle raison à la AC , comme $\sqrt{5}$ à $\sqrt{6}$.



Je di que DE est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste par les precedens.

LA PRATIQUES

EXEMPLE V.

Explication du donné. Soit donné la ligne A & nombres donnez $\frac{v^2+v^3}{v^5+v^7}$ & $\frac{v^2+v^4}{v^3+v^6}$. *Explication du requis.* Il faut trouver vne ligne en telle raison à la A, comme $\frac{v^2+v^3}{v^5+v^7}$ à $\frac{v^2+v^4}{v^3+v^6}$. *Construction.* On conuertira les nombres rompuz donnez, en multinomies nombres entiers de la mesme raison des donez, les multipliant par croix c'est à dire $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ par $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, fait $\sqrt{6} + \sqrt{12} + 3 + \sqrt{18}$; Puis $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ par $\sqrt{2} + \sqrt{5}$, fait $\sqrt{10} + 5 + \sqrt{14} + \sqrt{35}$.

Puis se trouuera par le precedent 4^e exemple la ligne B en telle raison à la A, comme $\sqrt{6} + \sqrt{12} + 3 + \sqrt{18}$, à $\sqrt{10} + 5 + \sqrt{14} + \sqrt{35}$. Je di que B est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste.

EXEMPLE VI.

Explication du donné. Soit donné la ligne A, & nombres donnez $\sqrt{\text{trino.}} \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$, & $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. *Explication du requis.* Il faut trouver vne ligne en telle raison à la A, comme

$\sqrt{\text{trino.}} \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$, A \longleftarrow
à $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. *Construction.* B \longleftarrow
On trouuera la ligne B, par le C \longleftarrow

4^e exemple, en telle raison à la A, comme $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$, à $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Puis on prendra la racine quarrée de ladicte B, par le suivant 3^e probleme laquelle soit C. Je di que C, est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste.

Conclusion. Estant doncques donnée ligne droicte, &


D'ARITHMETIQUE. 179

deux nombres, nous auons trouué vne ligne droicte en telle raison à la donnée, comme le nombre au nombre, ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE I.

Il est manifeste par les precedens, comment l'on pourra faire vne multinomie ligne, conforme au multinomie nombre donné, sans prescrite mesure. Par exemple, l'on veut faire quelque multinomie ligne de $\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$; le mets quelque ligne à plaisir AB, posant quelle vaille $\sqrt{6}$, puis ie trouue à la mesme, la ligne BC, par le 1 exemple, en telle raison à la AB, comme $\sqrt{5}$ à $\sqrt{6}$, puis CD, en telle raison à AB, comme $\sqrt{7}$ à $\sqrt{6}$; & la ligne ABCD, sera la


A B C D

multinomie ligne conforme au nombre donné. 

COROLLAIRE II.

Il est aussi notoire, comment l'on pourra faire vne multinomie ligne selon quelque son nom donné. Par exemple l'on veut faire vne multinomie ligne de $\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$, de laquelle le nom $\sqrt{5}$ est AB. L'on trouuera BC, en telle raison à AB, comme $\sqrt{7}$, à $\sqrt{5}$, puis

A B C D

CD, en telle raison à AB,  comme $\sqrt{2}$, à $\sqrt{5}$.

COROLLAIRE III.

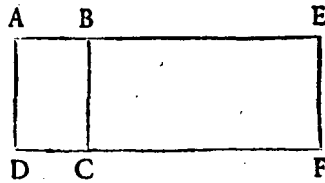
Il appert qu'on pourra faire vne binomie ligne selon quelque mesure donnée. Je prens que l'on eust requis au 3 exemple vne multinomie ligne de

$\sqrt{10} + \sqrt{15} + 2$, de telle longueur comme A B fait $\sqrt{7}$, & nous dirions que C F est la ligne requise.

COROLLAIRE IIII.

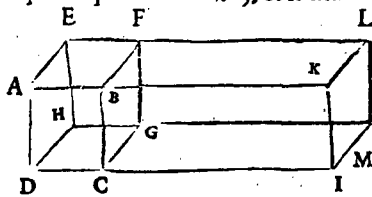
Il est manifeste, comment on pourra faire vne multinomie superficie, ou multinomie corps, conforme aux multinomies lignes des precedens trois Corollaires. Prenons en quelque exemple semblable à celui du troisieme Corollaire, & soit la mesure donnée le parallelogramme A B C D, duquel la superficie soit $\sqrt{3}$ & le multinomie nombre donné $\sqrt{8} + \sqrt{17} + 4 - \sqrt{7}$. On produira quelque costé comme A B, iusques en E, ainsi que B E, aie telle raison à la A B, comme

$\sqrt{8} + \sqrt{17} + 4 - \sqrt{7}$, à $\sqrt{3}$, & puis l'on parfera le parallelograme B E F C. Et est manifeste par la 1 proposition du 6 liure d'Euclide, que le mesme parallelogramme B E F C fera le parallelogramme requis.



Mais si la mesure donnée fust le parallelepiede A B C D E F G H, duquel la quantité fust $\sqrt{3}$, & le multinomie nombre

donné $\sqrt{8} + \sqrt{17} + 4 - \sqrt{7}$, L'on produiroit quelque costé come D C, iusques a I, ainsi que C I auroit telle raison a D C, com-

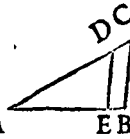


me $\sqrt{8} + \sqrt{17} + 4 - \sqrt{7}$, à $\sqrt{3}$, & puis l'on parferoit le parallelepiped B K I C F L M G, & est manifeste par la 1 proposition du 6e liure, & la 25 proposition de 11 liure d'Euclide, que ledict parallelepiped seroit le requis.

PROBLEME II.

DE la ligne droite donnée, Couper partie requise.

NOTA. Ce probleme est la 9 proposition du 6 liure d'Euclide, la ou la requise partie aux exemples de la mesme, est toujours expliquée par nombres Arithmetiques; Mais l'on peut aussi bien requirer partie à la ligne donnée incommensurable, que commensurable, nous descriprons doncques ici pour perfection d'icelle proposition, la maniere de couper parties incommensurables. *Explication du donné & requis.* Soit la ligne donnée A B, de laquelle il faut couper sa $\sqrt{\frac{1}{3}}$. *Construction.* On menera du point A, quelque ligne A C, faisant quelque angle B A C, posant que la mesme A C face $\sqrt{3}$, nominateur donné; puis l'on trouera A D (par le precedent 1 probleme) en telle raison à A C, comme $\sqrt{1}$ numerateur donné, à $\sqrt{3}$ nominateur donné, puis se menera la ligne C B, & sa parallele D E. Je di que A E est la requise $\sqrt{\frac{1}{3}}$ de la donnée A B; *Demonstration.* La ligne A D; à telle raison à la ligne A C, comme $\sqrt{1}$, à $\sqrt{3}$, par la construction; mais comme A D a A C, ainsi A E a A B, par la 12 proposition du 6 liure d'Euclide; Doncques



Prob. II is the generalization of Euclid VI Prop. 9 to the general case of incommensurable lines: From a given straight line to cut off a prescribed part.

Where Euclid's example is the third part (we write $p = \frac{1}{3}$), Stevin shows the

construction for $p = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $p = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{5}}$, $p = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}}}$; p must

always be < 1 . In this way every term of a multinomial line (area, body) can be found.

182 LA PRATIQUE

AE à telle raison a AB, comme $\sqrt{1}$ a $\sqrt{3}$, parquoy AE est $\frac{1}{3}$ de AB; ce qu'il falloit demonstret. *Conclusion.* Nous auons doncques coupé partie requise de la ligne donnée; ce qu'il falloit faire.

NOTA I. Si l'on eust voulu couper de la ligne AB ci dessus, sa $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{7+\sqrt{6}+\sqrt{5}}}$, lon diroit AC faire $\sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{5}$, & de la mesme se couperoit la ligne AD, faisant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, puis menant les paralleles CB & DE comme dessus, l'on auroit le requis.

Mais si l'on eust voulu couper de ladicte ligne AB, sa $\frac{\sqrt{\text{bino. } \sqrt{5+\sqrt{3}}}}{\sqrt{\text{trino. } \sqrt{6+\sqrt{5}+\sqrt{2}}}}$, lon diroit AC faire $\sqrt{\text{trino. } \sqrt{6+\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$ & de la mesme se couperoit la ligne AD (laquelle se trouueroit par le 6 exemple du premier probleme) faisant $\sqrt{\text{bino. } 5+\sqrt{5}}$, puis menant les paralleles CB & DE comme dessus, l'on auroit le requis.

NOTA II. Il faut que le nominateur du nombre donné, soit tousiours maieur que le numerateur, par exemple si quelcun requiroit d'auoir coupé d'une ligne sa $\frac{3}{2}$, ou $\sqrt{\frac{3}{2}}$, ce seroit petition de l'impossible, veu que toute partie est moindre que son entier.

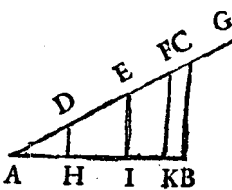
COROLLAIRE I.

Il est manifeste par ce probleme, comment l'on trouuera les noms de toute multinomie ligne donnée, par exemple de AB

faisant $\sqrt{8} + 3 + \sqrt{1}$

$15 + \sqrt{10} - \sqrt{5}$.

Car l'on ferait quelque multinomie ligne (par le premier Corollaire du premier probleme) conforme au



multinomie nombre donné, laquelle soit AC, les

D'ARITHMETIQUE.

183

noms de laquelle soient $AD \sqrt{8}$, $DE 3$, $EF \sqrt{15}$,
 $FG \sqrt{10}$, $GC \sqrt{5}$, puis on menera la ligne CB , & ses
 parallèles FK , EL , DH , de sorte que $AH \sqrt{8}$, $HI 3$,
 $IK \sqrt{15}$, $KB \sqrt{10} - \sqrt{5}$ seroient les noms requis.

COROLLAIRE II.

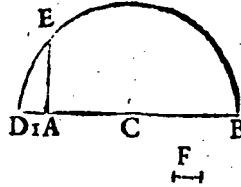
Il est aussi notoire, comment l'on pourra couper
 toute superficie & corps, conforme à la maniere de sec-
 tion de la ligne AB , du precedent premier Corollai-
 re, comme nous auons fait le semblable aux Corol-
 laires du precedent premier probleme.

PROBLEME III.

Etant donnée ligne nombre expliquée :
 Trouver sa racine quarrée.

Explication du donné. Soit donnée la ligne AB , de
 laquelle la quantité soit $\sqrt{8} + \sqrt{15} + \sqrt{255} + 4$
 $- \sqrt{80}$ *Explication du requis.* Il faut trouver sa racine
 quarrée. *Construction.* On coupera par le precedent
 2 probleme, quelque nom de la ligne donnée AB , soit
 AC , respondant à $\sqrt{8}$.

Puis on trouuera par le 1
 probleme quelque ligne
 droicte en telle raison à la
 AC , comme 1 à $\sqrt{8}$, qui
 soit la ligne AD ; Puis se
 trouuera par le 13 proble-
 me du 6^e liure d'Euclide,



la ligne moyenne proportionnelle entre DA & AB , qui
 soit AE . Je di que AE est la racine quarrée requise de
 AB . *Demonstration.* Veue que AE est la moyenne ligne

Prop. III states how to find the square root of a line explained by a given multi-
 nomial number, the square root of a square root, etc. Cube roots can only be
 constructed if two mean proportionals between two given lines can be found,
 and this is possible if one is satisfied with one of the many existing methods
 [these methods, named after Plato, Hero, etc. can all be found in Eutocius' com-

proportionnelle entre la ligne donnée AB , & la DA , respondante à l'unité de ladicte AB , s'ensuit par la precedente 5^e definition, que AE est la racine carrée de AB ; ce qu'il falloit demonstrier. *Conclusion.* Estant doncques donné ligne nombre expliquée, nous auons trouué sa racine carrée; ce qu'il falloit faire.

NOTA I. Il est manifeste par ce probleme comment on trouuera de la ligne donnée toute racine carrée de racine carrée, iusques en infini; Par exemple, pour auoir la racine de racine de la ligne AB ci dessus, on trouuera la ligne moyenne proportionnelle entre DA , & AE , qui soit F , doncques F est la racine carrée de racine carrée de AB . Et de mesme sorte se pourroit trouuer la ligne moyenne proportionnelle entre DA , & F , qui seroit racine de racine de racine, de AB , & ainsi on pourroit proceder en infini.

NOTA II. Quant aux extractions des racines cubiques, & autres operations des mesmes qui se rencontrent en nombres, nous les saurions legitimement imiter en grandeurs, si l'on sçeut trouuer geometriquement deux lignes moyennes proportionnelles entre deux lignes donnees, car racine cubique de ligne, c'est la consequente de deux lignes moyennes proportionnelles, entre la ligne donnée, nombre expliquée, & la ligne respondante à l'unité de la donnée. Vrai est que si l'on se voulust contenter (comme à fait Archimede en sa description de la sphere & cylindre, & autres) des inuentions de deux lignes moyennes proportionnelles, par quelque maniere des inuentions de Platon, Heron, Phylon Byfantin, Appollone, Diocle, Pappé, Spore, Menechme, Archite, Eratostene, ou Nicomede, l'on pourroit proceder de mesme ordre en racines

mentaries to Archimedes' *Sphere and Cylinder*, see T. L. Heath, *Manual*, Introduction, footnote 12), pp. 154-170, and footnote 24) of the Introduction to the *Problemata Geometrica*]. If a line representing $\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt[3]{4}$ and $AC = \sqrt{7}$ are given, then it is possible to construct $\sqrt[3]{4}$. The final construction deals with a binomial line of the fifth type; it is shown, given line $A = \sqrt{3}$ how to construct $\sqrt[3]{12 + 2} = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{2}}$ (*L'Arithmétique*, Prop. 39), and how to separate the two parts.

D'ARITHMETIQUE. 185

cubiques, comme nous auons fait ci dessus en racines quarrées: Et le semblable sentendra d'autres racines quelconques, comme de quinte, sexte quantité, &c. lesquelles se trouuent generally par l'instrument d'Eraſtotele, mais nous n'en donnons point des exemples, parce qu'estant cognues telles racines, la reste est notoire par ce qui en est dict ci dessus.

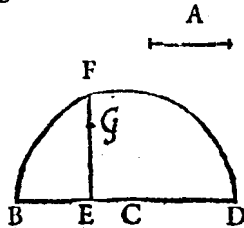
Il est aussi à considerer, qu'estant composé quelque multinomie ligne de racines cubiques ou autres avec racines quarrées, ou nombre Arih. que l'on peut souvent parfaitement operer par icelles. Par exemple estant quelque multinomie ligne A B, de $\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + 4$, de laquelle soit cogneu le nom A C de $\sqrt{7}$, l'on peut aussi trouuer les deux autres noms, car coupant de la C B, la ligne CD, en telle raison à le A C, comme $\sqrt{5}$ à $\sqrt{7}$, la reste D B sera le nom de $\sqrt{3} + 4$. Item si quelque multinomie ligne fust de $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$, & que le nom $\sqrt{2}$ fust cogneu, il est notoire qu'on pourra extraire legitiment racine quarrée de telle ligne, & ainsi de plusieurs autres semblables.

NOTA III. Nous auons promis au commencement de ce traité, d'exhiber la maniere des constructions des douze binomies lignes avec leurs racines descriptes au 10^e liure d'Euclide, ce que nous auons abondamment fait aux trois precedens problemes, non seulement de binomies, mais de noms en multitude infinie; Toutesfois nous donnerons en plus grande euidence, encore vn exemple propre de binomie ligne cinquesme, par la construction de laquelle tou-

Appendix

This is a summary of Book X of Euclid's *Elements* in Stevin's arithmetical language. It ends with a "Conclusion", in which Stevin announces the *Weeghconst*, in which the theory has been supplemented by experiments performed together with Johan Cornets De Groot (see *Principal Works of S. Stevin* I, p. 6, footnote 15). Stevin also announces the works of his friend Ludolf Van Collen, with whom he has constantly been in touch on problems of algebra, in-

tes les autres seront encore plus manifestes en ceste sorte: Il y a quelque ligne A, faisant $\sqrt{3}$, l'on requiert vne binomie ligne cinquiésme, diuisée en ses noms, de $\sqrt{12} + 2$, à sçavoir telle $\sqrt{12} + 2$, comme A fait $\sqrt{3}$; Puis l'on veut que de telle binomie ligne s'extrait racine quarrée, & que la mesme racine soit diuisée, en les parties de laquelle elle est composée. L'on trouuera par le precedent premier probleme la ligne BC, en telle raison à la ligne A, comme $\sqrt{12}$ à $\sqrt{3}$, puis la ligne CD, en telle raison à la A, comme 2 à $\sqrt{3}$, & BCD, sera la binomie ligne requise. Puis se tirera la racine par le 3^e probleme, qui soit EF. Or à fin de diuiser ceste racine EF en les parties de laquelle elle est composée, j'extraits premierement racine quarrée



du nombre $\sqrt{12} + 2$, qui est par le 39 probleme de nostre Arithmetique) $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} - \sqrt{2}}$. Il faut doncques que l'une partie de ceste ligne soit de $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} + \sqrt{2}}$, & l'autre $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} - \sqrt{2}}$, parquoi diuisée la ligne EF, par le second probleme en G, ainsi que EG, aie telle raison à GF, comme $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} + \sqrt{2}}$, à $\sqrt{\text{bino. } \sqrt{3} - \sqrt{2}}$, l'on anra le requis. Nous pourrions donner semblables exemples de toutes les autres onze binomies lignes, qui sont descriptes audict 10^e liure d'Euclide. Mais veu que le progres est en toutes le mesme, voire non pas seulement en ces 12 binomies lignes, mais en infinies autres, ce seroit inutile perdition de temps. Voila doncques ce que nous auions promis.

Fin de la seconde partie.

commensurable magnitudes, centres of gravity, and other subjects. (Van Collen's, or Van Ceulen's best known work is *Van Den Cirkel*, Delft 1596, 2nd ed. 1615, Latin ed.: *De Circulo*, Leiden 1619, See: H. Bosmans, *Annales Soc. Scient. Bruxelles* 34 (1910), pp. 88-139, and *Nieuw Nederl. Biogr. Woordenboek*).

T H E S E S
M A T H E M A T I Q U E S .

T H E S E I .

*Q*UE l'unité est nombre.

T H E S E I I .

Que nombres quelconques peuvent être nombres quarrés, cubiques, de quarte quantité, &c.

T H E S E I I I .

Que racine quelconque est nombre.

T H E S E I I I I .

Qu'il n'y à aucuns nombres absurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds.

T H E S E V .

Que nombres comme 1. 2. 3. ou 12. 10. 6. 4. & semblables ; ne font pas proportion Arithmetique.

T H E S E V I .

Que nombres comme 2. 4. 8. ou 2. 3. 4. 6.

Mathematical Theses

- I. That unity is number.
- II. That any numbers can be square, cubic, biquadratic, etc. numbers.
- III. That any root is a number.
- IV. That there exist no absurd, irrational, irregular, inexplicable or surd numbers.

203

Et semblables ne font pas proportion Geometrique, mais Arithmetique.

THESE VII.

Que nombres comme 153. 144. 136. Et semblables ne font pas proportion Harmonique.

Nous auons traitté des susdictes Theses à la precedente Arithmetique, au commencement puis page 30^e 33^e 55^e.

L'heure & lieu de leur expedition se declarera à temps oportun.

TABLE

-
- V. That numbers like 1, 2, 3 or 12, 10, 6, 4 and similar ones do not form an arithmetical proportion.
- VI. That numbers like 2, 4, 8 or 2, 3, 4, 6 and similar ones do not form a Geometrical, but an Arithmetical proportion.
- VII. That numbers like 153, 144, 136 and similar ones do not form a Harmonic proportion.
- [On Thesis IV see *L'Arithmétique*, Def. 31 and what follows, on Theses V, VI, VII see the beginning of Book I, Third Part].

APPENDICE ALGÈBRAIQUE

The *Appendice Algèbraique* of 1594, of which the only copy so far discovered was destroyed in 1914 when the University Library at Louvain was burned, was first described by P. I. Gilbert (see footn. 40), Introduction). The text itself was reproduced in French in Book V (*Des Meslanges*), pp. 7-10 of the *Mémoires Mathématiques* de Simon Stevin (1608), also in the reprint of *L'Arithmétique* by A. Girard of 1625, whence Girard introduced it into the *Oeuvres* of 1634, in both editions at the natural place, after problem 77. Stevin gave a Dutch version in Book V of the *Wisconstighe Ghedachtenissen* (*Ghemengde Stoffen*), pp. 7-10 (1608); a Latin version appeared in the *Hypomnema Mathematica*, Book V, pp. 7-9 (1608). The edition of 1594 contains, apart from a slight change in the opening words, a terminal paragraph not reprinted in later editions, in which Stevin states that his "special and familiar friend, Master Ludolf van Collen" has told him that he has also found a general method to solve equations, which method he has promised to publish (French text in Gilbert and Bosmans' articles). This method van Ceulen does not seem to have been published.

In his *Appendice Algèbraique* Stevin states that after the publication of *L'Arithmétique* he has found a general rule to solve all equations either perfectly or with any degree of approximation. This example is $x^3 = 300x + 33915024$. To find a first approximation for x , try $x = 1$, then $x = 10, 100, 1000, \dots$. The result is that for $x = 1, x = 10, x = 100$, the value of x^3 is less than that of $300x + 33915024$, but for $x = 1000$ it is larger. Hence the first result is $100 < x < 1000$. To find a second approximation for x he now substitutes $x = 100, 200, 300, 400$ and finds $300 < x < 400$. Now he tries $x = 310, 320, 330$ and finds $320 < x < 330$, then $x = 321, 322, 323, 324$. It appears that for $x = 324$ both sides of the equation are equal so that $x = 324$ is the root.

The method can also be applied if the root is not an integral number. If $x^3 = 300x + 33900000$ we find $323 < x < 324$. Then write $x = \frac{3230}{10}$ and proceed as above, first with $\frac{1}{10}$, then $\frac{1}{100}$, etc. This can go on indefinitely. If, for instance, the root were $x = \frac{5}{6}$, the method gives first $\frac{8}{10}$, then $\frac{83}{100}$, then $\frac{833}{1000}$, then $\frac{8333}{10000}$, and so we can approach the root as closely as we like. The same holds if x were a radical, incommensurable with common numbers. Note that Stevin does not use the decimal notation of his *Tentb.*

REIGLE.

Estant donnez trois termes de nombre Algebraïques quelconques : Trouver leur quatriefme proportionel, ou parfait, ou avec infini approchement.

J'ay defcrit (depuis le 66 probleme jufques au 80) l'invention du quatriefme terme proportionel, de trois Algebraïques donnez, & cela fi avant comme j'estime qu'icelle matiere eft connue: Mais j'ay puis apres trouvé une reigle generale, pour de tous trois termes Algebraïques donnez trouver le quatriefme, ou valeur de 1 ① parfaite, ou avec infini approchement, ce qu'en la pratique nous donne quafi autant comme une operation qui confifte en fa parfaite demonftration Mathematique; car comme les finus font en leurs tables imparfaits, & toutesfois en la pratique font autant comme fi c'estoyent multinomies radicaux accomplis, ainfi fe fait le semblable en cefte matiere Algebraïque.

Le donné. Soyent donnez trois termes selon le probleme tels: Le premier 1 ③, le fecond 300 ① + 33915024, le troiefme 1 ④.

Le requis. Il nous faut trouver leur quatriefme terme proportionel.

Conffruftion. Pour premierement declarer en general la methode fùivante je di qu'on trouvera de combien de caracteres doit eftre la valeur de 1 ①: Laquelle multitude de caracteres eftant connue, on trouvera puis apres le premier caractere, qui fera un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Puis fe trouvera femblablement le deuxiefme, & tous les autres tant qu'il y en a.

Or pour venir à la chofe, & premierement trouver de combien de caracteres doit eftre la valeur 1 ① donnée; je mets pour icelle 1, enquiers par le mefme ce qu'il en

fortira, disant, veu que 1 ① fait 1, les 300 ① font 300, par le 67 problème: aux mesmes adjouste 33915024, fait pour la valeur du deuxième terme 33915324: Et le premier terme, à sçavoir 1 ③, fera tant seulement 1: Ce qui estant trop peu, parce que la valeur du premier terme doit estre egal avec la valeur du second, & pourtant je mets au second 10 pour la valeur de 1 ①, & enquiers par le mesme comme dessus, & trouve la valeur du second terme de 33918024, & le premier terme de 1000: Ce qui estant autrefois trop peu, je mets au troisieme 100 pour valeur de 1 ①; le mesme estant aussi trop peu, je mets au quatrieme 1000, par lequel je trouve le premier terme trop grand: Pourtant la valeur de 1 ④ est moindre que 1000, & majeur que 100, elle est donc necessairement de trois caracteres.

Or estant cognu que la desirée valeur est de trois caracteres, il faut que le premier soit un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mais il est cy dessus enquis avec le premier caractere 1, à sçavoir avec 100, & trouvois trop peu, pourtant je l'essaye maintenant avec le premier caractere 2, mettant 200 pour valeur de 1 ①, & trouve trop peu: Le l'enquiers puis apres avec 300, & vient aussi trop peu: Puis avec 400, & trouve trop, ce qui me denote que le premier caractere doit estre 3.

Or pour trouver le second caractere, il doit necessairement estre ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Mais il est devant esprouvé avec le second caractere 0, à sçavoir avec 300, & vint trop peu, pourtant je mets maintenant le second caractere 1, à sçavoir 310, & trouve trop peu: puis apres 320, vient aussi trop peu: puis 330, & vient trop; ce qui me signifie que le second caractere faut estre 2.

Pour trouver maintenant le troisieme caractere, il

DES EQUATIONS. PR. LXXVII. 353
 doit estre necessairement ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9.
 Mais il est dessus enquis avec le troisieme caractere 0, à
 sçavoir par 320, & vint trop peu; pourtant je mets main-
 tenant le troisieme caractere 1, à sçavoir 321, & trouve
 trop peu; puis apres 322, & vient aussi trop peu; puis 323,
 vient trop peu; puis apres 324, & trouve par iceluy la va-
 leur du premier terme, egal à la valeur du second, à sça-
 voir l'un & l'autre de 34012224; ce quime demontre que
 324 est la valeur de 1 ①, & quatriesme terme proportio-
 nel requis; car comme 34012224 valeur du premier à
 34012224 valeur du second terme, ainsi 324 valeur du
 troisieme eu quatriesme 324.

COROLLAIRE.

Il appert par le susdit, que quand la valeur de 1 ① est
 nombre entier, que la mesme valeur se peut tousiours
 trouver parfaitement.

Mais si le susdit compte n'eust pas venu ainsi pte cise-
 ment, comme par exemple, que le ① ou nombre Arith-
 metique donné au lieu de 33915024, eust tant seulement
 esté 33900000, alors 323 eust esté peu, & 324 trop, ce qui
 me certifie que la valeur de 1 ① fait 323 avec un rompu
 moindre que unité. Or pour trouver le mesme rompu,
 ou d'y approcher infiniment; je mets 323 avec encore un
 0, dessus une ligne comme numerateur, & 10 dessous
 comme nominateur, en ceste sorte $\frac{3230}{10}$: Ce rompu fait
 323, qui estant trop peu, il faut que 0 du numerateur face
 0 avec quelque reste, ou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Le mesme
 caractere estant trouvé comme dessus, & qu'il y a esco-
 re quelque superflu, on adjousterà au numerateur & no-
 minateur autrefois 0, enquirant comme dessus, ce que
 doit venir au lieu d'iceluy 0 du numerateur: Et procé-
 dant ainsi infiniment, l'on approche infiniment plus
 près au requis.

354 LE II. LIVRE D'ARITH.

Mais si la desirée valeur de $1 \textcircled{1}$ fut rompu moindre que unite, l'on enquestera premierement avec $\frac{1}{10}$, qui estant trop grand avec $\frac{1}{100}$; puis après $\frac{1}{1000}$ &c. Or posé le cas que $\frac{1}{100}$ fut trop grand, mais $\frac{1}{1000}$ trop petit, cecy me certifie que dessus le nominateur 10000, doit venir un nombre comme numerateur majeur que 1, & moindre que 10, le mesme sera necessairement un caractere, comme 1 avec quelque superflu, ou 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Iceluy caractere estant trouvé au plus pres & moindre, & qu'il y a encore quelque residu, l'on agrandira numerateur & nominateur chascun d'un 0, enquirant puis apres comme dessus, ce que doit estre icelux dernier 0 du numerateur, & ainsi des autres.

Avisé encore qu'estant la valeur de $1 \textcircled{1}$ nombre rompu, il peut avenir qu'on pourra approcher infiniment au requis, sans toutesfois par ceste maniere pouvoir parvenir à la parfaite solution: Comme par exemple, posons que l'incognüe valeur de $1 \textcircled{1}$ fust $\frac{1}{2}$, & que l'on met le nominateur selon la susdicte reigle, on trouve que dessus le mesme 10 faut venir 8, en ceste sorte $\frac{8}{10}$: Mais parce qu'il est trop peu, je mets pres de chascun nombre 0, ainsi $\frac{80}{100}$, & cherchant puis apres quel caractere doit venir au lieu de 0 du numerateur, je trouve au plus pres & moindre 3, ainsi $\frac{83}{100}$: Et faisant le semblable au troisieme, je trouve $\frac{833}{1000}$: Et au quatrieme $\frac{8333}{10000}$. Et procedant ainsi avec les autres, l'on voit qu'on peut infinimēt approcher, sans toutesfois parvenir aux $\frac{1}{2}$ accomplies, à cause qu'il n'y a nul nombre entier en telle raison à 10, 100, ou 1000, (& semblables desquels le premier caractere est 1, avec les suivans 0) comme s'à 6.

Nous pourrions encore donner exemples la ou la valeur de $1 \textcircled{1}$ est de nombres radicaux à nombre Arithmetique incommensurables: mais veu que l'infini ap-

DES EQUATIONS. PR. LXXVIII. 355
prochement est assez notoire par les precedens, il ne
semble point mestier d'en faire propres declarations.

Or estant tous les susdicts exemples notoires par leur
operation, nous n'en faisons point des particulieres de-
monstrations. *Conclusion.* Estant doncques donnez trois
termes de nombres Algebriques quelconques, nous a-
vons trouve leur quatrieme proportionel, ou parfaite-
ment, ou par infini approchement, ce qu'il falloit faire.

Vertical line on the left side of the page.

Small, dark, irregular mark or smudge in the upper right quadrant.

Vertical line on the right side of the page.

SELECTIONS FROM
WISCONSTIGHE GHEDACHTENISSEN
MATHEMATICAL MEMOIRS

NO. 10. 10. 10. 10. 10.

10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10.

10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10.

DE DRIEHOUCKHANDEL

TRIGONOMETRY

Vertical line on the left side of the page.

Vertical line on the right side of the page.

INTRODUCTION AND SUMMARY

§ 1.

Stevin's trigonometry is the first part of his cosmography and bears the title *Driebouckbandel*, in French *Traité des triangles*, in Latin *De triangulorum doctrinâ*. The first to use the term trigonometry seems to have been Pitiscus, whose book *Trigonometria* made its first appearance in 1595, but in 1608, when Stevin's book appeared, the term had not yet been generally accepted (1). The book consists of four parts, the first dealing with the construction of goniometrical tables, the second with plane triangles, and the remaining two parts with spherical trigonometry. When Stevin wrote his book, in the course of his discussions with Prince Maurice, the subject had already been treated in several excellent textbooks, to which Stevin added hardly anything but his personal clarity of exposition. *De Driebouckbandel*, like *De Meetdaet* and *L' Arithmétique*, is a substantial textbook, but it is the least original of the three. It is mainly of interest to those who wish to see what trigonometry was like in the sixteenth century, long before Euler, in 1748, introduced the present notation (2). It also has some distinction as the first complete text on trigonometry written in Dutch; and one of the first — if not the first — written in any vernacular (3). We shall only reproduce a short section.

Trigonometry, as part of astronomy, dates back to Antiquity, where it was taught by Ptolemy in his *Almagest*. It was cultivated during the Middle Ages, among others by mathematicians writing in Arabic, in whose hands it gradually developed into an independent science (4). The first book in Latin is by the

(1) B. Pitiscus, *Trigonometria, sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*, 57 pp, published as an appendix to A. Scultetus, *Sphaericorum libri tres* (Heidelberg, 1595). There were revised editions, published as separate books, in 1599 and in 1608. See N. L. W. A. Gravelaar, *Pitiscus' Trigonometria*, *Nieuw Archief v. Wisk.* (2) 3 (1898), pp. 253–278; R. C. Archibald, *Bartholomäus Pitiscus, Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 3 (1949), pp. 390–397. There is also information on Pitiscus in A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I* (Leipzig, Teubner, 1900), VII + 260 pp. The term *Trigonometria* appears in Holland in the 1629 ed. of Girard's tables, (see (18)).

(2) L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne, 1748), 2 vols., reprinted in *Opera omnia*, Ser. I, Vols 8–9 (Leipzig, Berlin 1922, 1945).

(3) It was not the first trigonometry written by a native of the Low Countries, since it was preceded by Ph. Van Lansbergen's *Triangulorum geometriae libri quattuor*, of which the first edition appeared in 1591. There is also a good deal of trigonometry in L. Van Ceulen's *Van den Circkel*, of which the first edition appeared in 1596. Van Ceulen introduces trigonometry for his purpose of computing π . There is also some trigonometry in the Flemish version of Apianus' *Cosmographia: Cosmographie, oft Beschrijvinghe der ghebeelder Werelt van Petrus Apianus . . . ghecorrigeert van Gemma Friso* (3d ed., Antwerp, 1561; the preface is dated 1545).

(4) For details on these points, as well as on all other questions concerning the general history of trigonometry, see Von Braunmühl, *l.c.*¹, as well as J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik V* (Berlin-Leipzig, 2e Aufl., 1923), 185 pp. See also S. Günther, *Geschichte der Mathematik I* (Leipzig, 1908, 427 pp.), pp. 393–404, and M. Cantor, *Vorlesungen II*.

Nuremberg astronomer-craftsman-publisher Regiomontanus, who wrote it around 1464. This book, entitled *De triangulis omnimodis*, also treats trigonometry as an independent science; it is already of considerable maturity, and both in manuscript and after its publication in 1533 remained for a long time the standard text to which all later authors referred (5). Sines, in Regiomontanus' work as well as in all other works up to the middle of the 18th century, are conceived as line segments, and their numerical value therefore depends on the length of the radius R of the circle to which they are referred. Regiomontanus also published tables of sines, first with a sexagesimal base ($R = 6 \cdot 10^4$, then $R = 6 \cdot 10^7$), later with a decimal base ($R = 10^7$) (6). These tables only appeared after his death. The decimal table, with values for the sines of all angles from 0° to 90° , ascending from minute to minute, served as an example to several later mathematicians, including Stevin. Regiomontanus also composed a table of tangents for $R = 10^5$ for angles ascending from degree to degree (7).

The principal improvement on Regiomontanus during the sixteenth century consisted in table computation. This culminated in the monumental works of Rheticus (also known as the friend and admirer of Copernicus), which consist of the *Canon doctrinae triangulorum* of 1551 (8) and the posthumous *Opus Palatinum* of 1596 (9). The Canon contains tables of all six goniometric functions in seven decimals (that is, for $R = 10^7$) for angles ascending from $10''$ to $10''$. The *Opus Palatinum* extends this work to 10 decimals, and for sines (and cosines) even to 15 decimals. Rheticus also published Copernicus' investigations on trigonometry (1542), which were later included in the latter's book on the revolutions of the heavenly bodies (1543) (10).

The theory itself, both plane and spherical trigonometry, was explained and gradually improved in a series of textbooks, of which we only mention those by Bressieu (1581), Fink (1583), Clavius (1586), Van Lansbergen (1591), and

(5) *Doctissimi viri . . . Io. de Regio Monte de triangulis omnimodis libri quinque* (Nuremberg, Petreus 1533).

(6) The table with $R = 6 \cdot 10^4$ appears in *Ioanni de Montereio . . . tabulae directionum projectionumque* (Augsburg, 1490; also Tübingen, 1559) as an appendix entitled (at any rate in the 1559 ed.): *Sequitur nunc eiusdem Ioannis Regiomontani tabula sinuum, per singula minuta extensa*.

The tables with $R = 6 \cdot 10^7$ and $R = 10^7$ appear, according to Von Braunmühl *l.c.*(1), p. 120, in a book written by Regiomontanus' teacher Peurbach: *Quadratum geometricum praeclarissimi mathematici Georgii Burbachii* (Nuremberg, 1516; dedication of 1515). The copy of this book in the Harvard Library does not contain these tables. According to Tropfke, *l.c.*(4), p. 178 we can find both tables in the *Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis* (Nuremberg, 1541).

(7) This so-called "tabula foecunda" appears in the *Tabulae directionum* of 1490.

(8) *Canon doctrinae triangulorum, nunc primum a Georgio Joachimo Rhaetico in lucem editus* (Leipzig, 1551). Von Braunmühl states that it belongs "zu den kaum mehr auffindbaren Seltenheiten", *l.c.*(1), p. 145.

(9) *Opus palatinum de triangulis a Georgio Joachimo Rhaetico coeptum: L. Valentinus Otho Principis Palatini Friderici IV electoris mathematicus consummavit* (Neustadt, 1596).

(10) Chapters 13 and 14 of Book I of Copernicus' classic *De Revolutionibus orbium coelestium*, (Nuremberg, 1543) were published in 1542 by Rheticus as *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus . . . scriptus a . . . D. Nicolao Copernico Toronensi*. See v. Braunmühl, *l.c.*(1), pp. 140-143.

Pitiscus (1595) (11). Bressieu and Van Lansbergen are of interest because Stevin quotes them explicitly in his own trigonometry, and Fink has the distinction of having introduced the names tangent and secant in their present meaning (the term sine already appears in Regiomontanus), though Fink considered them line segments, a custom followed until the middle of the eighteenth century, as in the case of the sines. Clavius, who was the most influential mathematical textbook writer of his period, immediately adopted Fink's terms, and it is not unlikely that through the study of Clavius' book Stevin became familiar with these expressions. The most original writer on trigonometry in the sixteenth century was Viète, who in a series of books, written between 1579 and his death in 1603, enriched goniometry with a wealth of new methods, especially in the domain of the equipartition of angles (12). We may state that it was Viète who established goniometry as a science by itself, a distinction all the more brilliant when we see that even Stevin, in 1608, treated goniometry simply as a set of rules for the computation of tables.

By Stevin's time goniometry, with its application to plane and spherical trigonometry, was in substance not so very much different from the present elementary goniometry of our secondary school instruction. However, though the content has not changed much, the form has changed enormously. Since our formal apparatus did not exist, all rules had to be expressed in words as so many additions to Euclid's *Elements*. Moreover, the goniometric expressions were not conceived as ratios of lines, that is, as numbers, but as line segments, constructed in relation to a circle of given radius; in Stevin's case, $R = 10^7$ units. Since lines, areas, and volumes could not be compared with each other, all rules had to satisfy the condition of homogeneity. For instance, the law of cosines for spherical triangles, which we write in the form $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, was expressed by Stevin in terms equivalent to the formula

$$\sin a \sin b : (\sin 90^\circ)^2 = [\sin \text{vers } c - \sin \text{vers } (a - b)] : \sin \text{vers } C.$$

Here $\sin 90^\circ$ (the *sinus totus*) is equal to R , the radius. As to the *sinus versus*, which in the modern approach can be written as $\sin \text{vers } a = 1 - \cos a$, Stevin defined it as the arrow ("sagitta") belonging to the chord of which $\sin a$ is one half. Stevin did not introduce special names for the cosine, cotangent or cosecant; when he needed these quantities, he expressed them as sines, tangents or secants of the complementary angle. Like his contemporaries, he only considered the goniometric expressions for angles between 0° and 90° ; when obtuse angles appeared, he turned immediately to the corresponding acute angles.

(11) M. Bressieu (M. Bressius), *Metrices Astronomicae* (1581); Th. Fink (Finchius), *Geometria rotundi* (Basel, 1583); C. Clavius, *Theodosii Tripolitanae Sphaericorum libri tres* (Rome, 1586). This book has an appendix "Sequitur tabula sinuum rectorum per singula quadrantis minuta extensa, et a Ioan. Regiomontano quondam supportata, nunc autem per me examinata et plerisque in locis castigata, atque correctata"; Ph. Van Lansberge (Lansbergius), see (3); B. Pitiscus, see (1).

(12) See *Francisci Vietae Opera mathematica, in unum volumen congesta... opera atque studio Francisci a Schooten* (Leiden, 1646, VI × 554 pp.). Von Braunmühl, *l.c.* (3), Ch. VIII gives a detailed account of Viète's achievements.

The first part of the *Trigonometry* contains tables for the sine, tangent, and secant for angles ascending from 1' to 1° and computed for $R = 10^7$. It strikes us that Stevin, as late as 1608, did not use his own decimal-fraction notation, taking $R = 1$. The reason may have been that Stevin's printer preferred to take the tables straight from some other book. It may have been that Stevin himself decided to go easy on his own invention. However, it should not be forgotten that in a strict sense Stevin's *Thiende* was never conceived as a system for counting with decimal fractions, but as a system for avoiding fractions altogether. If we take $R = 10^7$ as one of Stevin's "Thiendetalen", perhaps as his "Beghin" (10), then his tables may be fitted into the scheme of *De Thiende*.

The tables contain nothing new and go back to Regiomontanus (6). They can be found, for instance, as an addition to Clavius' edition of the *Sphaerica* of Theodosius (1586) (13). This is not the only place where Stevin's text either resembles or directly follows that of Clavius' book — though Stevin never follows it slavishly and maintains his own independent position throughout. The tables are accompanied by a long introduction, in which their construction is explained; it follows closely the procedure already adopted by Regiomontanus. The first to be computed are the sines of all angles which are multiples of

45'; this can be achieved by repeated application of such formulas as $\sin \frac{x}{2} =$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ to } \sin 90^\circ, \sin 36^\circ, \sin 30^\circ, \text{ and } \sin 12^\circ = \sin \frac{54^\circ - 30^\circ}{2}. \text{ After}$$

this table has been completed, the sines of all other angles can be found by an interpolation. Stevin shows how it is done in the case of $\sin 1^\circ$, which is found by interpolating between $\frac{4}{3} \sin 45'$ and $\frac{1}{3} \sin 1^\circ 30' + \frac{2}{3} \sin 45'$. The construction of the tangent and secant tables is not explained, but it is demonstrated how they can be used.

The interpolation formula is based on the inequality $\sin 3\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha > \sin 4\alpha > \sin 3\alpha + \frac{1}{3}(\sin 6\alpha - \sin 3\alpha)$, valid for $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, and applied to the case $\alpha = 15'$. We can derive it immediately from the fact that $f(x) = \frac{\sin x - \sin A}{x - A}$ ($0^\circ < A < 90^\circ$) is monotone decreasing for $0^\circ < x < 90^\circ$, and then take $A = 3\alpha$, and x successively $0, 4\alpha, 6\alpha$. Sixteenth-century mathematicians derived the formula geometrically from a theorem by Theon of Alexandria, which states that when α increases uniformly from 0° to 90° , the increase of $\sin \alpha$ decreases (as follows from our formula $d \sin \alpha = \cos \alpha dx$) (14). We shall return to it in our text.

In the second part of Stevin's book, which contains the trigonometry of plane triangles, the central theorem is the law of sines. The law of cosines is missing,

(13) See Clavius *l.c.* (11).

(14) See Von Braunnühl, *l.c.* (1), pp. 28, 121.

though Viète⁽¹⁵⁾ had formulated it in 1593 in the homogeneous form (sides a, b, c ; angles A, B, C):

$$2ab : (a^2 + b^2 - c^2) = (\sin 90^\circ) : \sin (90^\circ - C^\circ).$$

Like the older writers, including Regiomontanus, Stevin prefers to apply the law of sines also to the case where a, b, C are given: this can be done by drawing an altitude. The law of tangents is also wanting, though it appears not only in Viète, but also in Clavius. Using the law of sines alone, Stevin shows how the angles or sides can be computed when three of them are given; he covers all cases, including the case where a, b, A are given, when two solutions are possible. Like Clavius, he concludes with an enumeration of all cases at the end. He adds a discussion of polygons, especially quadrangles, where he distinguishes between the cases a) that all the angles are $<180^\circ$, b) that one angle is $>180^\circ$, and c) that two sides intersect. Here he shows how all 8 angles and sides can be found, if 5 independent ones are given.

The third part of the book contains the trigonometry of spherical triangles. This is preceded by an exposition of spherics, or the geometry of the sphere, its great circles and triangles, such as was known from Theodosius or Menelaus. Then follows the set of rules for the computation of rectangular spherical triangles, which is complete in the sense of our elementary spherical trigonometry: all six fundamental theorems are present. In the case of oblique triangles (Stevin, like all mathematicians before Möbius, concentrates on angles between 0° and 180°), Stevin solves his problems with the aid of the law of sines and the two laws of cosines (each proved separately). Here again we find a convenient table of all (thirteen) cases at the end, with special discrimination between acute, right, and obtuse angles, followed by a discussion of spherical quadrangles.

The fourth part deals with the application of spherical trigonometry to problems in astronomy. In an appendix Stevin presents some additional observations on his own terminology and the work of others; among them we find a remark that modifications in the theory of spherical triangles must be made when the angles or sides are $>180^\circ$.

§ 3

There exists a German translation of a part of Stevin's trigonometry (by an anonymous writer), published in 1628 by Daniel Schwenter, a professor at the University of Altorf near Nuremberg⁽¹⁶⁾. Schwenter must have had a mutilated copy of Stevin's book, since he claimed that Stevin had not written anything about spherical triangles. He therefore published only the first two books together with the tables, adding four "axiomata" on spherical trigonometry from Pitiscus' *Trigonometria*.

Around the same time Ezechiel De Decker, the Gouda surveyor and admirer of Stevin, used Stevin's Dutch nomenclature for trigonometric lines when he

⁽¹⁵⁾F. Vieta, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber octavus* (1593), *Opera* No XII, see ⁽¹²⁾.

⁽¹⁶⁾*Simonis Stevini Kurtzer doch gründlicher Bericht, von Calculation der Tabularum Sinuum, Tangentium und Secantium. Sampt derselben gebrauch... Sampt einer Vorrede M. Danielis Schwenters* (Nuremberg, 1628).

published his complete tables of Briggsian logarithms (17). Also around this time, Girard published at the Hague tables of sines, tangents, and secants for $R = 10^7$, as Stevin had done, and with a text in French (18). He was not the only one; in the same year (1627) appeared a plane trigonometry written by Professor Van Schooten with similar tables, but a Dutch text (19). Girard's tables were reprinted in 1629, Van Schooten's in 1632, corrected and enriched with a spherical trigonometry written by Stampioen De Jonge (20). In 1628 Van Lansbergen's *Cyclometria nova* was reprinted (21), in 1631 his *Triangulorum geometria*. When therefore, in 1634, Girard published Stevin's *Oeuvres*, there was no dearth of information on goniometry and trigonometry in the Seven Provinces. This may have been the reason why Girard omitted the tables from his edition of the Trigonometry.

In 1900 Von Braunmühl, in his history of trigonometry, paid considerable attention to Stevin's work in this field. He claimed that Stevin's treatment of spherical triangles was superior to that of his predecessors (22). We reproduce in our edition only a short section of Stevin's trigonometry, for the sole purpose of showing how a typical sixteenth-century trigonometry presented this subject.

(17) (E. de Decker) *Nieuwe Telkonst, inhoudende de logarithmi voor de ghetallen beginnende van 1 tot 10.000, . . . Mitsgaders De Tafels van Hoeckmaten ende Raecklynen door het ghebruick van Logarithmi, de Wortel zynde van 10.000.000 deelen . . .* Gouda, Rammaseyn, 1626.

(18) *Tables des sinus, tangentes et sécantes selon le rayon de 10.000.000 parties . . . par Albert Girard*. La Haye, Elsevier, 1626, 1627. The edition of 1629 continues on the title page: *Avec la Trigonométrie tant plane que sphérique d'une méthode plus succincte, et d'une manière plus facile que jamais auparavant*. The first edition has instead of this: *Avec un traicté succinct tant des triangles plans que sphériques*. The word "traicté" has been changed to "trigonométrie".

(19) *Tabulae sinuum, tangentium, secantium ad Radium 10.000.000. Met 't ghebruyck der selve in Rechtlinischen Triangula*. Door Fr. van Schooten, Professor Matheseos tot Leyden. Amsterdam, W. J. Blaeuw, 1627.

(20) This second edition has the following words added to the title: *Ende uit cort by gevoecht, d'ontbindinge der sphaerischer Triangulen . . . door I. I. Stampioen d'Ionge*. Rotterdam, Wed. M. Bastiaensz 1632. See H. Bosmans, *Revue Quest. Scient* (4) II (1927), pp. 113-141.

(21) *Philippi Lansbergii Cyclometriae novae libri duo*. Middelburg, Z. Romanus, 1628 (first ed. 1616). This book is dedicated to Prince Maurice. The book on triangles (*l.c.* (3)) was reprinted by W. Blaeu, Amsterdam, 1631.

(22) Von Braunmühl, *l.c.* (1) pp. 226-228, claims that it is Stevin's merit to have stated for the first time that the six formulas which we use at present for the computation of rectangular spherical triangles are sufficient for all cases: „Stevin kannte nicht nur Vieta's trigonometrische Arbeiten, sondern erkannte auch ihren bedeutenden Wert; so nimmt er dessen Formeln zur Berechnung des rechtwinkligen sphaerischen Dreiecks direkt herüber, reduziert sie aber auf jene 6, deren wir uns noch heute bedienen. Sein Verdienst ist es, zum erstenmale ausgesprochen zu haben, daß diese 6 Formeln zur Lösung aller möglichen Dreiecksfälle vollständig ausreichen.“ (Italics by v. Braunmühl, who quotes *Hypomnemata* p. 61, 208-217).

T W E E D E
B O V C K D E S
* W E E R E L T -
S C H R I F T S
V A N D E
P L A T T E D R I E -
H O V C K E N .

*Cofmogro-
phia.*

N V D E VOORSTELLEN.

I VERTOOC. I VOORSTEL.

GHELYCK des platten driehoucx rechterfijde totte
slinkerfijde, alsoo slinckerhoucx* houckmaet, tot rech- *Sinn.*
terhoucx houckmaet.

WANT d'een der verleken houckmaten, is of van een scherphouck, recht-
houck, of plomphouck, soo sullen wyder drie verscheyden voorbeelden af-
stellen.

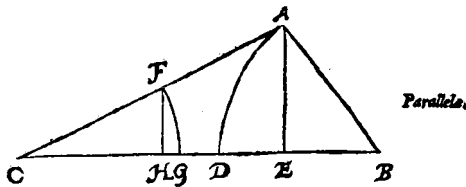
1 Voorbeelt alwaer beyde de verleken houckmaten van scherphoucken sijn.

TGHEGHEVEN. Laet A B C een platte driehouck wesen, diens verleken *Centrum*
houcken B, C, beyde s'cherp sijn, ende opt punt B als * middelpunt, sy beschre- *Symdiante-*
ven met B A als * halfmiddellijn, den booch A D, diens houckmaet sy A E, *trouw.*
rechthouckich op C B: S'ghelijcx opt punt C als middelpunt, sy beschreven met
C F even an A B als halfmiddellijn, den booch F G, diens houckmaet F H oock
rechthouckich op C B is.

TBEGHEERDE. Wy moeten bewijfen dat gelijk de rechterfijde A B, totte
slinker sijde A C, alsoo de slin-
ckerhoucx houckmaet F H, totte
rechterhoucx houckmaet A E.

TBEWYS Want inden drie-
houck A C E twee * ewijde-
ghe sijn, als F H met A E, soo
heeft A C sulcke reden tot A E,
ghelijck F C tot F H. Maer A B
is even an F C door t'ghegheven, Daerom

Ghelijck A C tot A E, alsoo A B tot F H:
Ende deur * overanderde reden,
Ghelijck A B tot A C, alsoo F H tot A E.



2 Voorbeelt alwaer d'een der verleken houckma- ten van een rechthouck is.

TGHEGHEVEN. Laet A B C een platte driehouck sijn, diens houck B recht
is, ende opt punt B als middelpunt, sy beschreven met A B als halfmiddellijn, den
booch A D, diens houckmaet sijn moet A B: S'ghelijcx opt punt C als middel-
punt, sy beschreven met C E even an A B als halfmiddellijn, den booch E F, diens
houckmaet E G.

ON PLANE TRIANGLES

1st THEOREM.

1st PROPOSITION.

As the right side of a plane triangle is to the left side, so is the sine of the left angle to the sine of the right angle.

Because one of the compared sines relates to either an acute or a right or an obtuse angle, we shall give three different examples thereof.

1st Example, where both the compared sines relate to acute angles.

SUPPOSITION. Let ABC be a plane triangle, whose compared angles B and C are both acute, and about the point B as centre let there be described, with BA as semi-diameter, the arc AD , whose sine shall be AE , at right angles to CB . In the same way, about the point C as centre let there be described, with CF equal to AB as semi-diameter, the arc FG , whose sine FH is also at right angles to CB .

WHAT IS REQUIRED. We have to prove that as the right side AB is to the left side AC , so is the sine FH of the left angle to the sine AE of the right angle.

PROOF. Because in the triangle ACE there are two parallel lines, *viz.* FH and AE , AC is to AE as FC to FH . But AB is equal to FC by the supposition. Therefore,

As AC is to AE , so is AB to FH .

And by the alternate ratio:

As AB is to AC , so is FH to AE .

2nd Example, where one of the compared sines relates to a right angle.

SUPPOSITION. Let ABC be a plane triangle, whose angle B is right, and about the point B as centre let there be described, with AB as semi-diameter, the arc AD , whose sine must be AB . In the same way, about the point C as centre let there be described, with CE equal to AB as semi-diameter, the arc EF , whose sine is EG .

T B E G H E E R D E. Wy moeten bewijfen dat ghelijck de rechterfijde AB , totte flinckerfijde AC , alfoo de flinckerhoucx houckmaet EG tot de rechterhoucx houckmaet AB , alwaer te bedencken staet, dat een selve AB , hiet voor fijde ende houckmaet verftreckt.

T B E W Y S. Want inden driehouck ABC twee ewewijdeghe fijn, als EG met AB , foo seg ick

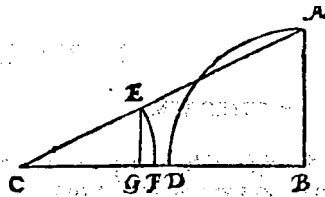
Ghelijck AC tot AB , alfoo EC tot EG .

Maer AB is even an EC door t'ghegheven, daerom

Ghelijck AC tot AB , alfoo AB tot EG .

Ende door verkerde reden:

Ghelijck AB tot AC , alfoo EG tot AB .



Parallela.

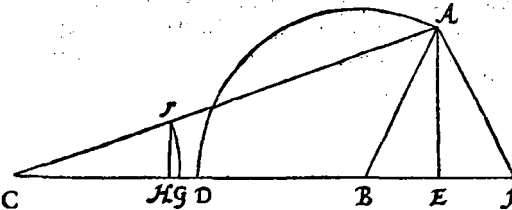
Inversam rationem.

3 Voorbeelt alwaer d' een der verleken houckmaten van een plomphouck is.

T G H E G H E V E N. Laet ABC een platte driehouck wesen, diens houcken der verleken houckmaten fijn C , ende ABC , waer af den houck ABC plomp is, ende opt punt B als middelpunt, sy beschreven met AB als halfmiddellijn, den booch AD , diens houckmaet si AE , rechthouckich op de voorghetrocken CB : S'ghelijcx opt punt C als middelpunt, sy beschreven met CF even an AB als halfmiddellijn, den booch FG , diens houckmaet FH oock rechthouckich op CB comit. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten bewijfen dat ghelijck de rechterfijde AB , totte flinckerfijde AC , alfoo de flinckerhoucx houckmaet FH , totte rechterhoucx houckmaet AE . **T B E R E Y T S E L.** Laet gheteyckent worden AI op de voorghetrocken CB , alfoo dat den houck AIB , even sy an den houck ABI .

*Centrum Se-
midiamen-
strum.*

T B E W Y S. Anghesien den houck AIB , even is an den houck ABI , foo moet de lijn AI , even fijn an AB : Maer AB is even an CF door t'ghegheven, daerom AI is



even an CF , ende AE is oock houckmaet des houcx I : Daerom segh ick deur het 1 voorbeelt deses voorstels, dat

Ghelijck de rechterfijde AI , des driehoucx ACI ,

Totte flinckerfijde AC ,

Alfoo de flinckerhoucx houckmaet FH ,

Totte rechterhoucx houckmaet AE .

Maer AB is even an AI , ende AE is oock houckmaet des houcx ABC van de driehouck ABC deur t'ghegheven, daerom

Ghelijck de rechterfijde AB ,

Totte flinckerfijde AC ,

Alfoo de flinckerhoucx houckmaet FH ,

Totte rechterhoucx houckmaet AE .

T B E S L V Y T. Ghelijck dan des platten driehoucx rechterfijde totte flinckerfijde, alfoo flinckerhoucx houckmaet tot rechterhoucx houckmaet, t'welck wy bewijfen moesten.

WHAT IS REQUIRED. We have to prove that as the right side AB is to the left side AC , so is the sine EG of the left angle to the sine AB of the right angle, it having to be borne in mind that the same AB here serves as side and as sine.

PROOF. Because in the triangle ABC there are two parallel lines, *viz.* EG and AB , I say:

As AC is to AB , so is EC to EG .

But AB is equal to EC by the supposition; therefore:

As AC is to AB , so is AB to EG .

And by the inverse ratio:

As AB is to AC , so is EG to AB .

3rd Example, where one of the compared sines relates to an obtuse angle.

SUPPOSITION. Let ABC be a plane triangle, whose angles of the compared sines are C and ABC , of which the angle ABC is obtuse, and about the point B as centre let there be described, with AB as semi-diameter, the arc AD , whose sine shall be AE , at right angles to CB produced. In the same way, about the point C as centre let there be described, with CF equal to AB as semi-diameter, the arc FG , whose sine FH also comes at right angles to CB . **WHAT IS REQUIRED.** We have to prove that as the right side AB is to the left side AC , so is the sine FH of the left angle to the sine AE of the right angle. **PREPARATION.** Draw AI on CB produced, in such a way that the angle AIB be equal to the angle ABI .

PROOF. Since the angle AIB is equal to the angle ABI , the line AI has to be equal to AB . But AB is equal to CF by the supposition. Therefore AI is equal to CF , and AE is also the sine of the angle I . Therefore I say, by the 1st example of this proposition, that:

As the right side AI of the triangle ACI is to the left side AC ,

So is the sine FH of the left angle to the sine AE of the right angle.

But AB is equal to AI , and AE is also the sine of the angle ABC of the triangle ABC by the supposition. Therefore:

As the right side AB is to the left side AC ,

So is the sine FH of the left angle to the sine AE of the right angle.

CONCLUSION. Hence, as the right side of a plane triangle is to the left side, so is the sine of the left angle to the sine of the right angle; which we had to prove.

Vertical line on the left side of the page.

DE MEETDAET

THE PRACTICE OF MEASURING

INTRODUCTION

The *Meetaet* is primarily a textbook for the instruction of those who, like Prince Maurice, wanted to learn some of the more practical aspects of geometry. The course was not one for beginners, knowledge of Euclid's *Elements* being a prerequisite, while the reader was also supposed to know something about the measurement of angles and Stevin's own calculus of decimal fractions. There is little or no original material in the book, though the selection of the subject matter has an unmistakable Stevin touch. Parts of the contents were taken from the *Problemata Geometrica*, the book which Stevin published in 1583, but to which he, curiously enough, never refers. Other parts show the influence of Archimedes and of contemporary writers such as Del Monte and Van Ceulen. Although in accordance with the title strong emphasis is laid on the practical applications of geometry, many theoretical problems are discussed. For Stevin theory and application always went hand in hand.

The *Meetaet* appeared in 1605, but it was drafted more than twenty years before. Already in the *Problemata Geometrica* Stevin refers to a text on geometry, "which we hope shortly to publish" (1) and in which the subject was to be treated by a method parallel to that used in arithmetic. At that time Stevin's *L'Arithmétique* was already either finished or well advanced. We get the impression that in this period, 1583—'85, Stevin decided to publish his full text on arithmetic, but of his text on geometry only those parts which he considered novel. The general outline of the two texts was laid out at the same time, and in close parallel. When at last the *Meetaet* appeared, it had undergone many changes, resulting partly or wholly from lengthy discussions with the Prince of Orange. The underlying idea, however, remained the same.

In the introduction to the *Meetaet* Stevin explains what he means by this parallelism of arithmetic and geometry. In arithmetic we begin by introducing the numerical symbols, and follow this up by naming them and interpreting their value. Then come the four species, the theory of proportions, the theory of proportional division, and finally the reduction of fractions to a common denominator. Similarly, in geometry, we begin by showing the student how to draw figures, then we name them and explain how to measure them. Then follow the four species, the theory of proportions, of proportional intersections, and the reduction of figures into others of given form and equal length, area or volume. Since these topics are taken in six groups, and each group with lines, plane figures, and solids, the *Meetaet* consists of six books, each consisting of three parts.

The opinion of Stevin that geometry and arithmetic have to run parallel is not so artificial as it appears at first sight. Stevin expresses an opinion common to the mathematicians of his age, who insisted on enlarging the field of numbers with irrationals to something like an arithmetic continuum, who applied these

(1) *Problemata*, lib. II, Introduction.

numbers without discrimination to the measurement of figures, and for whom numbers were not so much the object of abstract speculation as the tools for surveying, navigation, and astronomy. The subject matter of geometry is continuous quantity, wrote such men as Tartaglia and Clavius. It seemed natural that there should exist relations and analogies between the professed geometrical and the intuitively felt arithmetical continuum (2). Stevin only gave an early sixteenth-century version of a point of view which was to lead, within the next generations, to analytic geometry. Consciousness of the analogy between arithmetical-algebraic and geometrical considerations continued to work as a leaven throughout the further development of mathematics. Later we find it in Leibniz' proposal for an algebra of directed quantities. In another form it appeared again more recently when Hilbert probed the consistency of geometrical axioms by means of a corresponding algebraic counterpart.

Book I of the *Meetaet*, in accordance with the author's program, teaches methods for drawing lines and certain plane figures, and for constructing certain solids. With his keen sense of the interdependence of theory and practice Stevin gives not only rules for the drawing board, but also for the surveyor and instrument-maker. We thus meet here with a description of the surveyor's cross or diopter, already described by Heron (3) and used for setting out perpendiculars by lines of sight. With a graduated circle instead of a cross it becomes a so-called circumferentor or theodolite. The plane figures discussed are the circle, the conic sections, and the Archimedean spiral. No fewer than four methods are given for constructing points of an ellipse when the principal axes are given in position and magnitude. One of these constructions is the ancient "gardener's construction", based on the property that the sum of the distances from a point on the circumference to the foci is constant (the foci are not yet referred to by a special name). Stevin believed that he had found this construction somewhere in a book of Del Monte, who himself had discovered it in some old manuscripts (4). Stevin also took another construction from Del Monte (5), this time based on the property that any point P on a line segment whose endpoints A and B are

(2) See E. W. Strong, *Procedures and Metaphysics. A Study in the Philosophy of Mathematical-Physical Science in the Sixteenth and Seventeenth Centuries* (Berkeley, Cal., 1936, VI + 301 pp.), Ch. III, IV. On Stevin see pp. 105, 106. Compare also our Introduction to *L'Arithmétique*.

(3) *Heronis Alexandrini opera*, ed. W. Schmidt, III (1903). *Commentatio dioptrica*. — On early surveying instruments, including the diopter and triquetrum (with illustrations) see e.g. R. T. Gunter, *Early Science in Oxford* I (1921, V + 407 pp.), II (1923, XV + 408 pp.); F. Schmidt, *Geschichte der geodetischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter* (Neustadt a.d. Haardt, 1935) and our footnote (8) on the „rechtcruys" to the English translation of *De Thiende*. Also: Edmond R. Kiely, *Surveying Instruments, Their History and Classroom Use* (New York, 1947, chapter IV).

(4) The proposition on which the "gardener's construction" is based can be found in Apollonius' *Conics*, Book III, Prop. 52. We first meet with the construction in a fragment on *Burning Mirrors* by Anthemius of Tralles (died c. 534), see T. L. Heath, *Bibliotheca mathematica* 7 (1907) pp. 225–233. See further J. Tropfke, *Geschichte d. Elem.-Mathem.* VI (2nd ed., 1924), p. 154.

(5) Stevin writes that he had forgotten where in Del Monte's works these constructions appear. As Chasles has observed, it is in the *Planisphaeriorum universalium theoricæ* (Pesaro, 1579). See M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Paris, 2nd ed. 1875), p. 89.

forced to move on two perpendicular axes describes an ellipse (6). Since this property also holds for a point P on the continuation of AB , we are led to the third construction, in which the length of AB is taken as $a-b$ and the point P is at a distance b from either A or B (we call a, b the lengths of half the major and minor axes). Stevin also uses this theorem to find one of the principal axes of an ellipse when the other principal axis is given in length and position, together with an arc of the curve. The fourth ellipse construction is equivalent to the one we often use at present, and by which we find points of the ellipse by considering it the oblique parallel or orthographic projection of a circle with one of the axes as diameter. This construction may in this form be original with Stevin, though it is closely related to another one, also presented by Stevin, in which he shows how the conic sections can be constructed as plane intersections of a right circular cone. His method amounts to what we now call orthographic projection. Stevin may have been led to these constructions by Dürer (7).

Other interesting parts of Book I are the passages where Stevin uses his decimal notation in the form 168① for 16⑧8①; here we also find 3691② printed as 36.91②. This may be taken as an early example of something like a decimal point, but we also meet with the notation 84.26 for an angle, meaning 84gr 26①, or 84°26' in our notation. Here the dot is not a decimal, but a sexagesimal point.

Book I also contains Stevin's description of the five regular and of eight Archimedean solids, taken from his *Problemata Geometrica* (perhaps we should say: which in 1583 he had lifted from his manuscript to be published in the *Problemata Geometrica*). For some reason or other he omits $\{20_3, 12_{10}\}$ and $\{12_5, 20_6\}$, though he had found them himself. The three other Archimedean solids are also missing, despite the fact that Pappus' work, which describes these solids, had by this time become accessible in print (8).

In Book II we find observations on the lengths of line segments and curves, the areas of two-dimensional figures, and the volumes of solids. Some surveyor's instruments appear, among them the ancient "traprondt" or graduated circle for measuring horizontal angles (9), and the equally ancient triquetrum, consisting of two arms of equal lengths, hinged to a third; they are graduated and have sighting devices. The triquetrum, also called Ptolemy's rods or parallactic instrument (10), is used by Stevin to determine a triangle similar to a triangle in the fields, though in his days it had also received attention as a favourite measuring instrument of Copernicus and Tycho Brahe. As an application of the triquetrum Stevin shows us how to measure the distance from a given point to a point beyond

(6) This construction can be found in Proclus, *Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. G. Friedlein (Leipzig, 1873), Def. IV to first book of Euclid, p. 106. Stevin might have found it in the Latin translation of Proclus by F. Barozzi (Padua, 1560). See also the German translation by P. Leander Schönberger (Halle, 1945) or the French translation by P. Ver Eecke (Bruges, 1948), p. 96.

(7) A. Dürer, *Underweysung der Messung mit dem zirkel und richtscheyt* (Nuremberg, 1525); see also J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford, 1949, VIII + 211 pp.), p. 64. Stevin's fourth ellipse construction can immediately be derived from Dürer's method.

(8) See Introduction to *Problemata Geometrica*.

(9) On this see footnote (3).

(10) See e.g. R. T. Gunter, *l.c.* 3) I p. 344, II p. 15. The triquetrum is described by Ptolemy in the *Almagest*: V, 12 (ed. Heiberg, Leipzig 1898, p. 403; translation by Manitius, Leipzig 1912, p. 295).

reach. A number of other exercises in surveying follow, and also such problems as the computation of the altitudes of a triangle with given sides. In the section on the measuring of circumferences and areas we find a discussion of the value of π with due references to Archimedes, Romanus, and Van Ceulen; π is given in 20 decimals, the value which Van Ceulen had published in 1596 ⁽¹¹⁾.

Stevin continues the discussion of areas with that of the ellipse and of the parabolic segments, both derived by Archimedes. He has the correct value πab for the area of the ellipse, but a wrong one for that of the parabolic segment. This is not a mere misprint; the error recurs in Book VI, though it is not clear what may have led Stevin to it. There is also a discussion of the area bounded by an Archimedean spiral.

Book III contains the application of the four species to geometry, with reference to the parallel treatment in *L' Arithmétique*. Multiplication and division of segments, areas, and volumes is only performed by means of numerical factors; there is no reference to the multiplication of segments so as to form areas. Of some interest is the addition and subtraction of solids, but the only case discussed is that of similar figures. Here Stevin entered a field to which he had paid particular attention in Books IV and V of the *Problemata Geometrica*.

In Book IV we find a theory of proportions. It is shown how areas and volumes proportional to given line segments can be found. The most interesting part is that in which the two mean proportionals between two line segments are discussed. As in the *Problemata Geometrica*, reference is made to Hero's construction according to Eutocius. The Eratosthenes construction is mentioned, but not further discussed.

Book V contains the division of plane polygons into parts of given ratio by a line satisfying certain conditions, another of the topics of the *Problemata Geometrica*. Here Stevin goes a little beyond the text of 1583. He had been reading up on the literature and had not only become acquainted with the earlier work of Tartaglia — who had reported on that of Cardan and Ferrari — but had also read the book which Benedetti had published in 1585 ⁽¹²⁾. As a result he not only modified some of the proofs of the theorems already discussed in the *Problemata*, but added the cases where the line of division has to pass through a point outside or inside the polygon. These cases had already been a subject of investigation by Euclid, in his book on *Division of Figures*, and Stevin may have gained an inkling of it through Clavius' remark in his Euclid edition ⁽¹²⁾. Instead of this, Stevin contented himself with a reference to his favourite theory that all these solutions have come down to us from the "Wysentyt", the supposed Age of the Sages. Stevin also deals with some problems on the cutting of solid figures in a given ratio.

Finally, Book VI deals with some transformations of figures into others of given form and given length, area or volume, such as the (approximate) construction of a straight line equal to the circumference of a given circle, of a

⁽¹¹⁾ L. van Ceulen, *Van den Cirkel* . . . tot Delf, bij J. Andriesz, 1596, 14r. There exists a posthumous edition of 1615. Van Ceulen's value of π with 33 decimals was published by his widow in *Arithmetische en geometrische fondamenten* (Leyden, 1615), his value with 35 decimals was published by W. Snellius in *Cyclometricus* (Lugd. Bat., 1621), p. 54. This was the value engraved on his tomb in the Pieterskerk at Leyden, see W. Hope Jones-C. de Jong, *Mathem. Gazette*, 22 (1938), pp. 281-282.

⁽¹²⁾ See footnote (10) to the Introduction of the *Problemata Geometrica*.

triangle equal in area to a given circle, of a sphere equal in volume to a given cone, of a cylinder equal in volume to a given sphere, and of a segment of a sphere, similar to one of two given segments and equal in area to the other. Here we meet again with some problems from the *Problemata* with a few modifications and additions⁽¹⁴⁾.

We thus see that the *Meetdaet* is far from being a systematic textbook. The author, within the framework of an apparently rigorous scheme based on a parallel with arithmetic, wanders freely through the fields and culls the flowers which appeal to him and to his prince and master. What is lost in originality is gained in freshness of approach and selection of topics. Written in Stevin's vigorous Dutch, it is one of his most readable books. Scanning its pages, we still can see before us the studious Flemish engineer and the martial stadtholder of Holland, perhaps sitting together in front of a fire in some old Gelderland farmhouse during a campaign, or in the prince's palace at the Hague, absorbed in the study of the ancient and contemporary geometers they both admired.

Again we reproduce some specimen-pages.

⁽¹⁴⁾ There is an account of the *Meetdaet* in M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II (Leipzig, 1892), pp. 529-531. In his exhaustive analysis of the *Problemata Geometrica*, Gravelaar also deals with the *Meetdaet*, especially with those sections where the two books overlap. (*Nieuw Archief v. Wisk.* 5 (1901), pp. 106-191).

T V V E E D E
S T V C K D E R
W I S C O N S T I G H E
G H E D A C H T N I S S E N

V A N D E

M E E T D A E T. De pract
Geometrie.

Inhoudende t'ghene daer hem in gheoeffent heeft

D E N D O O R L V C H T I C H S T E N

Hoochgeboren Vorst ende Heere M A V R I T S Prince van
Oraengien, Grave van Nassau, Catzenellenbogen, Vianden, Moers &c.

Marckgraef vander Vere, ende Vlissinghen &c. Heere der Stadt Grave,
ende S'lands van Cuyc, St. Vyt, Daefburch &c. Gouverneur van

Gelderlant, Hollant, Zeelant, Westvrieland, Zurphen,

Vtrecht, Overysfel &c. Opperste Veltheer vande
vereenichde Nederlanden, Admirael

Generael vander Zee &c.

Beschreven deur SIMON STEVIN van Brughe.



T O T L E Y D E N,

By Ian Bouwenfz. woonende op de hoogelantsche Kerckgraft,

Anno 1615 cv.

7

E E R S T E D E E L D E S
E E R S T E N B O V C X V A N
H E T T E Y C K E N E N
D E R L I N I E N .

V O O R S T E L .

Rechte linien te teyckenen.

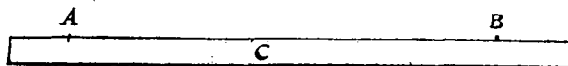
DE rechte linien worden inde daet door verscheyden middelen gheteyckent, elcke na den eyfch der omstandighen, waer af de drie voornaemste die my nu te voorcommen, ghedaen worden ten eersten met een rechte rijs: Ten anderen met een slachlijn: Ten derden met sichtsralen.

1 Voorbeelt vant teyckenen der rechte lini met een rijs.

T G H E G H E V E N . Laet **A B** twee punten sijn. **T B E G H E E R D E .** Wy moeten vant een tottet ander een rechte lini teyckenen met een rijs, welcke manier meest dient op papier ende ander cleene effen gronden.

T W E R C K .

Ick neem een rechte rijs als **C**, legghende d'een cant op de punten **A, B**, treckende daer langs henen een sjenlicke lini **A B**, met een penne, passet, priem, inckt of krijt, na den eyfch vanden grondt, ende heb het begheerde.

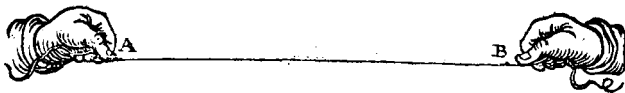


2 Voorbeelt vant teyckenen der rechte lini met een slachlijn.

T G H E G H E V E N . Laet **A B** twee punten sijn. **T B E G H E E R D E .** Wy moeten vant een tottet ander een rechte lini trecken met een slachlijn, dat is een dun coordeken met krijt bestreken, t'welck ghespannen staende, ende ghetrocken sijnde soo dattet teghen den gront slaet; teyckent daer met lutel moeyte een seer rechte lini. Welcke manier seer ghebruyckt wort onder anderen by timmerluyden, int teyckenen van haer wercken, oock by saghers, om soo wel door crome als rechte boomen, rechte sneen te saghnen.

T W E R C K .

Ick neem de voorsz. becrijete slachlijn **C D**, die mijn tweeder ghespannen stellende over de punten **A B**, treckse daer na als de peez van een booch, ende krijch de begheerde rechte lini **A B**.



A 4

3 Voor-

MEETDAET

BOOK I.

FIRST PART OF THE FIRST BOOK.
OF THE DRAWING OF LINES.

1st PROPOSITION.

To draw straight lines.

In practice straight lines are drawn by various means, each in accordance with the requirements of the case, of which the three principal ones which now occur to me are performed: firstly with a straightedge; secondly with a chalked line; thirdly with lines of sight.

1st Example, of the drawing of the straight line with a straightedge.

SUPPOSITION. Let A and B be two points. WHAT IS REQUIRED. We have to draw a straight line from one point to the other with a straightedge, which method usually serves for drawings on paper and other small, smooth grounds.

PROCEDURE.

I take a straightedge, such as C , placing one edge on the points A and B , drawing along it a visible line AB with a pen, compasses, an awl, ink or chalk, as the ground demands, and then I have what was required.

2nd Example, of the drawing of the straight line with a chalked line.

SUPPOSITION. Let A and B be two points. WHAT IS REQUIRED. We have to draw a straight line from one point to the other with a chalked line, *i.e.* a thin cord covered with chalk, which, when taut and drawn so that it strikes against the ground, draws thereon a very straight line with little effort. Which manner is widely employed among others by carpenters in the drawing of their constructions, and also by sawyers, for the sawing of straight sections through crooked as well as straight trees.

PROCEDURE.

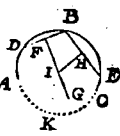
I take the aforesaid chalked line CD , holding it with the aid of someone else taut over the points A and B ; I then draw it like the string of a bow, and get the required straight line AB .

VANT TEYCKENEN DER GROOTHEDEN. 17
8 VOORSTEL.

Wefende ghegeven een deel vanden omtreck des rondts, den heelen omtreck te volteykenen.

TGHEGHEVEN. Laet den booch ABC deel vanden omtreck eens rondts sijn. TBEGHEERDE. Wy moeten den heelen omtreck volteykenen.

TWERCK.

Ick stel inden ghegeven booch eenighe drie punten, welke ick neem D, B, E, te wesen, ende treck de rechte lini DB, daer na op haer middel F, de lini FG rechthouckich op DB; Sgelijcx treck ick BE, ende op haer middel H de lini HI, rechthouckich op BE ende ghenakende FG in I: Twelck soo sijn - A  de, I is middelpunt des begheerden omtreck, daerom opt selve beschreven den booch CKA, men heeft den heelen begheerden omtreck ABCK, waer af t'bewijs openbaer is deur het 23 voorstel des 3 boucx van *Euclides*. TBESLUYT. Wefende dan ghegeven een deel vanden omtreck des rondts, wy hebben den heelen omtreck volteyckent na den eyfch.

VERVOLGH.

Hier uyt is kennelick hoemen door alle drie ghegeven punten die in gheen rechte lini en slaen, een rondts omtreck sal schrijven.

9 VOORSTEL.

Op de ghegeven grootste ende kleinste middellijn des *Ellipsa* lanckrondts sijn omtreck te teykenen.

Het teykenen van desen omtreck heeft onder onder anderen sijn gebruyck in *Plardootsche* tuyghen, als voornaemlick des ghemeeenen *Platcloots* daer *Guido Vbaldus* af handelt, oock int teykenen der overwelffels van ghestichien.

TGHEGHEVEN. Laet AB de grootste middellijn wesen, ende CD de kleinste, malcander doorsnyende in E. TBEGHEERDE. Wy moeten daer op des lanckrondts omtreck teykenen.

TWERCK.

Ghelijckmen metten passer den omtreck des rondts beschrijft, alsoo den omtreck des lanckrondts metten byghestelden tuych, van deser ghedaente sijnde: FG is een beweghende rye met een spleet int middel, waer in twee stijklens H, I gheschrouft worden: Ant eynde by F is een punt, daermen den omtreck met teyckent, KL een kruck, oock met een spleet MN.

Het teykenen des begheerden omtreck met desen tuych gaet aldus toe: De punt van stijlken H, wort soo wijt vanden punt F ghehecht, als van E tot C, ende het stijlken I soo verre vande selve punt F, als van E tot A: Daer na stelm den pinne F op den punt C, ende het stijlken H, opt punt N, alsoo dat der rye FG opt middel der kruck comt, passende de lini KL op AB; Daer na stijckmen het stijlken H teghen de sijde KL, latende het stijlken I sijn loop

B 3 nemen

MEETDAET

BOOK I.

ON THE DRAWING OF AN ELLIPSE

9th PROPOSITION.

On the given larger and smaller diameter of the ellipse to draw its circumference.

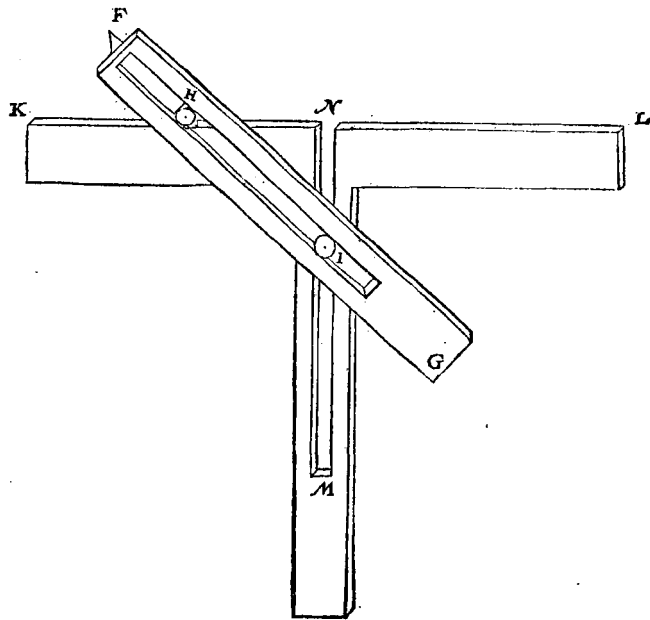
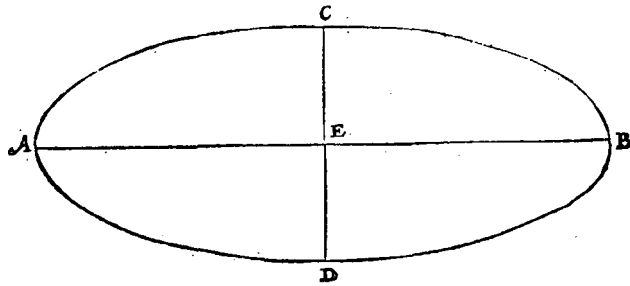
The drawing of this circumference finds application, among other things, in astrolabes, chiefly the ordinary astrolabe with which *Guido Ubaldus* deals: also in the drawing of vaults of buildings.

SUPPOSITION. Let AB be the larger diameter and CD the smaller, intersecting each other in E . WHAT IS REQUIRED. We have to draw thereon the circumference of the ellipse.

PROCEDURE.

Just as the circumference of a circle is described with the compasses, the circumference of an ellipse is drawn with the instrument shown overleaf, which has the following form. FG is a movable ruler with a slit in the middle, in which are screwed two small pegs H and I . At the end, at F , there is a point, with which the circumference is drawn. KL is a handle, also with a slit MN .

The drawing of the required circumference with this instrument takes place as follows. The point of the peg H is fastened as far from the point F as E is from C , and the peg I as far from the same point F as E is from A . Then the pin F is put in the point C , and the peg H in the point N , so that the ruler FG comes in the middle of the handle, the line KL fitting on AB . Upon this the peg H is passed along the edge KL , while the peg I is allowed to take its



nemen inde spleet MN: Twelck soo sijnde de pinne F beschrijft den halven begheerden omtreck: Ende doende der ghelijcke over d'ander sijde, men heeft den heelen omtreck.

T B E W Y S.

Hier af is ghedaen na mijn onthoudt deur *Guido Vbaldus* in eenich boucxken dat ick verloren heb.

Ander manier van vvercking.

TGHEGHEVEN. Laet A B de grootste, C D de cleenste middellijn wesen, mälcander doorsnyende in E. TBEGHEERDE. Wy moeten daer op des lanckronchts omtreck:eyckenen.

TWERCK.

course in the slit MN . This being so, the pin F describes half the required circumference. And when the same is done on the other side, the whole circumference is obtained.

PROOF.

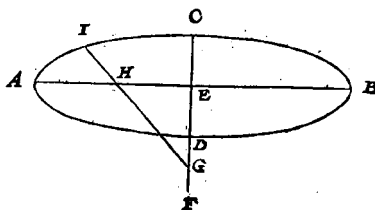
I seem to remember that this was dealt with by *Guido Ubaldus* in a small book, which I have lost.

Other Method of Operation.

SUPPOSITION. Let AB be the larger diameter and CD the smaller, intersecting each other in E . WHAT IS REQUIRED. We have to draw thereon the circumference of the ellipse.

T W E R C K.

Ick treck CD voortwaert tot F, alsoo dat CF even sy an EA, neem daer na metten passier de langde EF, ende stel d'een voet in EF daert valt, ick neem ant punt G, d'ander in EA welke daer comt neem ick an t'punt H, treck daer na GH voortwaert tot I, sulcx dat HI even sijn an EC; Twelck soo wese, I is een punt inden omtreck des lanckronchts, vallende, daerom d'ghelijcke punten alsoo ghenouch gevonden, sulcx datmen van d'een tot d'ander rechte linikens treckende, de selve vanden waren omtreck geen merckelick vershil en hebben, men heeft t'begheerde, als den omtreck AICBD.



T B E W Y S.

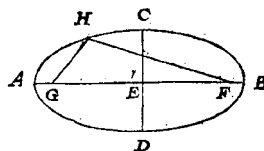
Anghesien dat inde voorgaende eerste manier der wercking, de langde FH des tuchts aldaer beschreven, even was an CE, ende FI even an AE, ende dat alsoo t'punt F in des begheerden lanckronchts omtreck was, soo moet in dese tweede manier der wercking t'punt I, oock inden omtreck des begheerden lanckronchts wesen, ghemerckt de selve reden der wercking hier ghevolgt is, want ghelijck ginder FH even was an haer CE, alsoo hier IH an haer CE, ende ghelijck ginder HI even was an t'verschil tusschen de grootste en cleenste half middellijn, alsoo is hier oock HG, even an t'verschil tusschen de grootste en cleenste halfmiddellijn.

Derde manier van vvercking.

TGHEGHEVEN. Laet AB de grootste middellijn wesen, CD de cleenste, malcander doorsnyende in E. TBEGHEERDE. Wy moeten daer op des lanckronchts omtreck teyckenen.

T W E R C K.

Ick vervough de langde AE van D tot F, oock van D tot G, inde lini AB, teyckende beyde de uysterste punten FG, neem daer na een draet soo lanck als AB, die echtende met haer uystersten inde punten FG; Ick stel daer na een penne of priem daer toe bereyt, teghen den draet rechthouckich opt plat daer de form in gheteykent wort, welke priem ick hier neem te wesen ter plaets van H, alsoo dat de twee deelen des draets GH, HF ghespannen staen, de priem daer na voortghe-trocken sijnde van A over C tot B (wel-verstaende dat den draet GHF alijt soo even stijf ghespannen blijft sonder recken als doenlick is) soo wort daer mede beschreven den halven omtreck ACB.



Ende

PROCEDURE.

I produce CD to F so that CF be equal to EA , thereafter take between the compasses the distance EF and put one leg on EF in any place, I assume in the point G ; the other on EA , which I assume to come there in the point H ; then I produce GH to I so that HI be equal to EC . This being so, I is a point falling on the circumference of the ellipse. Therefore, when enough such points have been found, so that if from one to the other straight lines are drawn, the latter do not differ appreciably from the true circumference, we have what was required, *viz.* the circumference $AICBD$.

PROOF.

Since in the preceding first method of operation the length FH of the instrument there described was equal to CE and FI equal to AE , and the point F was then on the circumference of the required ellipse, in this second method of operation the point I also has to be on the circumference of the required ellipse, considering that the same train of thought for the operation has here been followed, for as yonder FH was equal to its CE , so IH is here equal to its CE , and as yonder HI was equal to the difference between the larger and the smaller semi-diameter, so HG is here also equal to the difference between the larger and the smaller semi-diameter.

Third Method of Operation.

SUPPOSITION. Let AB be the larger diameter and CD the smaller, intersecting each other in E . WHAT IS REQUIRED. We have to draw thereon the circumference of the ellipse.

PROCEDURE.

I mark the distance AE from D to F , also from D to G on the line AB , drawing the two extremities F and G ; then I take a string the length of AB , fastening it with its extremities in the points F and G . Thereafter I put a pin or awl, adapted for this purpose, against the string at right angles to the plane in which the figure is drawn, which awl I here assume to be in H , so that the two parts of the string GH and HF be taut. When the awl is thereafter drawn from A via C to B (it being understood that the string GHF should always remain as uniformly taut, without stretching, as is possible), half the circumference ACB is described therewith. And when the same half circumference has

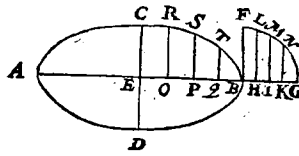
Ende dergelijcken halven omtreck over d'ander sijde oock beschreven sijnde als B D A, men heeft het begheerde: Dese manier van wercking metter bewijs meyn ick beschreven ghesien te hebben by *Guido Vbaldus* int voorseyde verloren boucxken daer hy noch by verclaerde dat hy sulcx ghevonden had in eenighe oude handschriften.

Vierde manier van vvercking.

TGHEGHEVEN. Laet AB de grootste middellijn CD de cleynste wesen, malcander deursnyende in E. TBEGHEERDE. Wy moeten daer op des lanckronckts omtreck teyckenen.

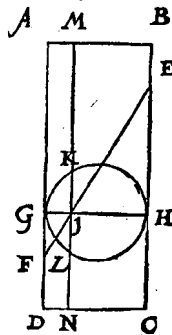
TWERCK.

Ick treck BF rechthouckich op AB, ende even an EC, treck oock AB voort waert tot G, daer op beschrijvende het vierendeelronds BFG: Deel daer na BG in eenighe even deelen, ick neem in vieren, ter plaetsen van H, I, K, treckende HL, IM, KN ewewijdeghe met BF, ende alsoo dat de uystersten L, M, N, commen inden booch FG, deel daer na EB in soo veel even deelen als BG gedeelt wiert, te weten in vieren, ter plaetsen van O, P, Q, treck voort OR even an HL, en PSeven an IM, oock QT even an KN, ende alle drie ewewijdeghe met EC: Twelck soo sijnde de drie punten R, S, T, commen inden begheerden omtreck, daerom soomen BG en EB in veel meer even deelen ghedeelt had dan vier, sulcx dat de rechte lini tusschen twee punten gheen merckelick verschil van haer booch en had, men soude dan deur drie en drie punten boghen meughen trecken, (na de leering des vervolghs vant 8 voorstel) ende t'vierendeel hebben des begheerden omtreex: Volcynende d'ander drie vierendeelen op de selve wijze.



Cylind.

TBEREYTSEL. Laet ABCD een *seul wesen diens grondts middellijn sy DC: Dese seul sy deursneen met een plat EF scheefhouckich op de uysterste lini AD, welck plat EF als verclaert wort int eerste bouck van *Serenus* een lanckront is, diens grootste middellijn EF, en cleynste een lini even an CD. Laet andermael de seul gesneen worden met een plat GH ewewijdich vande grondt, en sal die sne een rondt wesen, t'welck overcant ghesien de lini GH sy, snyende EF in I, sulcx dat IF doe een vierendeel van EF, en sal die GH oock sijn des selfden ronds middellijn: Op dese middellijn GH sy beschreven het rondt GKL rechthouckich op de grondt DC, en oock opt lanckront EF. Daer na sy MN een plat overcant ghesien streckende deur t'punt I rechthouckich opt rondt GKL.



TBEWYS.

Want GF ewewijdeghe is met EH, soo moet den driehouck GIF ghelijck sijn anden driehouck HIE, en daerom ghelijck FI tot IE, alsoo GI tot IH: Maer FI is een derdendeel van IE, of een vierendeel van FE deur t'bereytseel, daerom GI is oock een derdendeel van IH, of een vierendeel van GH: Voort soo is de lini IL even

also been described on the other side, *viz.* BDA , we have what was required. I believe I have seen this method of operation with the proof described by *Guido Ubaldus* in the aforesaid lost book, to which he had added the statement that he had found this in some old manuscripts.

Fourth Method of Operation.

SUPPOSITION. Let AB be the larger diameter and CD the smaller, intersecting each other in E . WHAT IS REQUIRED. We have to draw thereon the circumference of the ellipse.

PROCEDURE.

I draw BF at right angles to AB and equal to EC , and also produce AB to G , describing thereon the quarter of a circle BFG . I then divide BG into a number of equal parts, I assume into four parts, in the points H, I, K , drawing HL, IM, KN parallel to BF and so that the extremities L, M, N , come on the arc FG . I then divide EB into as many equal parts as BG has been done, to wit into four parts, in the points O, P, Q . Further I draw OR equal to HL , and PS equal to IM , as also QT equal to KN and all three parallel to EC . This being so, the three points R, S, T come on the required circumference. Therefore, if BG and EB had been divided into many more equal parts than four, so that the straight line between two points did not differ appreciably from their arc, arcs might then be drawn through three and three points (as taught by the sequel to the 8th proposition), and thus the quarter of the required circumference would be obtained. Upon which the other three quarters could be completed in the same way.

PREPARATION. Let $ABCD$ be a cylinder, the diameter of whose base shall be DC . Intersect this cylinder by a plane EF at oblique angles to the outer line AD , which plane, as is explained in the first book of *Serenus*, is an ellipse, whose larger diameter is EF , while the smaller is a line equal to CD . Let the cylinder once more be intersected by a plane GH parallel to the base, then this section will be a circle, which, when viewed transversely, shall be the line GH , intersecting EF in I so that IF be one fourth of EF , and let this GH be the diameter of the said circle. On this diameter GH shall be described the circle $GKHL$, at right angles to the base DC and also to the ellipse EF . Thereafter MN shall be a plane which, when viewed transversely, passes through the point I at right angles to the circle $GKHL$.

PROOF.

Because GF is parallel to EH , the triangle GIF must be similar to the triangle HIE , and therefore as FI is to IE , so is GI to IH . But FI is one third of IE , or one fourth of FE , by the preparation; therefore GI is also one third of IH , or one

IL even ande lini int plat des lanckronchts van I tot in des lanckronchts omtreck (want de middellijn GH vast blijvende, en het rondt daer op ghedraeyt tot dat-tet ewewijlich is mette grondt des seuls, soo is dan IL mette voorschreven lini al een selve) daerom alsmen ghelijck int werck ghedaen is, op de lini even ande cleenste middellijn eens lanckronchts een rondt beschrijft, en datmen opt vierendeel der selve een lini rechthouckich treckt tot inden omtreck, en datmen daer na even sulcken lini treckt rechthouckich op de langste middellijn des voorschreven lanckronchts, soo moet het uyerste punt der selve in des lanckronchts omtreck commen. En ghelijck dit hier bewesen is op der middellijn vierendeelen, alsoo ist openbaer de reghel plaets te houden over alle ander haer deelen, waer deur alle punten alsooghevonden in des lanckronchts omtreck vallen.

T B E S L V Y T. Wy hebben dan op de ghegeven grootste en cleenste middellijn des lanckronchts sijn omtreck gheteyckent na den eysch.

M E R C K T.

Daer can noch een 3 manier van wercking ghedaen worden, deur de teyckening der keghelst (het daer wy int 12 voorste) afsegghen fullen.

10 V O O R S T E L.

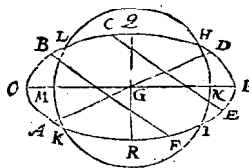
Inde ghegeven omtreck eens lanckronchts, de grootste en cleenste middellijn te teyckenen.

T G H E G H E V E N. Laet ABCD den omtreck eens lanckronchts sijn.

T B E G H E E R D E. Wy moeten daer in de grootste en cleynste middellijn teyckenen.

T W E R C K.

Ick treck inde gegeven omtreck eenige twee ewewijdege, die ick neem CE, BF te wesen, ende door haer middel de rechte lini AD, welke een middellijn sijnde soo moet haer middel G des lanckronchts middelpunt wesen: Maer niet noot-fakelicken isse de grootste of cleenste middellijn: Om nu die te vinden, ick schrijf opt middelpunt G, mette halfmiddellijn soot valt een rondt HIKL, snyende het lanckroncht inde vier punten HIKL: Treck daer na deur M middel des boochs KL, ende deur N middel des boochs HI, de lini OP, voor begheerde grootste middellijn; Ende QR rechthouckich op OP is de cleenste, waer af 't bewijs deur 't werck openbaer is.



T B E S L V Y T. Wy hebben dan inde ghegeven omtreck eens lanckronchts, de grootste en cleynste middellijn gheteyckent na den eysch.

V E R V O I G H.

Tis hier door kennelick hoe't middelpunt vanden omtreck des lanckronchts ghevonden wort.

11 V O O R S T E L.

Wefende ghegeven een deel vanden omtreck des lanckronchts, ende de grootste of cleynste middellijn: De ghebreekende middellijn te teyckenen.

T G H E-

fourth of GH . Further the line IL is equal to the line in the plane of the ellipse from I to the circumference of the ellipse (for when the diameter GH remains in its place and the circle on it is revolved until it is parallel to the base of the cylinder, IL and the aforesaid line are one and the same); therefore if, as has been done in the procedure, a circle is described on the line equal to the smaller diameter of an ellipse, and a line is drawn at right angles at one fourth of the latter up to the circumference, and thereafter exactly such a line is drawn at right angles to the longer diameter of the aforesaid ellipse, the extremity thereof must come on the circumference of the ellipse. And just as this has here been proved for the fourth parts of the diameter, it is evident that the rule applies to any other parts of it, in consequence of which all points thus found fall on the circumference of the ellipse.

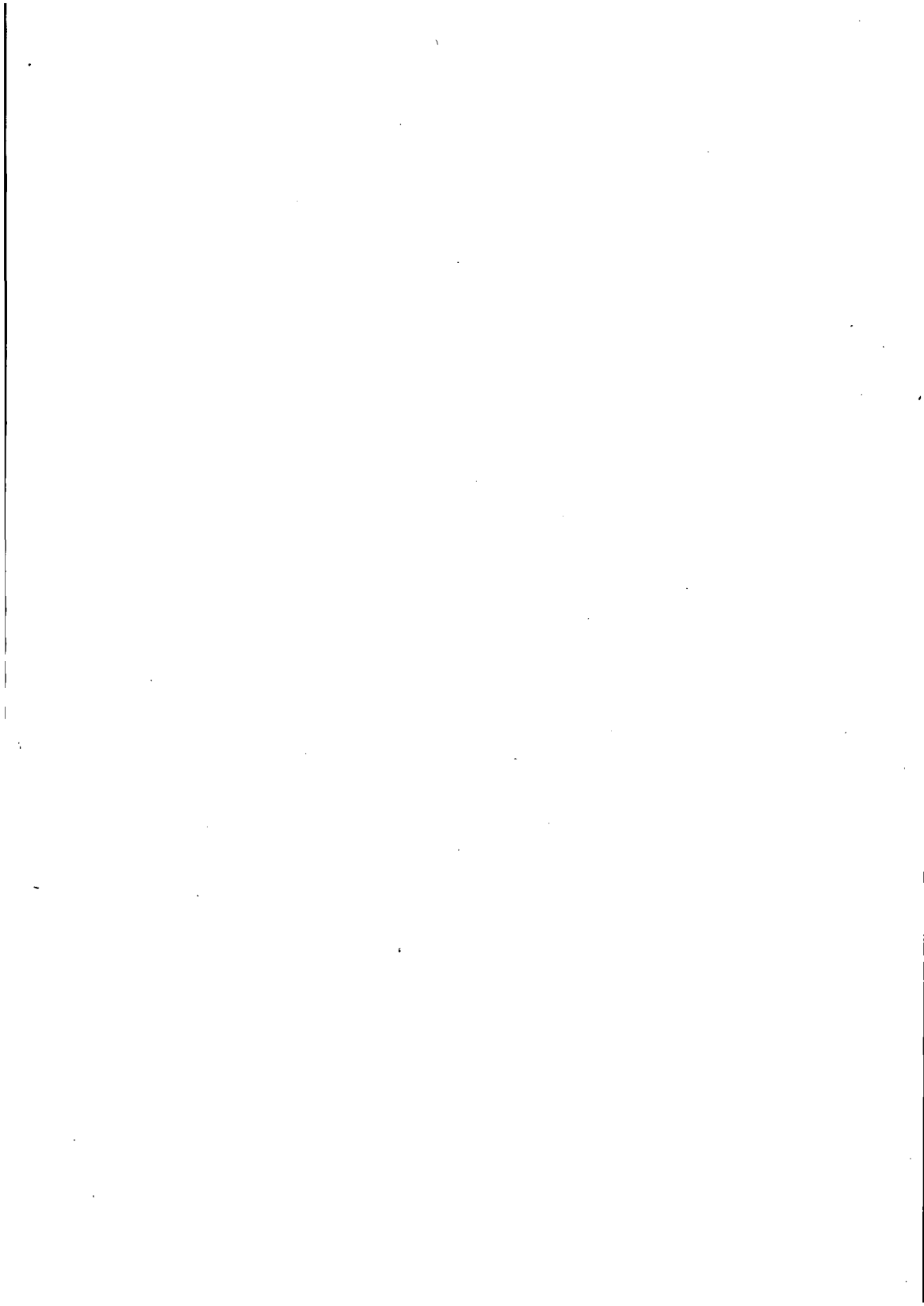
CONCLUSION. Hence, on the given larger and smaller diameter we have drawn the circumference of the ellipse, as required.

NOTE.

A 5th method of operation may also be used, by means of the drawing of the conic section, about which we shall speak in the 12th proposition.

DE DEURSICHTIGHE

PERSPECTIVE



INTRODUCTION

The *Deursichtighe* (Perspective) was, as Stevin tells us in his preface, the outcome of discussions between himself and Prince Maurice. Maurice, who knew how to read horizontal and vertical projections in the art of fortification, also wished to know perspective drawing, to explain his views better in discussions concerning landscapes, cities, etc. Disappointed with the existing explanations, given by painters, which were too empirical and too inexact to satisfy him, he took the matter up with Stevin. Stevin, who had looked into the subject when he wrote his *Huysbou* (Architecture), now went deeper into it and arrived at a mathematical theory.

He was obliged to perform a considerable amount of original work, since most of the books at his disposal, as we shall see, had been written by and for painters and architects, and were rich in directives and deficient in mathematical demonstrations. The only textbook comparable to that of Stevin in mathematical clarity and antedating it was the *Perspectiva* of his contemporary and colleague Guido Ubaldo Del Monte (1545—1607), which was published in 1600, only five years before the *Deursichtighe*¹⁾.

Stevin's work contains two books. The title of the first book, *Verschaeuwing*, is Stevin's translation of the Latin word *scenographia*. The term *Deursichtighe*, as we saw, is his translation of the word *perspectiva*. Since the second book of the *Deursichtighe* contains the principles of *Spiegelschaeuwen* (theory of reflection in mirrors, translation of *catoptrica*), perspective in Stevin's terminology comprises both scenography and catoptrics. It also includes the principles of refraction, called *Wanschaeuwing*, but this subject is wanting in the book.

The French translation of the title *Deursichtighe* is *Optique*, so that here perspective and optics are identified. As a matter of fact, the term *perspective*, in Stevin's days, was not yet exclusively applied to that form of central projection in which figures, often in or on a ground plane, are mapped from an eye on a picture plane, preferably placed between the eye and the figures. In its oldest meaning it was a part of geometrical optics — we may even say that it *was* geometrical optics — and dealt with the way objects appeared when seen by the eye. The classical text on this form of perspective, or the theory of „appearances“, was the *Optics* of Euclid, existing in two versions, one ascribed to Euclid himself (but not printed until 1882), the other to his later commentator Theon of

¹⁾ *Guido Ubaldi e Marchionibus perspectivae libri sex. Citra dolum fallimur*. Pisauri, 1600.

The author, a nobleman born in Pesaro in 1545, was a pupil of Commandino, studied at Padua, and took part in the war against the Turks. After his return to Pesaro, he devoted his life to study. His best-known work is *Mechanicorum liber* (Pesaro, 1577). In 1588 he became inspector general of the fortifications of Tuscany, which compelled him to live in Florence, where he encouraged young Galileo. He died in Pesaro in 1607.

Alexandria. There also existed the pseudo-Euclidean *Catoptrics*²⁾. A typical proposition of the *Optics* is Prop. XXIII, which states that a sphere seen from a single eye appears smaller than the hemisphere, and the part that is seen appears as a circle. The *Catoptrics* deals with reflections in plane, convex, and concave mirrors, and has a statement on refraction. The Theon versions of the *Optics* and of the *Catoptrics* were published during the sixteenth century in different editions with Latin translations, the *editio princeps* being that of Jean Pena (1557)³⁾. There were translations into other languages in which the term "perspective" was used for this kind of optics, for which the Italians used the term "prospettiva"; an Italian translation by E. Danti was entitled *La prospettiva di Euclide* (1573)⁴⁾ and a French translation by Fréart de Chantelou of 1663 still bore the title of *La perspective d'Euclide*⁵⁾.

Another classical author whose text on perspective was known to the Renaissance — though in most cases indirectly — was Ptolemy. His *Optics* not only deals with reflections, but also contains a theory of refraction⁶⁾. Both Euclid's and Ptolemy's texts inspired later investigators, notably Ibn Al-Haitham (c. 965 - after 1039), whose book on optics was published in a Latin translation under the title of *Opticae thesaurus Albazeni* (1572)⁷⁾, and Witelo (second half 13th century), whose *Optics*, written under Ibn Al-Haitham's influence, was first printed in 1535⁸⁾. This theory of optics formed part of the Medieval and Renaissance university curriculum⁹⁾.

Perspective, in our sense, was hardly known in Antiquity, in so far as we can judge by the texts and by the paintings that have been preserved¹⁰⁾. Yet, some form of projection must have been used by the architects of the buildings that graced the towns of the Ancient World. An idea of their methods can be gained

²⁾ Best edition of the three works: *Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum Scholiis antiquis edidit* J. L. Heiberg, *Euclidis Opera omnia* VII, Lipsiae 1895. See: *Euclide, L'Optique et la Catoptrique*, oeuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, XLVII + 126 pp. (Paris, Bruges, 1938).

³⁾ *Optica et Catoptrica, numquam antehac Graece aedita. Eadem Latine reddita per Joanneum Penam* (Paris, 1557).

⁴⁾ *La prospettiva di Euclide, nella quale si tratta di quelle cose, che per raggi diritti si veggono: di quelle, che con raggi reflessi nelli specchi appariscono. Tradotta dal R. P. M. Egnatio Danti.* (Firenze, 1573).

⁵⁾ *La Perspective d'Euclide, traduite en françois sur le texte grec de l'Auteur, et démontrée par Rol. Fréart de Chantelou.* (Le Mans, 1663).

⁶⁾ Ptolemy's *Optics* is only known through a twelfth-century Latin translation from the Arabic; part of it has been preserved. The first published text dates from 1885: Gilberto Govi. *L'ottica di Tolomeo da Eugenio, ammiraglio di Sicilia, scrittore del secolo XII, ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo greco imperfetto.* (Torino, 1885). See also *Bibl. mathem.* 1888, pp. 91-92, 97-102, *Bull. di mat. Boncompagni* 19 (1886), pp. 115-120.

⁷⁾ *Opticae thesaurus Albazeni Arabis libri septem . . . Item Vitellionis . . . libri decem. Omnes instaurati . . . a Frederico Risnero* (Basiliae, 1572).

⁸⁾ See footnote 7). The first printed edition of Witelo's book was *Vitellionis neqi opticeis, . . . quam vulgo perspectivam vocant libri X* (Nuremberg, 1535, repr. 1551).

⁹⁾ A number of other books on this aspect of perspective appeared from Witelo's time to the seventeenth century, see Poudra, *Histoire de la perspective ancienne et moderne* (Paris, 1864, 586 pp.), pp. 42-84.

¹⁰⁾ An attempt to prove a considerable knowledge of perspective in Antiquity was made by L. F. J. Hügel, *Geschichtliche und systematische Entwicklung und Ausbildung der Perspektive in der classischen Malerei.* Würzburg, 1881, 97 pp.

from Vitruvius' famous *De Architectura* (first century B.C.), of which the *editio princeps* appeared c. 1486¹¹): Vitruvius distinguished between what he called ichnography, orthography, and scenography, a distinction which goes back to the Greeks. The first two sciences teach us how to find the horizontal projection of a building and the projection of its altitudes, and thus contain the principle of what we now call orthographic or Monge projection. Scenography is supposed to give some idea of the way objects appear to the eye, especially buildings and stage scenery. There is a hint here of what we call perspective, but Vitruvius, though indicating that certain rules do exist, remained quite vague. The term scenography remained in use during Renaissance days to indicate the art of studying how objects appear to the eye, and thus became identified with our perspective¹²). This is the way in which Stevin uses the expression, in accordance with other writers of his period; the choice of the word may also have been influenced by the desire of these Renaissance authors to show the use of their science in the magnificent pageantry of their days.

Perspective in our present sense was developed by the painters, sculptors, and architects of the early Renaissance as a result of their desire to create a direct and faithful representation of an object. Out of a study of the nature of vision and the art of representation there emerged certain empirical rules of draftsmanship, which originally may have been kept as professional secrets in the workshops of the master craftsmen. Whatever secrets may have existed, they gradually came to light in the paintings of the fourteenth and fifteenth centuries. Italy had the lead, especially Florence, but the new methods also found their way across the Alps. By 1340 the vanishing point of lines in the ground plane orthogonal to the ground line appears in some pictures, in the early decades of the fifteenth century painters are acquainted with the vanishing points of other sets of horizontal lines. Vasari, in his *Life of the Painters*, tells us that Florentine artists of that period, such as Brunelleschi, Masaccio, Ucello, and Alberti, studied the art of perspective drawing; the correct convergence of lines and the rules of foreshortening¹³). Alberti even wrote about these subjects in a section of his book *Trattato della pittura* (1435)¹⁴). Alberti's exposition centred around the perspective image of a square in the ground plane with two sides parallel to the ground line. At the time he wrote, or shortly after it, rules for the correct perspective image of more complicated figures became known, as we can study in the drawings and paintings of the period, which show how delighted their creators were with their knowledge of correct rules. Ucello's „Mazzocchio”, an elaborate perspective drawing of a turban-like figure, of which the cross-sections are regular hexagons with corresponding vertices forming regular polygons of

¹¹) Vitruvius, *De architectura libri decem*. An edition with French translation by A. Choisy (Paris, 1909, 4 vols.); English translation by M. H. Morgan (Cambridge, Mass., 1914). See also G. Sarton, *Introduction to the History of Science I* (Baltimore, 1927), pp. 223-225.

¹²) Webster's dictionary of the English language still lists the word "scenography", in the meaning of "perspective".

¹³) G. Vasari, *Vite de' più eccellenti pittori, scultori ed architetti italiani*. First ed. Florence 1550, enlarged 1568. Many later editions.

¹⁴) The first edition is in Latin (Nürnberg, 1511). Modern edition by G. Papini, G. B. Alberti, *Trattato della pittura* (Lanciano, 1913).

32 sides, with some four-sided pyramids added, is an interesting example¹⁵). This mastery of the rules is particularly clearly revealed in the text prepared, probably between 1470 and 1490, by the Urbino painter Piero dei Franceschi. The title of his manuscript, *De prospettiva pingendi*, shows how the practical painter approached scholastic optics: the ancient Euclidean pyramid of vision is cut by the painter's plane between object and eye; the „perspective” of Euclid is made useful to the painter. This text remained in manuscript until 1899¹⁶), but we know that it was studied by later artists and authors. Piero taught how to construct the perspective image of rather complicated figures, such as a cube, in a general position, which involves the study of the rotation of planes into the ground plane. His pride in mathematically correct perspective was shared by the artists of the early Cinquecento, and especially by Da Vinci, Rafael, and Michelangelo. Da Vinci greatly praised knowledge of perspective in his notes, and Rafael's great picture „The School of Athens” displays the numerous figures with the right amount of foreshortening. Their respect for mathematical accuracy was shared by Dürer, whose book *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheidt* (1525) taught not only rules for perspective drawing, but also for orthographic projection, two hundred and fifty years before Monge¹⁷). In this book Dürer not only evinces the influence of his Italian “Wanderjahre”, his interest in orthographic projection shows the medieval architect's approach, the influence of a tradition kept alive in the ancient mason guilds, the “Bauhütten”.

The intense mathematical interest of painters, typical of the Renaissance, begins to wane in the later decades of the sixteenth century with the advent of the Baroque period. By 1607 we even find a definite aversion to mathematics, for instance in the philosophy of art professed by Frederigo Zuccari. Zuccari, president of the Accademia di S. Luca in Rome, and himself a leading painter, attacked Da Vinci, Dürer and Michelangelo by name, asserting that “the art of painting does not derive its basic principles from the mathematical sciences..... This art is assuredly not the daughter of mathematics, but of nature itself”¹⁸). It is well known how little interest in accurate perspective is shown by Guido Reni, Caravaggio, and many great Flemish and Dutch painters of the seventeenth century.

Although the painter lost interest, the military engineer and the architect continued to appreciate the art of perspective. The time when painters also combined

¹⁵ G. J. Kern, *Der “Mazzocchio” des Paolo Uccello*. Jahresber. preuss. Kunstsammlung 36 (1915), pp. 13-38.

¹⁶ *Petrus Pictor Burgensis Prospectiva Pingendi*, herausgegeben von Dr. C. Winterberg (Strassburg, 1899); also: G. Nicco Fasola. *Piero Della Francesca. De prospettiva pingendi*. Edizion: critica (Firenze, 1942), 218 pp. The name of the painter is found in different formes Pietro Dei Franceschi, Piero Della Franccsa, etc.

¹⁷ A. Dürer. *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheidt, in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* (Nürnberg, 1525, many later editions).

Latin translation: *Alberti Dureri Nurembergensis . . . adeo exacte quatuor his suarum Institutionum geometricorum libri* (Paris, 1533).

On the development of perspective in the Renaissance see E. Panofski, *Albrecht Dürer I*. (Princeton 1945, XI + 311 pp.); G. Wolff, *Mathematik und Malerei* (Leipzig-Berlin, 2e Auflage, 1925, 85 pp.). On Alberti's, Piero dei Franceschi's, and Dürer's contributions to perspective in particular see J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford, 1947, XX + 555 pp.), pp. 270 ff.

¹⁸ F. Zuccaro, *Idea dei scultori, pittori e architetti* (1607); see E. G. Holt, *Literary Sources of Art History* (Princeton, 1947, XX + 555 pp.), pp. 270 ff.

the other professions in their own person was past, a certain amount of specialization had set in. During the sixteenth century Italy was still leading, as is shown by the number of publications, but France's contribution was also important; as a matter of fact, the first printed text on perspective came from Lorraine. It was a booklet entitled *De artificiali perspectiva*, written by Viator, pseudonym of Jean Pélerin, canon of Toul (1505)¹⁹, and it contained a number of drawings with directions which show a knowledge of the vanishing point of parallel horizontal lines in any direction, and may be called a codification of the old draftsmen's methods. Some of its technical terms, such as *punctus principalis* for the eye, *linea terrea* for the ground line, and *tercia puncta* for the distance points, reappear in the later literature.

Alberti's book, written in 1435, was first published in 1511, and was often reprinted, also in translation. During the sixteenth century, more books on perspective appeared, all of them semi-empirical, semi-mathematical, some of them with beautiful and interesting figures, all written by men of considerable learning and craftsmanship. This is apparent from such writings as the books by Dürer (1525)¹⁷, Serlio (1545)²⁰, Commandino (1550)²¹, Barbaro (1559)²², Cousin (1560)²³, Du Cerceau (1576)²⁴, Barozzi da Vignola-Danti (1583)²⁵, Benedetti (1585)²⁶ and Sirigati (1596)²⁷; of these authors, Dürer and Cousin were famous painters; Serlio, Du Cerceau and Vignola equally famous architects; while Commandino, Benedetti and Danti made a name in the exact sciences. The book of Barbaro has been praised for its new constructions. These authors derived their knowledge not only from their immediate predecessors, but also from Euclid, Ptolemy, Alhazen and Witelo; accordingly, they often present perspective in the modern sense, mixed with the theory of appearances.

With Guido Ubaldo Del Monte's *Perspective* of 1600 we arrive at a text in which stress is laid on the mathematical structure of the theory. This work, which Gino Loria has called "one of the most precious gems of the Italian mathematical literature of the sixteenth century"²⁸, consists of six books. The first book is of importance because it is here that we find at last the explicit formulation and proof

¹⁹ *De artificiali perspectiva. De perspectiva positiva: compendium*. First ed. Toul (1505), 2nd ed. 1509. Photostatic reproduction by A. de Montaiglon (Paris, 1860), and by W. M. Ivins, *On the Rationalisation of Sight* (New York, 1938). See Poudra, *l.c.*,⁹ pp. 132-136, and T. Viola, *Sulle origini della prospettiva*, *Il Filomate* 1, Luglio-Agosto 1948, 11 pp.

²⁰ S. Serlio, *Tutte l'opere d'architettura* (Venezia, 1560); Book II, the *Prospettiva*, was first published in 1545.

²¹ *Ptolemai Planisphericum, Jordani Planisphericum, Federici Commandini Urbinatis in planisphaerium commentarius in quo universa scenographices ratio quam brevissime traditur ac demonstrationibus confirmatur*. (Venetiis, 1558).

²² *La pratica della Prospettiva di Monsignor Daniel Barbaro, eletto patriarca d'Aquileia, opera molto profittevole a pittori, scultori et architetti* (Venetia, 1569).

²³ *Livre de Perspective de Jehan Cousin Senonois, maistre Painctre à Paris* (Paris, 1560).

²⁴ *Leçons de perspective positive*, par Jacques du Cerceau (Paris, 1576).

²⁵ *Le due regole della prospettiva pratica di M. Jacopo Barozzi da Vignola, con i commentari di Egnatio Danti* (Roma 1583, 2nd ed. 1644; Vignola's text dates from before 1573). The book was translated into several languages.

²⁶ *Diversarum speculationum mathematicarum et physicorum liber* (Taurini, 1585).

²⁷ *La pratica di Prospettiva del cavaliere Lorenzo Sirigati* (Venetia, 1596).

²⁸ G. Loria, *Perspektive und darstellende Geometrie*, in G. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, IV (Leipzig, 1908), pp. 577-637, see p. 585.

of what we may call the fundamental theorem of perspective, the theorem that any system of parallel lines in central projection passes into a system of lines through a point, the *punctum concursus* or vanishing point. Del Monte also proves that the *puncta concursus* of systems of parallel lines parallel to the same plane are on the same line. The second book contains the perspective projection of points in the ground plane in no fewer than 23 different ways. Here the author discusses what happens when the plane of projection rotates into the ground plane about its line of intersection; the details are such that we may say, in modern terms, that Del Monte gives us a good account of a homology. In the third book we find the perspective of a point in space, determined by its projection on the ground plane and its altitude. This principle is applied in the fourth book to figures such as the regular polyhedra, the circle, and the sphere. Shadow construction follows in the next book; scenography, also in the sense of theatrical stage-setting, in the sixth. The second book has some remarks on the inverse problem of perspective, *i.e.* how to find the position of the eye when a figure in the ground plane and its perspective are given ²⁹).

§ 2

There is much in Stevin's book which reminds us of Del Monte's, notably the extensive use of rotations and the introduction of the inverse problem of perspective, and the double solution of certain problems, called here the "mathematical" and the "mechanical" way. The two men had much in common; both were experts on fortifications, both were mathematicians deeply interested in problems of mechanics, both combined a love of theoretical study with engineering practice. It is understandable that their approach to perspective was similar, and it is not unlikely that Stevin thoroughly enjoyed Del Monte's work. Despite this influence (which has to be inferred rather than proved by quotations) Stevin's work is an achievement of remarkable originality. He probably had a good deal of the contents of his work ready before he studied Del Monte's *Perspective* (if ever he did), and maintained his particular way of exposition and selection throughout the book.

Stevin himself mentions in his work some authors he consulted; Dürer, Serlio and Vitruvius in the *Scenographia*, and Euclid, Alhazen and Witelo in Book II of the *Deursichtighe*, dealing with catoptrics. There is, as we have seen, some implicit evidence that he knew Del Monte. We have shown above what books he may also have studied; we may be sure that he read all those available to him.

The *Verschaeuwing* itself opens with certain postulates, showing how seriously the author tried to base his work on a correct mathematical foundation. One of these postulates is that a point and its perspective image lie in a straight line with the eye. Stevin's explanation of the necessity of this postulate is that the physical eye is not a mathematical point; by pressing the eye we can obtain a difference of as much as 33° in the image of a given point.

Among the first constructions are the classical ones of finding the perspective

²⁹) For this description of Del Monte's book see also Loria, *l.c.* 28), pp. 585-587, repeated in G. Loria, quoted in ²⁹).

images of a point and a line. Here we meet the demonstration of Del Monte's theorem that all sets of parallel lines have images in lines passing through one point. This point, "saempunt", is Del Monte's "punctum concursus". Then comes Stevin's new approach: he takes the picture plane (the "glass") no longer perpendicular to the ground plane (the "floor"), but at an arbitrary angle. This leads him to two new theorems (Props. 7 and 8), by means of which the construction for this case is reduced to the case of the vertical picture plane. We summarize these theorems in the following way: If the glass, the eye O , and the point P (to be projected from O) are rotated in the same sense through the same angle about the ground line (the "glass ground") and the lines drawn parallel to it through the horizontal projections O_1 of O and P_1 of P respectively, then the image of P in the glass does not change. This theorem led G. Loria to call a more comprehensive theorem after Stevin, which can be stated as follows, in modern terms:

If a plane τ (not passing through the eye or parallel to the picture plane π) is rotated into the picture plane π , then there exists between the projection F' and the rotated points F of the figures of τ a homology which a) has as its axis the intersection of π with the plane τ , b) has as limiting line of F' the vanishing line of τ , c) has as centre of homology the point in π where the eye arrives upon the rotation of the plane parallel to π through the eye³⁰).

Stevin now undertakes the construction of the perspective images of several figures, including that of a "tower", a quadrangular pyramid on top of a cube with a face of the cube as its base; the cube is standing on the ground plane. He also constructs the ellipse as the image of a circle. Some methods of checking the correctness of constructions follow.

These propositions can be considered as forming the first part of the *Verschaeuwing*. The second part (from Prop. 12 onwards) deals with the inverse problem of perspective, a subject already touched by Del Monte. Given a polygon as image, and another polygon in the ground plane turned into the picture plane: to find, if possible, the eye; the angle between picture plane and ground plane is given and is not necessarily 90° . Stevin solves the problem in certain special cases; the solution of the general problem had to wait until the nineteenth century.

The text ends with an "Appendix", which contains certain observations on terminology, a correction of certain constructions by Serlio, and a description of a model described by Dürer, which caught the fancy of Prince Maurice to such an extent that he had it constructed. It was an instrument for drawing the perspective of a figure on a glass plate; it had helped Stevin himself to gain a better understanding of the theory.

Book II of the *Deursichtighe*, the *Catoptrics*, is short and does not contain much that is of interest. We shall not reproduce it; those who like to study this ancient science can find the essentials in Euclid's *Catoptrics*, available in Ver Eecke's beautiful French translation³¹). Stevin must have added the sixteen pages as a tribute to an ancient tradition, but he did not develop the subject with his usual thoroughness. That part of the *Catoptrics* which deals with refraction and which was announced in the Summary, *Van de Wanschaeuwing*, was not even published.

³⁰) G. Loria, *Vorlesungen über darstellende Geometrie I* (Leipzig, 1907), p. 131.

³¹) Ver Eecke, *l.c.* 2).

Stevin was not the only author in the Northern Netherlands of his days to write on perspective. At about the same time that his *Verschaeuwing* was published appeared the *Perspective* of Hans Vredeman De Vries (1527—after 1604). Vredeman De Vries was an architect and decorator, famous in his days, who after travelling widely had finally settled at Leeuwarden, his native city. His works on architecture and perspective were first published around the time of his death by Samuel Marolois, a surveyor and military engineer, and they passed through several editions in different languages³²). The perspective of Vredeman De Vries³³) lacks the mathematical character of Stevin's book, but this flaw is more than compensated by the magnificent illustrations, many of buildings, due to the engraver Hendrik Hondius (1573—1648). Marolois, or Marlo, was an acquaintance of Stevin, with whom in 1611 he was on the examining committee for intending surveyors³⁴). Marolois' own work, published as his *Optica sive Perspective*, contains a *Scenographia*, hence a perspective. It is mathematical in character and, at any rate in the edition of 1633, was also illustrated by Hendrik Hondius. The perspective first appeared in 1614, and passed through several editions³⁵).

By this time Stevin's book had also been republished. It was translated into French — though not completely — for the *Mémoires Mathématiques* of 1608, and into Latin for the *Hypomnemata mathematica* of the same year. Later Girard included the *Optique* in his collection of Stevin's papers brought out in 1634³⁶).

In this competition against the Marolois-Vredeman De Vries books — if we may put it this way — the book of Stevin seems to have lost out. At any rate, we do not know of any later 17th- or 18th-century author who quotes Stevin, against several who prove to be acquainted with Marolois and Vredeman De Vries. The reason probably is that perspective continued to appeal primarily to engineers and architects, and for them the practical and artistic approach of Marolois-Vredeman De Vries had a stronger appeal than Stevin's strictly mathematical exposition. This, of course, does not mean that Stevin's perspective was not read; it is mentioned in the correspondence of Christiaan Huygens and it is not unlikely

³²) On Vredeman De Vries and Marolois see *Alg. Ned. Biographisch Woordenboek*.

³³) *Perspective Pars Altera Auctore Johanne Vredemanno Frisio*. Henric. Hondius Sculps. et excud. cum Privil. Lugduni Batavorum (publ. 1605, there exists a first part of 1604; dedication to Prince Maurice, signed Lugd. Bat. 1) Marti 1605. There also exists an edition: *Perspective 5e partie de Ioan Vredem. Vriese. Augmentée et Corrigée en divers endroits par Samuel Marolois*, 1615, Hagae Comit. Hollandiae apud Henr. Hondium. Cum privil. Arnheimi apud Johannem Janssonium Bibliopolam.

³⁴) Th. Morren. *Dossier Simon Stevin*. Municipal archives, The Hague. See E. J. Dijksterhuis, *Simon Stevin* ('s Gravenhage, 1943, IX + 379 pp.), p. 17: On Feb. 17, 1611 Stevin examines, together with Marlo, a candidate for the function of surveyor.

³⁵) *Perspective contenant la Théorie et Pratique d'icelle, par Sam. Marolois*, à la Haye, chez Henr. Hondius, 1614.

There also exists a French edition in:

Opera mathematica ou Oeuvres Mathématiques traitans de Géométrie, Perspective, Architecture et Fortification, par Samuel Marolois . . . Hagae-Comit., Ex officina Henrici Hondii 1614.

The ed. of 1633 is: *Samuelis Marolois . . . Opticae sive Perspectivae: pars prima*. (Amstelodami, I. Ianssonii).

³⁶) *Work XIII*.

that young 's Gravesande had studied it before he wrote his *Essai de perspective* (1711)³⁷). And so Stevin's book remained in relative obscurity until it was rediscovered by Michel Chasles in his *Aperçu historique* (1837). Chasles admired the book: "...mais nous nous étonnons que l'on passe sous silence Stévin qui..... avait aussi innové dans cette matière, qu'il avait traitée en géomètre profond, et peut-être plus complètement qu'aucun autre, sous le rapport théorique"³⁸).

After Chasles' rediscovery of the book, its contents have received the attention of Poudra, Loria and Dijksterhuis³⁹).

In the translation we have tried to maintain the flavour of some of Stevin's terms, using "glass" for picture plane, etc. The text itself gives the explanation.

³⁷) W. J. 's Gravesande. *Essai de perspective* (La Haye, 1711); C. Huygens, *Oeuvres complètes* VI, p. 216.

³⁸) M. Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie...* (Bruxelles, 1837, 2nd ed., 1875), 2nd ed., p. 347.

³⁹) Poudra, *l.c.*⁹), Dijksterhuis; *l.c.*³⁹), Loria *l.c.*²⁸), also G. Loria, *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Milano, 1921, pp. XXIV + 584 pp.) and C. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* I (Leipzig 1884), pp. 5-61. Corrections to Poudra by L. Cremona, *Rivista ital. di scienze, lettere ed arti* 5 (1865), pp. 226-231, 241-245; P. Riccardi, *Bibl. math.* 1889, pp. 39-42. Many historical notes also in K. Rohn-E. Papperitz, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Leipzig, 3 vols) I, II (4e Aufl. 1913, 1916), III (3e Aufl., 1906), and G. Scheffers, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* II (Berlin, 2e Aufl. 1927), pp. 37-40.

Vertical line on the left side of the page.

D E R D E
S T V C K D E R
W I S C O N S T I G H E
G H E D A C H T N I S S E N

V A N D E
D E V R S I C H T I G H E. De perspekt.
viii.

Inhoudende t'ghene daer hem in gheoeffent heeft

D E N D O O R L V C H T I C H S T E N
Hoochgeboren Vorst ende Heere M A V R I T S Prince van
Oraengien, Grave van Nassau, Catzenellenbogen, Vianden, Moets &c.
Marckgraef vander Vere, ende Vlissinghen &c. Heere der Stadt Grave,
ende S'lands van Cuyc, St. Vyr, Däesburch &c. Gouverneur van
Gelderlant, Hollant, Zeclant, Westvrieland, Zurphen,
Vtrecht, Overysfel &c. Opperste Veltheer vande
vereenichde Nederlanden, Admirael
Generael vander Zee &c.

Beschreven deur SIMON STEVIN van Brugghe.



T O T L E Y D E N,
By Ian Bouwensz. woonende op de hoogelantsche Kerckgraft.

Anno c13 13 cv.

C O R T B E G R Y P

der Deursichtighe.

*Perpelli-
um.
Elementi
catoptrici.
Refractione.*

V A N D E deursichtighe sullen drie boucken beschre-
ven vvorden: T'eerste vande * Verschaeuving: Het
tvyvede vande * Beginfelen der Spieghelschaeuven: Het
derde vande * Wanschaeuving.

SUMMARY OF OPTICS

Of Optics three books are to be described: the first of Perspective; the second of the Elements of Catoptrics; the third of Refraction.

E E R S T E

B O V C K D E R

D E V R S I C H

T I G H E

V A N D E

V E R S C H A E V

W I N G.

*Scenog-
phia.*

FIRST BOOK OF OPTICS

OF SCENOGRAPHY, COMMONLY CALLED PERSPECTIVE¹⁾

¹⁾ The literal translation of the title is *First Book of Perspective. Of Scenography*. By perspective Stevin understood something else than we do (see Introduction), so that in the Second Book of his *Perspective* he discussed reflection and refraction. The term "scenography", which Stevin translates into Dutch as "verschaeuwing" is the term for what we at present call "perspective", and we therefore translate "verschaeuwing" by "perspective", occasionally by "perspective proper".

ANDEN LEZER.



† Ichmogra-
phias.
Plans.
* Orthogra-
phias.
Profil.
‡ In tertia
specie.
* Scenogra-
phia, seu
Sciographia.

Mathemati-
ca demon-
stratione.

Architectu-
ram.
† Architecto,

Inventioni-
bus.

ALSOO *sijn* VORSTELICKE GHE-
NADE hem dickwils oeffende in te trecken
† grontteykeninghen, en * stantteykenin-
gen van sterckten, die hy veroirdende inde
Landen sijnder regering, heeft oirboir be-
vonden hem oock te oeffenen inde derde † af-
comst der teykening te wvet en het * ver-
schaeuwen of schilderen, en dat voorna-
melick van Lantschappen, met steden, stroomen, weggen, en bos-
schen daer in gheleggen, om daer deur anderen *sijn* meyning, alst de
saeck vereyscht, lichtelicker te verclaren: Ghebruyckte hier toe tot
onderwijfers, de bequaemste meesters in schilderie die der te be-
commen waren: Doch want de vercorting der linien, en veran-
dering der houcken wyter oogh, of byder gisse toeginck, en heeft hem,
hoe wel het *sijn* oirboir ghebruyck can hebben, daer me niet ver-
nough, maer willen een voorghestelde verschaeulicke saeck vol-
comelick afteykenen, met kennis der oirsaken en *sijn* * wisconstich
bewijs. Nu alsoo ick over eenighe jaren, voor my self beschreven
had een HVYSBAV, tot welcx oeffening den Boumeeſter, na
† ghemeen ghevoelen van welen, en † besonder gevoelen van Vitru-
vius int 2 hoofstick *sijns* 1 boucx, kennis der verschaeuwing
voorderlick is, soo heb ick breeder dan daer te vooren, deursien en
ondersocht verscheyden Schrijvers van dese st of handelende, en na
mijn stijl van dies een beschrijving ghemaeckt: Welcke nadiense
sijn VORSTELICKE GHENADE oversien hadde, en helpen
verbeteren de onvolcomentheden die ghemeenlick in eerste * won-
den *sijn*, oock grondelick verstaen de ghemeene reghel om alle voor-
ghestelde verschaeulicke saeck te verschaeuwen, en dat hy tot *sijn*
vernoughen dadelick verschaeude: Soo heb ick dese beschrijving on-
der *sijn* WISCONSTIGHE GHEDACHTNISSEN ver-
vough, om de redenen van dies int beghin breeder verclaert.

CORT-

TO THE READER

As his *Princely Grace* frequently exercised himself in drawing ground and vertical plans for fortification, which he erected in the lands under his government, he found it useful to exercise himself as well in the third species of drawing, to wit perspective or painting, such mainly of landscapes, with cities, rivers, roads, and woods situated therein, thus to explain more easily to others his views, as required by the matter. To this end he used as teachers the ablest masters of painting that could be obtained. But because the foreshortening of the lines and the change of the angles was obtained by sight or by guessing — which have their use — he was not satisfied with this, but wished to design exactly the perspective of any given figure, with knowledge of the causes and its mathematical proof. Now since I had some years ago myself described an *Architecture* ²⁾, to the practice of which, in the common opinion of many and the special opinion of Vitruvius in the 2nd chapter of his 1st book ³⁾, knowledge of perspective is conducive, I perused and examined, more fully than before, several writers who deal with this subject and made a description thereof in my own words. And after his *Princely Grace* had looked it through and helped to correct the imperfections that are commonly found in first attempts, had also fundamentally understood the common rule of finding the perspective of any given figure, and to his satisfaction practised it, I included this description among his *Mathematical Memoirs*, for the reasons set forth more fully at the beginning.

²⁾ This book was never published and the manuscript seems to be lost. Stevin also refers to it in his *Eertelooischrift*, 2nd Book, Preface. Notes made by I. Beeckman and H. Stevin have been preserved, see *Journal tenu par Isaac Beeckman*, publié par C. De Waard, II, La Haye, 1942, pp III-IX.

³⁾ Vitruvius writes: "Its forms of expression [of Arrangement, *διασεις*] are then: groundplan, elevation and perspective. A groundplan is made by the proper successive use of compasses and rule, through which we get outlines for the plane surfaces of buildings. An elevation is a picture of the front of a building, set upright and properly drawn in the proportions of the contemplated work. Perspective is the method of sketching a front with the side withdrawing into the background, the lines all meeting in the centre of a circle." (Vitruvius, *The Ten Books on Architecture*, transl. M. H. Morgan, Cambridge, Mass., 1914, pp. 13-14). Vitruvius' expression for groundplan is "*ichnographia*", for elevation "*orthographia*", for perspective "*scenographia*".

C O R T B E G R Y P.

5

*Argumen-
tum.*

BENEFFENS ses* verdoogen, dienende tot gront en bewijfing *Theorematid*
 der faeck, soo sullender beschreven worden 8 * werckfticken, *Problemata,*
 welcker eerste is het 5 * voorstel, van t'vinden der schaeu eens ghe- *Propofitio,*
 gheven verſchaeulick punts inde vloer, metter glas rechthouckich
 op de ſelve vloer. Het 6 voorstel van t'vinden der ſchaeu eens ghe-
 gheven verſchaeulick punts boven de vloer, metter glas rechthouc-
 kich op de ſelve. Het 9 voorstel, van t'vinden der ſchaeu eens ghe-
 gheven verſchaeulick punts, metter glas ſcheefhouckich op de
 vloer. Het 10 voorstel, van t'vinden der ſchaeu eens ghegeven ver-
 ſchaeulick punts, wefende t'glas ewewijdich mette vloer. Int
 11 voorstel vintmen deur al deſe voorgaende de ſchaeu van alle ghe-
 gheven verſchaeulicke form. Daer na volght int 12, 13, 14 voorstel,
 het vinden des ooghs van ſeker ghegheven ſchaeuwen, om de ſelve
 in haer volcomenheyt te ſien. Maer om de voorgaende oirden deur
 * rweefpaltig opentlicker te verclaren, ſullen daer af noch deſe ta- *Dichotomiam.*
 fel beſchrijven.

Inden handel deſer ver- ſchaeuwing, wort gefocht	der ver- ſchaeu- licke pun- tē ſchaeu, wefende s'glas op de vloer	rechthou- kich, al waer- men vint de ſchaeu eens verſchaeu- licke punts	inde vloer int 5 voorstel. boven de vloer int 6 voorstel. ſcheefhouckich int 9 voorstel. mette vloer ewewij- dich int 10 voor- ſtel.	En deur al deſe voorgaende, vintmen de ſchaeu van een ghegheven verſchaeulicke form int 11 voor- ſtel.
		niet recht- houckich, se wesen		
	<i>de plaats des ooghs, om in volcomenheyt te ſien de ghegheven ſchaeu van een verſchaeulicke form int 12, 13, en 14 voorstel.</i>			

De reſt der voorſtellen verdoogen ſijnde, dienen tot grontt en
 bewijfing der boveſchreven werckfticken.

SUMMARY

Besides six theorems serving as base and proof of the matter, there are to be described 8 problems, the first of which is the 5th proposition, of the finding of the image of a given point ⁴⁾ in the floor, with the glass ⁵⁾ at right angles to the said floor; the 6th proposition, of the finding of the image of a given point above the floor, with the glass at right angles to the same; the 9th proposition, of the finding of the image of a given point, with the glass at oblique angles to the floor; the 10th proposition, of the finding of the image of a given point, the glass being parallel to the floor. In the 11th proposition, with the aid of all the preceding propositions the image of any given figure is found. Then follows in the 12th, 13th, and 14th propositions the finding of the eye of some given images, in order to see them in their perfection. But in order to set forth the preceding division more clearly by dichotomy, we will also give this table thereof.

In this treatise on perspective is sought	the image of the object point, the glass being on the floor	at right angles, where the image is found of a point	in the floor in the 5th proposition above the floor in the 6th propo- sition	and from all the preceding propositions the image of a given figure is found in the 11th propo- sition
		not at right angles, to wit	at oblique angles in the 9th propo- sition parallel to the floor in the 10th pro- position	
the place of the eye, in order to see in perfection the given image of a figure, in the 12th, 13th, and 14th propositions.				

The rest of the propositions, being theorems, serve as base and proof of the problems described above.

⁴⁾ Stevin's "verschaeuwlyck punt" means literally "point to be brought into perspective". The sense usually remains clear when we simply translate it by "point", sometimes by "object point".

⁵⁾ We keep Stevin's term "glass" for the picture plane.

VERMAEN VOOR DEN GHENEN DIE HEM TOT TET dadelick verschauwen vvil begheven.



NGHESIEN inden navolghenden handel der verschauwing, meer voorstellen en beschrijvinghen comen dan totte eyghen dadelicke verschauwing noodich sijn, dienende tot verclaring der oirsaken, en tot bewijs dat de selve dadelicke verschauwing, voortbrenge de ware schaeu van het verschaeulicke: Soo

volght hier uyt dattet hemlien die dadelick verschauwen willen, moeylick mocht vallen daer uyt te verkiefen t'ghene eyghentlicken alleen totte dadelicke verschauwing dient. Tot desen eynde segghen wy hier, dat een die alles

Mathematio.

wilde ghelooven sonder bewijs (welck voer een nateurlick * wiskonstnaer niet wel doenlick en schijnt, ten waer met meyning vande bewijsen daer na te verstaen) oft anders, soo ymant die de bewijsen eens voor al verstaen heeft, en hem op de saeck betrouet, daer na metter daet verschauwen

Mechanic.

wilde, soude ten eersten meuphen vallen ant 5 voorstels 2 voorbeelt * tuyckverckelick afsheveerdicht, al waer gheuewen wort de verschauwing eens verschaeulick punts inde vloer: Ende int 6 voorstels 2 tuyckverckelick voorbeelt, de verschauwing eens verschaeulick punts boven de vloer, elck met een glas rechthouckich op de vloer, want deur kennis der verschauwing van sulcke twee punten, krijcht men de schaeu van alle ghegeven verschaeulicke lini in t'welck de gantsche verschauwing beslaet. Doch salmen hier toe noch bedencken, de cortheiden diemen int verck krijcht verclaert achter het

Articuli.

II voorstel in ses* leden. Angaende verschauwing mettet glas te stellen

Parallela.

scheeftouckich op den vloer, of daer me * overrijdich, soodanighe verschauwing schijnt selden begheert te worden, sulcx dat de oeffening in dies voor t'eerste niet seer noodich en is: Hoe wel nochtans tot volcommen kennis der heele verschauwing, daer af voorbeelden t'haerder plaats sullen beschreven sijn.

B E P A -

ADMONITION TO THOSE WHO WISH TO PRACTISE PERSPECTIVE.

Since in the following treatise on perspective are contained more propositions and descriptions than are necessary for the practice of perspective proper, which serve to explain the causes and to prove that the said practice of perspective produces the true image of the thing, it follows that it may be difficult for those who wish to practise perspective to select therefrom that which properly and only serves for the practice of perspective. For this purpose we here say that if anyone should be willing to believe everything without proof (which does not seem very well possible for a born mathematician, unless he meant to understand the proofs afterwards), or else if anyone who has once for all understood the proofs and relies thereon wished subsequently to practise perspective, he might begin with the 2nd example of the 5th proposition, set forth mechanically, where is shown the perspective of a point in the floor; and with the 2nd mechanical example of the 6th proposition, the perspective of a point above the floor, each with a glass at right angles to the floor, for through knowledge of the perspective of two such points one obtains the image of any given line, in which the whole of perspective consists. But in this connection the abridgements that are obtained in the construction, expounded after the 11th proposition in six sections, should also be borne in mind. As to perspective with the glass at oblique angles to the floor or parallel thereto, such perspective seldom seems to be required, so that practice in this is not, to begin with, very necessary, although, for the perfect knowledge of the whole of perspective, examples thereof are to be described in their proper places.

BEPALINGHEN.

7

Disquisitiones.

1 BEPALING.

Verfchaeuwing is der verheven dingen plat namaeck-
fel verheven schijnende. *Scenographia.*



Perpētiva
us genu.
Species.
Carpirick.
Umbra re-
fracta.
Planispha-
ria.
Scioterica.
Effeta.
Species.
Scenogra-
phiam.

De * deursichtige als gheslacht hebben verscheyden
* ascomsten, ghelijck sijn * Spieghelschacuwen,
* Breeckschacuwen, * Platclooten, * Sonwijfers, Ver-
schaeuwing, en meer ander die met malcander inde
deursiening eenighe ghemeenschap hebben, doch
alsoo heur * daden tot verscheyden eynden strec-
ken, en vervolghens verscheyden manier van werc-
king behouven, soo wort elcke * ascomst als beson-
der const met onderscheyt ghenoomt, en oidentlick
beschreven. Onder de selve stellen wy ons hier de
* Verschaeuwing voor: Om welcx eyghenschappen
deur bequaem voorbeelt opentlick te verclaren, ghenomen dat ymant saghe ce-
nich ghesicht, deur een suver even plat claer glas, daermen alle dinghen deur
siet ghelijckse sijn, sonder verandering, en daermen op die verschijnende form
dieder eyghentlick int glas niet en is, teyckende foodanighen form dieder bleve:
De selve afgheteyckende platte form verheven schijnende, soude de ware ver-
schaeuwing sijn van dat ghesicht, ghesien van op die plaets. Maer want sulcke
afteyckeninghen niet al op glas of deurluchtighe stoffen begheert en worden,
oock datmen se scherper en suyperder wil hebben dan foodoenlick is, boven
dien dat de ghesichten of saken diemen afteyckenen wil, somwijlen niet we-
sentlick voor t'ghesicht en staen, maer alleenelick int ghedacht, soo sijnder se-
ker reghelen gevonden, deur welckmen de schacuwen der verschaeulicke saken
met haer vercortinghen, verlanginghen, en veranderinghen, op haer eyghen
verschaeude maet ghewislick teyckenen can: T'beschrijven der selve, t'welck
hier t'voornemen is, wort Verschaeuwing gheheten.

2 BEPALING.

Wesende een lichaem ghesneen met een * sichteinder-
plat alsoo dat daer in verschijnen de ghemeene sneen des
selven en der verheven vlacken die daer in sijn of verdocht
vvorden: Die verschijnende form heet * Grondt teyck-
kening. *Plano hosi-*
zomate.
Ichnogra-
phia, Plan:

Laet by voorbeelt de linien der byghevoughde form, beteyckenen de ghe-
meene sneen des sichteinderplats, en der verheven platten van het buyten en
binne schocysel der wallen van een sterckte, met vier bolwercken ligghende op
een plat even lant.

A 4

Die

DEFINITIONS

1st DEFINITION

Perspective is the plane imitation of elevated objects, which gives the impression of elevation.

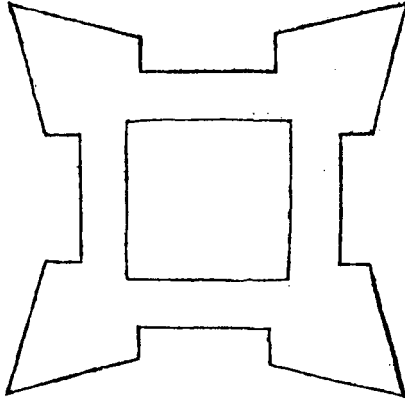
Optics as genus has several species, such as Catoptrics, Dioptrics, Planispheres, Sun-dials, Perspective proper, and several others, which have something in common in pertaining to optics, but since their effects serve different ends and consequently they have to be performed in different ways, each species is discussed separately as a special art and described in due order⁶). Among these we here intend to discuss Perspective proper. And in order to expound its properties openly by means of a suitable example: assuming that a man were to see some building through a pure, uniformly flat, clear glass, through which all things are seen as they are, without any change, and that on the figure appearing on the glass, though not actually there, he were to draw a figure which remained there, the said delineated plane figure, which would seem to be elevated, would be the true perspective of that building, viewed from that place. But because such delineations are not all required on glass or transparent materials, and also because they are desired sharper and purer than is feasible in this way, and while moreover the buildings or objects that we wish to draw are sometimes not really before the observer's face, but only in imagination, certain rules have been found, by means of which the images of the objects, with their foreshortenings, lengthenings, and changes, can be drawn with certainty on their own scale of perspective; the description of these things, which is the object of this treatise, is called Perspective.

2nd DEFINITION

If a body be intersected by a horizontal plane in such a way that there appear therein the intersections of this plane and the elevated planes which are, or are imagined, therein, then the resulting figure is called Ground-plan.

For example, let the lines of the figure overleaf denote the intersections of the horizontal plane and the elevated planes of the outward and inward slopes of the walls of a fortification, with four bulwarks, lying in flat, level country.

⁶) This program was not carried out, at any rate not in print. We only have Stevin's *Perspective* and his *Catoptrics*.



Die form heet grontteyckening, soo veel te seggen als teyckening des gronts daermen war op begheert te bouwen, ghelijck hier de wallen.

Speies. Maer wantmen daer in noch niet en siet de hooghde, maet, en form der selve verheven of staende wallen, soo isser een derde * afcomst van teyckening deser ghedaente:

3 B E P A L I N G.

Horizontem. Wefende een lichaem gesneen met een plat rechthouckich op den * sichteinder, alsoo dat daer in verschijnen de ghemeene sneen des selfden, en der vlacken die dat dadelick, of deur t'ghedacht snyen: Die verschijnende form heet * Stantteyckening.

*Orthograpia.
Profil.*

Escarpe.

Laet by voorbeelt den wal dieder verdocht wort te staen op de grontteyckening der 2 bepaling, deursneen sijn met een plat rechthouckich op den sichteinder, en de sneen die d'ander platten daer in doen, sijn dusdanich, A B sine des sichteinderplats, B C de sine vant plat des * buyteschoeyfels, C D sine vant plat der cruyn, D E sine van t'plat des borstweers, E E sine vant plat des ganex, F A sine vant plat des binneschoeyfels: Ende t'plat in dielinien begrepen als A B C D E F, heet stantteyckening van wegghen dattet teyckening is, overeynde staende. Ende ghelijck wy hier t'voorbeelt ghestelt hebben van een sterckte, alsoo salmen derghelijcke verstaen op ander ghestichten, en dinghen diemen schildert of verschaect,



Maer

This figure is called ground-plan, which is to say a plan of the ground on which it is desired to build something, as in this case the walls.

But because in this the height, size, and form of the said elevated or standing walls are not yet seen, there is a third species of drawing, of the following kind:

3rd DEFINITION

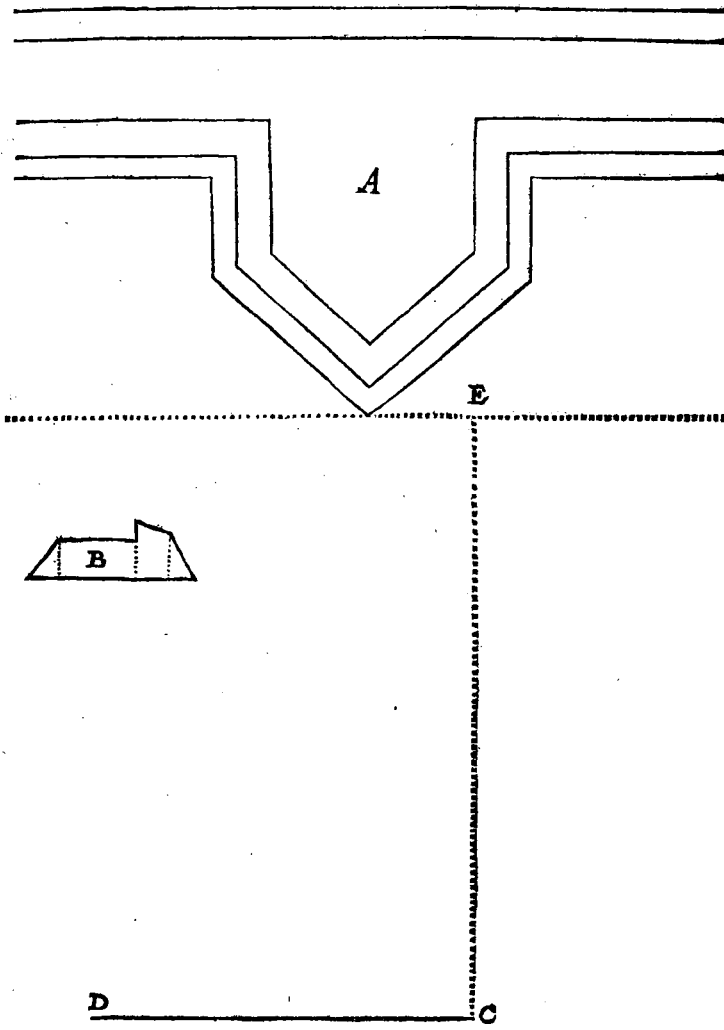
If a body be intersected by a plane at right angles to the horizon, in such a way that there appear therein the common intersections of this plane and of the planes intersecting it actually or in imagination, then the resulting figure is called the Vertical Plan.

For example, let the wall which we imagine as standing on the ground-plan of the 2nd definition be intersected by a plane at right angles to the horizon, then the intersections which the other planes produce therein are as follows: *AB* intersection with the horizontal plane, *BC* intersection with the plane surface of the outward slope, *CD* intersection with the plane of the top, *DE* intersection with the plane surface of the parapet, *EF* intersection with the plane surface of the walk, *FA* intersection with the plane surface of the inward slope; then the plane contained by those lines, namely, *ABCDEF*, is called the vertical plan, because it is a drawing standing vertically. And in the same way as we have here given the example of a fortification it should be understood of other buildings and objects which are painted or drawn in perspective.

Maer om nu te segghen vant onderscheyt ende eyghenschappen der bove-
 schreven drie * afcomsten van teyckening, soo iste weten dat grondteyckening *Species.*
 en stantteyckening, bequaem sijn om daer deur te maken een ghesicht op sijn
 behoerlicke maet, en van begheerde form: Als by voorbeelt, soo ymant seght
 dat hy een sterckte ghemaect wil hebben, van form en grootheyd ghelijck de
 twee voorgaende teyckeninghen anwijfen, men can deur de selve (de cleyne
 maet daer by ghevought sijnde na t'behooren) sijn begheerte nacommen:
 Maer niet alsoo mette verschaeude form, om datse de linien en houcken niet
 * eyredelick en heeft mette begheerde: Doch heeftse die eyghenschap, datse *Propor-
 tionales.*
 verhoont hoe de ghemaecte sterckte int ghesicht verschijnt, of verschijnen
 sal. Tis oock te weten dat grondteyckening en stantteyckening totte volcom-
 men verschaeuwing noodich sijn: Als by voorbeelt, also sijn VORSTELI CKE
 GHENADE van wille was te verschaeuwen een seker bolwerck heel met eer-
 de ghevult, op een rechte gordine, stelde sich voor de grondteyckening hier
 achter A, wiens verheven wercken, als wallen en borstwercen daer op com-
 mende, anghewesen sijn mette stantteyckening B, voort bediet C de voet,
 waer op een lini verdocht als siendermaet even an C D, en rechthouckich op
 de vloer, dats hier opt plat des blats, t'eynde dier lini was de plaets des ooghs
 inde locht, van daer hy dat bolwerck wilde ghesien hebben, en volghende dat
 gheselde, dede daer af de volghende verschaeuwing, welcke uyt sijn teycke-
 ning in hout ghesneen wiert, en ghedruckt als men hier achter siet. Maer om
 voor de schaeu het oogh op sijn behoerlicke plaets te stellen, diens vinding
 int volghende gheleert sal worden, men soude opt punt F, bedencken een
 rechte lini even an C E, en rechthouckich opt plat des blats, want ant
 cynde der selve het oogh vervought, men siet de schaeu in haer volcom-
 menheyd.

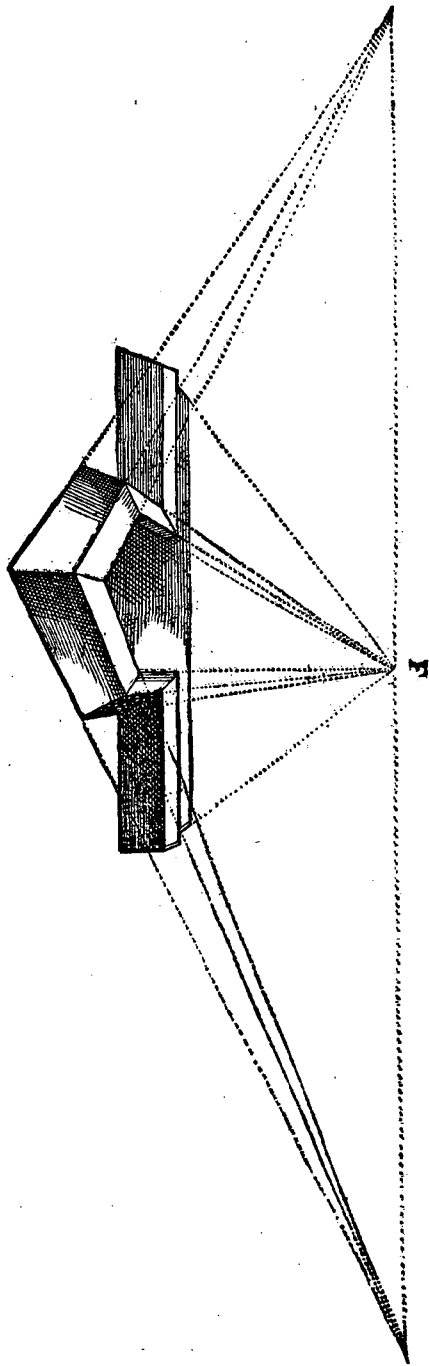
But to speak now of the difference and the properties of the three species of drawings described above, it should be known that a ground-plan and a vertical plan together can be used to make a building of the appropriate dimensions and desired form. As, for example, if anyone says that he wishes to have a fortification made of the form and size as indicated by the two preceding drawings, then it is possible to meet his requirement (a small measure being added thereto, as it should be). But not so with the perspective image, because it does not have the lines and angles proportional to those required. On the other hand it has the property that it shows how the constructed fortification appears or will appear to the eye. It should also be known that the ground-plan and the vertical plan are necessary for making a perfect perspective drawing. For example, when his *Princely Grace* wished to make a perspective image of a certain bulwark completely filled with earth on a straight curtain, he proposed the ground-plan *A* overleaf, the elevated parts of which, as walls and parapets built thereon, are indicated by the vertical plan *B*; further *C* signifies the foot, on which a line, imagined as the observer's measure ⁷⁾, equal to *CD* and at right angles to the floor, that is here to the plane of the paper; the end of this line was the place of the eye in the air from which he wished to have the bulwark viewed. And, following up the supposition, he made therefrom the following perspective image, which was cut in wood from his drawing and printed as seen overleaf. But to place the eye in the proper position for regarding the image, the finding of which position is to be taught in the sequel, one should imagine at the point *F* a straight line equal to *CE* and at right angles to the plane of the paper, for when the eye is placed at the end thereof, then we can get a perfect view of the image.

⁷⁾ or "observer's height"



VANDE VERSCHAEVWING.

11



4 BEPALING.

Tverschaeulick noemen vvy daer de verschaeuvving na ghedaen vvort: En die ghedaen verschaeuvving haer schaeu.

Alse en punt, lini, vlack, of lichaem, daer de verschaeuwing na gheschiet, heet int ghemeeen t'verschaeulick; en int befonder verschaeulick punt, verschaeulicke lini, verschaeulick vlack, verschaeulick lichaem: Maer de verschaeuwing na elck ghedaen heet yders schaeu.

5 BEPALING.

Vloer is het plat daer een verschaeulicke form boven staet of op light.

6 BEPALING.

Oogh is een punt datmen neemt des ooghs sienlick vverck te doen.

7 BEPALING.

Sienderlijn is een rechte vant oogh totte vloer, en haer uysterste inde vloer heet voet.

*Perpendicu-
lari.*

Want de * hanghende lini vant oogh totte vloer daer een verschaeulick ghesicht of verschaeulicke form op staet, ghelijckheyt heeft mette langde des sienders, sy wort Sienderlijn gheheeten. Ende haer uysterste inde vloer heet om sulcke ghelijckheyt oock voet.

8 BEPALING.

Siendermaet is een lini even ande sienderlijn.

Want de ware sienderlijn verheven staet op de vloer, deur de 7 bepaling, en datmen om sulcx eyghentlick na te volghen, op de blaren der boucken als vloer ghenomen, linien soude moeten teyckenen, die verheven stonden opt plat der selve blaren, t'welck onbequamelick te werck soude gaen, en totte leering niet seer voorderlick wesen; soo wordet dickwils noodich, de langde van sulcke lini opt plat des blats te teyckenen, welcke niet de eyghentlicke sienderlijn self wesende, maer allecnelick de maet daer af, en vervolghens als maet des sienders, wy noemen se Siendermaet.

9 BEPA-

4th DEFINITION

We call the object that from which the perspective is made, and the perspective made, its image.

Thus a point, line, plane or solid from which the perspective is made is called in general the object, and in particular: object point, object line, object plane, object solid. But the perspective made from each is called its image.

5th DEFINITION

Floor ⁸⁾ is the plane on which an object stands or lies.

6th DEFINITION

Eye is a point which is assumed to perform the visual function of the eye.

7th DEFINITION

Observer's Line is a straight line from the eye to the floor, and its extremity in the floor is called foot ⁹⁾.

Because the vertical from the eye to the floor on which a building or an object stands is equal to the length of the observer, it is called Observer's Line. And its extremity in the floor is called foot because of this equality.

8th DEFINITION

Observer's Measure is a line equal to the observer's line.

Since the true observer's line is erected on the floor, by the 7th definition, and, in order to imitate this in actual fact, it would be necessary to draw, on the pages of the books taken as floor, lines which would be erected on the plane of said pages, which would be inconvenient to accomplish and would not be greatly conducive to the instruction, it often becomes necessary to draw the length of such a line in the plane of the paper, which, as not being the actual observer's line itself, but only its measure, and consequently the measure of the observer, we call Observer's Measure.

⁸⁾ We keep Stevin's term "floor" for the ground plane.

⁹⁾ The usual term for Stevin's "observer's line" is prime vertical, for his "foot" is centre of vision.

9 BEPALING.

Glas is \star een oneyndelick plat tusschen het oog en de verschaeulicke form, vvaer in ghenomen vvort de verschaeulicke haer schaeu te verthoonen. Planum infinitum.

Alsooder in plaets vant glas daer onder d'eerste bepaling af gheseyt is, een plat bedocht wort, waer in men neemt de schaeu vant verschaeulick te staen, soo wort dat plat tot onderfcheyt van ander platten het glas ghenoomt.

10 BEPALING.

Glasgront is sijn en des vloers ghemeene sne.

11 BEPALING.

Strael is de rechte lini die uyt het oog comt.

12 BEPALING.

Saempunt is daer de voortghetrocken schaeuyven van verscheyden verschaeulicke rechte \star evenvijdighe linien Paralleli. in versamen.

Evevijdighe verschaeulicke rechte linien voortghetrocken sijnde, en connen niet versamen deur *Euclidis* 35 bepaling, maer wel haer voortghetrocken schaeuwen, alsoe van haer verschaeulicke onevevijdich sijn, ghelijck int 3 voorstel verclaert sal worden. Nu t'punt der versaming van soodanighe heet Saempunt.

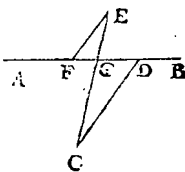
13 BEPALING.

En sulcke linien die alsoo int saempunt vergaren, heeten saemlijnen.

14 BEPALING.

Een rechte lini ghetrocken inde vloer, vande voet totte glas gront, heet vloerlijn: En haer raeckfel int glas, vloerlijnraeckfel.

Laet A B de glasgront beteyckenen, C de voet, van welke ghetrocken is de rechte lini CD, tot inde glasgront, de selve CD heet vloerlijn, en haer raeckfel D int glas A B, heet vloerlijnraeckfel.



15 BEPA.

9th DEFINITION

Glass is an infinite plane between the eye and the object figure, in which this figure is assumed to show its image.

When instead of the glass, to which we referred under the first definition, a plane is imagined in which the image of the figure is taken to stand, this plane, to distinguish it from other planes, is called the glass.

10th DEFINITION

Glass base ¹⁰⁾ is the intersection of the glass and the floor.

11th DEFINITION

Ray is the straight line coming from the eye.

12th DEFINITION

Meeting point ¹¹⁾ is the point in which the produced images of different straight parallel lines meet.

Straight parallel lines, being produced, cannot meet, by *Euclid's* 35th definition ¹²⁾, but their produced images can, if they are non-parallel to their object lines, as will be explained in the 3rd proposition. Now the point where such lines meet is called Meeting Point.

13th DEFINITION

And such lines thus meeting in the meeting point are called meeting lines ¹³⁾.

14th DEFINITION

A straight line drawn in the floor from the foot to the glass base is called floor line, and its point of intersection with the glass, floor-line glass point.

Let AB denote the glass base, C the foot, from which is drawn the straight line CD to the glass base. This CD is called floor line, and its point of contact D in the glass AB is called floor-line glass point.

¹⁰⁾ Modern: ground line.

¹¹⁾ Modern: vanishing point.

¹²⁾ Now listed as Def. XXIII: "Parallel straight lines are straight lines which being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction". (T. L. Heath I p. 154). This definition is listed as Def. 35 in the edition of the *Elements* by Zamberti (1537) and by Commandino (1572), as Def. 34 in the Clavius edition of 1574.

¹³⁾ Stevin's terms "saempunt" and "saemlijn" are here translated by "meeting point" and "meeting line".

15 BEPALING.

Wesende van een ghegheven verschaelick punt inde vloer ghetrocken een oneyndelicke evenvijdighe mette vloerlijn: De sne der selve inde glasgrondt noemen vvy glasgrondts eerste sne.

Laet inde form der 14 bepaling, E sijn een ghegheven verschaelick punt inde vloer, vant welck ghetrocken is een oneyndelicke E F evenvijdighe met D C, snyende de glasgront A B in F, de selve sne F noemen wy glasgrondts eerste sne.

16 BEPALING.

Wesende van een ghegheven verschaelick punt inde vloer, ghetrocken een rechte lini totte voet: De sne der selve inde glasgrondt, noemen vvy glasgrondts tweede sne.

Laet inde form der 14 bepaling, vant ghegheven verschaelickpunt E, ghetrocken sijn de rechte lini E C, van E totte voet C, snyende de glasgront A B in G, de selve sne G, noemen wy glasgrondts tweede sne.

Postulata.

BEGHEERTEN.

I BEGHEERTE.

Dattet natuerlick verschaelick punt, sijn schaeu in een natuerlick plat glas, en het natuerlick oogh, in een rechte lini sijn

33 grad.

Een natuerlick verschaelick punt, sijn schaeu in een natuerlick plat glas, en het natuerlick oogh, en sijn niet nootfakelick in een rechte lini, om dat wy geen wesentlicke saeck self en sien, maer alleenelick de schaeu van dien, misschien op een ander plaets, t'welck aldus behoont wort: Ymant duwende ter sijden an sijn oogh, doet het ghene hy siet, verre wijcken vande plac's daer hyt sonder duwen sach: En hoewel sommighe t'ghesicht soo hebben, datse dese verandering naulick of niet mercken en connen, doch ander siense seer wel: ick hebse dadelick tot over de * 33 trap. bevonden, want soo groot was den houck tusschen de twee schaeuwen, d'eene ghesien vant ghedude, d'ander vant ongedude oogh: Maer de ware saeck blijft in haer plaets, daerom t'ghene alsoo van sijn plaets verschiet, en is de wesentlicke saeck self niet, maer alleenelick de schaeu van dien: Welcke schaeu met haer schaeu int glas, en het oogh in een rechte lini sijnde, seker de ware saeck tot een ander plaets wesende als gheseyt is, en can met d'ander twee in gheen rechte lini sijn. Hier uyt volght dat alimen mettet woort verschaelickpunt, verstonde de gesien schaeu des wesentlick punts, dar

alsdan

15th DEFINITION

If from a given point in the floor there be drawn an infinite line parallel to the floor line, then we call its intersection with the glass base the first intersection of the glass base.

In the figure of the 14th definition let E be a given point in the floor, from which there be drawn an infinite line EF parallel to DC , intersecting the glass base AB in F : we call this point of intersection F the first intersection of the glass base.

16th DEFINITION

If from a given point in the floor there be drawn a straight line to the floor, then we call its intersection with the glass base the second intersection of the glass base.

In the figure of the 14th definition let there be drawn from the given point E the straight line EC from E to the foot C , intersecting the glass base AB in G ; we call this intersection G the second intersection of the glass base.

POSTULATES

1st POSTULATE

That the natural point, its image in a natural plane glass, and the natural eye are in a straight line.

A natural point, its image in a natural plane glass, and the natural eye are not necessarily in a straight line, for we do not see a real object, but only its image, perhaps in a different place, which is shown as follows: When a man presses from the side against his eye, he causes that which he sees to deviate from the place where he saw it without pressing. And though the eyesight of some people is such that they can hardly perceive this deviation, if at all, others see it quite well. I have found it in practice to exceed 33 degrees, for thus large was the angle between the two images, the one seen by the pressed eye and the other by the non-pressed eye. But the real object remains in its place; therefore that which shifts its place is not the real object itself, but only its image, and if this image is in a straight line with its image in the glass and the eye, certainly the real object, which is in a different place from the one stated, cannot be in a straight

alſdan t'verſchaeulick punt, ſijn ſchacu in een natuerlick plat glas, en het natuerlick oog, in een rechte lini ſouden weſen, ſonder datmen daer af eenighe toelating behoufde te begheeren: Maer want nu te tijt t'ghemeen ghevoelen anders is, ſoo bebben wy dit willen begheeren, om onbegrepen te ſijn vande ghene die hier namaels de ſaeck ſullen meughen beter verſtaen.

Angaende ymant teghen t'boveſchreven mocht ſegghen, dat wanneer het oogh vry ſtaet ſonder duwen, dat alſdan de gheſien ſchacu effen de weſentlicke ſaeck bedeckt, en t'ſamen als een ſelve ſijn, waer uyt volght dat in ſulcken anſien metter woort verſchaeulickpunt, verſtaen ſijnde het natuerlick verſchaeulickpunt; dattet ſelve met ſijn ſchacu int glas, en het oogh in een rechte lini ſijn, ſonder datmen daer af toelating behouft te begheeren: Hier op wort gheantwoort, dat veel onghedude vrye ooghen, de ſchacu tot een ander plaets ſien dan daer de weſentlicke ſaeck is, als de ooghen van ſchelen die twee voor een ſien, of die maer een ſcheelſichtich oogh en hebben. Ende hoe wel ander oogget min ſcheef ſtaende, min verſchils krijghen tuſſchen de ſchacu en haer weſentlicke ſaeck, en de ooghen heel recht ſtaende, gheen verſchil, nochtans ghemerckt van die heele volcommen rechtheyt, gheen volcommen bewijs en can ghedaen worden (want twee ghelijckſtaende ooghen, connen elck t'ghebreck van wanſichticheyt hebben, ſonder daſe nochtans twee ſchacuwen voor een ſien) ſoo ſchijnt de begheerte in ghenouchſaem reden ghegront.

Merckt noch dat uyt verſcheyden ander oirſaken dan deur t'oogh, de ſchacuwen van haer weſentlicke ſaeck wijcken, als diemen int water meynt te ſien; want noyt menſch en ſach, niet alleen eenige weſentlicke ſaeck int water; maer oock niet de ſelve ſchacu die hy inde locht daer af ſien can, dan een ander ſchacu tot een ander plaets: T'welck daer an blijckt, dat liggende een penninck of ander ſaeck op den gront eens ledich vats, alſoo datmen dien penninck, of om eyghentlick te ſpreken, de ſchacu van dien penninck niet ſien en can, om den cant des vats wil, en datmen daer na t'ſelve vat met water vult men ſiet den penninck ſoor ſchijnt wel beſcheedelick: Doch ten is den weſentlicken penninck ſelf niet, noch oock de ſchacu diemen inde locht ſien can, maer een ander ſchacu deur t'water veroirſaeckt. Ende ſoo gadet oock mette hemelſche lichten, diens ſchacuwen boven den * ſichteinder gheſien worden, eer de weſentlicke lichten ſelf daer boven ſijn, t'welck een ander ſchacu is veroirſaeckt deur de vochticheden des lochts. Meer ander verſcheyden veranderinghen deſer verſcheyden veranderinghen deſer ſchacuwen bevintmen noch deur t'vier, deur cromme glafen, en in blinkende ſpieghelachtighe ſtoffen: Doch want de handeling van ſulcke eyghentlicker by de * ſpieghelſchacuwen dient, ſoo hebben wy die daer vervought, en hier achterghelaten.

Horizontem.

Catoptrica.

2 BEGHEERTE.

Een verſchaeulick punt, lini of plat int glas ghegeven, oock voor hun ſchacu te verſtrecken.

line with the other two. From this it follows that if by the words "object point" were to be understood the observed image of the real point, then the object point, its image in a natural plane glass, and the natural eye would be in a straight line, without any necessity of a special postulate. But because common opinion is different at present, we have desired to postulate this in order that we may [not] * be misunderstood by those who may hereafter have a better understanding of the matter.

Now someone might object to what we have said and remark that if the eye is free and not pressed, the image observed just covers the real object, so that they are together like one and the same thing — and thus draw the conclusion that if we understand by the words "object point" the natural object point, then this point is in a straight line with its image in the glass and the eye, so that there is no necessity for any special postulate. To this we reply that many non-pressed free eyes see the image in a different place from that in which the real object is, such as the eyes of squinting people, who see two as one, or those who have only one squint eye. And though other eyes, which squint less, get less deviation between the image and the real object, and eyes which are quite normal do not get any deviation, nevertheless, — since no perfect proof can be given of that perfect straightness (for two eyes equally situated may each have defective sight and still do not see two images as one) — the postulate seems to be founded on sufficient reasons.

Note also that, apart from the eye, there are several other causes for the image to deviate from the real object, for example objects we imagine to see in water; for no man has ever seen either any real object in water, or the same image he can see of it in the air, seeing instead a different image in a different place. Which is apparent from the fact that if a penny or another object lies on the bottom of an empty vessel in such a way that we cannot see that penny, or, properly speaking, the image of that penny, because of the side of the vessel, and if this vessel is thereafter filled with water, we apparently do see the penny quite definitely, but it is not the real penny itself, nor the image we can see in the air, but a different image caused by the water. And the same thing happens with the heavenly bodies, the images of which are seen above the horizon before the real lights themselves are above it, which is a different image caused by the moisture of the air. Various other changes of these images are also found through fire, through curved glasses, and in shining, mirror-like substances, but since the discussion of these pertains rather to catoptrics, we have included them there, and omitted to speak of them here.

2nd POSTULATE

That a point, line or plane, given in the glass, also serve as their own images.

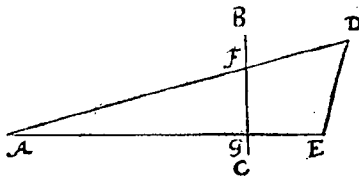
* This word has been omitted in the Dutch text.

N V D E
V O O R S T E L L E N .

Theorema. 1 VERTOOCCH 1 VOORSTEL.

De rechte lini tusschen tvvee schacuvven van verschaelicke punten, is schaeu der verschaelicke rechte lini tusschen de selve tvvee verschaelicke punten.

Datum. T G H E G H E V E N . Laet A het oogh beteykenen, de rechte lini B C het glas overcant ghesien, D en E twee verschaelicke punten, en de rechte lini tusschen beyden, dat D F, sy de verschaelicke lini: Daer na ghetrocken de rechte linien A D, A E, sy deurbooren t'glas in F en G, welke twee punten F en G deur d'eerste begeerte schacuwven moeten sijn der verschaelicke punten D en E. T B E G H E E R D E . Wy moeten bewijsen, dat de lini F G schaeu is der verschaelicke D E.



Quaestum. T B E G H E E R D E . Wy moeten bewijsen, dat de lini F G schaeu is der verschaelicke D E.

Demonstratio.

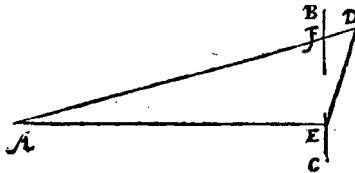
T B E W Y S .

Ghelijck t' verschaelicke punt D, voor schaeu heest F, en t' verschaelicke punt E, voor schaeu G, alsoo moet openbaerlick alle verschaelicke punt tusschen D en E, sijn schaeu hebben tusschen F en G, en vervolghens de lini F G, moet schaeu sijn vande verschaelicke D E.

Maer soo t' een verschaelicke punt als E, ghestelt waer int glas als hier nevens, het sal deur de tweede begeerte voor sijn selfs schaeu verstrecken, en F E sal openbaerlick schaeu sijn van D E.

Conclusio.

T B E S L V Y T . De rechte lini dan tusschen twee schacuwve van verschaelicke punten, is schaeu der verschaelicke rechte lini tusschen der selve twee verschaelicke punten, t'welck wy bewijsen moesten.



2 VERTOOCCH 2 VOORSTEL.

Parallela. Evewijdeghe verschaelicke linien ghesien sijnde deur t'glas dat evewijdich is mette evewijdeghe: Haer schacuvven sijn int glas oock evewijdeghe.

Als t'glas met evewijdeghe, verschaelicke linien onevewijdich is, soo en verschijnen hun schacuwven daer in niet evewijdich, ghelijck int volghende 3 voorstel

NOW THE PROPOSITIONS

1st THEOREM

1st PROPOSITION

The straight line between two images of points is the image of the straight line, joining the said two points.

SUPPOSITION. Let A signify the eye, the straight line BC the glass viewed transversely, D and E two object points, and let the straight line joining the two, *i.e.* DE , be the object line. If thereafter the straight lines AD , AE are drawn, they pierce the glass in F and G , which two points F and G by the first postulate must be images of the points D and E . **WHAT IS REQUIRED.** We have to prove that the line FG is the image of the line DE .

PROOF

Just as the point D has F for its image, and the point E has G for its image, so must any point lying between D and E clearly have its image between F and G , and consequently the line FG must be the image of the line DE .

But if the one point, such as E , lies in the glass, as shown opposite, then it will by the second postulate serve as its own image, and FE will clearly be the image of DE . **CONCLUSION.** Hence the straight line between two images of points is the image of the straight line joining the said two points; which we had to prove.

2nd THEOREM

2nd PROPOSITION

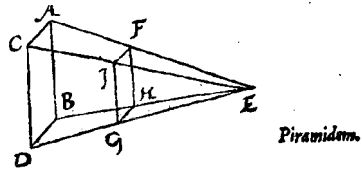
If parallel lines are viewed through a glass parallel to the parallel lines, then their images are also parallel in the glass.

If the glass is non-parallel to parallel object lines, then their images do not appear parallel therein, as is to be proved in the subsequent 3rd proposition. But we will here prove that the converse happens if the glass is parallel to the parallel lines.

siet sal bewesen worden: Maer t'verkeerde te ghebeuren als t'glas mette ewewijdeghe verschaeulicke linien ewewijdich is, dat sullen wy hier behoonen.

TGHEGHEVEN. Laet AB en CD twee ewewijdege verschaeulicke linien wesen, E het oog, en deur FG strecke het glas ewewijdich mette twee ewewijdeghe AB en CD. TBEGHEERDE. Wy moeten bewijfen dat de schaeuwen van AB en CD int glas oock ewewijdeghe sijn.

TBEREYTSSEL. Laet ghetrocken worden de twee linien AC, BD, en de vier stralen EA, EB, FC, ED, vervanghende de * naelde EABDC, en deurboorende t'glas in H, F, I, G.



TBEWYS.

FH schaeu te sijn der verschaeulicke AB, en IG van CD, is deur het 1. voorstel openbaer. Maer de selve twee schaeuwen FH, IG, oock ewewijdeghe te wesen, wort aldus behoont: Anghesien de naelde EABDC, doorsneen is met een plat HFIG, ewewijdich vanden gront ABCD, soo moet de sne gelijck sijn anden selven gront ABCD: Daerom FHGI is ghelijck an ABCD, in welke FH * lijckstandighe sijnde met AB, en IG met CD, voort wesende AB met CD oock ewewijdeghe, soo moet HF met GI oock ewewijdeghe sijn.

TBESLVT. Ewewijdeghe verschaeulicke linien dan ghesien sijnde deur t'glas dat ewewijdich is mette ewewijdeghe: Haer schaeuwen sijn int glas oock ewewijdeghe, t'welck wy bewijfen moellen.

VERVOLGH.

Tblijckt uyt het voorgaende, dat een verschaeulick plat ewewijdich vant glas wesende, alijt een cleender schaeu gheeft lijckformich an t'verschaeulick plat.

3 VERTOOCHE 3 VOORSTEL.

Eewvijdeghe verschaeulicke linien ghesien sijnde deur t'glas dat oneewvijdich is mette eewvijdeghe, en haer schaeuven daer in voortghetrocken vvesende; sy vergaren in een selve punt des straels, dat eewvijdich is mette verschaeulicke eewvijdeghe, en de selve verschaeulicke oock eewvijdich vvesende mette vloer; haer saempunt comt soo hooch boven de vloer als het oog.

TGHEGHEVEN. Laet AB, en CD twee ewewijdege verschaeulicke linien wesen, E het oog, F de voet, tusschen welke ghetrocken is de sienderslijn EF, en uyt het oog E de oneyndelicke EG, ewewijdeghe met AB beteyckenende een strael. Voort de lini FH ewewijdeghe met AB, snyende AC in I, en gherakende BD in H. Daer na IK met HL, beyde ewewijdeghe en even met FE: En deur ACK sy ghetrocken een glas dat oneewvijdich is mette ewewijdeghe AB en CD, daer af de glasgront sy AC. En de schaeuwen der verschaeulicke linien AB, CD, verschijnende int oneyndelick glas, sijn AM, CN, deur het 1. voorstel. TBEGHEERDE. Wy moeten bewijfen dat de selve AM, CN,

B; voort-

SUPPOSITION. Let AB and CD be two parallel object lines, E the eye, and let the glass through FG be parallel to the two parallel lines AB and CD . WHAT IS REQUIRED. We have to prove that the images of AB and CD are also parallel in the glass.

PRELIMINARY. Let there be drawn the two lines AC , BD , and the four rays EA , EB , EC , ED , containing the pyramid $EABDC$ and piercing the glass in H , F , I , G .

PROOF

It is clear from the 1st proposition that FH is the image of the line AB , and IG of CD . But that the said images FH , IG are also parallel is proved as follows. As the pyramid $EABDC$ is intersected by a plane $HFIG$, parallel to the base $ABCD$, the section must be similar to the said base $ABCD$. Therefore $FHGI$ is similar to $ABCD$, in which, because FH is homologous to AB , and IG to CD , while further AB is also parallel to CD , HF must also be parallel to GI .

CONCLUSION. If therefore parallel lines are viewed through a glass parallel to the parallel lines, then their images are also parallel in the glass; which we had to prove.

SEQUEL

It appears from the foregoing that a plane figure parallel to the glass always gives a smaller and similar image.

3rd THEOREM

3rd PROPOSITION

If parallel lines are viewed through a glass that is non-parallel to the parallel lines, and their images therein are produced, they meet in the same point of the ray that is parallel to the parallel lines, and if the said lines are also parallel to the floor, their meeting point comes as high above the floor as the eye.

SUPPOSITION. Let AB and CD be two parallel lines, E the eye, F the foot, between which is drawn the observer's line EF , and from the eye E the infinite line EG , parallel to AB , signifying a ray. Further the line FH parallel to AB , intersecting AC in I and meeting BD in H . Thereafter IK and HL , both parallel and equal to FE . And through ACK let there be drawn a glass that is non-parallel to the parallel lines AB and CD , of which let the glass base be AC . Then the images of the lines AB , CD appearing in the infinite glass are AM , CN , by the 1st proposition. WHAT IS REQUIRED. We have to prove that the said AM , CN ,

voortghetrocken wesen-
de, vergaren sullen in een
selfde punt des straels EG,
te weten in K (t'welck
deur de 12 bepaling het
saempunt is) soo hooch
boven de vloer, als het
oogh daer boven comt.

TBEREYTSEL. Laet
deur de drie punten E, A,
B, ghetrocken worden een
* oneyndelick plat, sghel-
lijcx een oneyndelick plat
deur de drie punten
ECD.

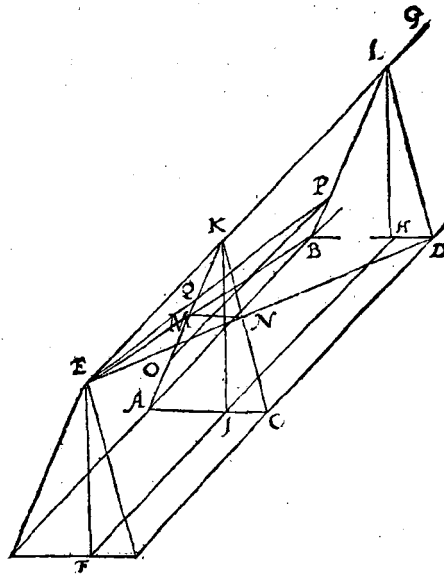
*Planum in-
fractum.*

TBEWYS.

Anghesien de twee oney-
ndelicke platten deur
EAB en ECD, malcan-
der commen te snyen int
punt E, soo moet haer ge-
meene sne ewewijdeghe
sijn met AB; Daerom EG

is nootfakelick der selve platten ghemene sne: T'welck soo sijnde, de vier pun-
ten E, A, B, L, staen altemael in een selve plat, alsoo oock doen in een selve plat
de vier punten E, C, D, L, Voort anghesien AM is de schaew der verschaelicke
lini AB, die ghesien wort vant oogh E deur t'ghegheven, soo moet AM int sel-
ve plat sijn daer AB in is: Maer AB is int oneyndelick plat deur EABL; daer-
om AM is in die selve plat: Sy is oock int oneyndelick glas deur t'ghegheven,
daerom de voortghetrocken AM comt de lini EL (welverstaende ghemene
sne der twee platten) te gheraken in K; Maer de voortghetrocken CN oock te
moeten commen tottet selve punt K, dat wort aldus bethoont: CN is (om al-
sulcke redenen als van AM verclaert sijn) int oneyndelick plat deur ECDL,
oock int oneyndelick glas ACK: Daerom de voortghetrocken CN, moet de
ghemene sne EG der twee oneyndelicke platten erghens ontmoeten: Latet
sijn waert meughelick in eenich punt tusschen K en G, of tusschen K en E,
Maer alle soodanighe punten sijn buyten het glas, daerom de rechte lini CN
wesende int glas, en recht voortghetrocken sijnde, soude connen buyten het
glas loopen; t'welck onmeughelick is: Maer quaemse hoogher of leegher dan de
lini EG, sy soude moeten buyten het oneyndelick plat ECDL loopen, t'welck
oock niet gheschien en can. AM dan en CN voortghetrocken sijnde, vergaren
in een selve punt des straels EG. Angaende dat het saempunt K soo hooch bo-
ven de vloer comt als het oogh E, blijktt daer an, dat KI en EF ewewijdege sijn,
tusschen de ewewijdeghe EK, FL.

Wy hebben tot hier toe bethoont dat de schaewen AM, CN, voortghe-
trocken sijnde, in een selve punt vergaren, en dat van twee verschaelicke linien
AB, CD, die beyde int plat ABCD ligghen: Maer om te verclaren de ghe-
meenheit des voorstels over alle ewewijdeghen, oock in een ander plat wesen-
de, soo



when produced, will meet in the same point of the ray EG , to wit in K (which by the 12th definition is the meeting point) as high above the floor as the eye comes above it.

PRELIMINARY. Let there be drawn through the three points E, A, B an infinite plane, and likewise an infinite plane through the three points E, C, D .

PROOF

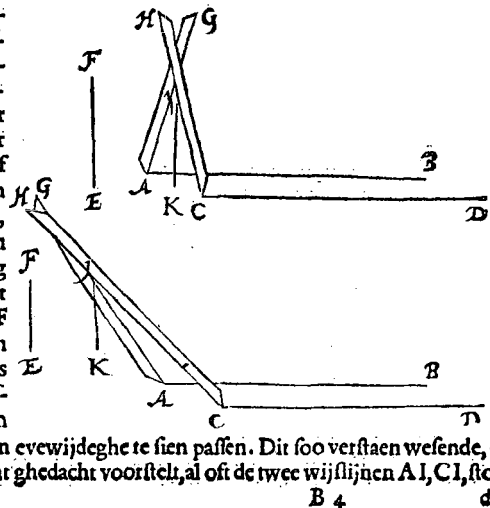
Since the two infinite planes through E, A, B and E, C, D intersect in the point E , their intersection must be parallel to AB . Therefore EG is necessarily the intersection of the said planes. This being so, the four points E, A, B, L are all in the same plane, and so are in the same plane the four points E, C, D, L . Further, since AM is the image of the line AB , which is viewed by the eye E by the supposition, AM must be in the same plane in which AB is situated. But AB is in the infinite plane through E, A, B, L ; therefore AM is also in the same plane. It is also in the infinite glass, by the supposition, therefore AM produced will meet the line EL (*i.e.*: the intersection of the two planes) in K . But that CN produced must also meet the said point K is proved as follows. CN is (for the same reasons as have been advanced for AM) in the infinite plane through E, C, D, L , also in the infinite glass ACK . Therefore CN produced must meet the intersection EG of the two infinite planes somewhere. Let this be, if possible, in some point between K and G , or between K and E . But all such points are outside the glass, therefore the straight line CN , if it were in the glass and were produced straight, might extend outside the glass, which is impossible. But if it came higher or lower than the line EG , it would have to extend outside the infinite plane $ECDL$, which cannot happen either. AM and CN produced will therefore meet in the same point of the ray EG . As to the fact that the meeting point K comes as high above the floor as the eye E , this is apparent from the fact that KI and EF are parallel lines, between the parallel lines EK, FI .

We have so far proved that the images AM, CN , if produced, meet in the same point, such for two lines AB, CD , both of which lie in the plane $ABCD$. But in order to set forth the general applicability of the proposition to all parallel

de, soo laet ghetrocken worden een verschaeulicke lini OP, ewewijdeghe met AB, maer wesende boven de selve AB, in een ander plat dan ABCD, ende wesende t'punt O, neem ick, in A M, en P in L B: Daer na sy ghetrocken EP, snyende A K in Q: Dit soo sijnde, t'is kennelick dat ghelijck AM schacu is van AB, alsoo moet OQ schacu sijn van OP. Maer dat de selve OQ voortghetrocken, oock int saempunt K vergaert, blijkt openbaerlick. **T B E S L V Y T.** Ewe-wijdeghe verschaeulicke linien dan, ghesien sijnde deur t'glas dat oneewijdich is mette ewewijdeghe, en haer schaeuwen daer in voortghetrocken wesende, sy vergaren in een selve punt des straela dat ewewijdich is mette verschaeulicke ewewijdeghe, en de selve verschaeulicke oock ewewijdich wesende mette vloer, haer saempunt comt soo hoogh boven de vloer als het oogh, t'welck wy bewij-sen moesten.

M E R C K T.

Soo ymant metter daet wilde sien, ghelijck sijn **VORSTELICKE GHE-NADE** selfghedaen heeft, het inhoudt des voorgaenden vertoochs, die mach aldus doen: Hy sal trecken twee ewewijdeghe linien met krijt, of ghespannen coorden, of dierghelijcke, op een effen * sichteinderschen folder of vloer, dat is *Horizontale*, die, ghelijckmen ghemeenlick seght, op waterpas light: Welcke twee ewewijdeghe linien beteyckent sijn met AB, CD, voort bediet EF de langde der siende-lija, waer af F het oogh des sienders beteyckent: Voort soo staender twee rechte houre reghels op de ewewijdeghe, als de reghel AG, en CH, cruycende malcander int punt I, alsoo dattet selve punt I is in sulcken hooghe boven de vloer, als het oogh F, soo dat IK even is met FE. Dit soo wesende, hy sal sien dat de * wijlijjn AI recht overcomt en staet voor AB, en CI even voor CD: *Fiducials* T'welckmen alsoo bevint hoe recht of scheef datmen die twee reghels oock *lines* stelt: Ia al en valt de hanghende lini van I tot K, niet tusschen de twee ewewijdege, maer verre daer buyten, als inde tweede form. Men sal oock sien dat alwaert meughelick de twee verschaeulicke ewewijdeghe AB, CD, metter daet oneyn-delick voort te trec-ken, datse ewewel mette voorschreven wijflijjn overcommē sou-den, en daer onder be-deckt blijven. Maer foomen t'punt der cruycing I hooger of leegher brengt dan des sienders oogh F, oft andersins datmen het oogh sijdeling stelt van I, alsoo dat de rechte lini van F tot I, niet ewewijdich en waer met AB, t'is onmeugelick die wijflijjn beyde t'iamen op haer voorschreven ewewijdeghe te sien passen. Dit soo verstaen wesende, en datmen sijn selven int ghedacht voorstelt, al oft de twee wijlijjn AI, CI, ston-den



B 4 den

lines, even if they are in a different plane, let there be drawn a line OP , parallel to AB , but being above the said AB , in a plane other than $ABCD$, the point O being, as I assume, in AM , and P in LB . Thereafter let there be drawn EP , intersecting AK in Q . This being so, it can be seen that just as AM is the image of AB , so must OQ be the image of OP . But that the said OQ produced also meets in the meeting point K is clear. CONCLUSION. Hence, if parallel lines are viewed through a glass that is non-parallel to the parallel lines, and their images therein are produced, they meet in the same point of the ray that is parallel to the parallel lines; and if the said lines are also parallel to the floor, their meeting point comes as high above the floor as the eye; which we had to prove.

NOTE

If someone should wish to see in practice, as his *Princely Grace* has done himself, the contents of the foregoing theorem, he may do as follows: He must draw two parallel lines with chalk, or stretched chords or the like on a level horizontal ceiling or floor, *i.e.* situated, as is commonly said, at water-level; which two parallel lines are designated by AB , CD ; further EF denotes the length of the observer's line, on which F signifies the eye of the observer. Further there stand two straight wooden rulers on the parallel lines, as the rulers AG and CH , crossing each other in the point I , so that the said point I is situated at the same height above the floor as the eye F , so that IK is equal to FE . This being so, he will see that the reference line AI covers AB , and CI likewise covers CD . This is so found, however straight or inclined those two rulers are placed; nay, even though the vertical from I to K should fall not between the two parallel lines, but far beyond them, as in the second figure. It will also be seen that, even if it were possible in practice to produce to infinity the two parallel lines AB , CD , they would correspond with the above reference line and remain covered thereby. But if the point of the crossing I is brought higher or lower than the observer's eye F , or else the eye is placed aside of I , in such a way that the straight line from F to I be not parallel to AB , then it is impossible to see those two reference lines covering together their aforesaid parallel lines. If it is understood thus and imagined that the two

den en verschenen in een glas, als voortghetrocken schaeuwen van A B, C D, men siet hoe haer vergaring ghebeurt op een selve punt, dat is int saempunt, soo hoogh boven de vloer als het oogh. T'selve bevintmen oock alsoo stellende de reghels op ander verschaelicke linien ewevijdich met A B, in platten hoogher of leegher dan t'plat A B D C. Van alle welcke dinghen de oirsaken int boveschreven 2 voorstel * wisconstelick bewesen sijn.

Mathematis.

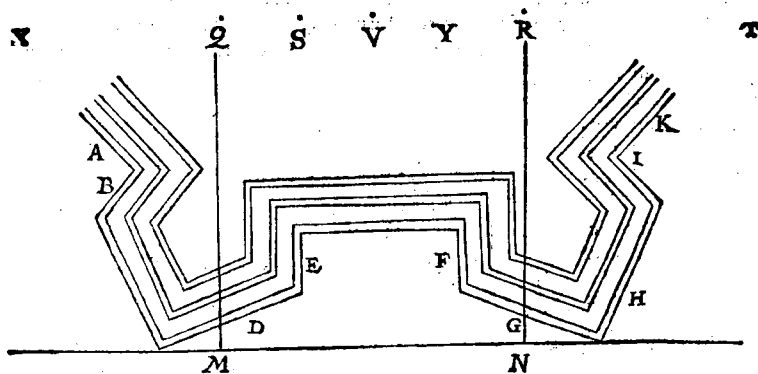
4 VERTOCH. 4 VOORSTEL.

Wesende verscheyden partien van verschaelicke ewevijdighe linien die mette vloer oock ewevijdich sijn, maer mettet glas onevewijdich, en d'een partie der ewevijdighen onevewijdich van d'ander: Haer verscheyden saempunten sijn aeven hoogh boven de glasgront.

Le plan. Circulinscriptibus. i Profil.

T G H E G H E V E N. Laet A B C D E F G H I K, sijn de * grondteyckening des deels van een oirdentlicke sterckte, hebbende int gheheel acht bolwercken * int rondt beschrijvelick, van welcke dit deel de twee begrijpt, L sy ' stantteyckening, M N glasgront, diens glas rechthouckich op de vloer, streckt deur de twee uyterste punten der bolwercken, dat is oock ewevijdich mette grootē gordine tusschen beyden, O is de voet, O P siendermaet, even ande sienderlijn die boven O bedocht wort rechthouckich op de vloer: De wallen hebben ses linien: D'eerste beteyckent het buytenste der * buytenschoe: Van daer totte tweede lini is de breedte des beschoeyfels: Totte derde is de breedte des boslweers: Totte vierde is de breedte des banck: Totte vijfde is de breedte des wechs op de wal: Totte sefte is de breedte der binnenschoe, waer af inde stantteyckening L opentlicker

Barrafarpa.



P

O

verclaring te sien is. In dese grondteyckening sijn seven verscheyden partien van ewevijdighe rechte linien maer d'een partie onevewijdich van d'ander: D'eer-

reference lines AI , CI stood and appeared in a glass, as produced images of AB , CD , it is seen how their meeting occurs in the same point, *i.e.* in the meeting point, as high above the floor as the eye. The same is also found if the rulers are placed on other lines parallel to AB , in planes higher or lower than the plane $ABDC$; the causes of all these things have been proved mathematically in the aforesaid 2nd proposition.

4th THEOREM

4th PROPOSITION

If there are various groups of parallel lines, which are also parallel to the floor, but non-parallel to the glass, while one group of parallel lines is non-parallel to the other, their various meeting points are all equally high above the glass base.

SUPPOSITION. Let $ABCDEFGHIK$ be the ground-plan of the part of a regular fortification, having in all eight bulwarks that can be inscribed in a circle, of which this part comprises two; let L be the vertical plan, MN the glass base, whose glass, at right angles to the floor, extends through the two extremities of the bulwarks, *i.e.* also parallel to the large curtain between the two; O is the foot, OP the observer's measure, equal to the observer's line which is imagined above O at right angles to the floor. The walls have six lines: the first signifies the outside of the outward slope; from there to the second line is the width of the slope; to the third is the width of the parapet; to the fourth is the width of the foot bank; to the fifth is the width of the walk on the wall; to the sixth is the width of the inward slope, which is shown more clearly in the vertical plan L . In this ground-plan there are seven various groups of parallel straight

D'eerste partie van twelf linien, te weten ses der groote gordine A, mette ses des strijkweers I, die mette linien van A ewewijdich vallen, om dattet deel is van een oirdentlick achthouck: De tweede partie van twelf linien, te weten ses des strijkweers B, en ses der groote gordine K: De derde partie ses ewewijdeghe van C: De vierde ses ewewijdeghe van D: De vijfde twelf ewewijdeghe van E met F: De sesste, ses ewewijdeghe van G: De sevendē, ses ewewijdeghe van H. Angaende de ses ewewijdeghe der groote gordine, die ewewijdich sijn mettet glas MN, haer voortghetrocken schaeuwen en hebben gheen saempunt deur het 2 voorstel. Boven al de voorschreven linien worden de verschaeulicke bedocht even en ewewijdeghe mette selve, maer elck soo hooch boven de vloer, als de stantteykening L anwijst. Sulcx datter sijn seven soodanighe partijen van linien, hebbende int glas datter rechthouckich bedocht wort op de vloer deur MN, seven verscheyden saempunten, welke hier op de vloer beteycken sijn met Q, R, S, T, V, X, Y, soo verre vande glasgront MN, alse int glas daer af commen, te weten Q als saempunt der voortghetrocken schaeuwen vande verschaeulicke boven A en I: En R saempunt der voortghetrocken schaeuwen vande verschaeulicke boven B en K, en soo oirdentlick voort met d'ander.

T B E G H E E R D E. Wy moeten bewijfen dat die seven verscheyden saempunten al even hooch boven de glasgront sijn. **T B E R E Y T S E L.** Laet ghetrocken worden vande saempunten Q en R, twee linien rechthouckich op de glasgront, welke sijn Q M, R N. Maer want die sijn inde selve vloer daer de ghegeven grontteykening in is, en nochtans eygentlick behooren te wesen int glas rechthouckich op de vloer boven den glasgront MN, soo laet ons deur t'gedacht nemen datter op MN sulcken glas staet, en dat de linien Q M, R N, opwaert ghekeert worden draeyende op de punten M, N tot datse sijn rechthouckich op de vloer int glas.

T B E W Y S.

Anghefen Q saempunt is der ewewijdeghe boven A en I, staende mette lini Q M rechthouckich op de vloer deur t'bereytsel, en dat deur het 3 voorstel het saempunt Q soo hooch is boven de vloer als het oogh boven de voet O, t'welck soo veel is als O P, soo moet Q M even sijn an O P. En met derghelijcke redenen salmen bethoonen R N oock even te sijn an O P, waer deur oock Q M en R N even sijn, en vervolghens de twee saempunten Q en R sijn even hooch boven de vloer: Sghelijcx sal oock bethoont worden van al d'ander saempunten. **T B E S L Y T.** Wefende dan verscheyden partijen van verschaeulicke ewewijdeghe linien die mette vloer oock ewewijdich sijn, maer mettet glas onezewijdich, en d'een partie der ewewijdeghe onezewijdich van d'ander: Haer verscheyden saempunten sijn al even hooch boven de glasgront, t'welck wy bewijfen moesten.

1 WERCKSTICK. 5 VOORSTEL. *Problema.*

Wefende ghegeven een verschaeulick punt inde vloer, t'glas rechthouckich op de vloer, de voet, en de sienderlijn: Sijn schaeu te vinden.

1 Voorbeelt met wisconstighe wercking.

T G H E G H E V E N. Laet A een verschaeulick punt sijn inde vloer, B C de glasgront, diens glas op de vloer rechthouckich bedocht wort, D de voet, waer op wy

Mathematica operatione.

lines, but one group non-parallel to the other: the first group of twelve lines, to wit six of the large curtain A , with the six of the flank I , which are parallel to the lines of A , because it is a part of a regular octagon. The second group of twelve lines, to wit six of the flank B and six of the large curtain K . The third group of six lines parallel to C . The fourth of six lines parallel to D . The fifth of twelve lines parallel to E and F . The sixth of six lines parallel to G . The seventh of six lines parallel to H . As to the six parallel lines of the large curtain, which are parallel to the glass MN , their produced images do not have any meeting point, by the 2nd proposition. Above all the aforesaid lines the object lines are imagined equal and parallel to them, but each as high above the floor as the vertical plan L indicates, so that there are seven such groups of lines, which in the glass that is imagined at right angles to the floor through MN have seven various meeting points, which are here denoted on the floor by Q, R, S, T, V, X, Y , as far from the glass base MN as they are therefrom in the glass, to wit Q as meeting point of the produced images of the object lines that are above A and I ; and R the meeting point of the produced images of the object lines that are above B and K , and thus regularly on with the others.

WHAT IS REQUIRED. We have to prove that those seven various meeting points are all equally high above the glass base. **PRELIMINARY.** Let there be drawn from the meeting points Q and R two lines at right angles to the glass base, which are OM, RN . But because these are in the same floor in which the given ground-plan is situated, and yet should really be in the glass at right angles to the floor above the glass base MN , let us imagine that such a glass stands on MN , and that the lines OM, RN are turned up, revolving about the points M, N until they are at right angles to the floor in the glass.

PROOF

Since Q is the meeting point of the parallel lines above A and I , with the line QM at right angles to the floor by the preliminary, and since by the 3rd proposition the meeting point Q is as high above the floor as the eye above the foot O , which is as much as OP , QM must be equal to OP . And with similar reasons it can be proved that RN is also equal to OP , in consequence of which QM and RN are also equal, and consequently the two meeting points Q and R are equally high above the floor. The same can also be proved for all the other meeting points. **CONCLUSION.** Hence, if there are various groups of parallel lines, which are also parallel to the floor, but non-parallel to the glass, while one group of the parallel lines is non-parallel to the other, their various meeting points are all equally high above the glass base; which we had to prove.

1st PROBLEM

5th PROPOSITION

Given a point in the floor, the glass at right angles to the floor, the foot, and the observer's line: to find its image.

1st Example, with Mathematical Operation

SUPPOSITION. Let A be a point in the floor, BC the glass base, whose glass is imagined to be at right angles to the floor, D the foot, on which we imagine an

op wy deur t'ghedacht nemen een sienderlijn te staen, even ande siendermaet DE, rechthouckich op de vloer. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten de schaew des verschaeulick punts A vinden.

T W E R C K.

Ten eersten treck ick vande voet D tot inde glasgront BC, de vloerlijn DF foot valt, uytghenomen dat by aldien de selve vloerlijn voortghetrocken wierde, niet en strecke deur t'ghegheven verschaeulick punt A, waer af de reden hier na verclaert sal worden.

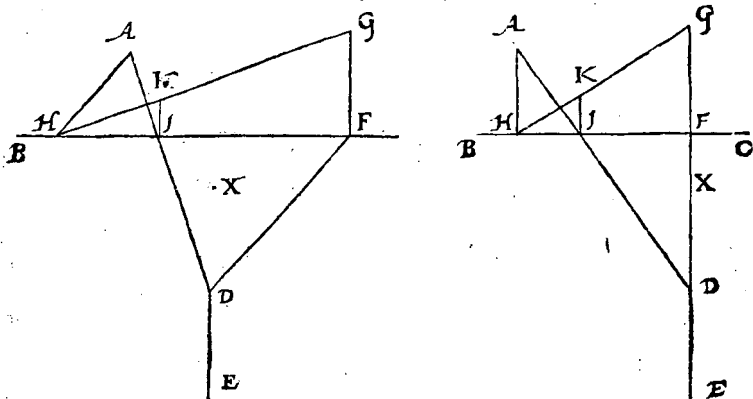
Ten tweeden vant vloerlijnraecksel F, de siendermaet FG rechthouckich op de glasgront BC, en even ande siendermaet DE.

Ten derden, vant ghegheven verschaeulick punt A, de lini AH, ewewijdeghe mette vloerlijn DF, snyende de glasgront BC in H, als haer eerste sne.

Ten vierden, de lini GH, welcke ick hier en int volghende saemlijn noem, om datse int werck der verschaeuwing daermen ewewijdeghe verschaeut als saemlijn is, diens saempunt G, en in haer hebbende de schaew van AH.

Ten vijfden, de lini vant verschaeulickpunt A totte voet D, snyende de glasgront BC in I alstweede sne.

Ten seften, vande tweede sne I, een lini rechthouckich op de glasgront BC, tot datse de saemlijn GH ontmoet, t'welck sy in K.



Dit soo sijnde, ick segh t'punt K de begheerde schaew te wesen des verschaeulick punts A, t'welckmen aldus verstaen sal: Genomen dat het plat daer de schaew K in is als int glas, deur t'ghedacht scheidelick sy vande vloer, en draeyende op de glasgront BC als as, rechthouckich ghestelt worde op de vloer, dat oock sgelijcx overeynde ghestelt worde rechthouckich op de selve vloer de lini ED, blijvende t'punt D vast, en commende E inde locht als oog: T'welck soo wesende, ick segh dat alsdan het oog E, t'punt K, en t'verschaeulickpunt A, alle drie in een rechte lini sijn, en daerom K schaew van A.

T B E R E Y T S E L V A N T B E W Y S. Want de boveschreven scheidung des glas vande vloer deur t'ghedacht, duyfter mocht vallen, wy sullen die dadelick scheidyn als volght: Laet de twee voogaende formen hier andermael vertheyckent worden, doch alsoo datmen deur t'behulp van dobbel papier, de teyckening die heur verstaet int glas te moeten commen, scheidyn mach vande teyckening

observer's line equal to the observer's measure DE , at right angles to the floor. **WHAT IS REQUIRED.** We have to find the image of the point A .

PROCEDURE

In the first place I draw from the foot D to the glass base BC the floor line DF , in any way, except that if the said floor line were produced, it should not pass through the given point A , the reason of which will be explained hereinafter.

Secondly I draw from the floor-line glass point F the observer's measure FG , at right angles to the glass base BC and equal to the observer's measure DE .

Thirdly, from the given point A the line AH , parallel to the floor line DF , intersecting the glass base BC in H , as its first intersection.

Fourthly, the line GH , which I call, here and in the sequel, meeting line, because it serves as meeting line in the operation of perspective where parallel lines are projected, their meeting point G , and having in it the image of AH .

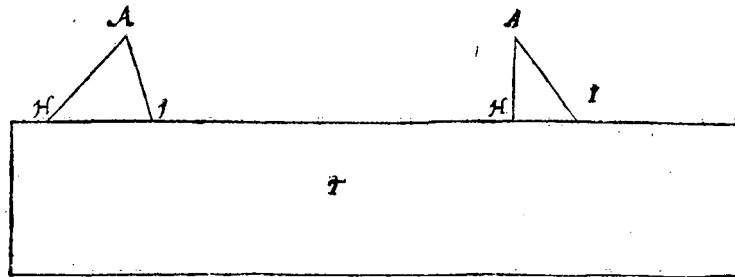
Fifthly, the line from the point A to the foot D , intersecting the glass base BC in I , as second intersection.

Sixthly, from the second intersection I a line at right angles to the glass base BC until it meets the meeting line GH , which shall be in K .

This being so, I say that the point K is the required image of the point A , which is to be understood as follows. Let us assume that the plane in which the image K is situated, as the glass, be in thought separable from the floor and, revolving about the glass base BC as axis, be placed at right angles to the floor; that there be likewise placed erect, at right angles to the said floor, the line ED , the point D remaining fixed, and E coming in the air as eye. This being so, I say that then the eye E , the point K , and the point A are all three in a straight line, and therefore K is the image of A .

PRELIMINARY TO THE PROOF. Because the above-mentioned separation in thought of the glass from the floor might seem obscure, we shall separate them in actual fact, as follows: Let the two preceding figures be drawn here once again, but in such a way that by means of double paper it is possible to separate

kening inde vloer, datmen oock de ghegheven siendermaet DE inde vloer als sienderlijn overeynde mach stellen draeyende t'glas op den glasgrondt BC als as, en de sienderlijn op de voet D, om alsoo t'glas en de sienderlijn beyde rechthouckich op de vloer te connen stellen, welke ick hier neem dadelick alsoo gestelt te sijn.



T B E W Y S.

Anghesien t'glas daer K in is, en de sienderlijn DE, deur t'beteytsel nu beyde rechthouckich op de vloer staen; soo segh ick dat de rechte lini vant ooghe E deur t'glas tottet verschaeulickpunt A, t'selve glas deurboort in K, als schaeu van A, t'welck aldus bethoont wort: T verdocht strael van E tot G is ewewijdich met DF, en DF ewewijdich met HA deur t'werck derde lidt, waer deur E Geewijdighe is met HA, en daerom is G saempunt der voortghetrocken schaeu vande verschaeulicke HA deur het 3 voorstel, waer deur de schaeu van HA inde saemlijn GH moet sijn, en daerom is oock de schaeu van A in HG: Sy is oock int oneyndelick plat streckende deur AED: Maer t'selve plat snijt HG in K, daerom K is de schaeu van A.

M E R C K T.

Int werck eerste lidt is gheseyt dat de voortghetrocken vloerlijn DF, niet strecken en moet deur t'ghegheven punt A: De reden is datmen anders doende, soo soude int derde lidt het vloerlijraecksel F, en d'eerste glasgrontsne H, al tijt in een selve punt vallen, mettet welke men openbaerlick tot gheen befluyt en gheraect: Waer uyt noch dit volght: Wanneermen de vloerlijn DF soo treckt, dattet vloerlijraecksel seer na valt by d'eerste glasgrontsne H, het dadelick werck en heeft de meeste sekerheyt niet, hoe wel dattet in * wilconstich an-

Mathematisch confideratione.

Contheyt opt verck.

Sooder inde vloer waren twee of meer ghegheven verschaeulicke punten ghelijck A, vallende altsamen in een rechte lini, men mach contheytshalven de lini als AH eerst deur die twee of meer punten trecken, en de vloerlijn als DF, daer me ewewijdich, op dat de twee linien als AH, GH, in elck verschaeulick punts vinding der schaeu de selve blijven.

2 Voor-

the drawing that is to come in the glass from the drawing in the floor, and that it is also possible to place the given observer's measure DE erect in the floor as observer's line, the glass revolving about the glass base BC as axis and the observer's line about the foot D , in order that the glass and the observer's line may thus both be placed at right angles to the floor, which I here take to be so placed in actual fact.

PROOF

Since the glass in which K lies and the observer's line DE by the preliminary are now both at right angles to the floor, I say that the straight line from the eye E through the glass to the point A pierces the said glass in K , as the image of A , which is proved as follows: The imagined ray from E to G is parallel to DF , and DF is parallel to HA by the third section of the procedure, in consequence of which EG is parallel to HA , and therefore G is the meeting point of the produced image of the line HA by the 3rd proposition, in consequence of which the image of HA must be in the meeting line GH , and therefore the image of A is also in HG . It is also in the infinite plane passing through AED . But the said plane intersects HG in K , therefore K is the image of A .

NOTE

In the first section of the procedure it has been said that the floor line DF produced should not pass through the given point A . The reason is that, if we did otherwise, in the third section the floor-line glass point F and the first intersection H with the glass base would always fall in the same point, by which means we clearly do not reach any conclusion. From which also follows this: when the floor line DF is so drawn that the floor-line glass point falls very close to the first intersection H with the glass base, the practical procedure does not have the *maximum of certainty*, although mathematically considered it is all one.

Abridgement of the Procedure

If there are in the floor two or more given points like A , all falling in a straight line, one can for brevity's sake draw the line as AH first through those two or more points, and the floor line as DF parallel thereto, in order that the two lines as AH , GH may remain the same in the finding of the image of any point.

Mechanic
operatione.

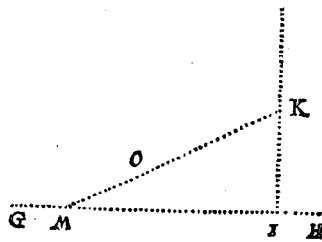
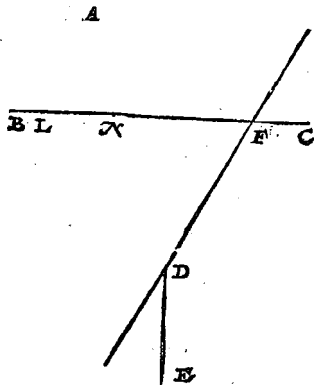
2 Voorbeelt * tuychwerckelick.

Mathema-
tic.

Wanneer men de schaeu van een verschaelick punt, niet en teyckent in een befonder plat als glas, maer inde vloer self, ghelijck hier vooren om t'bewijs wille * wisconstelick gedaen is, en datter veel punten te verschaeuwen waren, haer schaeuwen souden mette verschaelicke punten, en ander linien der wercking seer verduystert worden: Om t'welck te voorkomen, wy sullen nu verclaren hoemen inde dadelicke verschaeuwing die schaeu teyckent op een befonder plat als glas. TGHĒGHEVEN. Laet tot desen eynde A andermael een verschaelick punt sijn inde vloer, B C de glasgrondt, diens glas op de vloer rechthouckich bedocht wort, D de voet, waer op wy deur t'gedacht nemen een sienderlijn te staen, even ande siendermaet D E, welcke sienderlijn ghelijck t'glas oock rechthouckich op de vloer is. TBEGHEERDE. Wy moeten de schaeu des punts A vinden.

Homologum.

TBEREYTSSEL VANT TVYCHWERCKELICK WERCK. Ick treck vande voet D, tot inde glasgrondt B C, de vloerlijn D F foot valt, uytghenomen dat by aldien de selve vloerlijn voortgetrocken wierde, niet en strecke deur t'gegheven verschaelick punt A, en verlang de selve vloerlijn op beyden sijden verre ghenouch, om daer op de volghende wercking te connen doen. Daer na treck ick op een ander plat int welck als glas ick de schaeu begheer, de verborgen lini G H als glasgrondt, daer in teyckenende t'punt I, als *lijck standich met F, daer na de verborgen lini I K rechthouckich op de glasgrondt G I, en alsoo dat de selve I K als siendermaet int glas, even sy ande ghegheven siendermaet D E: Daer na sy de selve siendermaet I K verre ghenouch voortgetrocken.



Dit bereytsel aldus eensghestelt sijnde, wy sullen nu verclaren deur dit ghegheven verschaelick punt A inde vloer, hoe de schaeuwen van alle ghegheven verschaelicke punten inde vloer, gheteyckent worden int glas, en dat deur ses * leden.

Articulos.

Het tuychwerckelick werck.

Ten eersten stel ick d'een voet des passers int ghegheven verschaelick punt A, d'ander inde verlangde vloerlijn D F, alsoo dat de verdochte rechte lini van d'een

2nd Example, by Mechanical Operation

When the image of a point is not drawn in a special plane as glass, but in the floor itself, as has been done mathematically above for the sake of the proof, and when there are many points that have to be drawn in perspective, their images would be greatly obscured by the points and other lines of the operation. In order to prevent this, we shall now explain how in practical perspective that image is drawn on a special plane as glass. SUPPOSITION. To this end let A again be a point in the floor, BC the glass base, whose glass is imagined at right angles to the floor, D the foot, on which we imagine an observer's line, equal to the observer's measure DE , which observer's line, like the glass, is also at right angles to the floor. WHAT IS REQUIRED. We have to find the image of the point A .

PRELIMINARY TO THE MECHANICAL PROCEDURE. I draw from the foot D to the glass base BC the floor line DF , in any way, except that, if the said floor line is produced, it should not pass through the given point A , and I produce the said floor line at either end far enough to enable the following operation to be applied to it. Thereupon I draw in another plane, in which as glass I require the image to be, the hidden line GH as glass base, marking therein the point I as homologous to F , thereafter the hidden line IK at right angles to the glass base GI , and in such a way that the said IK , as observer's measure in the glass, be equal to the given observer's measure DE . Thereupon let the said observer's measure IK be produced far enough.

This preliminary having thus been given, we shall now set forth by means of this given point A in the floor how the images of all given points in the floor are drawn in the glass, such in six sections.

Mechanical Procedure

In the first place I put one leg of the compasses in the given point A , the other in the floor line DF produced, in such a way that the imagined straight line from

d'een voet des passers tot d'ander, uyer oogh ten naesten by rechthouckich comt op de selve verlangde vloerlijn D F, en blijvende dat dien voet op A onbeweeghlick, men beschrijft met d'ander een verborghen booghsken, t'welck gerekende die verlangde vloerlijn D F fonder snyen, ick heb op den passer de begheerde langde.

Ten tweeden de passer soo wijt open blijvende, ick stel d'een voet inde verlangde vloerlijn D F, d'ander inde glasgront B C, en alsoo dat de lini tusschen die twee voeten des passers, weerom uyer oogh rechthouckich come op de verlangde vloerlijn D F, dat versouckende met een verborghen booghsken alsvooren, en d'ander voet valt dan by voorbeelt an L, als eerste sne.

Ten derden neem ick mette passer de langde vant vloerlijnraecksel F, tot d'eerste sne L, en breng die van des glas vloerlijnraecksel I, na G inde glasgront, welke valt neem ick tot M, als eerste sne.

Ten vierden treck ick de verborghen saemlijn vant saempunt K, tot d'eerste sne M.

Ten vijfden legh ick een rechte reghel op de voet D, en t'verschaeulickpunt A, welke reghel snyende de glasgront B C in N als tweede sne, neem dan mette passer de langde vande selve tweede sne N, tottet vloerlijnraecksel F.

Ten seften stel ick dan d'een voet des passers inde verlangde siendermaet I K, d'ander inde saemlijn K M, maer alsoo dat de bedochte lijn tusschen de twee voeten des passers, uyer oogh rechthouckich valle op de verlangde siendermaet I K, my verskerende met te beschrijven een verborghen boochsken inde verlangde I K, als int eerste lid, en d'ander voet valt dan inde saemlijn K M; an, neem ick, O, voor begheerde schaen. Waer af t'bewijs deurt t'voorgaende bewijs des 1 voorbeelts openbaer is. **T B E S L V Y T.** Wefende dan ghegheven een verschaeulickpunt inde vloer, t'glas rechthouckich op de vloer, de voet, en sienderlijn, wy hebben de schaen ghevonden, na den eysch.

2 WERCKSTVCK. 6 VOORSTEL.

Wefende ghegheven een verschaeulickpunt boven de vloer inde locht, t'glas rechthouckich op de vloer, de voet, en sienderlijn: Sijn schaen te vinden.

1 Voorbeelt met wisconstige wercking.

Mathematische operatione.

T G H E G H E V E N. Laet A een punt sijn inde vloer, waer op verdocht wort een rechte lini te staen even an B C, en rechthouckich op de selve, waer af het opperste punt is t'verschaeulickpunt boven de vloer inde locht: Voort sy D E de glasgront, diens glas op de vloer rechthouckich bedocht wort, F de voet, waer op wy deur t'ghedacht nemen een sienderlijn te staen, even ande siendermaet F G, rechthouckich op de vloer. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten de schaen des verschaeulickpunts vinden, dat van t'uyterste der lini op A, even an B C, en rechthouckich op de vloer.

C TVERCK.

one leg of the compasses to the other comes, to the eye, approximately at right angles to the said floor line DF produced, and while this leg then remains motionless in A , with the other a hidden arc is described, and this meeting the floor line DF produced without intersecting it, I have the required length between the compasses.

Secondly, with the compasses remaining open at the same width, I put one leg in the floor line DF produced, the other in the glass base BC , and in such a way that the line between those two legs of the compasses again comes, to the eye, at right angles to the floor line DF produced, testing this with a hidden arc as before; then the other leg will, for example, fall in L , as first intersection.

Thirdly I take between the compasses the length from the floor-line glass point F to the first intersection L and transfer it from the floor-line glass point I to G in the glass base, which I assume to fall as far as M , as first intersection.

Fourthly I draw the hidden meeting line from the meeting point K to the first intersection M .

Fifthly I put a straight ruler on the foot D and the point A , and this ruler intersecting the glass base BC in N as second intersection, I then take between the compasses the length from the said second intersection N to the floor-line glass point F .

Sixthly I then put one leg of the compasses in the observer's measure IK produced, the other in the meeting line KM , but in such a way that the imagined line between the two legs of the compasses shall fall, to the eye, at right angles to the observer's measure IK produced, testing this by describing a hidden arc on IK produced, as in the first section; the other leg then coincides with the meeting line KM ; I assume: as far as O for the required image. The proof of which is clear from the foregoing proof of the 1st example. **CONCLUSION.** Hence, given a point in the floor, the glass at right angles to the floor, the foot, and the observer's line, we have found the image, as required.

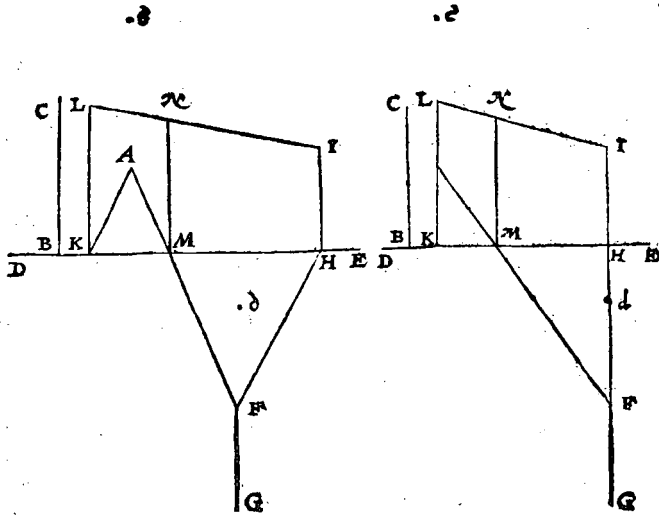
2nd PROBLEM

6th PROPOSITION

Given a point above the floor in the air, the glass at right angles to the floor, the foot, and the observer's line: to find its image.

1st Example, by Mathematical Operation

SUPPOSITION. Let A be a point in the floor, on which is imagined a straight line equal to BC and at right angles thereto, the uppermost point of which is the object point above the floor in the air. Further let DE be the glass base, whose glass is imagined to be at right angles to the floor, F the foot, on which we imagine an observer's line, equal to the observer's measure FG , at right angles to the floor. **WHAT IS REQUIRED.** We have to find the image of the point, *i.e.* of the extremity of the line on A , equal to BC , and at right angles to the floor.



T W E R C K.

Ten eersten treck ick vande voer F tot inde glasgront DE, de vloerlijn FH soor valt, uytghenomen dat by aldien de selve vloerlijn voortghetrocken wierde, niet en strecke deur t'ghegheven punt A, om deredenen int 3 voorstel verclaert.

Ten tweeden, vant vloerlijnaeckfel H, de siendermaet HI, rechthouckich op de glasgront DE, en even ande siendermaet FG, sulcx dat I is saem punt.

Ten derden, vant ghegheven punt A, de lini AK, ewwijdeghete vloerlijn HF, snyende de glasgront DE in K, als eerste sne.

Ten vierden, KL even ande ghegheven BC, en rechthouckich op de glasgront DE.

Ten vijfdem, de saemlijn IL.

Ten seften, de lini vant ghegheven punt A, totte voer F, snyende de glasgront DE in M, als tweede sne.

Ten sevenden, vande tweede sne M, een lini rechthouckich op de glasgront DE, tot dat se de saemlijn IL ontmoet, t'welck sy in N.

Dit soo sijnde, ick segh N de begheerde schaeu te wesen des ghegheven verschaeulickpunts, t'welckmen aldus verstaen sal: Ghenomen dattet plat daer de schaeu N in is, als int glas, deur t'gedacht scheidelick sy vande vloer, en draeyende op de glasgront DE als as, rechthouckich gestelt worde op de vloer, dat oock sghelijcx overeynde ghestelt worde rechthouckich op de selve vloer, de lini FG, blijvende t'punt F valt, en commende G inde locht als oogh: Daer na opt punt A, een lini even an BC, re rechthouckich op de vloer, sulcx dattet opperste van dien t'verschaeulickpunt bediet. T'welck soo wesende, ick segh dat alfdan het oogh G, t'punt N, en dat verschaeulickpunt, alle drie in een rechte lini sijn, en daerom N de begheerde schaeu. TBEREYSEL VAN TBEWYS. Want de boveschreven scheidung des glas vande vloer deur t'ghedacht duyfter mocht vallen,

PROCEDURE

In the first place I draw from the foot F to the glass base DE the floor line FH , in any way, except that, if the said floor line were produced, it should not pass through the given point A , for the reasons advanced in the 5th proposition.

Secondly I draw from the floor-line glass point H the observer's measure HI , at right angles to the glass base DE and equal to the observer's measure FG , in such a way that I is the meeting point.

Thirdly, from the given point A the line AK , parallel to the floor line HF , intersecting the glass base DE in K , as the first intersection.

Fourthly, KL equal to the given line BC and at right angles to the glass base DE .

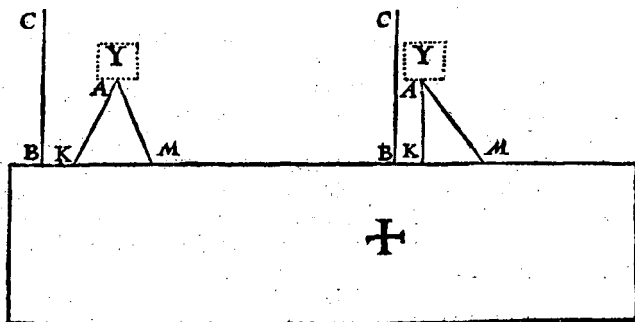
Fifthly, the meeting line IL .

Sixthly, the line from the given point A to the foot F , intersecting the glass base DE in M , as the second intersection.

Seventhly, from the second intersection M a line at right angles to the glass base DE until it meets the meeting line IL , which shall be in N .

This being so, I say that N is the required image of the given point, which is to be understood as follows: Let us assume that the plane in which the image N is situated, as the glass, be in thought separable from the floor and, revolving about the glass base DE as axis, be placed at right angles to the floor, that there be also in the same way placed erect, at right angles to the said floor, the line FG , the point F remaining fixed and G coming in the air as eye; upon this, in the point A a line equal to BC , also at right angles to the floor, in such a way that the uppermost point thereof designates the object point. This being so, I say that then the eye G , the point N , and that object point are all three in a straight line, and therefore N is the required image. **PRELIMINARY TO THE PROOF.** Because the above-mentioned separation in thought of the glass from the floor

vallen, wy fullen die dadelick scheidt als volght: Laet de twee voorgaende for-
men hier andermael vertheykent worden, doch alsoo datmen deur t'be-
hulp van dobbel papier, de teyckening die heur verstaet int glas te moeten commen,
scheidt mach vande teyckening inde vloer, datmen oock de ghegeven sien-
dermaet FG, inde vloer, overeynde mach stellen als sienderlijn, en ghelijcx een
lini op A, even an BC, als AO, draeyende t'glas op de gla/grondt DE als as, en
de sienderlijn FG op de voet F, en AO opt punt A, om alsoo t'glas, sienderlijn,
en lijn AO, rechthouckich op de vloer te connen stellen, welcke ick hier neem
dadelick alsooghstelt te sijn.



T B E W Y S.

Anghesien t'glas daer N in is, de sienderlijn FG, en de lini AO, deur t'be-
reysel nu alle drie rechthouckich op de vloer staen, soo segh ick dat de rechte
lini vant oogh G, deur t'glas tottet verschaeulick punt O, t'selve glas deurboort
in N, als schaen van O, t'welck aldus bethoont wort: T verdocht strael van G
tot I, is ewewijdich met FH, en FH ewewijdich met AK deur t'werck derde lidt,
en AK mette verdochte OL, waer deur GI mette verdochte OL ewewijdich
is, en daerom is I saempunt der voortghetrocken schaen vande verschaeulicke
LO deur het 3 voorstel, waer deur de schaen van LO inde saemlijn IL moet
sijn, en daerom is oock de schaen van O in IL: Sy is oock int oneyndelick plat
streckende deur AFG, maer t'selve plat snijt IL in N, daerom N is de schaen
van O.

Cortheyt opt werck.

Sooder inde vloer waren twee of meer ghegeven punten ghelijck A, val-
lende altsamen in een rechte lini, men mach cortheytshalven de lini als AK,
eerst deur die twee of meer punten trecken, en de vloerlijn als FH daer me eve-
wijdich, op dat d'ander linien als KL, al vallen inde selve KL, of in haer ver-
langde.

*2 Voorbeelt met * tuychwerckelicke wercking.*

*Mechanick
operatione.*

Om alsulcke redenen als int 5 voorstel beschreven is een 2 voorbeelt met
tuychwerckelicke wercking, soo wort hier een dergelijcke tweede voorbeelt
ghestelt

might seem obscure, we shall separate them in actual fact, as follows: Let the two foregoing figures be drawn here once again, but in such a way that by means of double paper it is possible to separate the drawing that is to come in the glass from the drawing in the floor, and that it is also possible to place the given observer's measure FG erect on the floor as observer's line, and likewise a line on A equal to BC , as AO , the glass revolving about the glass base DE as axis, and the observer's line FG about the foot F , and AO about the point A , in order that the glass, the observer's line, and the line AO may thus be placed at right angles to the floor, which I here assume to be so placed in actual fact.

PROOF

Since the glass in which N is situated, the observer's line FG , and the line AO , by the preliminary, are now all three at right angles to the floor, I say that the straight line from the eye G through the glass to the object point O pierces the said glass in N , as image of O , which is proved as follows: The imagined ray from G to I is parallel to FH , and FH parallel to AK by the third section of the procedure, and AK to the imagined line OL , in consequence of which GI is parallel to the imagined line OL , and therefore I is the meeting point of the produced image of the line LO by the 3rd proposition, in consequence of which the image of LO must be in the meeting line IL , and therefore the image of O is also in IL . It is also in the infinite plane passing through AFG , but the said plane intersects IL in N , therefore N is the image of O .

Abridgement of the Procedure

If there be in the floor two or more given points like A , all falling in a straight line, the line as AK may for brevity's sake first be drawn through those two or more points, and the floor line as FH parallel thereto, in order that the other lines as KL may all fall in the said line KL , or in KL produced.

2nd Example, by Mechanical Operation

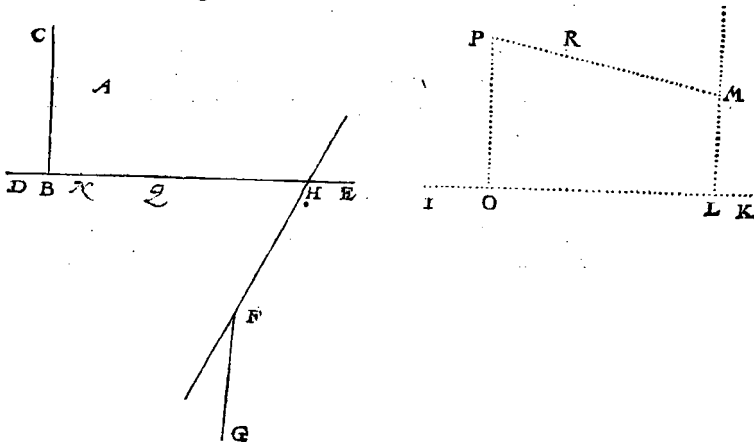
For the same reasons for which in the 5th proposition a 2nd example by mechanical operation has been described, a similar second example is here given.

ghestelt. **T G H E G H E V E N.** Laet A andermael een punt sijn inde vloer, waer op verdocht wort een rechte lini te staen even an B C, en rechthouckich op de selve vloer, waer af het opperste punt, is t'verschaeulickpunt boven de vloer inde locht, voort sy D E de glasgront, diens glas op de vloer rechthouckich bedocht wort, F de voet, waer op wy deur t'ghedacht nemen een sienderlijn te staen, even ande siendermaet F G rechthouckich op de vloer.

T B E G H E E R D E. Wy moeten de schaeu des verschaeulickpunts vinden, dats t'uyterste punt der lini op A, even an B C, en rechthouckich op de vloer.

T B E R E Y T S E L V A N T T V Y C H W E R C K E L I C K W E R C K. Hocwel dit bereytsel t'cenmael is ghelijck t'bereytsel vant tuychwerckelick werck des 5 voorstels, nochtans om datter wat verscheydenheyt inde bereyckenende letters valt, en dattet daer beneven dient om inde dadelicke verschaeuwing na te volghen, soo sullen wijt meerder clærheys en gheriefshalven, andermael int langhe beschrijven als volght: Ick treck vande voet F, tot inde glasgront D E, de vloerlijn F H foot valt, uytghenomen dat by aldien de selve vloerlijn voortghetrocken wierde, niet en strecke deur t'ghegheven punt A, en verlang de selve vloerlijn op beyden sijden verre ghenouch, om daer op de volgende wercking te connen doen: Daer na treck ick op een ander plat int welck als glas ick de schaeu begheer, de verborghen lini I K als glasgront, daer in teyckenende t'punt

Homologum. L als *lijckstandich met H, daer na de verborghen lini L M, rechthouckich op de glasgront I K, en alsoo dat de selve L M als siendermaet int glas, even sy ande ghegheven siendermaet F G: Daer na sy de selve siendermaet L M verre ghenouch voortghetrocken.



Dit bereytsel aldus eens ghestelt sijnde, wy sullen nu verclaren deur dit ghegheven verschaeulick punt boven de vloer inde locht, hoe de schaeuwen van alle ghegheven verschaeulicke punten boven de vloer inde locht, gheteyckent worden int glas, en dat deur seven leden.

*Mechanica
operatio.*

Het tuychwerckelick werck.

Ten eersten stel ick d'een voet des passers int ghegheven punt A, d'ander inde verlangde vloerlijn F H, alsoo dat de verdochte rechte lini van d'een voet des passers

SUPPOSITION. Let A again be a point in the floor on which a straight line is imagined, equal to BC and at right angles to the said floor, the uppermost point of which is the point above the floor in the air; further let DE be the glass base, whose glass is imagined to be at right angles to the floor, F the foot, on which we imagine an observer's line, equal to the observer's measure FG , at right angles to the floor.

WHAT IS REQUIRED. We have to find the image of the point, *i.e.* the extremity of the line on A , equal to BC and at right angles to the floor.

PRELIMINARY TO THE MECHANICAL PROCEDURE. Although this preliminary is altogether similar to the preliminary to the mechanical procedure of the 5th proposition, yet, because there is some difference in the reference letters and because in addition it serves for imitation in practical perspective, we shall again describe it at length for the sake of greater clarity and convenience, as follows: I draw from the foot F to the glass base DE the floor line FH , in any way, except that if the said floor line were produced, it should not pass through the given point A , and I produce the said floor line at either end far enough to enable the following operation to be applied thereto: Thereupon I draw in another plane, in which as glass I require the image, the hidden line IK as glass base, marking therein the point L as homologous to H , thereafter the hidden line LM , at right angles to the glass base IK , and in such a way that the said line LM as observer's measure in the glass be equal to the given observer's measure FG . Thereafter let the said observer's measure LM be produced far enough.

This preliminary having thus been given, we shall now set forth by means of this given point above the floor in the air how the images of all given points above the floor in the air are drawn in the glass, such in seven sections.

Mechanical Procedure

In the first place I put one leg of the compasses in the given point A , the other in the produced floor line FH , in such a way that the imagined straight

passers tot d'ander, uytter oogh ten naesten by rechthouckich comt op de selvé verlangde vloerlijn FH, en blijvende dan d'een voet op A onbeweeghlick, men beschrijft met d'ander een verborghen booghsken t'welck gherakende de verlangde vloerlijn FH sonder snyen, ick heb op den passer de begheerde langde.

Ten tweeden de passer soo wijt open blijvende, ick stel d'een voet inde verlangde vloerlijn FH, d'ander inde glasgrondt DE, en alsoo dat de lini tusschen de twee voeten des passers weerom uytter oogh rechthouckich comme op de verlangde vloerlijn FH, dat versouckende met een verborghen booghsken alsvoorren, en d'ander voet valt dan by voorbeeld in N, als eerste sine.

Ten derden neem ick mette passer de langde van t'vloerlijnaecksel H, tot d'eerste sine N, en breng die van des glas vloerlijnaecksel L na l inde glasgrondt, welke valt neem ick tot O, als eerste sine.

Ten vierden treck ick van d'eerste sine O, de verborghen lini O P, rechthouckich op de glasgrondt I K, en even ande ghegheven hooghde B C.

Ten vijften treck ick de verborghen saemlijn van t'saempunt M tot P.

Ten sessten legh ick een rechte reghel op de voet F, en t'ghegheven punt A, welke reghel snyende de glasgrondt DE in Q als tweede sine, neem dan mette passer de langde vande selve tweede sine Q, totter vloerlijnaecksel H.

Ten sevenden stel ick dan d'een voet des passers inde verlangde siendermaet L M, d'ander inde saemlijn M P, maer alsoo dat de bedochte lini tusschen de twee voeten des passers, uytter oogh rechthouckich valle op de verlangde siendermaet L M, my versekerende met te beschrijven een verborghen booghsken inde verlangde L M, als int eerste lidt, en d'ander voet valt dan inde saemlijn M P, an, neem ick R, voor begheerde schaen, waer af t'bewijs deurt t'voorgaende bewijs des 1 voorbeelts van dit voorstel openbaer is. T B E S L V Y T. Wesende dan ghegheven een verschaeulick punt boven de vloer inde locht, t'glas rechthouckich op de vloer, de voet, en sienderlijn, wy hebben de schaen ghevonden na den eyfch.

Tot hier toe sijn beschreven de voorstellen van t'vinden des schaens eens verschaeulickpunts, alwaer het glas rechthouckich op de vloer was, maer de volghende twee voorstellen sullen dienen tottet vinden des schaens eens verschaeulickpunts, alwaer t'glas scheefhouckich op de vloer sal sijn.

5 VERTOCH. 7 VOORSTEL.

Draeyende t'glas op de glasgrondt als as, en de sienderlijn op de voet, alsoo datse altijt * evenwijdich blijft *Parallelis* van een lini die int glas op de glasgrondt rechthouckich is: De schaen eens verschaeulickpunts inde vloer blijft int glas altijt opeen selve plaets.

T G H E G H E V E N. Laet int bereytsel van t'bewijs des 5 voorstels, het glas B C G, en de sienderlijn D E, beyde overeynde ghestelt worden rechthouckich op de vloer, en alsdan sal K, de schaen sijn des verschaeulickpunts A, ghesien vant oogh E, ghelijck daer bewesen is: Daer na sy t'glas neerwaert ghedraeyt, tot dattet op de vloer een houck maect even an desen houck L M N: En desgelijcx sy oock ghedaen mette sienderlijn D E, sulcx datse ewewijdich blijft met

line from one leg of the compasses to the other comes, to the eye, approximately at right angles to the said produced floor line FH , and while one leg then remains motionless in A , with the other a hidden arc is described, and when this meets the produced floor line FH without intersecting it, I have the required length between the compasses.

Secondly, with the compasses remaining open at the same width, I put one leg in the produced floor line FH , the other in the glass base DE , and in such a way that the line between the two legs of the compasses again, to the eye, comes at right angles to the produced floor line FH , testing this by means of a hidden arc as before, and the other leg will then, for example, fall in N , as first intersection.

Thirdly, I take between the compasses the length from the floor-line glass point H to the first intersection N and transfer that from the floor-line glass point L to I in the glass base, which I assume to fall as far as O , as first intersection.

Fourthly, I draw from the first intersection O the hidden line OP , at right angles to the glass base IK and equal to the given height BC .

Fifthly, I draw the hidden meeting line from the meeting point M to P .

Sixthly, I put a straight ruler on the foot F and the given point A , and when this ruler intersects the glass base DE in Q as second intersection, I then take between the compasses the length from the said second intersection Q to the floor-line glass point H .

Seventhly, I then put one leg of the compasses in the produced observer's measure LM , the other in the meeting line MP , but in such a way that the imagined line between the two legs of the compasses shall, to the eye, fall in the produced observer's measure LM , testing this by describing a hidden arc in the produced line LM , as in the first section; the other leg will then fall in the meeting line MP , I assume at R as required image, the proof of which is clear from the foregoing proof of the 1st example of this proposition. **CONCLUSION.** Hence, given a point above the floor in the air, the glass at right angles to the floor, the foot, and the observer's line, we have found the image, as required.

Up to this point have been described the propositions of the finding of the image of a point where the glass was at right angles to the floor, but the next two propositions will serve to find the image of a point where the glass will be at oblique angles to the floor.

5th THEOREM

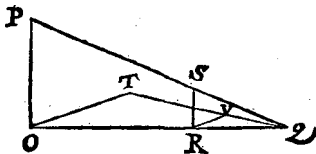
7th PROPOSITION

If the glass revolves about the glass base as axis, and the observer's line about the foot, in such a way that it always remains parallel to a line which is in the glass at right angles to the glass base, the image of a point in the floor remains always in the same place in the glass.

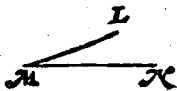
SUPPOSITION. In the preliminary to the proof of the 5th proposition let the glass BCG and the observer's line DE both be placed erect at right angles to the floor, then K will be the image of the point A viewed by the eye E , as has there been proved. Thereupon let the glass be revolved downwards until it makes with the floor an angle equal to the angle LMN shown. And let the same also be done with the observer's line DE , in such a way that it remains parallel

IK, dat is, als int voorstel ghefeyt wort, ewewijdich met een lini die int glas op de glasgrondt rechthouckich is. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten bewijfen dat K in die laetste ghestalt, schacu blijft des verschaeulickpunts A, en dat inde selve plaets vant glas, te weten datter strael vant oogh E tot A, strecken sal deur K.

T B E R E Y T S E L. Om niet duystertlick te spreken van verdochte linien inde locht, soo laet dese OP, beteycken die sienderlijn DE, alsse rechthouckich staet op de vloer, dats hier rechthouckich op OQ als vloerlijn, in plaets van ginste vloerlijn DA, en dese RS, rechthouckich op de selve vloerlijn OQ, beduyde die lini IK int glas rechthouckich op die vloerlijn DA; Voort sy dese Q in plaets vant verschaeulickpunt A, en PQ sy het strael, deurboorende t'glas RS in S, als schacu van Q, ghesien uyt het oogh P. Na dees eerste stelling sy ghedaen de tweede, te weten OP neerwaert ghedraeyt, soo dattet oogh P ghecommen sy tot T, sulcx dat den houck TOQ, even is anden ghegheven houck LMN; Voort sy ghetrocken het strael TQ; Daer na RV, ewewijdeghe met OT, tot datse gheraect TQ: Twelck soo sijnde, ick seghe de lini RV, even te vallen an RS, waer uyt wijder sal volghen en behoont worden, t'ghene in dit voorstel bewesen moet sijn.



T B E W Y S.



Tis kennelick dat ghelijck inden driehouck OPQ, de lini OP tot RS, alsoo QO tot QR: Ende ghelijck inden driehouck OTQ, de lini OT tot RV, alsoo QO tot QR: Sulcx dat de twee linien

Proportionalis.

Inversam alternam rationem.

OP, RS, en oock de twee linien OT, RV, met twee selfde linien * everedenich sijn, en daerom oock met malcander everedenich, dat is ghelijck OP tot RS, alsoo OT tot RV: En deur * verkeerde overanderde reden, ghelijck OT tot OP, alsoo RV tot RS: Maer OT is even met OP, daerom RV is oock even met RS: Sulcx dat de sienderlijn OP ghedaelt tot OT, en t'glas RS oock soo veel dats tot RV, soo strecket strael TQ deur t'selve punt des glas, te weten V, daer het strael PQ deur streckte, te weten deur S, want Sen V bedien des glas selfde punt, overmidts RS en RV eve lanck sijn, en vervolghens de schacu des verschaeulickpunts Q, en verandert int glas heur plaets niet: Maer V is hier in sulcken ghedaente als ghinder K inde tweede ghestalt, deur t'ghegeven, daerom K blijft in die tweede ghestalt schacu des verschaeulickpunts A, en dat inde selve plaets vant glas. **T B E S L V Y T.** Draeyende dan t'glas op de glasgrondt als as, en de sienderlijn op de voet, alsoo datse altijt ewewijdich blijft van een lini die int glas op de glasgrondt rechthouckich is: De schacu eens verschaeulickpunts inde vloer, blijft int glas altijt op een selve plaets, t'welck wy bewijfen moesten.

V E R V O L G H.

Hier boven behoont sijnde dat wanneer t'glas en sienderlijn ewewijdich draeyen inder voughen alsvooren, dat alsdan het strael van E tot A altijt deur K streckt, daer uyt volghet dattet glas en sienderlijn ghedraeyt sijnde tot op de vloer, sulcx dat E sy ghecommen tot X, soo moeten de drie punten XKA dan in een rechte

to IK , *i.e.*, as has been said in the proposition, parallel to a line which is in the glass at right angles to the glass base. **WHAT IS REQUIRED.** We have to prove that K in the latter position remains the image of the point A , such in the same place of the glass, to wit such that the ray from the eye E to A will pass through K .

PRELIMINARY. In order not to speak obscurely of imagined lines in the air, let this line OP designate that observer's line DE , if it is at right angles to the floor, *i.e.* here at right angles to OQ as floor line instead of yonder floor line DA , and let this RS , at right angles to the said floor line OQ , designate that line IK in the glass at right angles to that floor line DA . Further let this Q be instead of the point A , and let PQ be the ray piercing the glass RS in S , as image of Q , viewed from the eye P . After this first position let the second be taken, to wit OP revolved downwards, so that the eye P shall have moved to T in such a way that the angle TOQ is equal to the given angle LMN . Further let there be drawn the ray TQ ; thereafter RV , parallel to OT , until it meets TQ . This being so, I say that the line RV is equal to RS , from which what has to be proved in this proposition will further follow and be proved.

PROOF

It is obvious that as in the triangle OPQ the line OP is to RS , so is QO to QR . And as in the triangle OTQ the line OT is to RV , so is QO to QR ; in such a way that the two lines OP , RS and also the two lines OT , RV are proportional to two equal lines, and therefore also proportional to each other, that is: as OP is to RS , so is OT to RV . And by taking the terms inversely and alternately: as OT is to OP , so is RV to RS . But OT is equal to OP , therefore RV is also equal to RS ; in such a way that when the observer's line OP descends to OT , and the glass RS the same distance, *i.e.* to RV , the ray TQ passes through the same point of the glass, to wit V , through which the ray PQ passed, to wit through S , because S and V designate the same point of the glass, since RS and RV have the same length, and consequently the image of the point Q does not change its place in the glass. But V is here in the same position as yonder K in the second position, by the supposition; therefore in that second position K remains the image of the point A , such in the same place in the glass. **CONCLUSION.** Hence, if the glass revolves about the glass base as axis, and the observer's line about the foot, in such a way that it always remains parallel to a line which is in the glass at right angles to the glass base, the image of a point in the floor always remains in the same place in the glass; which we had to prove.

SEQUEL

It having been proved above that when the glass and the observer's line revolve parallel to each other as hereinbefore, then the ray from E to A always passes through K , it follows that when the glass and the observer's line have revolved till they reach the floor, so that E shall have moved to X , the three points X , K , A must then lie in a straight line. From which it further follows that the image K

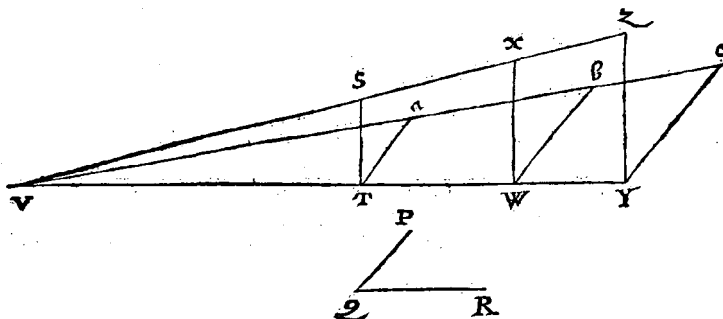
rechte lini legghen: Waer uyt wijder volgt datmen de schaeu K soude connen vinden deur wat lichter wech dan de voorgaende wercking des 5 voorstels: Te weten sonder te trekken de twee linien i K, A D, maer alleenlick A X, wiens sne inde sacmlijn GH de begheerde schaeu soude wesen, doch anfiende de ghemene regel die inde tuychwerckelicke wercking na d'eerste wijze bequaemlicker ghevolght wort, soo sullen wy daer by blijven.

Merckt noch dar anghesien alle verschaculick punt inde vloer, alijt in een selve plaets des glas blijft wanneer t'glas en sienderlijn ghelijckelick draeyen op de glasgrondt als as, soo volght hier uyt, dat de schaeu van alle platte verschaculicke form inde vloer, alijt de selve blijft en in een selve plaets des glas, wanneer t'glas en sienderlijn ghelijck draeyen.

6 VERTOOGH 8 VOORSTEL.

Draeyende t'glas op de glasgrondt als as, en de sienderlijn op de voet, mette lini vant verschaculickpunt boven de vloer totte vloer, also datse alijt *Parallelle.* evenvijdich blijven van een lini die int glas op de glasgrondt rechthouckich is: De schaeu des verschaculickpunts boven de vloer, blijft int glas alijt op een selve plaets.

TGHEGHEVEN. Laet int bereytsel van t'bewijs des 6 voorstels, het glas D E I N L, de sienderlijn FG, mette lini A O, alle drie overeynde gestelt worden rechthouckich op de vloer, en alsdan sal N de schaeu sijn des verschaculickpunts O, ghesien vant oogh G, ghelijck daer bewesen is. Daer na sy het glas neerwaert ghedraeyt, tot datter op de vloer een houck maeckt even an desen houck P Q R, en desghelijcx sy ghedaen mette sienderlijn FG, oock mette lini A O, sulcx datse beyde ewewijdeghe blijven met MN, dat is, als in dit voorstel gheseyt wort, ewewijdich met een lini die int glas op de glasgrondt rechthouckich is. TBEGHEERDE. Wy moeten bewijsen dat N in die laetste gestalt, schaeu blijft des verschaculickpunts O, en dat inde selve plaets vant glas, te weten dattet strael vant oogh G tot O, snecken sal deur N. TBEREYTSEL. Om



niet duysterlick te spreken van verdochte linien inde locht, soo laet dese ST beteycken die sienderlijn FG, alsoe rechthouckich staet op de vloer, dats hier recht-

might be found by a somewhat easier method than the foregoing operation of the 5th proposition. To wit, without drawing the two lines IK , AD , but only AX , whose intersection with the meeting line GH would be the required image, but considering the common rule which is followed more easily in the mechanical operation in the first manner, we shall keep to that.

Note also that since any point in the floor always remains in the same place of the glass when the glass and the observer's line revolve equally about the glass base as axis, it follows that the image of any plane figure in the floor always remains the same, and in the same place of the glass, when the glass and the observer's line revolve equally.

6th THEOREM

8th PROPOSITION

If the glass revolves about the glass base as axis, and the observer's line about the foot, with the line from the object point above the floor to the floor, such that they always remain parallel to a line which is in the glass at right angles to the glass base, the image of the point above the floor always remains in the same place in the glass.

SUPPOSITION. In the preliminary to the proof of the 6th proposition let the glass $DEINL$, the observer's line FG , and the line AO all three be placed erect at right angles to the floor, then N will be the image of the point O , viewed by the eye G , as has there been proved. Thereupon let the glass be revolved downwards until it makes with the floor an angle equal to the given angle PQR , and let the same be done with the observer's line FG , also with the line AO , in such a way that both remain parallel to MN , that is, as is said in this proposition, parallel to a line which is in the glass at right angles to the glass base. **WHAT IS REQUIRED.** We have to prove that in the last position N remains the image of the point O , such in the same place of the glass, to wit that the ray from the eye G to O will pass through N . **PRELIMINARY.** In order not to speak obscurely of imagined lines in the air, let this ST designate that observer's line FG , when it is at right angles to the floor, that is here at right angles to TV , as floor line, instead of yonder

rechthouckich op $T V$, als vloerlijn, in plaets van ghinste vloerlijn $F A$, en dese $W X$ rechthouckich op de selve vloerlijn $T V$, beduyde die lini $M N$ int glas rechthouckich op die vloerlijn $F A$; Voort sy dese $Y Z$, in plaets van ghinste $A O$, en $S V$ sy het strael, deurboorende t'glas $W X$ in X , als schaeu van Z ghesien uyt het oog S . Na dees eerste stelling sy ghedaen de tweede, te weten $T S$ neerwaert ghedraeyt, soo dattet oog S ghecommen sy tot a , sulcx dat den houck $a T V$, even is anden ghegeven houck $P Q R$, voort sy ghetrocken het strael $a V$, daer na $W b$, en $Y c$, beyde ewewijdeghe met $T a$.

T B E W Y S.

$W b$ valt even an $W X$ deur t'bewijs des 1 voorbeelts, en om de selve reden valt $Y c$ oock even met $Y Z$; Sulcx dat de sienderlijn $T S$ gedaelt tot $T a$, en t'glas $W X$ oock soo veel, dats tot $W b$, en $Y Z$ tot $Y c$, soo strecket strael van a tott verschaeulickpunt c , deur t'felve punt des glas, te weten b , daer het strael $S Z$ deur streckte, namelick deur X , want X en b bedien des glas selve punt, overmits $X W$ en $b W$ ewelanck sijn: En vervolghens de schaeu des verschaeulickpunts Z , en verandert int glas haer plaets niet: Maer b is hier in sulcken gedaente als ginder N inde tweede ghestalt, deur t'ghegeven, daerom N blijft in die tweede ghestalt schaeu des verschaeulickpunts O , en dat inde selve plaets vant glas.

T B E S L V Y T. Draeyende dan t'glas op de glasgront als as, en de sienderlijn op de voer mette lini vant verschaeulickpunt boven de vloer totte vloer alsoo datse alijt ewewijdich blijven van een lini die int glas op de glasgront rechthouckich is: de schaeu des verschaeulickpunts boven de vloer, blijft int glas alijt op een selve plaets, t'welck wy bewijsen moesten.

V E R V O L G H.

Hier boven bethoont sijnde dat wanneer t'glas, sienderlijn, en de lini $A O$, ewewijdich draeyen inder voughen alsvoren, dat alsdan het strael van G tot O alijt deur N streckt: Daer uyt volght dattet glas, sienderlijn, en de lini $A O$, ghedraeyt sijnde tot op de vloer, sulcx dat G sy gecommen tot d , en O tot e , so moeten de drie punten $d N e$, of $G N O$, dan in een rechte lini legghen, waer uyt volght datmen de schaeu van N , deur een ander manier soude connen vinden dan de voorgaende wercking des 6 voorstels, aldus: Men sal trecken een lini vant ghegeven punt A tot e , even an $B C$, en ewewijdich met $H I$, daer na ghetrocken $d e$, haer sine inde saemlijn soude de begheerde schaeu wesen: Doch anfiende de gemeene reghel die inde tuchwerckelicke wercking na d'eerste wijse bequamelicker ghevolght wort, soo fullen wy daer by blijven.

Merckt noch dat anghesien de lini vant verschaeulickpunt inde locht totte vloer, ewewijdich moet draeyen metter glas en sienderlijn om de schaeu van dat punt tot een selve plaets des glas te sien, hier uyt volght dat soodie lini vant verschaeulickpunt inde locht totte vloer bleef staende, als d'ander twee ewewijdelick draeyden, dattet oog de schaeu des verschaeulickpunts soude sien veranderen van plaets, en vervolghens alle vaststaende ghesichten en verheven dinghen op de vloer veranderen haer schaeu int glas, t'welck de verschaeulicke formen inde vloer niet en ghebeurt, als gheseyt is in t'vervolgh des 7 voorstels.

floor line FA , and let this WX at right angles to the said floor line TV designate that line MN in the glass at right angles to that floor line FA . Further let this YZ be instead of yonder AO , and let SV be the ray piercing the glass WX in X , as image of Z , viewed from the eye S . After this first supposition let the second be made, to wit TS resolved downwards, so that the eye S shall have moved to a , in such a way that the angle aTV is equal to the given angle PQR ; further let there be drawn the ray aV , thereafter Wb and Yc , both parallel to Ta .

PROOF

Wb is equal to WX by the proof of the 1st example, and for the same reason Yc is also equal to YZ , so that when the observer's line TS has descended to Ta , and the glass WX the same distance, *i.e.* to Wb , and YZ to Yc , the ray from a to the point c passes through the same point of the glass, to wit b , through which passed the ray SZ , namely, through X , for X and b designate the same point of the glass, since XW and bW are the same length. And consequently the image of the point Z does not change its place in the glass. But b is here in the same position as yonder N in the second position, by the supposition; therefore N remains in that second position the image of the point O , such in the same place of the glass.

CONCLUSION. Hence, if the glass revolves about the glass base as axis, and the observer's line about the foot, with the line from the object point above the floor to the floor, such that they always remain parallel to a line which is in the glass at right angles to the glass base, the image of the point above the floor always remains in the same place in the glass; which we had to prove.

SEQUEL

It having been proved above that when the glass, the observer's line, and the line AO revolve parallel to each other in the same way as before, the ray from G to O always passes through N , it follows that if the glass, the observer's line, and the line AO have revolved till they have reached the floor, so that G has moved to d , and O to e , the three points d, N, e , or G, N, O must lie in a straight line, from which it follows that the image of N might be found by a method different from the foregoing operation of the 6th proposition, thus: Let a line be drawn from the given point A to e , equal to BC and parallel to HI . Thereafter, if de were drawn, its intersection with the meeting line would be the required image. But considering the common rule, which is followed more easily in the mechanical procedure in the first manner, we shall keep to that.

Note also that since the line from the point in the air to the floor must revolve parallel to the glass and the observer's line in order that the image of that point may be seen in the same place of the glass, it follows that if that line from the point in the air to the floor remained erect, while the other two revolved parallel to each other, the eye would see the image of the point changing its place, and consequently all fixed buildings and elevated objects on the floor change their images in the glass, which does not happen with the figures in the floor, as has been said in the sequel to the 7th proposition.

3 WERCKSTICK. 9 VOORSTEL.

Wesende ghegheven een verschaeulickpunt, t'glas schieffhouckich op de vloer, de voet, en sienderlijn: Sijn schaen te vinden.

Want het verschaeulickpunt ten sijn inde vloer, of daer boven, soo sullen wijder twee voorbeelden af beschrijven.

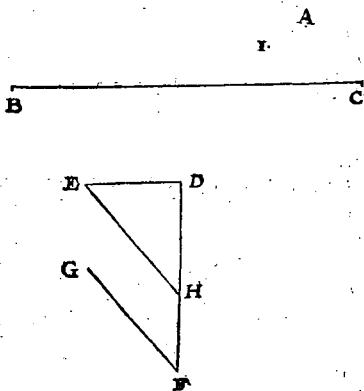
1 Voorbeelt met het verschaeulickpunt inde vloer.

TGHEGHEVEN. Laet A een verschaeulick punt sijn inde vloer, B C de glasgrond, D de voet, daer op wy deur t'gedacht nemen een sienderlijn te staen rechthouckich op de vloer, en even ande siendermaet D E, die ick hier ewewij-dich stel met B C, daer na op E D rechthouckich ghetrocken sijnde de lini D F soo lanck alst valt, en daer op F G, makende den houck D F G, soo is den houck der neyghing des glas op de vloer na A toe, even anden selven houck D F G.

T BEGHEERDE. Wy moeten de schaen vinden des verschaeulick punts A.

T W E R C K.

Ick treck vande siendermaets-oogh E, een rechte lini tot H, in D F, of foot noodich waer in haer verlange, en ewewijdeghen met G F. Dit soo sijnde ick neem nu H voor voet, E H voor siendermaet, diens sienderlijn rechthouckich op de vloer sy, Voort neem ick dattet glas diens glasgront B C, oock comme rechthouckich op de vloer: En met sulck ghegheven ghesocht de schaen van A, na de manier des 5 voorstels, sy wort bevonden, neem ick te vallen an I, welcke ick seghe de begheerde schaen te wesen.



T B E W Y S.

Soo de ghegheven sienderlijn niet en waer even gheweest met E D, maer even met H E, en rechthouckich op de vloer: Dat sghelijcx het glas niet en waer geweest schieffhouckich op de vloer maer rechthouckich, tis openbaer deur t'werck van desen, dar alsdan I de ware schaen van A souden sijn: Maer wannet t'glas en de sienderlijn gelijckelick een selve wech draeyen, als vande boveschreven rechthouckicheyt, op de vloer ghecommen wesende tot dese schieffhouckicheyt, soo blijft de schaen I alijt op een selve plaets deur het 7 voorstel: Daerom het oog der sienderlijn diens siendermaet H E, siet de begheerde schaen an I: Maer dat oog E der sienderlijn H E, is ghedaelt totte selve plaets des gegeven ooghs der sienderlijn diens siendermaet D E, daerom het ghegheven oogh siet de begheerde schaen int glas als ter plaets van I.

3rd PROBLEM

9th PROPOSITION

Given an object point, the glass at oblique angles to the floor, the foot, and the observer's line: to find its image.

Because the object point may be in the floor or above it, we shall describe two examples of it.

1st Example, with the Object Point in the Floor

SUPPOSITION. Let A be a point in the floor, BC the glass base, D the foot, on which we imagine an observer's line at right angles to the floor and equal to the observer's measure DE , which I here put parallel to BC . Thereafter, the line DF being drawn at right angles to ED and having any length, and then FG , making the angle DFG , the angle of inclination of the glass on the floor towards A is equal to the said angle DFG . WHAT IS REQUIRED. We have to find the image of the point A .

PROCEDURE

I draw from the eye E a straight line to H , in DF , or if necessary in DF produced, and parallel to GF . This being so, I now take H for foot, EH for observer's measure, whose observer's line shall be at right angles to the floor. Further I assume that the glass base BC of the glass also comes at right angles to the floor. And when with these data the image of A is sought in the manner of the 5th proposition, I assume it is found to fall at I , which I I say is the required image.

PROOF

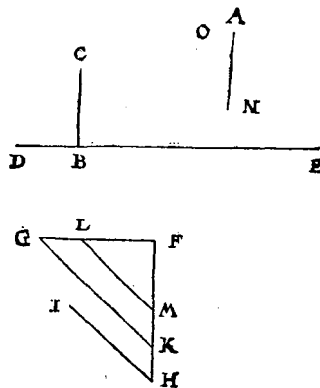
If the given observer's line had not been equal to ED , but equal to HE and at right angles to the floor; and if also the glass had not been at oblique angles to the floor, but at right angles, it is clear from the procedure of this problem that I would then be the true image of A . But when the glass and the observer's line revolve equally the same distance, *e.g.* from the rectangular position from the floor described above to this oblique-angled position, then the image I always remains in the same place by the 7th proposition. Therefore the eye of the observer's measure HE of the observer's line sees the required image at I . But that eye E of the observer's line HE has descended to the said place of the given eye of the observer's line of which the observer's measure is DE , therefore the given eye sees the required image in the glass at I .

2 Voorbeelt met t'verschaeulick punt boven de vloer.

TGHEGHEVEN. Laet A een punt sijn inde vloer, waer op verdocht wort een rechte lini te staen even an BC, en rechthouckich op de selve vloer, waer af het opperste punt is t'verschaeulickpunt boven de vloer inde locht: Voort sy DE de glasgront, F de voet, daer op wy deur t'ghedacht nemen een sienderlijn te staen rechthouckich op de vloer, en even ande siendermaet FG, die ick alijt ewewijdich treck met DE: Daer na op FG rechthouckich ghetrocken sijnde de lini FH soo lanck alst valt, en daer op HI, makende den houck FHI, soo is den houck der neyghing vande glasgront op de vloer na A toe, even anden selven houck FHI. **TBEGHEERDE.** Wy moeten de schaen des verschaeulickpunts vinden.

TWERCK.

Ick treck vande siendermaets oogh G, een rechte lini tot K in FH, of soot noodich waer in haer verlangde, en ewewijdeghe met IH, daer na teyken ick in FG, of soot noodich waer in haer verlangde, het punt L, alsoo dat FL even sy an BC: Treck daer na van L een rechte lini tot M in FH, of soot noodich waer in haer verlangde, en ewewijdeghe met IH. Daer na AN, even en ewewijdeghe met FM, welverstaende na den selven oirt daer de lini van F na M henen streck, want quaem M op d'ander sijde van F, soo soude N oock moeten soo veel op d'ander sijde van A commen. Dit soo sijnde, ick neem nu K voor voet, KG voor siendermaet, diens sienderlijn rechthouckich op de vloer sy: Daer na neem ick LM in plaets van BC, te weten voor lini welcke ghestelt opt punt N rechthouckich op de vloer, dat haer uysterste ghenomen worde voor verschaeulickpunt: Voort neem ick dattet glas diens glasgront DE, oock comme rechthouckich op de vloer: En met sulck ghegeven ghesocht de schaen des verschaeulickpunts na de manier des 6 voorstels, sy wort bevonden, neem ick, te vallen an O, welcke ick seggh de begheerde schaen te wesen. Waer af t'bewijs is ghelijck t'bewijs des 1 voorbeelts. **TBESLVT.** Wefende dan ghegeven een verschaeulickpunt, t'glas scheefhouckich op de vloer, de voet, en sienderlijn, wy hebben sijn schaen ghevonden, na den eyfch.



VERVOLGH.

Soo int 1 voorbeelt H, of int 2 voorbeelt M, viel over d'ander sijde vande ghegeven voet (t'welck ghebeurt als t'glas na den siender toe neycht) en datse qua-

men

2nd Example, with the Object Point Above the Floor

SUPPOSITION. Let A be a point in the floor, on which a straight line is imagined, equal to BC and at right angles to the said floor, the uppermost point of which is the point above the floor in the air. Further let DE be the glass base, F the foot, on which we imagine an observer's line at right angles to the floor and equal to the observer's measure FG , which I always draw parallel to DE . Thereafter the line FH having been drawn, at right angles to FG and having any length, and then HI , including the angle FHI , the angle of inclination of the glass base on the floor towards A is equal to the said angle FHI . **WHAT IS REQUIRED.** We have to find the image of the point.

PROCEDURE

I draw from the eye G a straight line to K in FH , or if necessary in FH produced, and parallel to IH ; thereafter I mark in FG , or if necessary in FG produced, the point L such that FL shall be equal to BC . Thereafter I draw from L a straight line to M in FH , or if necessary in FH produced, and parallel to IH . Thereafter AN equal and parallel to FM , to wit in the same direction in which the line from F to M extends, for if M came to the other side of F , N would also have to come as much to the other side of A . This being so, I now take K for foot, KG for observer's measure, whose observer's line shall be at right angles to the floor. Thereafter I take LM instead of BC , to wit for the line, placed in the point N at right angles to the floor, so that its extremity shall be taken for the object point. Further I assume that the glass base DE of the glass also comes at right angles to the floor. And when with these data the image of the point is sought in the manner of the 6th proposition, I assume it is found to fall at O , which I say is the required image; the proof of which is similar to the proof of the 1st example.

CONCLUSION. Hence, given a point, the glass at oblique angles to the floor, the foot, and the observer's line, we have found its image, as required.

SEQUEL

If H in the 1st example or M in the 2nd example fell to the other side of the given foot (which happens if the glass inclines towards the observer), and if

men tot inde glasgrondt, 't is kennelick dat men tot gheen s'chaeu vant verschaeulickpunt en soude connen gheraken, uyt oirsaeck dattet een ongheschickt ghegheven soude sijn, als wefende het oogh int glas.

Maer by aldien die twee punten als H of M alsoo noch voorder quamen dan int glas, dergelijcke onmeughelicheyt soude daer uyt volghen, om dattet oogh niet en soude connen het verschaeulickpunt sien achter 't glas.

Soo int 2 voorbeeld N quaem tot inde glasgrondt DE, 't waer openbaerlick teycken, dattet verschaeulickpunt A int glas soude ghegheven sijn, en daerom voor sijn self s'chaeu verstrecken, deur de 2 begheerte.

Maer quaem N noch voorder dan tot inde glasgrondt DE, 't is kennelick dat men dan tot gheen s'chaeu vant verschaeulickpunt en soude connen gheraken, als commende 't glas achter 't verschaeulickpunt, teghen de reden.

'T is oock kennelick dat de ghegheven voet commen can inde glasgrondt, of daer achter tuschen de selve en 't verschaeulickpunt, oock int verschaeulickpunt en daer achter: Midts wel verstaende, dat de bovenschreven punten als H, M, of N niet en vallen als gheseyt is.

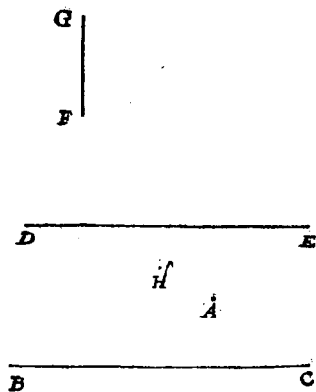
4 WERCKSTICK 10 VOORSTEL.

Wefende ghegheven een verschaeulickpunt, 't glas ewewijdich mette vloer, de voet, en sienderlijn: Sijn s'chaeu te vinden.

T GHEGHEVEN. Laet A een verschaeulickpunt sijn int plat des blats, en op de rechte lini BC, sy bedocht een plat als vloer, rechthouckich opt plat des blats: Sghelijcx sy op de rechte lini DE, bedocht een glas ewewijdich mette voorschreven vloer, voort sy op F verdocht een rechte lini even an FG, oock rechthouckich opt plat des blats, en t'uyterste punt der selve lini sy het oogh, van welck deur 't ghedacht ghetrocken een lini rechthouckich op de vloer (die even moet sijn ande verdochte lini van F op BC rechthouckich, als siendermaet) sy sal voor sienderlijn verstrecken. TBEGHEERDE. Wy moeten vinden de s'chaeu des verschaeulickpunts A.

TWERCK.

Ick laet varen de verdochte ghegheven sienderlijn, en de vloer, die gheseyt wiert op BC verdocht te sijn rechthouckich opt plat des blats, en neem 't plat des blats self voor vloer, en de lini op F even an FG, en rechthouckich opt plat des blats, neem ick voor sienderlijn: Twelck soo sijnde A is nu een ghegeven verschaeulickpunt inde vloer, en 't glas diens glasgrondt DE comt op de vloer rechthouckich: Hier mede s'chaeu ghevonden van A deur het



they came in the glass base, then it is obvious that no image of the point could be obtained, because the wrong thing would be given, the eye being in the glass.

But if those two points, as H or M , came even further forward than in the glass, a similar impossibility would follow, because the eye would not be able to see the point behind the glass.

If in the 2nd example N came in the glass base DE , it would be clear that the point A would be given in the glass, and therefore would serve as its own image, by the 2nd postulate.

But if N came even further forward than in the glass base DE , it is obvious that no image of the point could then be obtained, because of the glass coming behind the point, which is contrary to reason.

It is also obvious that the given foot may come in the glass base, or behind it, between it and the point, also in the point and behind it, provided the above-mentioned points as H , M or N do not fall as has been said.

4th PROBLEM

10th PROPOSITION

Given a point, the glass parallel to the floor, the foot, and the observer's line: to find its image.

SUPPOSITION. Let A be a point in the plane of the paper, and on the straight line BC let there be imagined a plane as floor, at right angles to the plane of the paper. In the same way on the straight line DE let there be imagined a glass parallel to the aforesaid floor. Further let there be imagined on F a straight line equal to FG , also at right angles to the plane of the paper, and let the extremity of the said line be the eye, and if from this in imagination a line be drawn at right angles to the floor (which must be equal to the imagined line from F at right angles to BC , as observer's measure), it will serve as observer's line. **WHAT IS REQUIRED.** We have to find the image of the point A .

PROCEDURE

I abandon the imagined given observer's line, and the floor which was said to be imagined on BC at right angles to the plane of the paper, and take the plane of the paper itself for floor, and I take the line on F , equal to FG and at

5 voorstel die H sy, ick segh de selve de begheerde schacu te wesen.

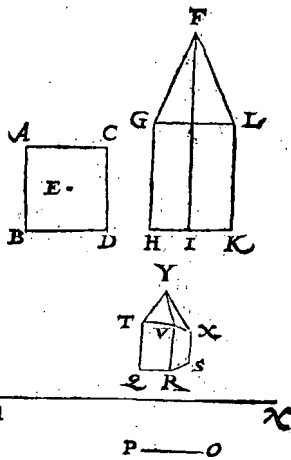
T B E W Y S.

Blijvende t'verschaeulickpunt, t'glas, en t'oogh, op een selve plaats, tis kennelick dat de schacu oock in een selve plaats des glas blijft, want de verandering van sienderlijn en vloer die wy int werck ghedaen hebben, en gheven gheen verandering vande plaats des schacus; Sulcx dat de ghevonden schacu de begheerde moet sijn. T B E S L V Y T. Wefende dan ghegheven een verschaeulickpunt, t'glas ewewijdich mette vloer, de voet, en sienderlijn, wy hebben sijn schacu gevonden, na den eyfch.

5 WERCKSTICK 11 VOORSTEL.

Wefende ghegheven een verschaeulicke form, t'glas, de voet, en sienderlijn: Haer schacu te vinden.

T G H E G H E V E N. Laet de verschaeuwen sijn een form van deser ghedaente: Op den viercanten gront A B C D, diens middelpunt E, gheteyckent int plat des blats als vloer, wort ghenomen te staen een torre, diens stantteyckening F G H I K, wesende ten plat ewewijdich mette torrens voorsijde, welck plat de selve torre deur t'middel snijt, sulcx dat op elck der punten A, B, C, D, een lini comt even an G H, of L K, en opt middelpunt E, een lini even an F I, en alle vijf rechthouckich op de vloer, en van t'bovenste punt der lini op E staende, comen vier linien totte opperste punten der voorschreven vier linien op A, B, C, D staende: Soo dat dese torre bestaet uyt een viercante lichamelicke rechthouck, met een viercante naelde daer op: Voort sy M N de glagront, diens glas op de vloer rechthouckich bedocht wort, O de voet, waer op wy deur t'gedacht nemen een sienderlijn te staen even ande siendermaet O P, rechthouckich op de vloer. T B E G H E E R D E. Wymooten de schacu deser verschaeulicke form vinden.



T W E R C K.

Ick souck de drie schaeuwen der drie verschaeulicke punten inde vloer B, D, C, welke ghevonden deur het 5 voorstel ick neem te wesen Q, R, S: Daer na souck ick de drie schaeuwen der drie punten boven de vloer, te weten ten eynde der drie linien die deur t'ghegheven verdocht worden te staen op B, C, D, elck even ande lini G H, en rechthouckich op de vloer, welke deur het 6 voorstel ghevonden worden te wesen, neem ick, T, V, X; Voort souck ick de schacu des punts boven de vloer, ten cynde der lini die deur t'ghegheven verdocht wort te staen op E, even an I F, en rechthouckich

right angles to the plane of the paper, for observer's line. This being so, A is now a given point in the floor, and the glass base DE of the glass comes at right angles to the floor. When herewith the image of A is found by the 5th proposition, which shall be H , I say that this is the required image.

PROOF

If the point, the glass, and the eye remain in the same place, it is obvious that the image also remains in the same place of the glass, for the change of observer's line and floor which we have made in the construction does not cause any change in the place of the image, so that the image found must be the one required.

CONCLUSION. Hence, given a point, the glass parallel to the floor, the foot, and the observer's line, we have found its image, as required.

5th PROBLEM

11th PROPOSITION

Given a figure, the glass, the foot, and the observer's line: to find its image.

SUPPOSITION. Let a perspective drawing have to be made of a figure of the following form. On the square base $ABCD$, whose centre is E , drawn in the plane of the paper as floor, is assumed to stand a tower, whose vertical plan is $FGHIK$, being a plane parallel to the front of the tower, which plane intersects the tower in the middle, so that on each of the points A, B, C, D there comes a line equal to GH or LK , and on the centre E a line equal to FI , and all five at right angles to the floor, and from the uppermost point of the line standing on E extend four lines to the uppermost points of the aforesaid four lines standing on A, B, C, D , so that this tower consists of a right prism with a quadrangular pyramid thereon. Further let MN be the glass base, whose glass is imagined to be at right angles to the floor, O the foot, on which we imagine an observer's line, equal to the observer's measure OP , at right angles to the floor. *WHAT IS REQUIRED.* We have to find the image of this figure.

PROCEDURE

I seek the three images of the three points in the floor B, D, C , which, being found by the 5th proposition, I assume to be Q, R, S . Thereupon I seek the three images of the three points above the floor, to wit at the ends of the three lines which by the supposition are imagined on B, C, D , each equal to the line GH and at right angles to the floor, which by the 6th proposition I assume to be found T, V, X . Further I seek the image of the point above the floor at the end of the line which by the supposition is imagined on E , equal to IF and at right angles to the floor, which

kich op de vloer, welke deur het selve 6 voorstel ghevonden wort te wesen, neem ick, Y. Ick treck oock de thien linien Q T, R V, S X, Y T, Y V, Y X, Q R, R S, T V, V X. T'welck soo sijnde, ick segh de form tusschen dese linien begrepen, de begheerde schaeu te wesen.

T B E W Y S.

De seven punten Q, R, S, T, V, X, Y. T V, V X sijn schaeuwen der drie B, C, D, inde vloer, met e vier dieder boven commen, deur t'werck, en de linien tusschen dese punten, sijn schaeuwen der verschaeulicke linien tusschen die verschaeulicke punten deur het 1 voorstel, waer deur dit de begheerde schaeu moet wesen.

Angaende de schaeu der verschaeulicke lini die op A comt, even an G H, en rechthouckich op de vloer, oock vande lini die van daer voort streckt tottet sop der torre, met noch d'ander vier: Ghemerckt de selve vant ooggh in ondeurluchtighe stoffen niet ghesien en worden, soo en sijst hier niet verschaeut. Doch die sich voorstelde de stof deurluchtich te sijn, hy mocht dier linien schaeuwen vinden als van d'ander, en soude de schaeu der torre dan sijn als hier nevens.

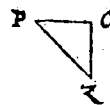
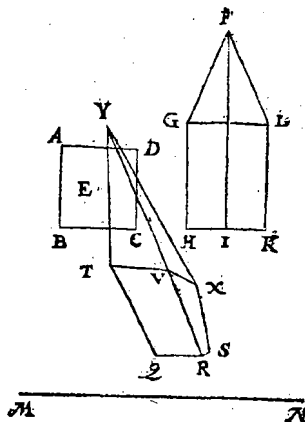


M E R C K T.

Nadien in dit voorbeeld te sien is de verschaeuwing van alle ghegheven lini, plat, en lichaem, soo en behoofmen daer af gheen besonder voorstellen te beschrijven.

Maer want het glas anders dan rechthouckich op de vloer can sijn, soo sulen wy daer af met voorbeeld wat segghen: Ghenomen dattet ghegheven sy alfooren, uytghesondert dattet glas diens glasgront M N, niet en staet rechthouckich op de vloer, als daer, maer schiefhouckich, neyghende na de verschaeulicke form toe, soo dattet mette vloer een houck maecke even an desen houck O Z P. Om hier af de schaeu te hebben, men sal soucken de schaeuwen der boveschreven seven verschaeulicke punten deur het 9 voorstel, en daer tusschen ghetrocken de linien na t'behooren, men sal dan krijghen een schaeu als hier by gheteyckent staet: Waer in de schaeu van het rechthouckich verschaeulick deel der torre, boven wijder valt dan onder, want langer is T V dan Q R.

Ghenomen andermael t'ghegheven te sijn alfooren, uytghesondert dattet glas diens glasgront M N, nu neyghé na het ooggh toe, soo dattet mette vloer een houck maecke even an desen



D houck

by the same 6th proposition I assume to be found Y . I also draw the ten lines $QT, RV, SX, YT, YV, YX, QR, RS, TV, VX$. This being so, I say that the figure contained between these lines is the required image.

PROOF

The seven points Q, R, S, T, V, X, Y (*) are images of the three B, C, D in the floor, with the four coming above them, by the procedure, and the lines between these points are images of the lines between those points, by the 1st proposition, in consequence of which this must be the required image.

As to the image of the line which comes on A , equal to GH and at right angles to the floor, also of the line which from there on extends to the top of the tower, with the other four as well, since these are not seen by the eye in non-transparent media, they have not been drawn in perspective here. But if anyone imagined the medium to be transparent, he would be able to find the images of those lines just like those of the others, and the image of the tower would then be as opposite.

NOTE

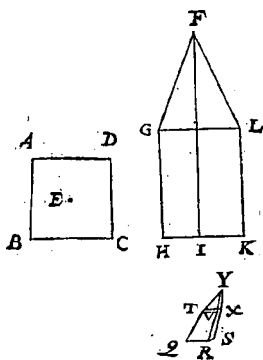
Since in this example is to be seen the perspective of any given line, plane, and solid, no special propositions need be described about them.

But because the glass may be other than at right angles to the floor, we shall say something about this, with reference to an example. Let it be assumed that the data are as before, except that the glass base MN of the glass is not at right angles to the floor, as there, but at oblique angles, inclining towards the figure, so that it shall make with the floor an angle equal to the given angle OZP . In order to find the image of this, the images have to be sought of the aforesaid seven points, by the 9th proposition, and if between these the lines be drawn in the proper manner, an image will be obtained such as is here illustrated, in which the image of the rectangular part of the tower is broader above than below, because TV is longer than QR .

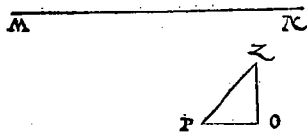
Assuming once more that the data are as above, except that the glass base MN of the glass now inclines towards the eye, so that it makes with the floor

(*) There must be a printer's error in the Dutch text.

houck O Z P: Om hier af de schaeu te hebben, men sal soucken de schaeuwen der boveschreven seven verschaeulicke punten deur het 9 voorstel en daer tusschen ghetrocken de linien na t'behooren, men sal dan krijghen een schacu als hier by gheteyckent staet: Waer in de schacu van het rechthouckich verschaeulick deel der torre boven nauwer valt dan onder, want cutter is T V dan Q R.

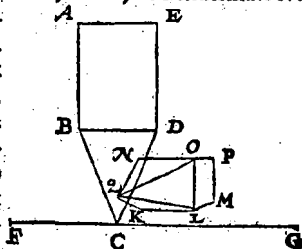


Maer om oock voorbeelt te stellen vant glas ewewijlich mette vloer, soo laet ABCDE andermael de stantteyckening der torre beteyckenen staende met haer viercante gront op de vloer, verdocht deur A E rechthouckich opt plat des blats, en t'glas diens glasgront F G streckende deur t'sop der torre C, sy ewewijlich mette boveschreven vloer, dats oock rechthouckich opt plat des blats: Voort sy opt punt H int plat des blats, verdocht een rechte lini even an HI,



en rechthouckich opt plat des selven blats, en ten eynde der selve lini sy het oogh. Dit soo sijnde, en om nu de schaeu te vinden, ick doe als int werck des 10 voorstels, nemende dattet plat des blats vloer is, H voet, HI siendermaect even

mette sienderlijn die op defen vloer rechthouckich comt: Voort dat de torre met een sijde light op dien ghenomen vloer: Sulcx dat op de vier punten A, B, D, E, commen vier linien even an A E, en rechthouckich op de vloer: Voort een lini op C, even anden helft van A E, het uyerste van welcko lini het sop der torre beteyckent: Sulcx dat tusschen die punten linien verdocht na t'behooren, sy maken de ghegheven lichamelicke verschaeulicke torre: Om de schaeu van welcke te hebben, men soude de schaeuwen der punten diemen sien can, als van B, D, E, met d'ander drie dieder boven commen, en oock des punts boven C, die ghevonden sijnde deur het 5 en 6 voorstel ick neem te wesen K, L, M, N, O, P, Q: Daer na ghetrocken linien tusschen beyden na t'behooren, soo comt daer uyt de schaeu, neem ick, als hier by geteyckent staet. Van



al welke t'bewijs deur t'werck openbaer is. T B E S L V Y T. Wefende dan ghegeven een verschaeulicke form, t'glas, de voet, en sienderlijn, wy hebben haec schacu ghevonden, na den eyfch.

I — H

MERCKT.

an angle which is equal to the angle OZP shown opposite: in order to find the image of this, the images have to be sought of the aforesaid seven points, by the 9th proposition, and if between these the lines be drawn in the proper manner, an image will be obtained such as is here illustrated, in which the image of the rectangular part of the tower is narrower above than below, because TV is shorter than QR .

But in order also to give an example of the glass parallel to the floor, let $ABCDE$ once again designate the vertical plan of the tower, standing with its square base on the floor, imagined through AE at right angles to the plane of the paper, and let the glass base FG of the glass passing through the top of the tower C be parallel to the aforesaid floor, *i.e.* also at right angles to the plane of the paper. Further, on the point H in the plane of the paper let there be imagined a straight line equal to HI and at right angles to the plane of the same paper, and at the end of the said line let there be the eye. This being so, in order to find the image I proceed as in the procedure of the 10th proposition, assuming the plane of the paper to be the floor, H foot, HI observer's measure equal to the observer's line which comes at right angles to this floor, further that the tower lies with one side on that floor, so that on the four points A, B, D, E there come four lines equal to AE and at right angles to the floor; further a line on C , equal to the half of AE , the extremity of which line designates the top of the tower, so that, if between those points lines be imagined in the proper manner, they make the given tower. In order to have the image of the latter, the images are sought of the points that can be seen as of B, D, E , with the other three coming above them, and also of the point above C , which having been found by the 5th and 6th propositions, I assume to be K, L, M, N, O, P, Q . If thereupon lines be drawn between the two, in the proper manner, I assume the result to be the image shown opposite, the proof of all this being clear from the construction. CONCLUSION. Hence, given a figure, the glass, the foot, and the observer's line, we have found its image as required.

MERCKT.

Wy hebben inde boveschreven * wercksticken de ghegheven sienderlijn, *Problemaff-*
mette lini vant verschaeulick punt totte vloer, altijd rechthouckich ghenomen *bus.*
op de vloer: Oock t'verschaeulick punt altijd inde vloer of daer boven gestelt, en
het oogh altijd boven de vloer: Nochtans cant ghebeuren, mocht ymant denc-
ken, dat sulcke twee linien op de vloer scheefhouckich ghegheven worden, en
t'verschaeulick punt onder de vloer, en het oogh inde vloer, of daer onder, deur
t'welck veel verscheydenheden souden vallen inde boveschreven voorstellen
niet angheroert. Hier op wort gheantwoort, dat soo die boveschreven twee li-
nien op de vloer scheefhouckich ghegheven waren, men soude se metigen recht
daer op trecken, en ghebruycken die dan in plaets der ghegheven, want sulcx en
gheeft gheen verandering vande plaets der begheerde schaen int glas. Maer soo
t'verschaeulick punt ghegheven waer inde vloer, en het oogh oock daer in, of
daer onder, men mach onder t'leeghste van die twee punten een ander vloer stel-
len of bedencken ewewijdich mette ghegheven, verlanghende tot daer toe de
sienderlijn en lini van t'verschaeulick punt totte vloer: nemende daer na die
vloer en verlangde linien voor de ghegheven, en daer me de schaen ghesocht na
de voorgaende reghelen, men heeft het begheerde.

Maer om hier af by natuerlick voorbeeld te spreken, ghenomen dat ymant als
Verschaeuwer, stonde op een berch, hoogher met sijn voeten dan een ghesicht
dat hy verschaeuwen wil, en naem voor vloer t'plat daer hy op staet, t'is kenne-
lick dat de ghegheven verschaeulicke form dan onder de vloer soude commen.
Maer ick seggh dat hy in sulcken ghevalle mach bedencken een ander vloer deur
t'leeghste des gesichts, nemende daer na de lini van sijn oogh tot die vloer voor
sienderlijn, want yder verschaeulick punt mette sienderlijn, sijn dan boven de
vloer vangedaente als in een der boveschreven wercksticken, welke manier
ghevolght int soucken der schaen, men behouft tot sulcke verscheyden stelling
gheen verscheyden nieuwe reghelen te beschrijven.

Angaende schaewen van cromme linien die hier vooren niet beschreven en
sijn, ghelijck haer grootheden inde * Meetconst niet wiskonstelick ghemeten ** Geometria*
en worden, maer werckelick soo na alst de faeck vereyscht: Alfoo en worden se *+ Mathemati-*
deur de const der verschaeuwing niet wiskonstelick verschaeut, maer men comt *sic.*
deur t'verschaeuwen van veel punten der cromme linien, t'begheerde soo na *+ Mechanice*
als uyterlick ghenouch schijnt.

VANDE CORTHEDEN EN

SEKERHEDEN OPT WERCK DER

VERSCHAEVING.

Inde boveschreven voorstellen blijktt wel de manier om te vinden de schaen
van alle ghegheven verschaeulickpunt, waer me openbaer is de ghemene re-
ghel der verschaeuwing van alle ghegheven verschaeulicke form, als te sien is
int 11 voorstel. Maer wanttet in groote wercken moeyelick soude vallen, de
schaewen van alle verschaeulicke punten en linien op sulcke manier te vin-
den, soo sullen wy nu ses verscheyden * leden beschrijven, vande cortheden en *Articulos.*
sekerheden dieder na gheleghentheydt der omstandighen int werck connen
vallen.

NOTE

In the problems described above we have always taken the given observer's line, with the line from the point to the floor, at right angles to the floor, and also placed the point always in the floor or above it, and the eye always above the floor. Nevertheless it may happen, someone might think, that such two lines are given at oblique angles to the floor, and the point below the floor, and the eye in the floor or below it, in consequence of which many differences would occur which are not referred to in the above-mentioned propositions. To this it is answered that if those two aforesaid lines were given at oblique angles to the floor, they might be drawn vertically thereon and be used instead of the given lines, for this does not cause any change in the place of the required image in the glass. But if the point be given in the floor, and the eye also in it or below it, one may place or imagine beneath the lower of those two points another floor, parallel to the first, producing to that floor the observer's line and the line from the point to the floor. If we thereupon take that floor and the produced lines for those given and therewith seek the image according to the foregoing rules, we have the required image.

But to speak of this by means of a physical example: assuming that someone who is to make a perspective drawing were to stand on a mountain, with his feet higher than a building of which he wishes to make a perspective drawing, and were to take for the floor the plane on which he stands, it is obvious that the given figure would then come below the floor. But I say that in such a case he may imagine another floor through the lowest point of the building, thereupon taking the line from his eye to that floor for observer's line, for every point with the observer's line is then above the floor of such a kind as in one of the problems described above; when this method is followed in the finding of the image, we need not describe different new rules for such a different supposition.

As to images of curved lines, which have not been described in the foregoing, just as their magnitudes are not measured mathematically, but mechanically in geometry, as accurately as the matter requires; in the same way they are not drawn mathematically by the art of perspective, but by finding the images of many points of the curved lines the required image is approximated as much as seems sufficient.

OF THE ABRIDGEMENTS AND VERIFICATION POSSIBILITIES IN THE PROCEDURE OF PERSPECTIVE DRAWING.

In the above-mentioned propositions the method indeed is disclosed for finding the image of any given point, with which the common rule of drawing any given figure in perspective is clear, as may be seen in the 11th proposition. But because in large works it would be difficult to find the images of all the points and lines in such a manner, we shall now describe six different sections, of the abridgements and the verification possibilities that may be made in the procedure, according to circumstances.

1st SECTION

It is proper that in the perspective drawing of a figure we should always imagine in the supposition that the glass passes through the foremost part, as plane, line or point, of the figure, because this does not then require to be drawn in perspective, since it serves as its own image by the 2nd postulate. But because someone might now think that in the practice of perspective drawing it would often be unsuitable to take the plane of a figure, such as a large building, for its image, since the image would become much too large to be drawn on paper, we shall give a somewhat fuller explanation thereof. For example, let the perspective of some building have to be drawn, the front façade of which is 100 palms high, and let the observer, being at a distance of 300 palms from it, place before himself a real glass, three palms away from the eye, in such a way that it is parallel to the aforesaid façade which is seen through the glass, in which must fall the image a palm high. This being the supposition, and an image being required which is equal and similar to the image that is seen in the glass, someone might say that the lines of 100 and 300 palms which pass from the eye to the figure would be too long to be properly drawn on paper in actual fact. How then are we to tackle this matter? As follows: We imagine we have before us a small physical model, whose front façade, standing in the glass, is the aforesaid image one palm high, and the rest according to requirement, and if this model is taken for the object figure, and a ground-plan and a vertical plan are made of it, while for the perspective drawing the rule is followed, then the required image is obtained without our having to take the trouble to bring that front façade into perspective, for the image is drawn of the same size as we have found.

2nd SECTION

Because there exists an abridgement in the finding of the images of several straight lines which are parallel to the floor, we shall give some examples thereof. The first of a line in the floor one extremity of which comes in the glass and the other extremity outside it. The second of a line in the floor whose two extremities both fall outside the glass. The third of a line above the floor one extremity of which falls in the glass and the other outside it. The fourth of a line above the floor whose two extremities both fall outside the glass.

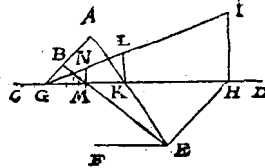
1st Example

In the first place let AB be a straight line in the floor, meeting in the point B the glass base CD , whose glass is at right angles to the floor, E being the foot, on which is imagined an observer's line at right angles to the floor and equal to the observer's measure EF . In order to find the image from this, I draw the floor line EG parallel to BA , but it is to be borne in mind (which applies to the three following examples of this section as well as to this) that the three given points E, B, A must not be in a straight line in order to attain the abridgement we require

wy int werck begheeren, wantmen dan deur het trecken van EG ewewijdeghe met BA, tot gheen besluyt en soude gheraken, als verclaert is int merck des 5 voorstels: Daer na GH rechthouckich op CD, en even met EF, voort HB en AE, snyende CD in I, en IK rechthouckich op CD, gherakende HB in K: Twelck soo sijnde, KB is de begheerde schaeu van AB: Want B int glas, is sijn selfs schaeu, deur de tweede begheerte; en K schaeu van A deur het 5 voorstel, en daerom de lini KB schaeu van AB deur het 1 voorstel. De cortheyt hier uyt volghende, is dat deur EG ewewijdeghe te trecken met AB, soo blijft het deel der saemlijn van B tot K de begheerde schaeu, daerom anders doende noch een nieu lini voor schaeu moet trecken.

2 Voorbeelt.

Laet ten tweeden AB een verschaulicke rechte lini sijn inde vloer, niet gherakende de glasgrondt CD, diens glas rechthouckich op de vloer, E de voer, waer op verdocht wort een sienderlijn te staen rechthouckich op de vloer, en even ande siendermaet EF. Om hier af de schaeu te vinden, ick treck AB voortwaert tot inde glasgrondt an G, daer na de vloerlijn EH ewewijdeghe met GA: Voort HI rechthouckich op CD, en even met EF, daer na IG, en AE snyende CD in K, en KL rechthouckich op CD, gherakende IG in L, voort BE snyende CD in M, en MN rechthouckich op CD, gherakende IG in N: Twelck soo sijnde, LN is openbaerlick de begheerde schaeu van AB. De cortheyt hier uyt is, daerom met AB voort te trecken tot G, en de rest als boven, de twee punten A, B, verschaeuert met een vloerlijn EH, een siendermaet HI, en een saemlijn IG, daerom anders elck punt A, B int besonder verschaeuwende, van elck twee sulcke linien soude trecken.



3 Voorbeelt.

Laet ten derden A, B, twee punten sijn inde vloer, en noch twee punten elck soo hoog daer boven als C D lanck is comende t'een punt boven B int glas, en de lini tusschen die twee punten die ewewijdech vande vloer moet wesen, sy de ghegheven verschaulicke lini, voort is t' glas rechthouckich op de vloer, sijn glasgrondt sy EBF, en G de voer, waer op deur t'ghedacht ghenomen wort een sienderlijn te staen rechthouckich op de vloer, en even ande siendermaet GH. Om hier af de schaeu te vinden, ick treck BI rechthouckich op EF, en even an CD, daer na GK ewewijdeghe met BA, en van t'vloerlijn raecksel K, de siendermaet KL rechthouckich op EF, en even an GH, voort LI en AG snyende EF in M, daer na MN rechthouckich op EF, gherakende de saemlijn IL in N. Twelck soo sijnde IN is de begheerde schaeu: Want t'punt I is int glas sijn eyghen schaeu deur de tweede begheerte, en t'punt N schaeu van t'punt boven A deur het 6 voorstel, daerom de lini tusschen beyden als NI, is deur het eerste voorstel schaeu vande lini boven A B. De cortheyt

D 3 heyt

in the procedure, for by the drawing of EG parallel to BA we should not then reach any conclusion, as is set forth in the Note to the 5th proposition. Thereafter I draw GH at right angles to CD and equal to EF , further HB and AE , intersecting CD in I , and IK at right angles to CD , meeting HB in K . This being so, KB is the required image of AB , for B in the glass is its own image, by the second postulate, and K is the image of A by the 5th proposition, and therefore the line KB is the image of AB by the 1st proposition. The abridgement resulting from this is that by drawing EG parallel to AB , the part of the meeting line from B to K remains the required image, whereas otherwise a new line would have to be drawn for the image.

2nd Example

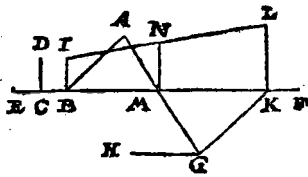
Secondly, let AB be a straight line in the floor, not meeting the glass base CD , whose glass is at right angles to the floor, E being the foot, on which is imagined an observer's line at right angles to the floor and equal to the observer's measure EF . In order to find the image from this, I produce AB to the glass base in G ; thereafter I draw the floor line EH parallel to GA . Further HI at right angles to CD and equal to EF , thereafter IG , and AE intersecting CD in K , and KL at right angles to CD , meeting IG in L , further BE intersecting CD in M , and MN at right angles to CD , meeting IG in N . This being so, it is clear that LN is the required image of AB . The abridgement resulting from this is that by producing AB to G , and the rest as above, the two points A, B are drawn in perspective with a floor line EH , an observer's measure HI , and a meeting line IG , whereas otherwise, if each point A, B were drawn in perspective separately, for each two such lines would have to be drawn.

3rd Example

Thirdly, let A, B be two points in the floor, and two more such points, each as high above them as CD is long, one point coming above B in the glass, and let the line between those two points, which must be parallel to the floor, be the given object line; further the glass is at right angles to the floor; let its glass base be EBF , and G the foot, on which is imagined an observer's line at right angles to the floor and equal to the observer's measure GH . In order to find the image from this, I draw BI at right angles to EF and equal to CD , thereafter GK parallel to BA ; and from the floor-line glass point K the observer's measure KL at right angles to EF and equal to GH , further LI and AG intersecting EF in M , thereafter MN at right angles to EF , meeting the meeting line IL in N . This being so, IN is the required image, for the point I is its own image in the glass, by the second postulate, and the point N is the image of the point above A by the 6th proposition; therefore the line between the two as NI by the first proposition is the

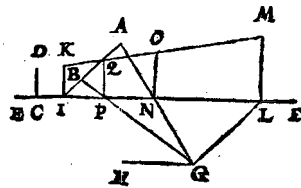
42 I BOVCK DER DEVRSICHTIGHE

beydt hier uyt volghende is, datmen deur G K ewewijdeghe te trecken met B A, soo blijft het deel der saemlijn van I tot N de begheerde schaeu, daermen anders doende een nieuwe lijn voor schaeu moet trecken, boven dien noch een lini als B I, en een ander als B A.



4 Voorbeels.

Laet ten vierden A en B twee punten sijn inde vloer, elck soo hooch daer boven als C D lanck is, commende beyde buyten t'glas, en de lini tusschen die twee punten die ewewijdich vande vloer moet wesen, sy de ghegeyen verschaelicke lini: Voort is t'glas rechthouckich op de vloer, sijn glasgront sy E F, en G de voet, waer op verdocht wort een sienderlijn te staen rechthouckich op de vloer, en even ande siendermaet G H. Om hier af de schaeu te vinden, ick treck A B voorwaert tot datse de glasgront gheraect in I: Daer na I K rechthouckich op E F, en even an C D, voort G L ewewijdeghe met I A, en van t'vloerlijn raeckfel L, de siendermaet L M rechthouckich op E F, en even an G H: Daer na M K en A G, snyende E F in N, voort N O rechthouckich op E F, en gherakende M K in O; Daer na B G snyende E F in P, voort P Q rechthouckich op E F, en gherakende M K in Q. Twelck soo sijnde, O Q is de begheerde schaeu: Want O is schaeu van t'verschaeulickpunt boven A, en Q van t'verschaeulickpunt boven B deur het 6 voorstel, en O Q lini tusschen beyden die punten, moet sijn de schaeu vande verschaelicke A B deur het 1 voorstel. De cortheyt hier uyt volghende, wort bemerckt als men int langhe elck verschaeulickpunt alleen verschaeut na de manier des 6 voorstels, sonder A B voort te trecken, noch G L daer me ewewijdeghe.



3 L I D T.

Daer valt cortheyt en sekerheyt int wenck met te ghedencken dat verschaeulicke ewewijdeghe linien die metter glas ewewijdich sijn, hun schaeuwen oock ewewijdich hebben deur het 3 voorstel: Maer verschaeulicke ewewijdeghe die metter glas oneewewijdich sijn, datse haer schaeuwen oock oneewewijdich hebben, en voortgetrocken sijnde in een punt versamen deur het 3 voorstel. D'orsaeck dier cortheyt is om datmen int soucken der schaeuwen vande ghegeven verschaeulicke punten, niet ahijt en behouft te vervolghen al de ses leden der wercking des 3 voorstels, of de seven leden des 6 voorstels, maer allecnelick twee of drie van dien; ja somwijlen niet een.

1 Voorbeels.

Om dese cortheden by voorbeeld te verclaren, laet A B C D een verschaeulicke ewewijdeghe vierhouck sijn inde vloer, deur wiens sijde D C de glasgront E F streck,

image of the line above AB . The abridgement resulting from this is that by drawing GK parallel to BA , the part of the meeting line from I to N remains the required image, whereas otherwise a new line would have to be drawn for the image, and moreover a line such as BI and another such as BA .

4th Example

Fourthly, let A and B be two points in the floor, [and two more such points] * each as high above them as CD is long, both falling outside the glass, and let the line between those two points, which must be parallel to the floor, be the given object line. Further the glass is at right angles to the floor; let its glass base be EF , and G the foot, on which is imagined an observer's line, at right angles to the floor and equal to the observer's measure GH . In order to find the image from this, I produce AB until it meets the glass base in I . Thereafter IK at right angles to EF and equal to CD , further GL parallel to IA , and from the floor-line glass point L the observer's measure LM at right angles to EF and equal to GH . Thereafter MK and AG , intersecting EF in N , further NO at right angles to EF and meeting MK in O . Thereafter BG , intersecting EF in P , further PQ at right angles to EF and meeting MK in Q . This being so, OQ is the required image, for O is the image of the point above A , and Q of the point above B , by the 6th proposition, and OQ , the line between those two points, must be the image of the line AB , by the 1st proposition. The abridgement resulting from this is noted if in the full construction each point is drawn in perspective separately, in the manner of the 6th proposition, without AB being produced, nor GL being drawn parallel thereto.

3rd SECTION

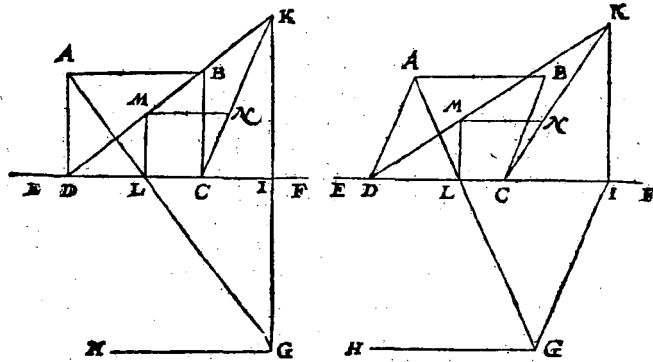
Abridgement and verification possibilities are obtained in the procedure by bearing in mind that parallel lines that are parallel to the glass also have their images parallel, by the 3rd proposition, but that parallel lines that are non-parallel to the glass also have their images non-parallel and, when produced, meet in one point, by the 3rd proposition. The cause of this abridgement is that in seeking the images of the given points we need not always follow all six sections of the operation of the 5th proposition, or the seven sections of the 6th proposition, but only two or three of them, nay, sometimes not one.

1st Example

To set forth these abridgements by means of an example, let $ABCD$ be a parallelogram in the floor, through whose side DC passes the glass base EF ; G

* These words have been omitted in the Dutch text.

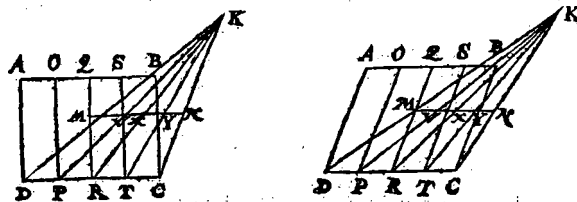
EF treckt, G is de voet, waer op deur t'ghedacht een standelijc staet even ande siendermaet GH, en rechthouckich op de vloer.



Om hier of te verclaren de cortheden dier vallen int vinden der schaet, wy sullen eerst het heel werck beschrijven als volght: Ick treck voort al de vloerlijc G I ewijdeghe met DA, en van het vloerlijcraecksel I, de siendermaet IK, even an GH, en rechthouckich op de glasgront EF, daer na de linien KD, KC, en AG snyende EF in L, voorts LM rechthouckich op EF, en gherakende KD in M, daer na MN ewijdeghe met DC, en gherakende KC in N. Dit soo sijnde de vierhouck MNC D is openbaerlick de begheerde schaet van ABC D. De cortheit hier in gheleghen, is onder anderen, datmen niet gefocht en heeft de schaet N des verschaeulickpunts B na de manier des 3 voorstels, want treckende MN tot datse KC ontmoet als in N, soo moet N de schaet sijn van B, en de lini MN schaet van AB, om dese reden: KD, KC sacmlijnen wesende, en t'punt M schaet van A deur het 3 voorstel, en dat boven dien de schaet MN alsoo ewijdeghe moet sijn mette schaet DC, ghelijc de verschaeulicke AB mette verschaeulicke DC deur het 2 voorstel, soo moet MN schaet sijn van AB, en N van B.

2 Voorbeels.

Noch veel merckelicker cortheden vallender, als de verschaeulicke ewijdeghe vierhouck in haer heeft veel ewijdege linien mette afgaende sijden. Laet by voorbeelt MNC D hier wederom schaet van ABC D sijn, K saempunt,



en de rest alsvooren, uytgenomen dat de verschaeulicke vierhouck ABC D, ma in haer hebbe drie ewijdege linien met AD, als OP, QR, ST.

is the foot, on which is imagined an observer's line, equal to the observer's measure GH and at right angles to the floor.

To set forth from this the abridgements that may be obtained in the finding of the image, we shall first describe the whole procedure as follows. I draw first of all the floor line GI parallel to DA , and from the floor-line glass point I the observer's measure IK , equal to GH and at right angles to the glass base EF , thereafter the lines KD , KC , and AG intersecting EF in L , further LM at right angles to EF and meeting KD in M , thereafter MN parallel to DC and meeting KC in N . This being so, the quadrangle $MNCD$ is clearly the required image of $ABCD$. The abridgement in this is, among other things, that the image N of the point B has not been sought after the manner of the 5th proposition, for MN being drawn until it meets KC in N , N was bound to be the image of B , and the line MN the image of AB , for the following reason: KD , KC being meeting lines and the point M the image of A by the 5th proposition, while moreover the image MN must also be parallel to the image DC , as the line AB to the line DC , by the 2nd proposition, MN must be the image of AB , and N of B .

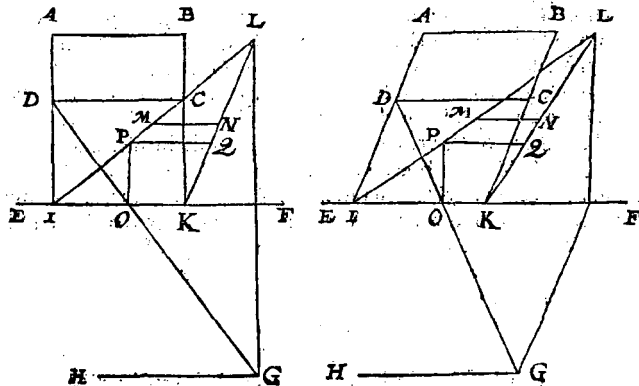
2nd Example

Even more notable abridgements are obtained if the object parallelogram has in it many lines parallel to the sides descending to the glass base. For example, let $MNCD$ here again be the image of $ABCD$, K the meeting point, and the rest as above, except that the quadrangle $ABCD$ now has in it three lines parallel to AD as OP , QR , ST .

Om der selve linien schaeuwen te vinden men heeft niet te doch' dan te trecken KP, KR, KT , snyende MN inde drie punten V, X, Y ; Want de drie linien begrepen inden vierhouck $MNCD$, als VP, XR, YT , sijn openbaerlick de begheerde schaeuwen, te weten VP van OP , en XR van QR , en YT van ST .

3 Voorbeelt.

Maer om oock voorbeelt te stellen als het glas streckt buyten een sijde des ewewijdeghe vierhoucx, ewewijdich mette sijde, soo laet $ABCD$ weerom een verschaelicke ewewijdeghe vierhouck sijn inde vloer, wiens sijde DC ewewijdich is mette glasgront EF , en G is de voet, waer op deur t'ghedachteen sienderlijn staet, even ande siendermaet GH . Om hier af met cortheyt de schaeu te vinden, ick treck AD en BC voorwaert, tot datse de glasgront gheraken in I en K : Vinde daer na de schaeu des vierhoucx $ABKI$, ghelijckse hier vooren ghevonden wiert van $ABCD$, welcke schaeu (nen:ende L voor saempunt) sy $MNKI$. Nu ghelijck hier gevonden is de schaeu MN der verschaelicke AB , alsoo salmen oock vinden de schaeu der verschaelicke DC , dat is, ick treck DG snyende EF in O , daer na OP rechthouckich op EF , en gherakende LI in P , voort PQ ewewijdeghe met MN , en gherakende LK in Q : Twelck soo sijnde den vierhouck $MNPQ$, is openbaerlick de begheerde schaeu der verschaelicke $ABCD$.



4 Voorbeelt.

Maer soo de verschaelicke form ewewijdeghe linien hadde mette afgaende sijden, de cortheyt des wercx dieder dan op valt is dusdanich: Laet $MNPQ$ hier onder weerom de schaeu van $ABCD$ sijn, L saempunt, en de rest alsvooren, uyghenomen dat de verschaelicke vierhouck $ABCD$ nu in haer hebbe drie ewewijdeghe linien met AD , als RS, TV, XY . Om der selver linien schaeu te vinden, men heeft niet te doen dan die selve drie linien voort te trecken tot inde glasgront EF , als RZ, SZ , en soo met d'ander twee: Daer na drie linien vant saempunt L , tot die drie gheraeckfelen inde glasgront, want de drie linien alsdan begrepen inden vierhouck $MNPQ$, sijn openbaerlick de begheerde schaeuwen der verschaelicke RS, TV, XY .

5 Voor-

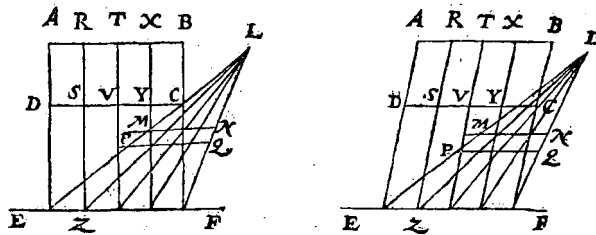
To find the images of the said lines, we need only draw KP , KR , KT , intersecting MN in the three points V , X , Y , for the three lines contained in the quadrangle $MNCD$ as VP , XR , YT are clearly the required images, to wit VP of OP , and XR of QR , and YT of ST .

3rd Example

But to give also an example where the glass extends outside one side of the parallelogram, parallel to the side, let $ABCD$ again be a parallelogram in the floor, whose side DC is parallel to the glass base EF , and G is the foot, on which is imagined an observer's line, equal to the observer's measure GH . In order to find from this briefly the image, I produce AD and BC until they meet the glass base in I and K ; thereafter I find the image of the quadrangle $ABKI$ as it was found above of $ABCD$, which image (taking L for the meeting point) shall be $MNKI$. Now just as here the image MN of the line AB has been found, in the same way the image of the line DC will also be found; that is: I draw DG intersecting EF in O , thereafter OP at right angles to EF and meeting LI in P , further PQ parallel to MN and meeting LK in Q . This being so, the quadrangle $MNQP$ is clearly the required image of the figure $ABCD$.

4th Example

But if the figure has lines parallel to the sides descending to the glass base, the abridgement of the procedure then obtained is as follows. Let $MNQP$ below again be the image of $ABCD$, L the meeting point, and the rest as above, except that the quadrangle $ABCD$ now has in it three lines parallel to AD as RS , TV , XY . In order to find the images of the said lines, we need only produce the said three lines to the glass base EF so as to obtain RSZ , and similarly with the other two. Thereafter three lines from the meeting point L to those three meeting points in the glass base, for the three lines then contained in the quadrangle $MNQP$ are clearly the required images of the lines RS , TV , XY .



5 Voorbeeld.

Hoe wel ons voornemen was uyt verscheyden manieren van wercking maer een te verkiesē, te weten die ons corst en bequaemst docht, soo sullen wy nochtans totte vier boveschreven voorbeelden dit vijfde vervoughen, met wat verandering inde manier des werckx, deur dien wy in des Anhangs 3 hoofstlick daer af wat sullen segghen.

Om dan tot de saeck te commen, sullen hier stellen vier formē, d'eerste met een ghegeven verschaeulick viercant, de tweede met een verschaeulicke rechthouck op d'een sijde langer, de derde met een ewewijdege scheefhouckighe vierhouck, en alle drie metter glas rechthouckich op de vloer deur een sijde der verschaeulicke vierhouck: De vierde form metter glas scheefhouckich op de vloer, tot welke vier formen een selve beschrijving dienen sal. Laet dan ABCD een verschaeulicke ewewijdege vierhouck sijn inde vloer, deur wiens sijde DC de glasgront EF streckt, G is de voet, waer op deur vghedacht een sienderlijn staet, even ande siendermaet GH, en rechthouckich op de vloer, voort sy ghetrocken de vloerlijn GI, ewewijdege met DA, en van het vloerlijnraecksel I, de siendermaet IK, even an GH, en rechthouckich op de glasgront EF, daer na de saemlijnen DK, CK. Tot hier toe is t'werck ghedaen als in t'beghin van het 1 voorbeeld deses 3 lidts; Maer om nu de schæu van AB op ons voorghenomen manier te vinden, ick teycken inde glasgront EF t'punt F, alsoo dat CF even is ande lini dieder valt van G rechthouckich op EF, t'welck in d'eerste, en tweede form is GI, inde 3 en 4 form wortfe bedocht: Daer na FL, even en ewewijdege met IK, voort teycken ick inde glasgront EF t'punt E, alsoo dat CE even is ande lini dieder van C rechthouckich valt op AB, of op haer verlangde, t'welck in d'eerste en tweede form is CB, inde 3 en 4 form wortfe bedocht: Daer na CM, makende op EF een houck even anden houck diemen neemt het glas op de vloer te maken; ick treck daer na LE, snyende CM in N, neem daer na de langde CN, vervough die inde lini IK, van I tot O, en treck deur O de lini PQ ewewijdege met AB, te weten P inde saemlijn DK, en Q inde saemlijn CK. Dit soo sijnde, ick segghde lini PQ te wesen de schæu van AB, en PQCD de schæu des vierhouck ABCD. TBEREYTSSEL. Laet inde eerste en tweede form gheteyckent worden t'punt R, als ghemeene sne van IK, of haer verlangde, en AB of haer verlangde.

T B E W Y S.

Anghesien in d'eerste en tweede form CF even is ande lini IG, en CE an CB, dāt oock an IR, soo is EFeven met GR, en FL is even ande sienderlijn die t'punt G staet rechthouckich op de vloer, waer deur den driehouck EFL recht sijnde an F; even en ghelick is anden verdochten driehouck begrepen tusschen

5th Example

Although it was our intention to choose only one out of different operation methods, to wit that which appeared shortest and most suitable to us, we will nevertheless add to the above four examples this fifth, with some modification in the construction method, because we shall say something about it in the 3rd chapter of the Appendix.

In order to come to the matter, we shall here give four figures, the first with a given square, the second with a rectangle, one side of which is longer than the other, the third with an oblique-angled parallelogram, and all three with the glass at right angles to the floor through one side of the quadrangle; the fourth with the glass at oblique angles to the floor, for which four figures the same description will serve. Let $ABCD$ therefore be a parallelogram in the floor, through whose side DC passes the glass base EF ; G is the foot, on which is imagined an observer's line equal to the observer's measure GH and at right angles to the floor; further let there be drawn the floor line GI , parallel to DA , and from the floor-line glass point I the observer's measure IK , equal to GH and at right angles to the glass base EF , thereafter the meeting lines DK , CK . Up to this point the procedure has been as at the beginning of the 1st Example of this 3rd Section. But in order now to find the image of AB in the manner intended by us, I mark in the glass base EF the point F such that CF is equal to the line that is from G at right angles to EF , which in the first and second figures is GI ; in the 3rd and 4th figures it is imagined. Thereafter FL , equal and parallel to IK ; further I mark in the glass base EF the point E such that CE is equal to the line that is from C at right angles to AB , or to AB produced, which in the first and second figures is CB ; in the 3rd and 4th figures it is imagined. Thereafter CM , making with EF an angle equal to the angle that the glass is assumed to make with the floor. Thereupon I draw LE , intersecting CM in N , then take the length CN , transfer that to the line IK , from I to O , and draw through O the line PQ parallel to AB , to wit P in the meeting line DK and Q in the meeting line CK . This being so, I say that the line PQ is the image of AB , and $PQCD$ the image of the quadrangle $ABCD$. PRELIMINARY. In the first and second figures let the point R be marked, as intersection of IK , or IK produced, with AB , or AB produced.

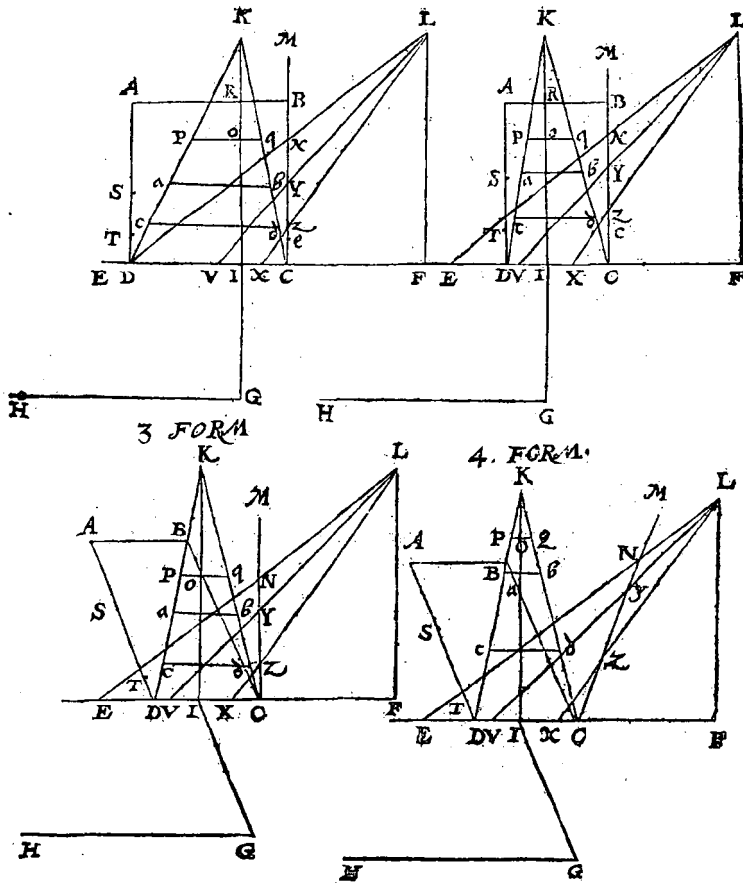
PROOF

Since in the first and second figures CF is equal to the line IG , and CE to CB , *i.e.* also to IR , EF is equal to GR , and FL is equal to the observer's line that is in the point G at right angles to the floor, in consequence of which the triangle EFL , right-angled in F , is equal and similar to the imagined triangle contained

schen het oogh, R, en G, recht sijnde an G; Voort anghesien I G even is an CF, soo moet L E, de lini C M snyen in N, soo hooch boven C, als het strael van t'oogh tot R het glas deurboort boven I, daerom C N is de ware langde die der moet sijn van D C totte schaen van A B, maer de selve langde is tusschen D C en P Q deur t'werck, daerom P Q is in haer behooslicke verhey van D C: Haer uystersten P Q sijn oock inde saemlijnen D K, C K; Daerom P Q is de ware schaen van A B.

1 FORM

2 FORM



Deur t'ghene hier bewesen is inde eerste en tweede form, machmen claerlick ghenouch verstaende nootfakelickheyt van dergelijcke inde derde en vierde form, want soomen treckt een lini van G rechthouckich op A B, of op haer verlangde,

between the eye, R , and G , being right-angled in G . Further, since IG is equal to CF , LE must intersect the line CM in N , as high above C as the ray from the eye to R pierces the glass above I ; therefore CN is the true length that must be from DC to the image of AB , but the same length is between DC and PQ by the procedure, therefore PQ is at its proper distance from DC . Its extremities P , Q are also in the meeting lines DK , CK ; therefore PQ is the true image of AB .

From what has here been proved in the first and second figures we may understand clearly enough the necessity of a similar procedure in the third and fourth

langde, sy sal even sijn met EF, waer uyt men ghenouch siet t'vervolgh vande rest.

M E R C K T.

Maer sooder te vinden waren de schaeuwen van ettelicke ander verschaellicke linien ewewijdich met AB, dat can met cortheyt aldus gheschien: Laet tusschen AB en DC deur t'ghedacht noch twee verschaellicke linien sijn, even en ewewijdich met AB, en streckende deur de punten S, T, die gheteyckent sijn in AD. Om der selve linien schaeuwen te vinden, ick teycken in CE de twee punten V, X, alsoo dat CV even is mette lini van S tot op EF rechthouckich, en CX even mette lini van T rechthouckich op EF, treck daer na LV, en LX, snyende MC in Y en Z, Teycken daer na inde vierhouck PQCD de lini *ab*, so hoch boven DC, als van Y tot C, sghelijcx de lini *cd* so hoch boven DC, als van Z tot C, en heb openbaerlick t'begheerde.

Tot hier toe sijn voorbeelden beschreven alwaer t'glas streckt deur een sijde des verschaellicken vierhouck, maer om oock voorbeelt te stellen daer buyten een sijde streckt ewewijdich mette selve, soo laet inde twee eerste rechthouckighe verschaellicke vierhoucken ABTe een verschaellicke vierhouck sijn, streckende t'glas deur EF ewewijdich met AB, en de rest van t'ghegheven sy alsvooren.

Om nu de schaeu van AB te vinden, men sal AT en haer tegenoversijde Be voorwaert trecken, tot datse EF gheraken, als in C en D: Ansiende daer na ABCD al offe de ghegheven verschaellicke form waer, men vint PQ schaeu van AB alsvooren; En ansiende daer na andermael Te CD, al offe de ghegheven verschaellicke form waer, men vint op de selve voughe de schaeu vande verdochte Te, en men heeft t'begheerde, waer af t'bewijs deut t'voorgaende openbaer is.

6 Voorbeelt.

Nu sullen wy segghen vande cortheyt die der valt, als t'glas streckt onevewijdich met elke der vier sijden. Laet tot dien eynde ABCD een verschaellicke ewewijdeghe vierhouck sijn, EF de glasgront onevewijdich met elke der vier sijden, en t'glas rechthouckich op de vloer, streckende deur een der punten, als deur C, en G is de voet, waer op deur t'ghedacht een sienderlijn staet even ande siendermaet GH. Om vande selve vierhouck ABCD de schaeu te krijghen, men soude meughen vinden de schaeu van elke der punten A, B, D, na de ghe-meene regel des; voorstels, treckende daer na linien van t'een punt tottet ander, maer men casse deur een coster wech krijghen als volght: Ick treck de vloetlijn G I ewewijdich met CB, en K I rechthouckich op EF, en even an GH; Daer na de vloerlijn GL ewewijdeghe met CD, en op EF de siendermaet LM even an GH, treck daer na AD voorwaert tot inde glasgront an N, en AB tot inde selve glasgront an O; Daer na KN, KC, en MC snyende KN in P, voorts MO snyende KN in Q, en KC in R. T welck soo sijnde, de vierhouck QRC'P is de begheerde schaeu vande verschaellicke ABCD, want MO, MC sijn saemlijnen der schaeuwen van ABC en KN, KC der schaeuwen van AD; BC,

figures, for if a line is drawn from G at right angles to AB , or to AB produced, it will be equal to EF , from which the sequel of the rest is sufficiently seen.

NOTE

But if the images of several other lines parallel to AB are to be found, this can be done briefly as follows. Between AB and DC let there be imagined to be two more lines equal and parallel to AB and passing through the points S, T , marked in AD . In order to find the images of the said lines, I mark in CE the two points V, X , such that CV is equal to the line from S at right angles to EF , and CX is equal to the line from T at right angles to EF , and thereafter I draw LV and LX , intersecting MC in Y and Z . Thereupon I draw in the quadrangle $PQCD$ the line ab as high above DC as from Y to C , likewise the line cd as high above DC as from Z to C , and I clearly have what was required to be found.

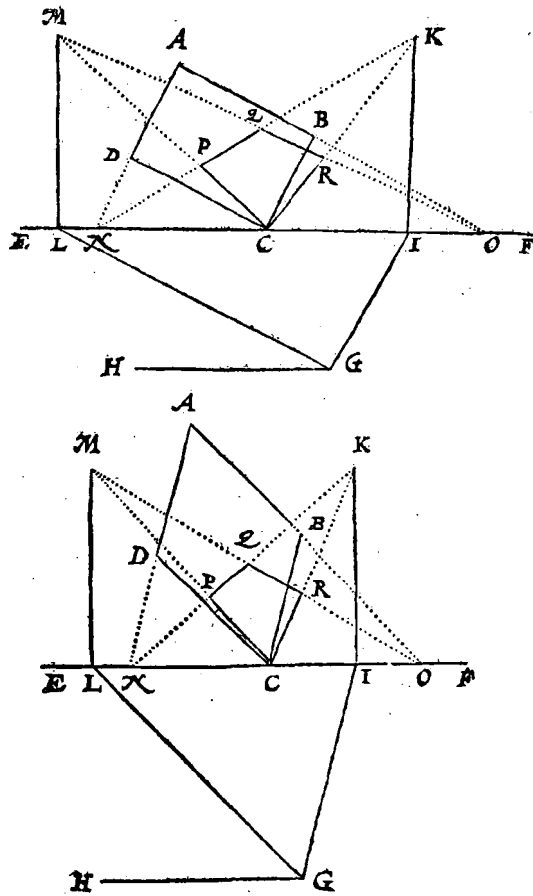
Up to this point examples have been described where the glass passes through one side of the quadrangle, but in order also to give an example where it passes outside one side, parallel to the latter, in the two first rectangles $ABTe$ let there be a quadrangle, the glass passing through EF parallel to AB , and the rest of the supposition being as above.

In order now to find the image of AB , let AT and its opposite side Be be produced until they meet EF as in C and D . Thereupon considering $ABCD$ as if it were the given figure, PQ is found as the image of AB as above. And then again considering $TeCD$ as if it were the given figure, the image of the imagined line Te is found in the same manner, and we thus have found what was required to be found, the proof of which is clear from the foregoing.

6th Example

We will now discuss the abridgement obtained when the glass is non-parallel to each of the four sides. To this end let $ABCD$ be a parallelogram, EF the glass base non-parallel to each of the four sides, and the glass at right angles to the floor, passing through one of the points as through C , and G is the foot, on which is imagined an observer's line equal to the observer's measure GH . In order to obtain the image of the said quadrangle $ABCD$ we might find the image of each of the points A, B, D , according to the common rule of the 5th proposition, thereafter drawing lines from one point to the other, but it can be obtained by a shorter method, as follows. I draw the floor line GI parallel to CB , and KI at right angles to EF and equal to GH . Thereafter the floor line GL parallel to CD , and on EF the observer's line LM equal to GH ; thereafter I produce AD to the glass base to N , and AB to the said glass base to O ; thereafter I draw KN, KC , and MC intersecting KN in P , further MO intersecting KN in Q and KC in R . This being so, the quadrangle $QRCP$ is the required image of the figure $ABCD$, for MO, MC are meeting lines of the images of $ABCD$ and KN, KC of the images of AD, BC ; therefore the images of AB and DC are in the meeting lines

(*) "Observer's measure" is evidently a printer's error in the Dutch text.



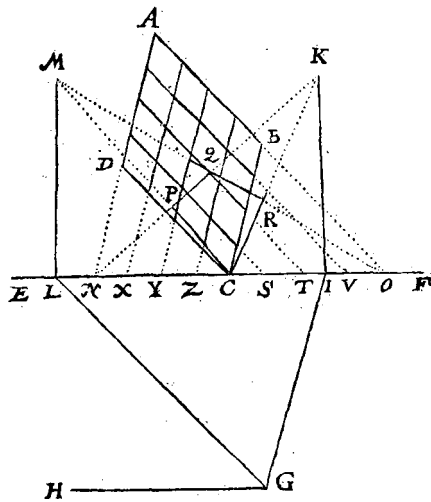
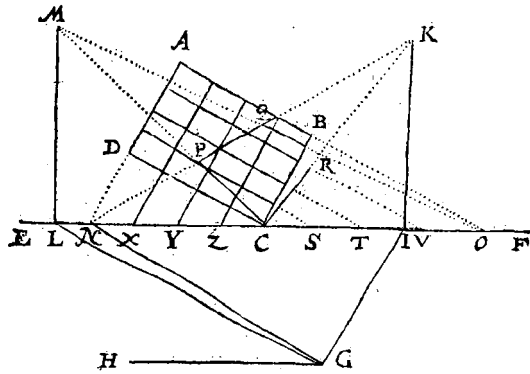
BC, daerom de schaeuwen van AB en DC sijn inde saemlijnen MO, MC, en de schaeuwen van AD, BC inde saemlijnen KN, KC waer deur QR en PC schaeuwen sijn van AB, DC, en QP, RC schaeuwen van AD, BC, en vervolgens de vierhouck QRCP schaeu des verschaeulicken vierhouck ABCD.

7 Voor-

MO , MC , and the images of AD , BC in the meeting lines KN , KC , in consequence of which QR and PC are the images of AB , DC , and QP , RC are the images of AD , BC , and consequently the quadrangle $QRCP$ is the image of the quadrangle $ABCD$.

7 Voorbeeld.

Maer soo in de verschaelicke ewijdeghe vierhouck, linien waren ewewij-
 dich mette sijden, haer schacuwen worden oock met cortheyt ghevonden. Laet
 by voorbeeld inden verschaelicken vierhouck A B C D, drie linien sijn ewewij-
 dich met A B, en drie ander linien ewewijdich met A D: Dit soo sijnde, men
 doet de wercking alsvooren, en daerenboven treckmen noch de ghegeven ewe-
 wijdeghen voorwaert, tot datse de glafgront E F gheraken, als tusschen C en O
 inde drie punten S, T, V, maer tusschen C en N inde drie punten X, Y, Z, ende is
 dan de form als hier onder.



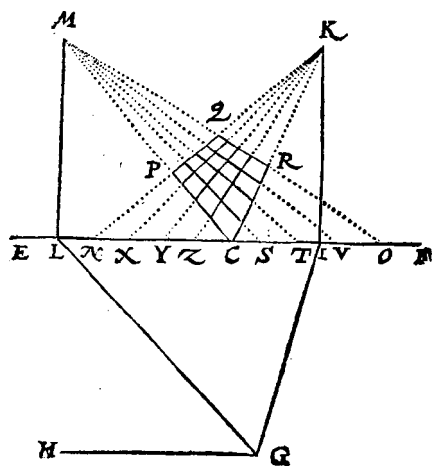
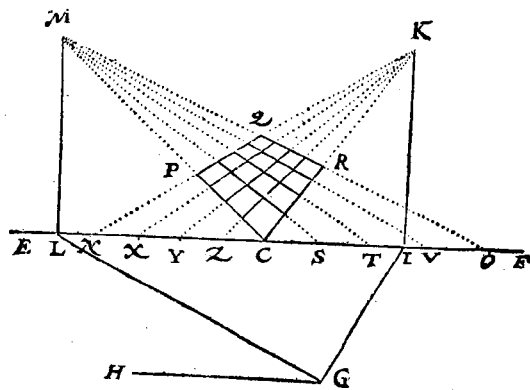
E Daer

7th Example

But if in the parallelogram there are lines parallel to the sides, their images are also found briefly. In the quadrangle $ABCD$, for example, let there be three lines parallel to AB , and three other lines parallel to AD . This being so, the operation is as above, and in addition the given parallel lines are also produced until they meet the glass base EF as between C and O in the three points S, T, V , but between C and N in the three points X, Y, Z ; then the figure is as shown below.

50 I BOECK DER DEVSICHTIGHE

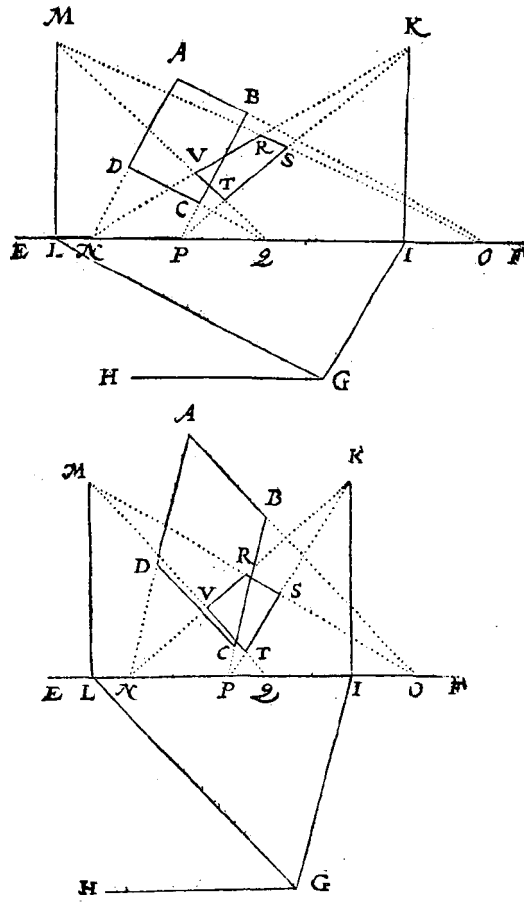
Daer na treck ick de ses linien MS, MT, MV, KX, KY, KZ; en de linien dan begrepen inden vierhouck QRCP (welcken vierhouck wy meerder claeheyts halven hier andermael vertheykenen, sonder de ghegeven verschaelicke vierhouck) sijn de begheerde schacuwcn der verschaelicke ewewijdeghe inden vierhouck ABCD.



Thereafter I draw the six lines MS , MT , MV , KX , KY , KZ , and the lines then contained in the quadrangle $QRCP$ (which quadrangle, for the sake of greater clarity, we draw here once more, without the given quadrangle) are the required images of the parallel lines in the quadrangle $ABCD$.

8 Voorbeeld.

Laet nu den glasgront EF strecken buyten den verschaelicken ewewijdegen vierhouck ABCD, s'nder dien te gheraken, als hier onder, alwaer G de voët is, GH siendermaet, die ghelijck oock t'glas rechthouckich op de vloer is. Hier me mette punten I, K, L, M, N, O, de wercking vervolght alsvooren, daer na B C, en C D voorwaert ghetrocken, tot datse de glasgront FF, gheraken in P en Q, en ghetrocken M O, M Q, K N, K P, soo is de vierhouck begrepen tusschen die binnenste deelen, van die vier linien, als R S T V, de begheerde schaew, waer af t'bewijs openbaer is deur t'voorgaende.



8th Example

Now let the glass base EF extend outside the parallelogram $ABCD$, without meeting it, as shown below, where G is the foot, GH the observer's measure, which just like the glass is at right angles to the floor. When upon this, with the points I, K, L, M, N, O , the operation is continued as before, thereafter BC and CD are produced until they meet the glass base EF in P and Q , and MO, MQ, KN, KP are drawn, the quadrangle contained between those interior parts of those four lines as $RSTV$ is the required image; the proof of which is clear from the foregoing.

9 Voorbeeld.

Maer soo den verschaeulicken vierhouck $ABCD$, ewewijdege linien hadde met d'een en d'ander sijde, men soude om haer schaeuwē met lichicheyt te vinden, doen alfooren, te weten die linien voorttrecken totte glasgrondt EF , daer na linien van M tot sulcke gheraackfelen tusschen Q en O vallende, en van K tot soodanighe gheraackfelen tusschen P en N vallende; want dier linien deelen inden vierhouck $RSTV$ begrepen, fouden om de voorgaende redenen de begheerde schaeuwen sijn.

10 Voorbeeld.

Ons can oock cortheyt ontmoeten int verschaeuwen der lichamelicke rechthoucken. Om van t'welck by voorbeeld te spreken, laet $ABCD$ sijn de grontteyckening van een lichamelicke rechthouck, diens hooghde EF , en t'glas strecke deur t'voorste plat diens grondt DC , te voet sy G , waer op deur t'ghedacht staet een sienderlijch rechthouckich op de vloer, en even ande siendermaet HI . Om nu t'werck te doen ick teycken op een ander glas (om de schaeu mette ghegeven grontteyckening niet te vermengen) KL, MN , als schaeu des vierhouck die int glas comt, te weten diens gront NM even is met DC , en hooghde NK , evē an EF . Voort vinde ick deur het 5 of 6 voorstel t'saempunt O , van t'felve trec ick OM, ON, OK, OL , als saemlijnen vande voorghetrocken schaeuwen der verschaeulicke gelijk sijn DA, CB , en dieder boven commen. Om nu de rest der begheerde schaeu te volmaken, ick en behouf niet dan te soucken de schaeu des punts ghelijck A is, welcke schaeu P sy, diemen nu vint alleenelick deur de twee laeste leden der wercking vant 5 voorstel: Daer na treckmen PQ ewewijdeghe met NK , tot datse gheraect de saemlijn OK : Daer na QR , ewewijdege met NM , tot datse gheraect de saemlijn OL , voorts RS , ewewijdeghe met LM , tot datse gheraect de saemlijn OM ; Ten laetsten SP , welcke soo int handtwerck niet ghemist er is, nootfakelick moet vallen ewewijdich met NM , deur het 2 voorstel: En om de redenen int selve 2 voorstel bewesen, moesten PQ , en RS , ewewijdeghe sijn met NK, LM , en QR , met NM , sulcx dat $KLMPQRS$ de begheerde schaeu is.

Maer want dese schaeu gheteyckent is van een lichamelicken rechthouck als van deurluchtighe stof sijnde, sulcx datmen de achterste linien als PQ, PS, PN , sien can, soo is te weten dat alsmen sich voorstelt dattet lichaem niet deurluchtich en is, men mach de selve drie linien onghetrocken laten, en in sulcken gevalle soudemen in plaets des punts P , hebben menighen vinden t'punt Q , en voort de rest vervolghen na t'behooren.

11 Voorbeeld.

Maer sooder achter den ghegeven verschaeulicken lichamelicken rechthouck, stonden meer ander lichamelicke rechthoucken, even en ghelijck mette selve, als diens grontteyckeninghen de viercanten T, V , soo dat de twee sijden T en V waren inde rechte lini van D deur A streckende, de vinding van haer schaeuwen is oock heel licht, want ghevonden t'punt X , ghelijck boven gheseyt is van Q en daet me alsoo voortghevaren, men heeft de begheerde schaeu an X . En sghelijcx vintmen oock de schaeu an Y .

12 Voor-

9th Example

But if the quadrangle $ABCD$ had lines parallel to one side and to the other, in order easily to find their images we should proceed as above, to wit produce those lines to the glass base EF , thereafter draw lines from M to such meeting points between Q and O , and from K to such meeting points between P and N ; for the parts of those lines contained in the quadrangle $RSTV$, for the foregoing reasons, will be the required images.

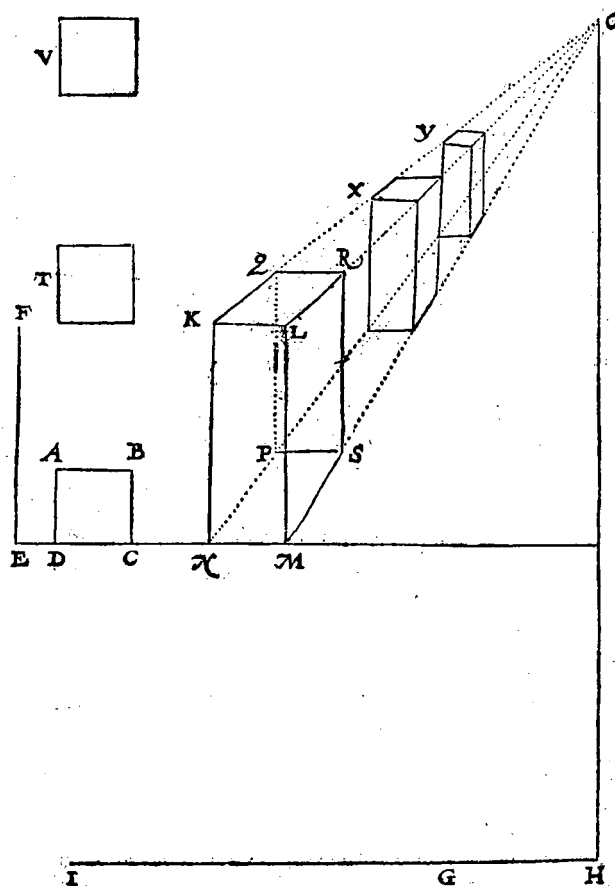
10th Example

We may also obtain abridgement in the perspective drawing of right prisms. In order to speak of this by means of an example, let $ABCD$ be the ground-plan of a right prism, whose height is EF , and let the glass pass through the foremost plane, whose base is DC ; let the foot be G , on which is imagined an observer's line at right angles to the floor and equal to the observer's measure HI . Now in order to carry out the procedure, I draw on another glass (so as not to mix up the image with the given ground-plan) $KLMN$ as the image of the quadrangle that comes in the glass, to wit whose base NM is equal to DC and whose height NK is equal to EF . Further I find by the 5th or 6th proposition the meeting point O ; from this I draw OM , ON , OK , OL as the meeting lines of the produced images of the lines, such as DA , CB , and those coming above them. In order now to complete the rest of the required image, I need only seek the image of the point as A , which image shall be P , which is now found simply by the two last sections of the operation of the 5th proposition. Thereafter PQ is drawn parallel to NK until it meets the meeting line OK ; thereafter QR parallel to NM until it meets the meeting line OL , further RS parallel to LM until it meets the meeting line OM ; finally SP , which, if the construction has not been defective, must needs be parallel to NM , by the 2nd proposition. And for the reasons proved in the said 2nd proposition PQ and RS were bound to be parallel to NK , LM , and QR to NM , so that $KLMNPQRS$ is the required image.

But because this image has been drawn of a right prism of transparent matter, so that the rearmost lines as PQ , PS , PN can be seen, it is to be known that if the solid is imagined not to be transparent, the said three lines can be left undrawn, and in such a case instead of the point P we might have found the point Q , and further might continue the rest in the proper manner.

11th Example

But if behind the given right prism there are some more right prisms, equal and similar to the said one, such as those whose ground-plans are the squares T , V , so that the two sides T and V are in the straight line from D passing through A , the finding of their images is also very easy, for when the point X has been found as has been said above of Q , and the procedure is continued, the required image is to be found in X ; and in the same way the image is also found in Y .



12 Voorbeeld.

Maer soo inden boveschreven verschaelicken lichamelicken rechthouck, meer ander linien waren ewewijdich mette sijden, haer schaeuwen souden met cortheit meughen ghetrocken worden: Als by voorbeeld, ghenomen datter inde cortste sijden gheteyckent waren drie punten, van welke ewewijdege linien ghetrocken waren mette langste sijden: Sghelijcx inde langste sijden seven punten, van welke ewewijdege ghetrocken waren mette cortste sijden.

Om der selver ewewijdeghen schaeuwen te vinden, men heeft niet anders

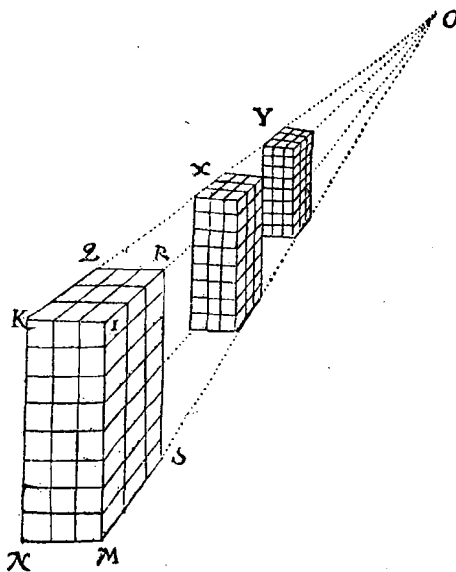
E 3

ders

12th Example

But if in the above right prism there were some more lines parallel to the sides, their images might be drawn briefly. For example, let us assume that in the shortest sides there were marked three points, from which lines were drawn parallel to the longest sides, and in the same way in the longest sides seven points, from which lines were drawn parallel to the shortest sides.

ders te doen, dan die linien uyt O te trecken totte voorschreven punten, en voort al d'ander ghelijck de volghende form anwijft, welverstaende dat de ewijdeghe met KL, inden vierhouck K R ghevonden worden als hiet vooren in dit 3 lidt gheseyt is, en dat van dier linien uysterse punten in L R, ghetrocken sijn ewijdeghe linien met R S.



13 Voorbeelt.

Soo 't glas niet en waer ewijdich met des lichamelicken rechthouck plat alsvooren, maer oneewijdich, daer vallen oock merckelicke cortheden in. Laet by voorbeelt A B C D een rechthouck sijn, ick neem een viercant als grontteykening inde vloer, waer op verdocht wort een lichamelicke rechthouck te comen, soo hoog als een der sijden lanck is, te weten een * teerlinck en deur den houck C streckt het glas E F rechthouckich op de vloer, voort is G de voet, waer op verdocht wort een sienderlijn te staen rechthouckich op de selve vloer, en even ande siendermaet G H, Om van defen teerlinck de schaeu te teykenen, ick vinde eerst alsvooren de schaeu des gronts, of der drie sienlicke punten B, C, D, welke sijn, neem ick, als inde volghende tweede form I, K, L: En K I M d'een saemlijn, diens saempunt M: D'ander saemlijn is K L N, diens saempunt N, en opt punt K dat int glas comt, treck ick de sijde des teerlinck die int glas staet, als K O, even an A B, daer na vant saempunt M de saemlijn M O, en N O daer na I P, en L Q ewijdeghe met K O, commende P in M O, en Q in N O: Daer na M Q, en N P snyende M Q in R: Twelck soo sijnde, de form R P I K L Q O is de begheerde schaeu des ghegheven teerlinck.

14 Voorbeelt.

Maer soo den ghegheven teerlinck op elck viercant ewijdeghe linien hadde, ewijdich mette sijden, de schaeuwen der selve connen oock mer cortheyt ghevonden worden. Laet by voorbeelt de uysterse punten dier ewijdeghe linien in K O, sijn S, T, en d'uyterse punten der schaeuwen van sulcke linien in K L gevonden inden gront na de manier alsvooren sijn V X en in K I sijn Y Z, daer na treck ick de linien van V en X ewijdeghe met K O, tot in Q O, en van daer

In order to find the images of the said parallel lines we need only draw those lines from O to the aforesaid points, and further all the others as the following figure shows, in the sense that the lines parallel to KL are found in the quadrangle KR , as has been said before in this 3rd section, and that from the extremities of those lines in LR there are drawn lines parallel to RS .

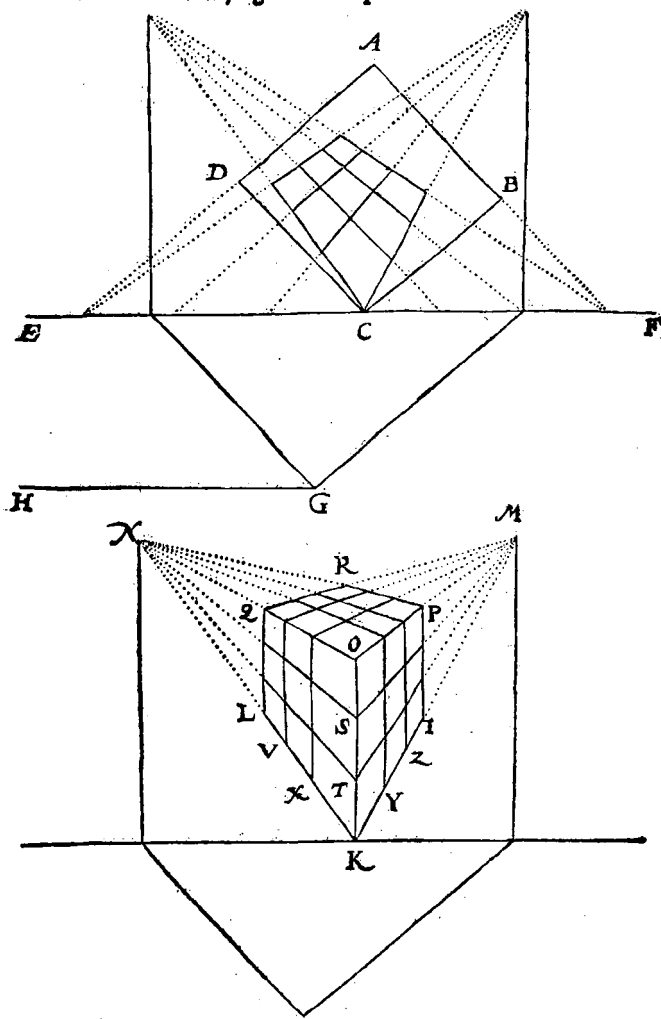
13th Example

If the glass is not parallel to the plane of the right prism, as above, but non-parallel, notable abridgements are also obtained. For example, let $ABCD$ be a rectangle, I assume a square, as ground-plan in the floor, on which is imagined to come a right prism as high as one of the sides is long, to wit a cube, and through the angle C the glass EF extends at right angles to the floor; further G is the foot, on which is imagined an observer's line, at right angles to the said floor and equal to the observer's measure GH . In order to draw the image of this cube, I first find, as above, the image of the base, or of the three visible points B, C, D , which I assume to be as in the following second figure: I, K, L . And KIM is one meeting line, whose meeting point is M ; the other meeting line is KLN , whose meeting point is N ; and in the point K that comes in the glass I draw the side of the cube that is in the glass as KO , equal to AB , thereafter from the meeting point M the meeting line MO , and NO , thereafter IP and LQ parallel to KO , P coming in MO and Q in NO . Thereafter MQ and NP intersecting MQ in R . This being so, the figure $RPIKLQO$ is the required image of the given cube.

14th Example

But if the given cube has in each square parallel lines, parallel to the sides, the images of these can also be found briefly. For example, let the extremities of those parallel lines in KO be S, T , and let the extremities of the images of such lines in KL , found in the base in the same manner as above, be VX , and in KI : YZ . Thereafter I draw the lines from V and X parallel to KO , as far as QO , and

daer voort tot M: Daer na van Y en Z ewijdeghē met K O, tot in M O, en van daer voort tot N: Daer na NS, N T, M S, M T. T welck soo sijnde de linien begrepen inde drie vierhoucken sijn openbatrick de begeerde schaeuwen der gegheven verschaeulicke ewwijdeghē linien op de viercanten des teerlinck.



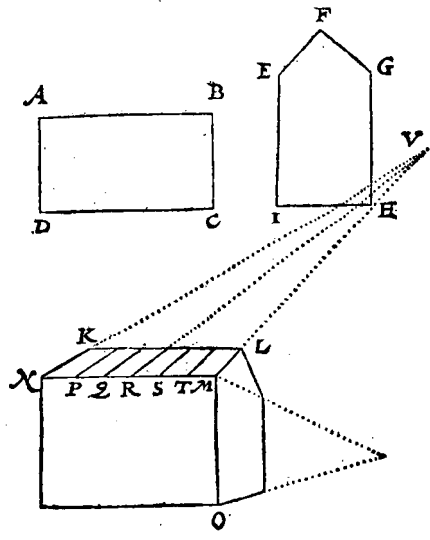
Men soude beneven de bovēschreven voorbeelden met lichamelicke rechtehoucken, noch meughen stellen ander voorbeelden van groote gheftichten, maer achtende dat hier deur de meyning ghenouch verstaen is vande cortheit vallende in sulcke ewwijdeghen, te weten die mette vloer of metter glas ewwijdich sijn, sullent daer by laten, te meer dat een die hem int dadelick verschaeuwē oeffent veel cortheden merckt die geen mondelicke onderrichting en behouē.

from there on to M . Thereafter from Y and Z lines parallel to KO , as far as MO , and from there on to N . Thereafter NS , NT , MS , MT . This being so, the lines contained in the three quadrangles are clearly the required images of the given parallel lines in the squares of the cube.

Besides the above examples with right prisms, other examples of large buildings might be given, but since we deem that the meaning is thus sufficiently understood of the abridgement obtained with such parallel lines, to wit those that are parallel to the floor or to the glass, we shall leave it at this, the more so as those who exercise themselves in the practice of perspective drawing will note many abridgements which do not call for any oral instruction.

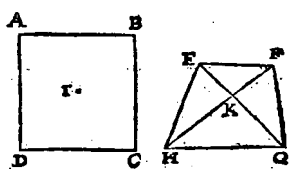
4 L I D T.

Ons ontmoet oock cortheyt int verschauwen van verschaeulicke ewewijde-
ghe linien die oneewijdich sijn mette vloer, en oock mettet glas. Om van
t'welck voorbeelt te stellen, laet $A B C D$ sijn de grondteyckening van een
huys, diens stantteyckening als voorghewel of achterghewel sy $E F G H I$, sulcx
dat $I H$ even is en overcomt met $C B$, en t'glasomme op de vloer rechthou-
kich deur $D C$: Hiertoe noch ghegheven sijnde de voet en sienderlijn, en de
verschauwing ghedaen wefende na t'behooren, soo is daer uyt ghecommen,
neem ick, de schaewer af het dack sy den vierhouck $K L M N$: Dit plat des
dack en is inde verschaeulicke form ewewijdich noch mette vloer, noch mettet
glas: Van t'felve verschaeulick dack commen neem ick vijf ewewijde ghe linien,
ewewijdich mette uysterse, beteykenende het onderscheyt van barders, loot,
pannen, of dierghelijcke
daermen de huysen me
deckt, de eynden van
sulcke linien commen
inde lini $M N$, als ter
plaetsen vande punten
 P, Q, R, S, T . Om nu dier
linien schaewen met
lichticheyt te vinden ick
treck $N K$ en $M L$ voor-
waert tot datse malcan-
der ontmoeten an V als
saempunt; Daer na treck
ick $V P, V Q, V R, V S,$
 $V T$, die altemael $K L$
deursnyen moeten. Dit
soo sijnde, ick seggh dat de
vijf linien vallende inden
vierhouck $K L M N$, de
begeerde schaewen sijn,
waer af t'bewijs open-
baer is.



5 L I D T.

Ons can cortheyt ontmoeten met te ghedencken het inhoudt des 1 voorstels,
te weten dat de rechte lini tusschen twee schaewen van verschaeulicke punten,
schaew is der verschaeulicke rechte lini tusschen de selve twee verschaeulicke
punten. Om van t'welck voorbeelt te be-
schrijven, soo laet $A B C D$ sijn een ver-
schaeulicke vierhouckige rechthouck, diens
ghevonden schaew sy $E F G H$. Hier bene-
vens begheertmen noch de schaew des mid-
del punts I van $A B C D$. Om dit met cort-
heyt te doen, ick treck de twee rechte linien
 $E G, F H$, en daerse malcander deursnyen als
in K , is de begheerde schaew des verschaeu-
lick punts I : Want deur het boveschreven 1 voorstel soo is $E G$ schaew vande
verdoch.



4th SECTION

We also obtain abridgements in the perspective drawing of parallel lines which are non-parallel to the floor, and also to the glass. To give an example of this, let $ABCD$ be the ground-plan of a house, whose vertical plan of the front or rear façade shall be $EFGHI$, so that IH is equal to and corresponds to CB , and the glass comes at right angles to the floor, through DC . When in addition the foot and the observer's line are given, and the perspective has been carried out in the proper manner, I assume that from this has resulted the image, of which the roof shall be the quadrangle $KLMN$. This plane of the roof in the figure is parallel neither to the floor nor to the glass. I assume that from the said roof proceed five parallel lines, parallel to the boundary lines, signifying the distinction between boards, lead, tiles or the like, with which houses are covered; the ends of such lines come in the line MN , namely, in the points P, Q, R, S, T . In order now to find easily the images of those lines, I produce NK and ML until they meet in V as the meeting point. Thereafter I draw VP, VQ, VR, VS, VT , all of which must intersect KL . This being so, I say that the five lines falling in the quadrangle $KLMN$ are the required images, the proof of which is clear.

5th SECTION

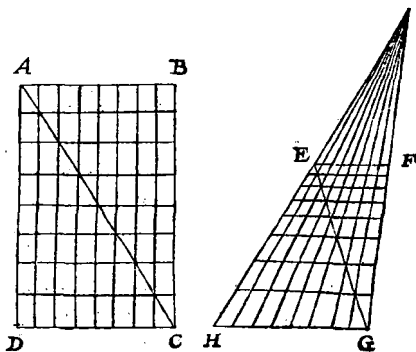
We may obtain abridgements when we bear in mind the contents of the 1st proposition, to wit that the straight line between two images of object points is the image of the straight line between the said two points. In order to give an example thereof, let $ABCD$ be a rectangle, the found image of which shall be $EFGH$. In addition thereto, the image of the centre I of $ABCD$ is required. In order to do this briefly, I draw the two straight lines EG, FH , and where they intersect as in K , is the required image of the point I . For by the 1st proposition

verdachte AC, en FH vande verdachte BD, maer de gemeene sne van dietwee verdochte linien ghebeurt in I, daerom des vierhouck A B C D middelpunt is inde verdochte AC, en oock inde verdochte BD, waer deur sijn schaeu oock moet sijn in EG, en doek in FH, en daerom is K de begheerde schaeu.

Ons can noch een ander ghedaente van cortheyt ontmoeten die wy aldus verclaren sullen: Laet A B C D een verschaelicke ewewijdeghe vierhouck wesen, deur welcke ter eender sijde ghetrocken sijn soo veel linien ewewijdich met A D, alser ter ander sijde ghetrocken sijn ewewijdich met A B, t'welck hier is op elcke sijde seven linien, op elcke sijde al even verre van malcander, en t'glas strecke deur D C als glasgront. Van desen verschaelicken vierhouck A B C D, sy E F G H de ghevonden schaeu, sulcx dat G H ghedeelt is in seven even deelen als D C: Daer na H E, en G F voortghetrocken wesende, sy vergaren in I, als saempunt van t'welck ghetrocken sijn seven linien totte boveschreven seven punten tusschen G H, sulcx dat der selve linien deelen begrepē inden vierhouck E F G H, sijn schaeuwē der verschaelicke linien die inden vierhouck A B C D van boven neerwaert commen. Maer en nu met cortheyt te vinden de schaeuwen der seven verschaelicke linien tusschen A B en D C ewewijdich mette selve, ick treck E G snyende de seven linien dieder ghetrocken sijn van I tot inde lini G H, en deur haer ghemeene sneen treck ick seven ewewijdeghen met G H eyndende op d'een sijde in E H, op d'ander sijde in F G, welke seven linien alsoo met cortheyt ghevonden, ick segh de begheerde schaeuwen te sijn. Om

t'welck te behoonen, soo laet eerst ghetrocken worden de rechte lini A C, waer af E G deur het 1 voorstel schaeu moet sijn, overmidis t'punt G schaeu is van C, en E van A; En al de ghemeene sneen der selve E G, en der linien van I tot in G H, moeten deur t'boveschrevē 1 voorstel schaeuwen sijn der ghemeene verschaelicke sneen van A C, en de linien die van boven neerwaert commen. Maer want deur de selve ghemeene verschaelicke sneen,

d'ander verschaelicke ewewijdeghe strecken, soo moeten der selver schaeuwen oock strecken deur de ghemeene sneen in E G, en vervolgens soo sijn de linien deur de selve de begheerde schaeuwen.



6 L I D T.

Int verschauwen van ettelicke verschaelicke ronden can oock cortheyt vallen, want het verschaelicckrondt ewewijdich sijnde mettet glas, sijn schaeu is oock een rondt deur het 2 voorstel: Daerom ghevonden sijnde de schaeu der verschaelicke middellijn, en daer op een rondt beschreven, men heeft de begheerde schaeu.

Maer t'verschaelicckrondt mettet glas onewewijdich sijnde, de schaeu can na ghe-

described above EG is the image of the imagined line AC , and FH of the imagined line BD ; but the intersection of those two imagined lines falls in I , therefore the centre of the quadrangle $ABCD$ is in the imagined line AC , and also in the imagined line BD , in consequence of which its image must also be in EG , and also in FH , and therefore K is the required image.

We may also obtain another kind of abridgement, which we shall set forth as follows. Let $ABCD$ be a parallelogram, through which on one side are drawn as many lines parallel to AD as are drawn on the other side parallel to AB , which is here seven lines on either side, on each side at equal distances from each other, and let the glass pass through DC as the glass base. Of this quadrangle $ABCD$, let $EFGH$ be the image found, such that GH is divided into seven equal parts, like DC . When thereafter HE and GF are produced, they meet in I as meeting point, from which are drawn seven lines to the above-mentioned seven points between G and H , so that the parts of the said lines contained in the quadrangle $EFGH$ are the images of the lines which descend from the top in the quadrangle $ABCD$. But in order now to find briefly the images of the seven lines between AB and DC , parallel to the latter, I draw EG intersecting the seven lines which have been drawn from I to the line GH , and through their intersections I draw seven lines parallel to GH , terminating on one side in EH , on the other side in FG , which seven lines, thus found briefly, I declare to be the required images. In order to prove this, let there first be drawn the straight line AC , of which by the 1st proposition EG must be the image, since the point G is the image of C , and E of A . And all the intersections of the said EG and the lines from I to GH by the above-mentioned 1st proposition must be the images of the intersections of AC and the lines descending from the top. But because through the said intersections pass the other parallel lines, the images of the latter must also pass through the intersections in EG , and consequently the lines through the latter are the required images.

6th SECTION

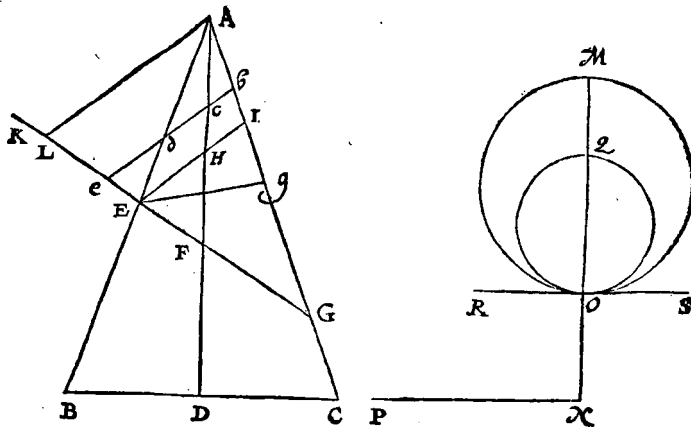
In the perspective drawing of various circles, abridgements may also be obtained, for if the circle is parallel to the glass, its image is also a circle by the 2nd proposition. When therefore the image of the diameter has been found, and a circle has been described thereon, the required image is obtained.

*TraFatus
Conicorum.
*Conus cuius
basis elliptis.*

*Axims.
Elliptis.*

Diametro.

gheleghenthey van t'ghegheven oock een rondt sijn. Om hier af de reden te verclaren,foo neem ick voor al den *keghelhandel voor bekend,of immers soo verre bekend als hier noodich valt,en segh aldus: Laet ABC een *lanckrondighe keghel sijn , diens grondts cleynste middellijn BC , cleynste driehouck ABC,as AD: Dese keghel wort ghesneen met een plat EFG , rechthouckich op den cleensten driehouck ABC , en deur den *as in F: De selve keghelsne EFG can sijn een *lanckrondt ghelijck mette grondt, of lanckworpigher , of cortworpigher , of oock een volcommen rondt,en dar na de lanckheyte vande grootste * middellijn des grondts. Nu ghenomen de selve sne een rondt te wesen,foo sy ghetrocken sijn teghensne EHI,diemen heeft als den houck AHL, even is an den houck AFE, en alsoo dese teghensne altijt ghelijck is met d'ander , sy moet oock een rondt sijn : Sulcx dat dese lanckrondighe keghel twee snen heeft ronden sijnde, als EFG en haer teghensne EHI. Laet ons nu nemen het rondt EFG een verschaeulick rondt te sijn , overcant ghesien , A het oogh, en deur EHI een plat als glas tusschen beyden , in welck glas oock sulcken rondt wefende,foo cant ghebeuren,ghelijck wy gheseyt hebben,dattet verschaeulick rondt mettet glas onevewijdich sijnde , nochtans de schaue een rondt sy. Om nu te comen tot voorbeelt van sulcke verschaeuwing, ick treck



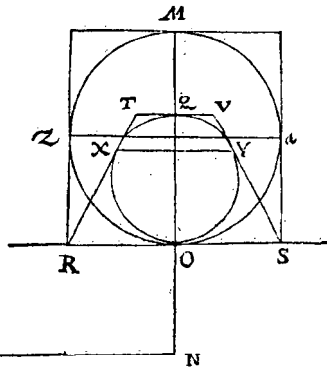
GE ghenouch voorwaert,als tot K, en daer op AL, ewewijdighe met IE, alsoo dat AL sienderlijen beteyckent, en t'punt L de voer: Dit soo sijnde, ick treck op een ander plat de lini MN, even met GL, en daer in t'punt O, alsoo dat MO, even sy met GE, beschrijf daer op als middellijn het rondt MO, treck daer na NP, even an LA, stel voorts in OM, t'punt Q, alsoo dat OQ, even sy an EL, beschrijf daer op het rondt OQ: T welck alsoo met sulcke cortheyt ghevonden, ick segh de begheerde schaue te sijn des ronds OM. Om van t'welck wat breeder verclaring te doen, laet deur O ghetrocken worden de lini RS, rechthouckich op MN als glasgrondt. Dit soo sijnde ick segh aldus: Blijvende het rondt OM inde vloer, maer t'glas daer OQ in is draeyende op RS als as, sy opwaert ghebroucht soo dattet op den vloer een houck maect even an ALG, sghelijcx draeyende NP op N, tot daese als sienderlijen ewewijdighe is mette middellijn OQ, soo

But if the circle is non-parallel to the glass, the image may also be a circle, according to the data. In order to explain the reason thereof, I first of all assume the treatise on Conics to be known, or at least known as far as is necessary here, and I say as follows. Let ABC be a cone with an ellipse for its base, the smallest diameter of whose base is BC , while the smallest triangle is ABC , and the axis AD . This cone is intersected by a plane EFG , at right angles to the smallest triangle ABC , and through the axis in F . The said conical section EFG may be an ellipse similar to the base, or more elongated, or less elongated, or also a perfect circle, such according to the length of the greatest diameter of the base. If the said section is taken to be a circle, let there be drawn its countersection EHI , which is obtained when the angle AHI is equal to the angle AFE , and since this countersection is always similar to the other, it must also be a circle, so that this cone with an ellipse for its base has two sections that are circles, namely, EFG and its countersection EHI . Let us now assume that the circle EFG is a circle, viewed transversely, A the eye, and through FHI a plane as glass between the two, and if in this glass there is also such a circle, it may occur, as we have said, that if the circle is non-parallel to the glass, the image is nevertheless a circle. In order now to obtain an example of such perspective drawing, I produce GE sufficiently, as to K , and thereon I draw AL , parallel to IE , in such a way that AL signifies the observer's line and the point L the foot. This being so, I draw in another plane the line MN , equal to GL , and therein the point O , in such a way that MO is equal to GE , describe thereon as diameter the circle MO , thereafter draw NP , equal to LA , further I mark in OM the point Q such that OQ is equal to EI , and describe thereon the circle OQ , which, thus found so briefly, I declare to be the required image of the circle OM . In order to give a somewhat fuller explanation thereof, let there be drawn through O the line RS , at right angles to MN as the glass base. This being so, I say as follows: If the circle OM remains in the floor, but the glass, in which OQ revolves about RS as axis, be raised so that it makes with the floor an angle equal to ALG , while also NP revolves about N

O Q, soo sal de schaeu, te weten het rondt O Q, vant oogh ghesien worden te overcommen mettet verschaeulick rondt O M: Waer af wy t'bewijs en d'oirsaeck int voorgaende verclaert hebben. Oock is kennelick deur het 7 voorstels dattet selve rondt O Q, schaeu blijft van t'rondt O M op alle houck die t'glas op de vloer maeckt, midts dat de sienderlijn altijt ewewijdeghe sy mette middellijn O Q.

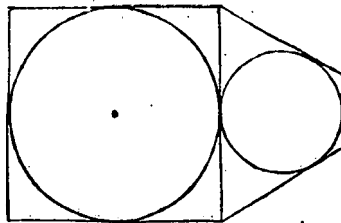
Maer soo ymant hier af eenighe werckelicke proef wilde sien, soude het verschaeulick rondt als M O, meughen in een viercant stellen als hier onder, en des selven viercants schaeu ghevonden sijnde, als neem ick T V S R, de vier sijden gheraken het rondt inde punten O,

X, Q, Y, t'welck teycken is van sekerheyt. En wilmē noch voorder onderfoucken, men mach trecken des verschaeulick rondts middellijn Z a, rechthouckich op O M, De schaeu der selve ghevonden sy X Y, welcke vallende tusschen de twee voorschreven punten des raeckfels, sy verfeeren my dat de twee verschaeulicke punten des raeckfels Z, a, inde ronde schaeu O Q vallen, tot haer behoorlicke placis. En stelmen een ander punt loot comt, int verschaeulick ronts omtreck, en soomen sijn schaeu altijt bevint te vallen inden omtreck P



(darmen bevinden moet soo het handwerck niet en mist) men siet daer deur t'ghene voorgenomen was verclaert te worden.

Byaldientmen de voorschreven schaeu stelt over d'ander sijde van S R, als hier nevens, ris kennelick dat die twee vierhoucken mette ronden daer in, schaeu sijn van een verschaeulicke teerlinck, hebbende op elcke sijde een rondt beschreven, vande welcke men (het oogh ter behoorlicke plaats gesiet) twee sijden siet.



Inde boveschreven voorbeelden heeft het glas gheraeckt het verschaeulick rondt: Maer om nu voorbeelt te stellen daer sulck raeckfel niet en gheschiet, soo laet inde voorgaende * keghel ghetrocken worden de lini b c d e, ewewijdich met J H E, als glas overcant ghesien, snyende de keghel van b tot d, en den as in e, en de vloer K G in e, welck glas nu het rondt E G niet en raectt. Dit soo sijnde, de sne b d, is ghelijck I E of E G, een rondt: Om welck rondt te verschaeuwen, men soude de glasfront als R S dan soo verre trecken van t'punt O, als van E tot e, en vinden de schaeu als van O M, die even sal moeten vallen an b d, en daer op een rondt gheteyckent, ris openbaer dattet de begheerde schaeu sal sijn.

Maer soo de * keghelsne niet en waer ewewijdich met I E, noch met E G, als neem ick, de sne E g: Tis kennelick dattet een lini of lanckrondt moet sijn, diens grootste of cleenste middellijn E g.

Tis

until the observer's line is parallel to the diameter OQ , the image, to wit the circle OQ , will be viewed by the eye to coincide with the circle OM , the proof and cause of which we have set forth in the foregoing. It is also obvious from the 7th proposition that the said circle OQ remains the image of the circle OM at any angle made by the glass with the floor, provided the observer's line be always parallel to the diameter OQ .

But if someone should wish to see a real demonstration thereof, he might place the circle as MO in a square, as shown below, and when the image of the said square has been found, which I assume to be $TVSR$, then the four sides touch the circle in the points O, X, Q, Y , which gives certainty. And if we wish to investigate even further, we may draw the diameter Za of the circle, at right angles to OM . Let the image of the latter, when found, be XY , and since this falls between the two aforesaid points of contact, this assures me that the two points of contact Z, a fall in the circular image OQ , in their proper places. And if any other point is taken in the circumference of the circle, and if its image is always found to fall in the circumference (which must be so found, if the construction has not been defective), from this may be seen what was intended to be set forth.

If the aforesaid image is placed on the other side of SR , as shown opposite, it is obvious that those two quadrangles, with the circles therein, are the images of a cube, with a circle described on each side, of which (if the eye is properly placed) two sides are seen.

In the examples described above the glass touched the circle. But to give an example where no such contact occurs, let there be drawn in the foregoing cone the line bcd , parallel to IHF , as the glass viewed transversely, intersecting the cone from b to d , and the axis in c , and the floor KG in e , which glass now does not touch the circle EG . This being so, the section bd , like IE or EG , is a circle. In order to make an image of this circle, we should produce the glass base as RS from the point O as far as from E to e , and find the image as of OM , which will have to be equal to bd , and if a circle be drawn thereon, it is clear that this will be the required image.

But if the conic section is not parallel to IE , nor to EG , as — I assume — the section Eg , it is obvious that it must be a line or an ellipse whose greatest or smallest diameter is Eg .

Tisook te ghedencken dat desen vierhouck TVSR de schaeu beteyckende, die ghedaente heeft, dattet onmeughelick is daer in een lanckront te beschrijven de vier sijden gherakende, maer moet nootfakelick een heel volcommen rondt wesen.

Hier uyt is kennelick, dat wanneer foodanighe vierhouckighe schaeu van een verschaeulick viercant met een rondt daer in beschreven, sulcx is, datmen inde selve vierhouckighe schaeu een rondt can beschrijven de vier sijden gherakende, dattet selve rondt de schaeu van sijn verschaeulick rondt moet sijn. Oock medat wanneer foodanighe vierhouckighe van een verschaeulick rechthouck met een lanckront daer in beschreven, sulcx is, datmen inde selve vierhouckighe schaeu een rondt can beschrijven de vier sijden gherakende, dattet selve rondt de schaeu is van sijn verschaeulick lanckront.

N V V A N T V I N D E N D E S O O G H S.

Tot hier toe beschreven sijnde de manier der verschaeuwing, soo worter noch vereyscht kennis waermen om een gheteyckende schaeu in haer volcommenheydt te sien, het oogh moet stellen, dat is, hoemen vinden sal het punt inde locht, dat den verschaeuwer int verschaeuwen sich voor oogh ghestelt had. Om van t'welck by voorbeeld breeder te spreken, tis kennelick datmen schilderyen maect, welcke van vooren ghesien seer mismaect schijnen, niet ghelijckende rghene sy beteyckenen moeten, maer de selve schilderie van ter sijden gesien deur een seker gaetken daer toe veroirdent, anwijfende de plaets des ooghs, sy ghelaten seer hupsich: En alsoo salmen verstaen ander schaeuwen die volcomelick na de const ghemaect sijn, sulcken plaets te hebben, alwaer het oogh ghestelt, de schilderye in haer volcommenheydt ghesien wort. Nu soo an alle schilderyen of schaeuwen sulcken gaetken ghestelt wierde, men soude dat niet behouven te soucken: Maer tselve inde ghebruyck niet sijnde, wy sullen schrijven t'ghenc ons van dies nu te vooren comt, als volght.

6 W E R C K S T V C K. 12 V O O R S T E L.

Wesende ghegeven een vierzijdich of meerzijdich plat, dat schaeu is van een ghegeven verschaeulick plat, op t'welck het glas int verschaeuven een houck maecte even an een ghegeven houck, en hebbende de selve schaeu ten minsten een sijde, of lini tusschen tvvee houcken* ewevijdich mette glasgrondt: Het oogh te vinden.

Parallela.

1 Voorbeeld vande schaeu eens verschaeulick euewijdighe rechthouckighe vierhouck.

TGHEGHEVEN. Laet de vierhouck ABCD, hebbende twee ewewijdege sijden AB en CD, schaeu sijn vande verschaeulick euewijdighe rechthouck EFGH, op wiens oneyndelick plat het glas int verschaeuwen rechthouckich stont.

It should also be borne in mind that this quadrangle $TVSR$, signifying the image, has such a form that it is impossible to inscribe therein an ellipse touching the four sides, but it must necessarily be a whole perfect circle.

From this it is obvious that if such a quadrangular image of a square, with a circle inscribed therein, is such that in the said quadrangular image a circle touching the four sides can be inscribed, the said circle must be the image of its object circle. Also that if such a quadrangular image of a rectangle, with an ellipse inscribed therein, is such that in the said quadrangular image a circle touching the four sides can be inscribed, the said circle is the image of its object ellipse.

NOW OF THE FINDING OF THE EYE *

The method of perspective drawing having been described up to this point, knowledge is further required as to where the eye has to be placed in order to see a drawn image in its perfection, *i.e.* how to find the point in the air which the draughtsman had taken for the eye in the drawing operation. To speak more in detail about this by means of an example, it is known that pictures are made which, when seen from in front, seem very faultily made, not resembling that which they are intended to depict, but when the said pictures are seen from one side, through a small hole provided for the purpose, indicating the place of the eye, they make a very nice impression. And in the same way it should be understood that other images, which have been made perfectly in accordance with the art, have such a place that when the eye is placed there, the picture is seen in its perfection. If such a small hole were given for every picture or perspective drawing, it would not have to be sought. But since this is not the custom, we will write down what occurs to us on this subject, as follows.

6th PROBLEM

12th PROPOSITION

Given a quadrilateral or multilateral plane figure, which is the image of a given plane figure with which in the drawing operation the glass made an angle equal to a given angle, while the said image has at least one side or line between two angles parallel to the glass base: to find the eye:

*1st Example, of the Image of a Parallel Right-Angled Quadrangle. ***

SUPPOSITION. Let the quadrangle $ABCD$, having two parallel sides AB and CD , be the image of the parallel rectangle $EFGH$, to whose infinite plane the

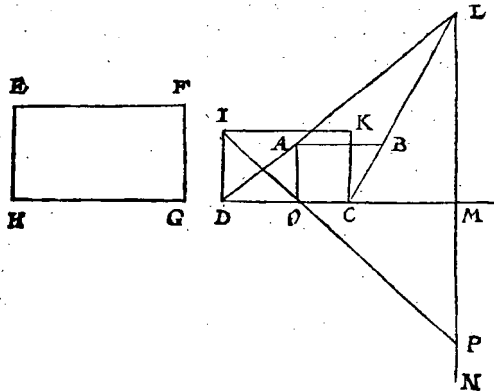
*) On the general theory see the Introduction.

**) Rectangle.

De selve schaeu ABCD heeft twee linien, te weten A B, C D, ghetrocken tusschen twee houcken, die na den eysch des voorstels nootzakelick ewewijdich mette glasgrondt moeten sijn deur het 2 voorstel. **T B E G H E E R D E:** Wy moeten het ooggh vinden.

T W E R C K.

Tis voor al te weten dat dit werck ghedaen wort deur verkeerde wech des 3 voorstels van t'vinden der schaeu, deur het ghegheven ooggh mette rest: T welc int gemeen geseyt wesende, wy sullen totte saeck comen. Angefien ABCD, schaeu sijnde van een ewewijdighe vierhouck, twee ewewijdighe sijden heeft, als A B met D C, en dat D C schaeu is der sijde als H G deur t'ghegeven, soo moest int verschaeuwen het glas strecken deur een der sijden E F, H G, of daer ic ewewijdich sijn deur het 3 voorstel: Maer het hebbe ghestreckt hoet wil, wy fullen de saeck hier, en in dergelijcke navolgende alijt nemen datter deur een der sijden strecke, overmits datter al een selve ooggh gheeft, soo wy int bewijs behoonen sullen. Om dan nu te weten deur welke sijde, ick sie na de grootste der twee ewewijdighe A B, D C, de selve is D C, welke schaeu sijnde vande lini H G deur t'ghegeven, soo strecke t'glas deur een sijde als H G. Dit soo sijnde, ick teycken op D C als lijckstandighe met H G, den vierhouck I K C D, gelijk metten vierhouck E F G H: Ick trek daer na D A en C B voorwaert, tot datse malcander ontmoeten int saempunt L, daer na L M als siendermaet rechthouckich op D C, of op haer verlangde als glasgrondt, en de oneyndelicke M N ewewijdege met K C, voort A O rechthouckich op de glasgrondt D M, en van I deur O een lini tot datse de oneyndelicke M N ontmoet, als in P, daer na opt punt L een lini ghestekt of bedocht even an P M rechthouckich opt glas, teynde dier lini is t'begheerde ooggh.



T B E W Y S.

Laet door t'ghedacht t'glas mette schaeu A B C D en de rest diemen verstaet int glas gheteykent te wesen, scheydelick sijn vande vloer, draeyende t'selve glas op de glasgrondt D M als as, alsoo dattet rechthouckich staet op de vloer, dat oock rechthouckich op de verschaeulicke vierhouck I K C D: Daer na sy op P een sienderlijn ghestelt even an de siendermaet M L, en ewewijdich mette selve: T welc soo sijnde, het ooggh ten eynde dier sienderlijn siet de schaeu A B C D dan overcomen met haer verschaeulicke rechthouck I K C D, sulcx dattet ooggh daer tot sijn behoerlicke plaets is: Maer t'eynde dier lini en der beschreven lini even an P M rechthouckich opt glas, is al een selve punt, daerom

glass was at right angles in the drawing operation. This image $ABCD$ has two lines, to wit AB , CD , drawn between two angles, which according to the requirement of the proposition must necessarily be parallel to the glass base by the 2nd proposition. WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

First of all it is to be noted that this procedure is performed by the method reverse to that of the 5th proposition dealing with the finding of the image from the given eye and the rest. After this general statement we will come to the matter. Since $ABCD$, being the image of a parallel quadrangle, has two parallel sides (AB and DC) and DC is the image of the side HG by the supposition, in the drawing operation the glass must have passed through one of the sides EF , HG or have been parallel thereto by the 3rd proposition. But in whatever direction it may have been, in the present and in similar — subsequent — cases we shall always assume that it passed through one of the sides, since it all gives one and the same eye, as we will show in the proof. In order to know through which side, I look at the longest of the two parallel lines AB , DC . This is DC , and since this is the image of the line HG by the supposition, the glass passed through one side (HG). This being so, I draw on DC , the side homologous to HG , the quadrangle $IKCD$, similar to the quadrangle $EFGH$. I then produce DA and CB until they meet in the meeting point L ; thereafter I draw LM as observer's measure at right angles to DC , or to DC produced, as the glass base, and the infinite line MN parallel to KC ; further AO at right angles to the glass base DM , and from I through O a line until it meets the infinite line MN , which is in P . When thereafter in the point L is erected or imagined a line equal to PM , at right angles to the glass, the end point of this line is the required eye.

PROOF

Let us imagine that the glass with the image $ABCD$ and the rest that is understood to have been drawn in the glass is separable from the floor, this glass revolving about the glass base DM as axis in such a way that it be at right angles to the floor, *i.e.* also at right angles to the quadrangle $IKCD$. Thereafter let there be erected in P an observer's line equal to the observer's measure ML and parallel thereto. This being so, the eye at the end point of this observer's line then sees the image $ABCD$ coincide with the rectangle $IKCD$, so that the eye is there in its right place. But the end point of that line and that of the

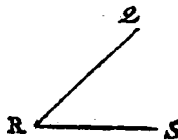
daerom t'begheerde oogh is ghevonden na den eysch.

Pyramis.

Maer mocht yman t nu segghen, de saeck is hier boven ghenomen al oft int verschaeuwen het glas ghestreckt hadde deur een vande sijden der verschaeulicke form, t'welck mischien verre van daer was ewewijdich met D C. Hier op wort aldus gheantwoort: Staende het oogh voor de schaen A B C D tot sijn behoerlicke plaets, en datmen vant selve oogh vier oneyndelicke linien treckt of bedepckt, deur de vier punten A, B, C, D, sy begripen een oneyndelicke vierhouckighe * naelde, van sulcker ghedaente, dat als men se snijt deur D C, mer een plat rechthouckich opt glas, de sne is als I K C D, en alle ander sneen mer die eerste sne ewewijdich en verder vant oogh sijn grooter dan d'eerste, doch daer me ghelijck, en van elck dier verscheyden sneen is A B C D openbaerlick de schaen ghesien uyt het selve oogh tot een selve plaets: Daerom als men het oogh begheert van een der ander sne men macht cortheys en sekerheys halven al tijt soucken vande sne die t'glas gheraectt, of dattet selve is, vant glas dat de voorste verschaeulicke sijde gheraectt, als boven, en men heeft t'begheerde.

M E R C K T.

Wy hebben int boveschreven voorbeelt het glas rechthouckich ghegheven opt oneyndelic plat der verschaeulicke form, of anders geseyt t'glas rechthouckich ghegheven op de vloer: Maer soot daer op een scheefhouck maeckte, even, neem ick, an desen houck Q R S, hebbende t'glas na de schaen toe, ghelijck de lini Q R na R S toe helt; In sulcken ghevalle salmen de wercking doen alsvooren, even al of t'glas op de vloer rechthouckich ghegheven waer, vindende P M, om alsoo een lini even an P M, te stellen opt punt L, uytgenomen datse opt glas niet rechthouckich en moet commen alsvooren, maer daer op een houck maken, even anden gegeven houck Q R S, wel verstaende dat de voorschreven lini even an P M, sijn sal int verdocht plat dat rechthouckich is op de glasgrondt D M, en dat oock rechthouckich is op t'glas, merckt noch dat sulcx als wy hier achter dit eerste voorbeelt gheseyt hebben vant glas scheefhouckich op de vloer, dergelijcke sal hem oock verstaen te meughen ghedaen worden inde volghende voorbeelden deser stof, alwaer cortheys halven t'glas alleenelick rechthouckich op de vloer ghegheven sal worden.



Ander manier van overcking.

Ghelijck t'voorgaende werck ghedaen is deur verkeerde wech van tvinden des schaens achter het 1 1 voorstel, in der corheden 3 lidts 1 voorbeelt, alsoo canmen oock een wercking doen deur verkeerde wech des 3 voorbeelts van t'selve 3 lidt.

Homologa.

Om t'welck te verclaren, laet A B C D sijn de schaen, E F G H de verschaeulicke form, en de rest alsvooren: Om hier af het oogh te vinden, ick teycken op D C, als * lijckstandighe met H G, den vierhouck I K C D, gelijk metten vierhouck E F G H, treck daer na D A en C B voorwaert, tot datse vergaren in L, voort de oneyndelicke L M ewewijdeghe met D C, snyende C K of haer verlangde in N, en treck A B voorwaert soot noot is tot datse N C ontmoet in O, en teycken inde lini C D of haer verlangde t'punt P, alsoo dat C P even sy an C K,

aforesaid line equal to PM , at right angles to the glass, are one and the same point; hence, the desired eye has been found, as required.

But, someone might say, it has been assumed above that in the drawing operation the glass passed through one of the sides of the object figure, but it was perhaps far from it, parallel to DC . To this the following reply is given. When the eye is in front of the image $ABCD$ in its right place, and when from this eye are drawn or imagined four infinite lines through the four points A, B, C, D , they contain an infinite quadrangular pyramid of such a form that when it is intersected through DC by a plane at right angles to the glass, the section is $IKCD$, and all other sections parallel to this first section and further away from the eye are larger than the first, but similar thereto, and of all those different sections $ABCD$ is clearly the image seen from the said eye in the same place. Therefore, when the eye of one of the other sections is required, for the sake of brevity and certainty it may always be sought of the section one side of which is in the glass or, which is the same, of the glass which contains the foremost side, as above; then we have found the required eye.

NOTE

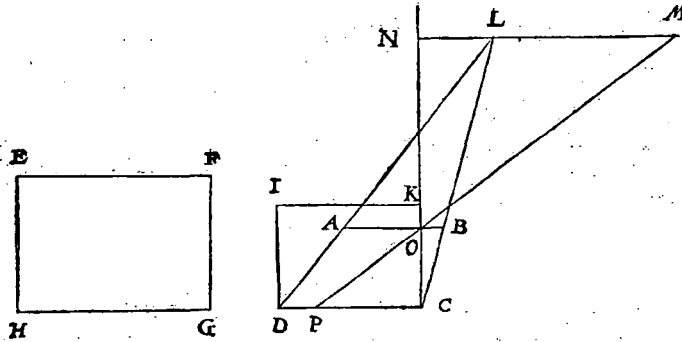
In the above examples we have given the glass at right angles to the infinite plane of the object figure or, in other words, we have given the glass at right angles to the floor. But if it made therewith an oblique angle, equal — I take it — to this angle QRS , the glass being inclined towards the image as the line QR is inclined towards RS , in such a case the operation should be carried out as above, just as if the glass were given at right angles to the floor, thus finding PM , upon which a line equal to PM is erected in the point L , with the exception that it must not be at right angles to the glass, as above, but must make therewith an angle equal to the given angle QRS , it being understood that the aforesaid line equal to PM must be in the imagined plane that is at right angles to the glass base DM and also at right angles to the glass. Note also that just as we have spoken after this first example of the glass at oblique angles to the floor, it should be understood that the same can also be done in the subsequent examples about this matter, where for brevity's sake the glass will only be given at right angles to the floor.

Another Method of Operation.

Just as the foregoing construction was effected by the method reverse to that of finding the image after the 11th proposition, in the 1st example of the 3rd section of the abridgements, thus a construction can also be performed by the method reverse to that of the 5th example of the said 3rd section.

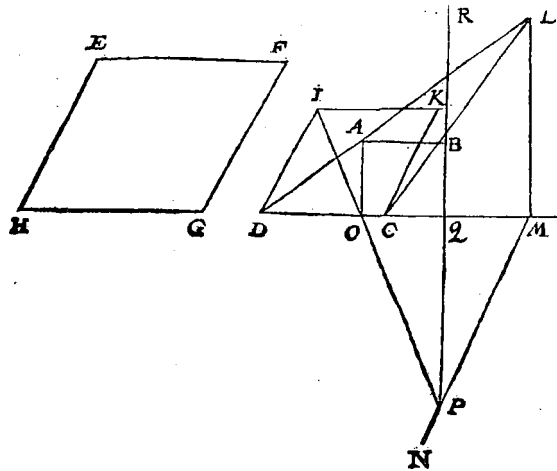
To explain this, let $ABCD$ be the image, $EFGH$ the object figure, and the rest as above. To find hereof the eye, I draw on DC , the side homologous to HG , the quadrangle $IKCD$, similar to the quadrangle $EFGH$; thereafter I produce DA and CB until they meet in L ; further I draw the infinite line LM parallel to DC , intersecting CK or CK produced in N , and I produce AB , if necessary, until it meets NC in O , and I mark in the line CD or CD produced the point P such that CP be equal to CK . Thereafter I draw from P through O a straight

CK; Daer na treckick van P deur O een rechte lini tot dat de oneyndelike LM ontmoet, t welck sy in M, voort stel ick opt punt L, een lini even an NM rechthouckich op glas. T welck soo sijnde, het uyterste dier lini moetet begeerde oogh sijn, waer af t'bewijs openbaer is, deur dien wy hier in gedaen hebben de verkeerde wercking van t'vinden der schaeu int 3 voorbeelt vant 3 lidt der corheden.



2 Voorbeelt vande schaeu eens verschaeulicke eervvijdghē schiefhouckighe vierhoucx.

TGHEGHEVEN. Laet inde onderschreven form t'ghegheven en t'werck sijn al int eerste voorbeelt, uytghenomen dat de verschaeulicke vierhouck hier schiefhouckich is, voort dat ghetrocken sijnde IOP, soo en salmen gheen lini op L stellen even an PM als daer, maer de voornomde IOP ghetrocken sijn.



de, men sal noch trecken PQ, rechthouckich op de glasgrondt DM, en de selve PQ voorwaert tot R, alsoo dat QR even sy an ML, daer na opt punt R een lini ghestelt of bedocht even an PQ rechthouckich opt glas, t'eynde dier lini is t'begheer-

line until it meets the infinite line LM ; let this be in M . Further I erect in the point L a line equal to NM , at right angles to the glass. This being so, the end point of this line must be the required eye, the proof of which is clear because we have here performed the construction reverse to that of the finding of the image in the 5th example of the 3rd section of the abridgements.

2nd Example, of the Image of a Parallel Oblique-Angled Quadrangle.)*

SUPPOSITION. In the figure below let the supposition and the procedure be as in the first example, with the exception that the quadrangle here is oblique-angled, while further, when IOP has been drawn, no line has to be erected in L , equal to PM , as there, but when the aforesaid line IOP has been drawn, PQ has

*) Parallelogram

t'begheerde oog, waer af t'bewijs deur t'voorgaende des 1 voorbeelts openbaer is.

De reden waerom int eerste voorbeelt de lini PQR niet ghetrocken en wiert als in dit tweede, is dat R openbaerlick alijt soude vallen in L, en daerom onnoodich ghetrocken.

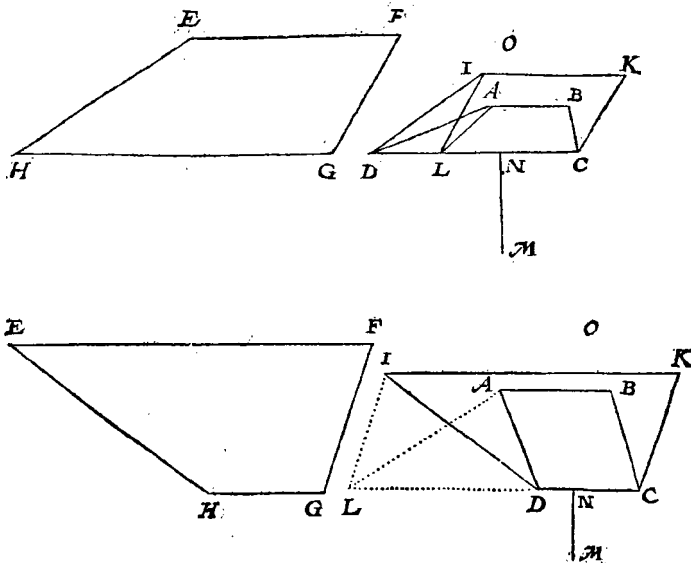
3 Voorbeelt vande schaen eens verschaelicke vierhoucx met alleenelick twee ewewijdeghe sijden, die int verschaeuwen ewewijdich waren mettet glas.

TGHEGHEVEN. Laet ABCD, hebbende twee ewewijdeghe sijden als AB en CD, schaen sijn vande verschaeliccken vierhoucx hebbende alleenelick twee ewewijdeghe sijden als EF, HG, die int verschaeuwen ewewijdich waren mettet glas, op welcx vierhoucx EFGH oneyndelick plat, het glas mette sijde DC int verschaeuwen rechthouckich stont, en hebbende de lijckstandighe sijde met HG diens schaen DC, inde verschaeuwing ewewijdich ghehad mettet glas. TBEGHEERDE. Wymocten het oog vinden.

TWERCK.

Tfy dat int verschaeuwen het verschaelicck plat EFGH, mette sijde HG quam int glas, of niet, so stel ick nochtans my selven voor (om redenen verclaert int bewijs des 1 voorbeelts) datter mette soodanige sijde daer in quam, sulcx dat DC is soo wel schaen, als verschaelicke der * lijckstandighe sijde met HG: Dit soo sijde, ick treck op DC als lijckstandighe met HG, den vierhouck IKCD,

Homologe.



ghelijck metten vierhouck EFGH; ick treck daer na van I tot DC of haer verlangde, de lini IE, ewewijdeghe met KC, daer na AL. Twelck soo sijnde ABCL

to be drawn at right angles to the glass base DM , and the said PQ has to be produced to R in such a way that QR be equal to ML . Thereafter a line has to be erected or imagined in the point R , equal to PQ , at right angles to the glass. The end point of this line is the required eye, the proof of which is clear from the foregoing proof of the 1st example.

The reason why in the first example the line PQR was not drawn, as in this second, is that R would clearly always fall in L , so that it is unnecessary to draw it.

3rd Example, of the Image of a Quadrangle With Only Two Parallel Sides), Which in the Drawing Operation Were Parallel to the Glass.*

SUPPOSITION. Let $ABCD$, having two parallel sides (AB and CD), be the image of the quadrangle having only two parallel sides (EF , HG), which in the drawing operation were parallel to the glass, to the infinite plane of which quadrangle $EFGH$ the glass with the side CD was at right angles in the drawing operation, the side homologous to HG , whose image is DC , having been parallel to the glass in the drawing operation. WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

No matter whether in the drawing operation the plane $EFGH$ came with the side HG in the glass or not, nevertheless I imagine (for reasons explained in the proof of the 1st example) that it came therein with this side, such that DC is the side homologous to HG as well as the image thereof. This being so, I draw on DC , the side homologous to HG , the quadrangle $IKCD$, similar to the quadrangle $EFGH$. I draw thereafter from I to DC or DC produced the line IL , parallel to

*)Trapezium.

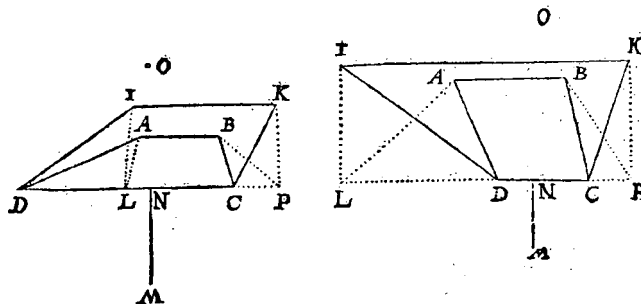
ABCL is schaeu des ewewijdeghen vierhoucx IKCL, ghelijck wy hier onder bewijfen sullen: Daer af ghefocht het oogh, wort bevonden deur het 2 voorbeelt deses voorstels, ten eynde, neem ick, der lini even an MN, ghestelt opt punt O rechthouckich opt glas, t'welck ick segh t'begheerde oogh te sijn.

T B E W Y S.

Wy hebben int werck gheseyt dat ABCL schaeu is des vierhoucx IKCL, om van t'welck verclaring te doen ick segh aldus: T punt A des vierhoucx ABCL, is schaeu van t'punt I, des vierhoucx IKCL, en t'punt L inde glasgrondt, is schaeu van sijn selven deur de 2 begheerte, en daerom is AL schaeu van IL deur het 1 voorstel; Maer AB is schaeu van IK, en BC van KC, daerom de vierhoucx ABCL, is schaeu vande vierhoucx IKCL, en vervolgghens het oogh ghevonden van ABCL, moet oock sijn het oogh van ABCD, want de heele schaeu en haer deel gheen verscheyden ooghen en hebben.

M E R C K T.

Men soude t'werck oock anders meughen doen met in plaets des scheefhouckighen ewewijdeghen verschaeulicken vierhoucx IKCL te crijghen een rechthouck, t'welck aldus toegaet: Ick verreycken de voorgaende form IKCD als hier onder, en trek van I en K twee linien IL, KP rechthouckich op DC, of op haer verlangde, daer na AL met BP, en om de redenen int bewijs hier boven verclaert, soo is den vierhoucx ABPL schaeu des verschaeulicken rechthouckighen vierhoucx IKPL: Daerom vande selve het oogh ghefocht deur het 1 voorbeelt, men salt vinden ter selver plaets alsvooren, te weten ten eynde der lini even an MN, ghestelt opt punt O rechthouckich opt glas.



4 Voorbeelt vande schaeu eens verschaeulicke vierhoucx met alleenelick twee ewewijdeghen sijden, die int verschaeuwen oneewewijdeghen waren mettet glas.

T G H E G H E V E N. Laet ABCD schaeu sijn van een verschaeulick plat, ghelijck mettet verschaeulicken vierhoucx EFGH, hebbende alleenelick twee ewewijdeghen sijden als EH, FG, die int verschaeuwen oneewewijdeghen waren mettet

KC , thereafter AL . This being so, $ABCL$ is the image of the parallel quadrangle $IKCL$, as we shall prove below. When hereof the eye is sought, it is found by the 2nd example of this proposition at the end point — I take it — of the line equal to MN , erected in the point O at right angles to the glass, which I say is the required eye.

PROOF

In the procedure we have said that $ABCL$ is the image of the quadrangle $IKCL$. In order to explain this, I say as follows. The point A of the quadrangle $ABCL$ is the image of the point I of the quadrangle $IKCL$, and the point L in the glass base is its own image by the 2nd postulate, and consequently AL is the image of IL by the 1st proposition. But AB is the image of IK and BC of KC , therefore the quadrangle $ABCL$ is the image of the quadrangle $IKCL$, and consequently the eye that has been found of $ABCL$ must also be the eye of $ABCD$, for the entire image and a part of it do not have different eyes.

NOTE

The procedure might also be performed differently by drawing instead of the oblique-angled parallel quadrangle $IKCL$ a rectangle, which procedure is as follows. I draw anew the foregoing figure $IKCD$, as below, and draw from I and K two lines IK , KP at right angles to DC or to DC produced, thereafter AL and BP ; then for the reasons explained above in the proof the quadrangle $ABPL$ is the image of the right-angled quadrangle $IKPL$. When therefore the eye of this is sought by the 1st example, it will be found in the same place as above, to wit at the end point of the line equal to MN , erected in the point O at right angles to the glass.

*4th Example, of the Image of a Quadrangle With Only Two Parallel Sides *), Which in the Drawing Operation Were Non-Parallel to the Glass.*

SUPPOSITION. Let $ABCD$ be the image of a plane figure similar to the quadrangle $EFGH$ having only two parallel sides (EH , FG), which in the drawing

*) Trapezium.

mettet glas, op welcx vierhoucx EFGH oneyndelick plat, het glas mette sijde DC int verschauwen rechthouckich stont, en hebbende de lijckstandige sijde met HG diens schaeu DC, int verschauwen ewewijdich ghehadt mettet glas.

T B E G H E E R D E. Wy moeten het oogh vinden.

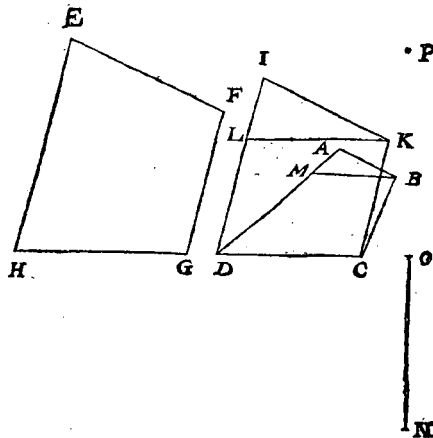
T W E R C K.

Tly dat int verschauwen het verschaeulick plat EFGH mette sijde HG quam int glas of niet, soo stel ick nochtans my selven voor (om redenen verclaert int bewijs des eersten voorbeelts) dattet met foodanighe sijde daer in quam, sulcx dat DC is soo wel schaeu als verschaeulicke der lijckstandighe sijde met HG: Dit soo sijnde, ick teycken op DC als lijckstandighe met HG, den vierhouck IKCD, ghelijck metten vierhouck EFGH, daer na KL even en ewewijdighe met CD; Voort van B tot in AD de lini BM, oock ewewijdighe met CD, t'welck soo wefende, MBCD is schaeu des ewewijdighen vierhoucx IKCD, ghelijck wy hier onder bewijfen fullen, daerom vande selve MBCD ghefocht het oogh, wort ghevonden deur het 2 voorbeelt deses voorstelsten eynde, neem ick, der lini even an NO, ghestelt op t'punt P rechthouckich opt glas, t'welck ick segh t'begheerde oogh te sijn.

T B E W Y S.

Wy hebben int werck ghefeyt dat MBCD schaeu is des verschaeulicken ewewijdighen vierhoucx IKCD, om van t'welck verclaring te doen ick segh

aldus: Anghesien AD schaeu is van ID deur t'gestelde, soo moet de schaeu des punts L in AD wesen, sy moet oock sijn in BM, want alsoo KL ewewijdighe is mettet glas, en dat van B schaeu des punts K, ghetrocken is BM ewewijdege met KL, soo moet de schaeu van KL sijn inde oneyndelicke BM deur het 2 voorstel, en daerom is MB schaeu van LK, en vervolgens de vierhouck MBCD schaeu van LKCD, en vervolgens het oogh ghevonden van MBCD, moet oock sijn het oogh van ABCD, want het deel der schaeu gheen ander oogh en heeft dan de gheheele schaeu.



M E R C K T.

Deur t'ghene ghefeyt is int merckant eynde des 3 voorbeelts, is kennelick datmen het werck oock soude meughen doen, met te trecken vande twee punten

operation were non-parallel to the glass, to the infinite plane of which quadrangle $EFGH$ the glass with the side DC was at right angles in the drawing operation, the side homologous to HG , whose image is DC , having been parallel to the glass in the drawing operation. WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

No matter whether in the drawing operation the plane figure $EFGH$ came with the side HG in the glass or not, nevertheless I imagine (for reasons explained in the proof of the first example) that it came therein with this side, so that DC is the side homologous to HG as well as the image thereof. This being so, I draw on DC , the side homologous to HG , the quadrangle $IKCD$ similar to the quadrangle $EFGH$; thereafter KL equal and parallel to CD , further from B to AD the line BM , also parallel to CD . This being so, $MBCD$ is the image of the parallel quadrangle $LKCD$, as we shall prove below. When therefore the eye is sought of this $MBCD$, it is found by the 2nd example of this proposition at the end point — I take it — of the line equal to NO , erected in the point P at right angles to the glass, which I say is the required eye.

PROOF

In the procedure we have said that $MBCD$ is the image of the parallel quadrangle $LKCD$; in order to explain this, I say as follows. Since AD is the image of ID by the supposition, the image of the point L must be in AD ; it must also be in BM , for since KL is parallel to the glass, while from B , the image of the point K , BM has been drawn parallel to KL , the image of KL must be in the infinite line BM by the 2nd proposition, and therefore MB is the image of LK , and consequently the quadrangle $MBCD$ is the image of $LKCD$, and consequently the eye that has been found of $MBCD$ must also be the eye of $ABCD$, for a part of the image does not have another eye than the entire image.

NOTE

From what has been said in the note at the end of the 3rd example it is evident that the procedure might also be performed by drawing from the two

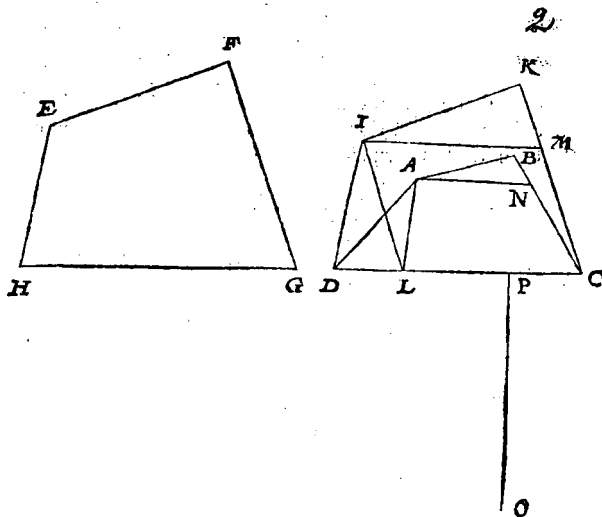
ten L en K twee hanghende op DC, vindende daer na de schaeu eens rechthouckighen vierhouck deur het 1 voorbeeld.

1 Voorbeeld vande schaeu eens verschaeulicken vierhouck met vier onevewijdeghe sijden, en de voorste alleenlick ewewijdeghe mette glasgront.

T G H E G H E V E N. Laet ABCD schaeu sijn van een verschaeulick plat gelijk metten verschaeulicken vierhouck EFGH, hebbende vier onevewijdeghe sijden, en op wiens oneyndelick plat het glas mette sijde DC int verschaeuwen rechthouckich stont, en hebbende de lijkstandighe sijde met HG diens schaeu DC, int verschaeuwen ewewijdich ghehad mettet glas. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten het oogh vinden.

T W E R C K.

Tsy dat int verschaeuwen het verschaeulick plat EFGH mette lijkstandighe sijde van HG quam int glas of niet, soo stel ick nochtans my selven voor (om redenen verclaert int bewijs des 1 voorbeelts) datter met foodanige sijde daer in quam, sulcx dat DC is soo wel schaeu als verschaeulicke der * lijkstandighe met HG. Dit soo sijnde, ick teycken op DC als lijkstandighe met HG, den vierhouck IKCD, ghelijck metten vierhouck EFGH; Daer na van I twee linien, d'ene als l L ewewijdich met KC, en commende L in DC of haer verlangde, d'ander l M even en ewewijdeghe met LC: Daer na LA, en van A tot in BC



de lini AN ewewijdeghe met IM. Twelck soo wesende, ANCL is schaeu des ewewijdeghe vierhouck IMCL, ghelijck wy hier onder bewijsen sullen; Daerom vande selve ANCL ghesocht het oogh, wott bevonden deur het 2 voorbeeld deses voorstels, ten eynde, neem ick, der lini even an OP, ghesfelt opt

points L and K two perpendiculars to DC and thereafter finding the image of a right-angled quadrangle by the 1st example.

5th Example, of the Image of a Quadrangle With Four Non-Parallel Sides, Only the Foremost Side Having Been Parallel to the Glass Base.

SUPPOSITION. Let $ABCD$ be the image of a plane figure similar to the quadrangle $EFGH$, having four non-parallel sides and to whose infinite plane the glass with the side DC was at right angles in the drawing operation, the side homologous to HG , whose image is DC , having been parallel to the glass in the drawing operation. **WHAT IS REQUIRED.** We have to find the eye.

PROCEDURE

No matter whether in the drawing operation the plane figure $EFGH$ came with the side homologous to HG in the glass or not, nevertheless I imagine (for reasons explained in the proof of the 1st example) that it came therein with this side, so that DC is the side homologous to HG as well as the image thereof. This being so, I draw on DC , the side homologous to HG , the quadrangle $IKCD$, similar to the quadrangle $EFGH$; thereafter from I two lines, one (IL) parallel to KC and with L coming in DC or DC produced, the other (IM) equal and parallel to LC ; thereafter LA , and from A to BC the line AN parallel to IM . This being so, $ANCL$ is the image of the parallel quadrangle $IMCL$, as we shall prove below. When therefore the eye is sought of this $ANCL$, it is found by the 2nd

punt Q rechthouckich opt glas, t'welck ick segh t'begheert oogh te sijn.

T B E W Y S.

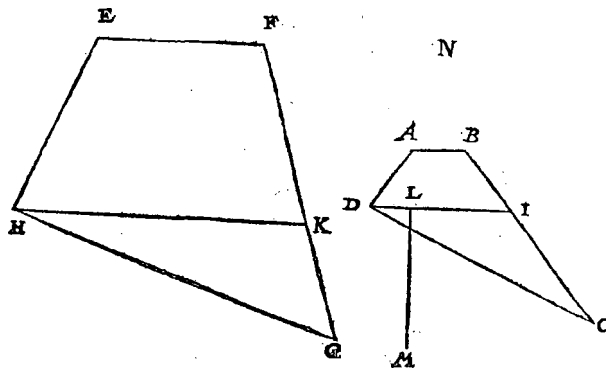
Wy hebben int werck gheseyt dat $ANCL$ schaen is des verschaeulicken ewewijdeghen vierhoucx $IMCL$, om van t'welck verclaring te doen ick segh aldus: Anghesien t'punt A des vierhoucx $ABCL$, is schaen van t'punt I des vierhoucx $IMCD$, en t'punt L inde glasgront is schaen van sijn selven deur de 2 begheerte, daerom is AL schaen van IL deur het 1 voorstel. Voort anghesien BC schaen is van KC deur t'ghesfelde, soo moet de schaen des punts M in BC wesen, sy moet oock sijn in AN , want alsoo IM ewewijdegh is mette glas, en dat van A schaen des punts I , ghetrocken is AN ewewijdegh met IM , soo moet de schaen van IM sijn inde oneyndelicke AN deur het 2 voorstel, en daerom is AN schaen van IM , en NC van MC , en vervolghens de vierhouck $ANLC$, schaen van $IMCL$, en vervolghens het oogh ghevonden van $ANCL$, moet oock sijn het oogh van $ABCD$, want de heele schaen gheen ander oogh en heeft dan haer deel.

M E R C K T.

Deur t'gene wy gheseyt hebben ant eynde des 3 voorbeelts, is kennelick datmen het werck oock soude meughen doen met te trecken vande twee punten I en M twee hanghende linien op DC , vindende daer na de schaen eens rechthouckighen vierhoucx deur het 1 voorbeelt.

6 Voorbeelt van de schaen eens verschaeulicke vierhoucx wiens achterste sijde alleen ewewijdegh is mette glasgront.

Int boveschreven 4 en 5 voorbeelt heeft des verschaeulicken vierhoucx voorste sijde ewewijdegh mette glas gheweelt, maer om de ghemeenheit des voorstels te verclaren in vierhoucken diens achterste sijde allenclick ewewijdegh is



mette glasgront, soo laet $ABCD$ schaen sijn van een verschaeulicken vierhouck $EFGH$, hebbende vier oneewijdeghen sijden, en op wiens oneyndelick plat

example of this proposition at the end point — I take it — of the line equal to OP , erected in the point Q at right angles to the glass, which I say is the required eye.

PROOF

In the procedure we have said that $ANCL$ is the image of the parallel quadrangle $IMCL$; in order to explain this, I say as follows. Since the point A of the quadrangle $ABCL$ is the image of the point I of the quadrangle $IMCD$, while the point L in the glass base is its own image by the 2nd postulate, AL is the image of IL by the 1st proposition. Further, since BC is the image of KC by the supposition, the image of the point M must be in BC ; it must also be in AN , for since IM is parallel to the glass, while from A , the image of the point I , AN has been drawn parallel to IM , the image of IM must be in the infinite line AN by the 2nd proposition, and therefore AN is the image of IM and NC of MC , and consequently the quadrangle $ANLC$ is the image of $IMCL$, and consequently the eye that has been found of $ANCL$ must also be the eye of $ABCD$, for the entire image does not have another eye than its part.

NOTE

From what we have said at the end of the 3rd example it is evident that the procedure might also be performed by drawing from the two points I and M two perpendiculars to DC and finding thereafter the image of a right-angled quadrangle by the 1st example.

6th Example, of the Image of a Quadrangle Whose Rearmost Side Only is Parallel to the Glass Base.

In the aforesaid 4th and 5th examples the foremost side of the quadrangle was parallel to the glass, but in order to explain the common applicability of the proposition to quadrangles whose rearmost side only is parallel to the glass base, let $ABCD$ be the image of a quadrangle $EFGH$, having four non-parallel sides and to whose infinite plane the glass with the point C was at right angles in

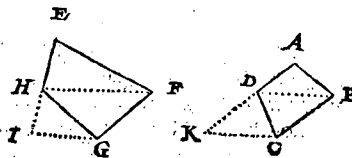
plat het glas mettet punt C int verschaeuwen rechthouckich stont, en hebbende d'achterste sijde EF diens schaeu A B, int verschaeuwen ewewijdich ghehad mettet glas. **T B E G H E E R D E.** Wymoeten het oogh vinden.

T W E R C K.

Ick treck D I ewewijdighe met A B, en commende I in B C; Daer na H K ewewijdighe met E F, en commende K in F G: T welck soo sijnde, tis kennelick dat A B I D is schaeu van E F K H, hebbende twee ewewijdighe sijden als E F met H K, daerom vande selve A B I D ghesocht het oogh, wort bevonden deur het 3 voorbeeld des voorstels ten eynde, neem ick, der lini even an L M ghestelt op t'punt N rechthouckich opt glas, t'welck openbaerlick t'begheerde oogh is.

*7 Voorbeeld eens verschaeulicken vierhouck hebbende alleene-
lick tusschen twee* teghenoverstaende houcken een ver-
dochte lini ewewijdich mette glasgront.* Oppositus
angulus.

By aldien de schau waer van een vierhouck als hier onder A B C D, schaeu van E F G H, alsoo dat de verdochte lini D B, waer ewewijdich gheweest mette glasgront, soo soude H F daer me oock moeten ewewijdich gheweest hebben: Daerom is kennelick datmen dan soude trecken H F, daer na E H oneyndelick voorwaert na I, en G I ewewijdighe met F H, Sghelijcx D B, daer na A D oneyndelick voorwaert na K, en C K ewewijdighe met B D, en dat alsdan D B C K schaeu soude sijn van H F G I, waer af het oogh gevonden deur het 3 voorbeeld, men sal t'begheerde hebben.



8 Voorbeeld van een verschaeulick rechtlinich plat meer dan vier sijden hebbende.

Ghegeven sijnde de schaeu mette verschaeulick form die meer dan vier sijden heeft, en de rest na t'inhoudt des voorstels, men sal om t'oogh te vinden uut het selve verschaeulick plat verkiezen vier houck punten, soo dat daer tusschen bedocht of getrocken vier linien die een bequaem vierhouck maken, daer afeen sijde int verschaeuwen ewewijdich was mettet glas. Sghelijcx salmen tusschen dier vier punten schaeuwen, trecken vier rechte linien en den vierhouck daer tusschen begrepen sal sijn schaeu van d'ander, daerom vande selve het oogh ghevonden deur een der bovenschreven voorbeelden na gheleghentheydt des verschaeulicken vierhouck diemen alsoogheeregen heeft, men sal oock hebben het oogh vande heele schaeu.

Laer by voorbeeld A B C D E schaeu sijn van een verschaeulick vijfhouck F G H I K, op wiens oneyndelick plat het glas mettet punt C int verschaeuwen rechthouckich stont, en hebbende de verdochte rechte lini van K tot G int verschaeuwen ewewijdich ghad mettet glas. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten het oogh vinden.

T W E R C K.

the drawing operation, its rearmost side EF , whose image is AB , having been parallel to the glass in the drawing operation. WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

I draw DI parallel to AB , with I coming in BC ; thereafter HK parallel to EF , with K coming in FG . This being so, it is evident that $ABID$ is the image of $EFKH$, having two parallel sides (EF and HK). When therefore the eye is sought of this $ABID$, it is found by the 3rd example of this proposition at the end point — I take it — of the line equal to LM , erected in the point N at right angles to the glass, which is evidently the required eye.

7th Example, of a Quadrangle Having Only Between Two Opposite Angles an Auxiliary Line Parallel to the Glass Base.

If the image were a quadrangle, as $ABCD$ below, the image of $EFGH$, so that the auxiliary line DB had been parallel to the glass base, HF would also have been parallel thereto. Therefore it is evident that one ought then to draw HF , thereafter produce EH indefinitely to I and draw GI parallel to FH ; similarly one ought to draw DB , then produce AD indefinitely to K , and draw CK parallel to BD ; then $DBCK$ would be the image of $HFGI$, and when hereof the eye is found by the 3rd example, it will be the required eye.

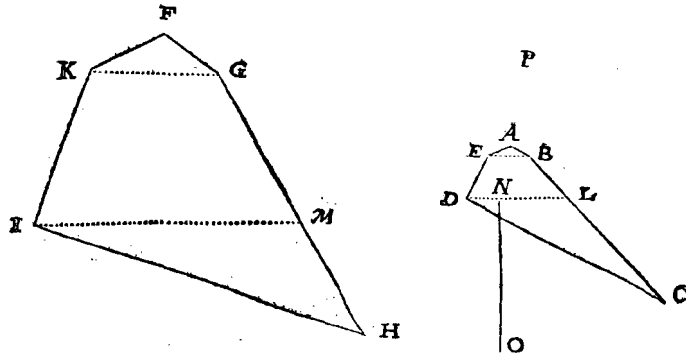
8th Example, of a Rectilinear Plane Figure Having More Than Four Sides.

Given the image and the object figure having more than four sides and the rest according to the contents of the proposition, in order to find the eye four vertices have to be chosen from the said plane figure so that between them are imagined or drawn four lines which make a convenient quadrangle, one side of which was parallel to the glass in the drawing operation. Similarly, four straight lines have to be drawn between the images of those four points; then the quadrangle contained between them will be the image of the other. When therefore the eye is found hereof, by one of the above examples, for the quadrangle that has thus been obtained, we shall also have found the eye of the entire image.

For example, let $ABCDE$ be the image of a pentagon $FGHJK$, to whose infinite plane the glass with the point C was at right angles in the drawing operation, the imagined straight line from K to G having been parallel to the glass in the drawing operation. WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

T W E R C K.

Ick treck EB als schaeu van KG , en haer ewijdeghe DL , commende L in BC , daer na IM ewijdege met KG , en commende M in GH : T welck soo sijnde, 't is kennelick dat $EBLD$ schaeu is van $KGMI$, hebbende twee ewijdeghe sijden als KG met IM ; Daerom vande selve $EBLD$ ghesocht het oogh, wort bevonden deur het 3 voorbeelt defes voorstels ten eynde der lini, neemick, even an NO , gestelt op 't punt P rechthouckich opt glas, 't welck open-



baerlick 't begheerde oogh is. **T B E S L V Y T.** Wefende dan ghegheven een vierzijdich of meerszijdich plat, dat schaeu is van een ghegheven verschaelicks plat, op 't welck het glas int verschaeuwen een houck maecte even an een ghegeven houck, en hebbende de selve schaeu ten minsten een sijde of lini tusschen twee houcken ewijdich mette glasgrondt, wy hebben het oogh ghevonden, na den eyfch.

M E R C K T.

Sooder bekend waer wat houck eenige vande sijden der verschaelicke form int verschaeuwen op de glasgrondt maecte, 't is openbaer dat deur de voorgaende manier ghevonden soude worden het oogh van alle ghegheven schaeu eens rechtlinich plats, om dat alle rechte lini ghetrocken uyt een houck der schaeu, ewijdich mette glasgrondt, schaeu is der lini ghetrocken inde verschaelicke form uyt der ghelijcken houck oock ewijdich mette glasgrondt.

Maer anghesien het selden ghebeurt, dat in sulcke ghegheven schaeuwen soodanighen houck bekend is, soo soude dat inde daer weynich ghebruyck connen hebben. Doch als de ghegheven verschaelicke form ten minsten heeft twee ewijdeghe sijden, of twee ewijdeghe linien die tusschen de houcken getrocken sijn of getrocken connen worden, soo isser deur ander wech eenichsins middel om daer toe te commen, waer af wy het volghende voorstel sullen beschrijven.

PROCEDURE

I draw EB as image of KG , and the line parallel thereto DL , L coming in BC ; thereafter IM parallel to KG , M coming in GH . This being so, it is evident that $EBLD$ is the image of $KGMI$, having two parallel sides (KG and IM). When therefore the eye is sought of this $EBLD$, it is found by the 3rd example of this proposition at the end point of the line — I take it — equal to NO , erected in the point P at right angles to the glass, which is evidently the required eye. CONCLUSION. Hence, given a quadrilateral or multilateral plane figure, which is the image of a given plane figure with which in the drawing operation the glass made an angle equal to a given angle, while the said image has at least one side or line between two angles parallel to the glass base, we have found the eye, as required.

NOTE

If it were known what angle one of the sides of the object figure made with the glass base in the drawing operation, then it would be evident that by the foregoing manner the eye of any given image of a rectilinear plane figure would be found, because any straight line drawn from an angle of the image, parallel to the glass base, is the image of the line drawn in the object figure from a similar angle, also parallel to the glass base.

But since it seldom happens that in such given images this angle is known, in actual fact this would not find much application. But if the given object figure has at least two parallel sides or two parallel lines that have been or can be drawn between the angles, then there is to some extent a means for finding it by another method, about which we shall describe the following proposition.

7 WERCKSTVCK. 3 VOORSTEL.

Wesende ghegeven een evenzijdich vierzijdich plat, dat schaeu is van een verschaeulick plat, op t'welck het glas int verschaeuvven een houck maeckte even an een ghegeven houck, en vvesende de selve schaeu sonder eenighe sijde of lini die tusschen tvvee houcken evenzijdich mette glasgrondt is, maer hebbende de verschaeulicke form ten minsten tvvee evenzijdeghe sijden, of linien die tusschen de houcken ghetrocken sijn, of ghetrocken connen vvorden: Het oogh te vinden.

T GHEGHEVEN. Laet $A B C D$ schaeu sijn, sonder eenighe sijde of lini die tusschen twee houcken evenzijdich mette glasgrondt is, en dat vande verschaeulicke evenzijdeghe vierhouck $E F G H$, op welcke het glas int verschaeuven rechthouckich stont. **T BEGHEERDE.** Wy moeten het oogh vinden.

T W E R C K.

Ick treck $D A$ en $C B$ voorwaert, tot datse vergaren in I , ghelijcx $B A$ en $C D$ vergarende in K , daer na $I K$, en een oneyndelicke deur C , ewewijdighe met $I K$ als $L M$ glasfront beteyckenende, ick treck daer na $A D$ voorwaert tot die oneyndelicke, ontmoetende de selve in L ; S'ghelijcx $A B$ voorwaert gherakende de selve oneyndelicke in M , en teycken int middel van $L M$ t'punt N , en van N treck ick de oneyndelicke $N O$ rechthouckich op $L M$; Daer na $E P$, alsoo dat den houck $H E P$ even is anden houck $P E F$, treck daer na uyt de oneyndelicke $N O$, eenighe lini als $O Q$, alsoo dat den houck $Q O N$, even sy anden houck $H E P$, voort van L tot inde oneyndelicke $N O$, de lini $L R$ ewewijdighe met $Q O$, en beschrijf deur de drie punten $L R M$ een booch; alvaer te gedenccken staet, dat wanneer den houck als $H E F$ recht is als hier, soo valt des rondts middelpunt daer de booch op beschreven wort in N , en dien houck scherp sijnde, valt daer boven in $N R$, maer plomp sijnde valt daer onder inde verlangde $R N$: Voort treck ick $E G$; Daer na vande twee punten C en M , treck ick twee linien tot een selve punt des boochs, als tot t'punt S , soo dat den houck $C S M$, even is anden houck $G E F$, (doch is te weten datet * wiskonstlich trecken deses houcx, my int beschrijven van desen niet te vooren en quam, maer † tuychwerckelick macht ghedaen worden onder anderen met te snyen een papieren houck even an $G E F$, hebbende de sijden $E G$, $E F$ lanck ghenouch, en desen papieren houck soo gheleyt, dat de sijden als $E F$, $E G$, gheraken de twee punten $C M$, en den uystersten punt als E inden omtreck, t'welck deur keering en wending ter eender en ander sijde daer toe ghebrocht can worden; Tis oock te weten, dat sulck gheraeksel des uystersten punts vant papier, alleenelick gheschien can wiskonstelick, welverstaende int punt S , want van daer na M , soo comt dan dat punt buyten den omtreck, en van S na L vallet overal daer binnen. Dese tuychwerckelicke manier hebben wy liever hier ghestelt, dan de saeck ongheroert te laten, te meer op dat ander dieder lust toe hebben de wiskonstighe wercking soucken meughen) daer na $L S$, voort van K en I , twee linien $K T$, $I V$, rechthouckich

Mathematisca operatio.
Mechanic.

7th PROBLEM

13th PROPOSITION

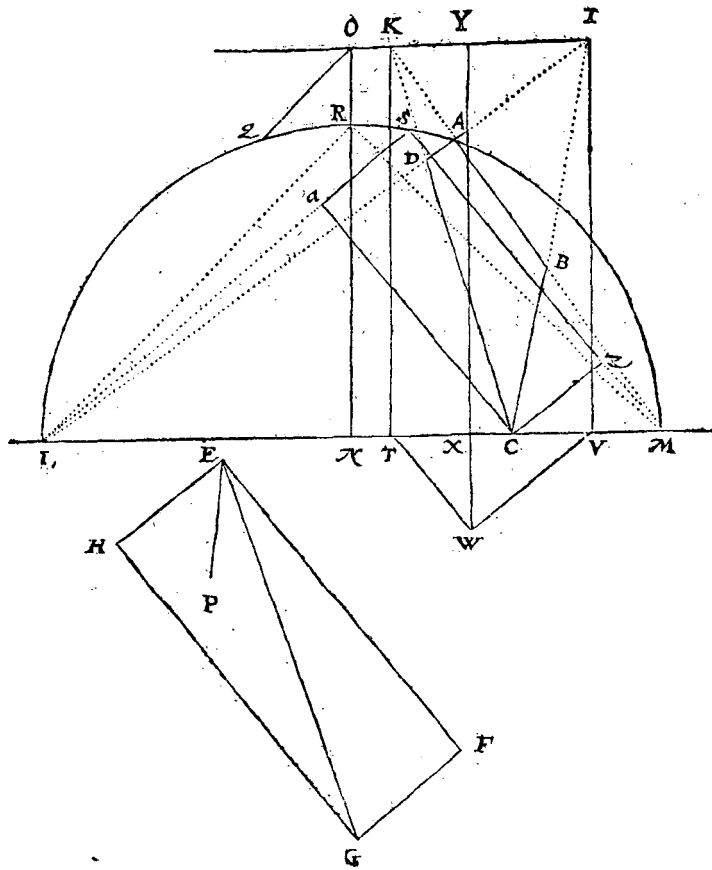
Given a parallel quadrilateral plane figure $^*)$, which is the image of a plane figure with which in the drawing operation the glass made an angle equal to a given angle, the said image not having any side or line between two angles parallel to the glass base, but the object figure having at least two parallel sides or lines that have been or can be drawn between the angles: to find the eye.

SUPPOSITION. Let $ABCD$ be the image, without any side or line between two angles parallel to the glass base, such of the parallel quadrangle $^*)$ $EFGH$, to which the glass was at right angles in the drawing operation. WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

I produce DA and CB until they meet in I , similarly BA and CD until they meet in K ; thereafter I draw IK , and an infinite line through C parallel to IK (LM), denoting the glass base. I then produce AD to that infinite line, which it meets in L ; similarly I produce AB , which meets the said infinite line in M , and I mark in the middle of LM the point N , and from N I draw the infinite line NO at right angles to LM . Thereafter I draw EP so that the angle HEP is equal to the angle PEF ; then I draw from the infinite line NO a line (OQ) such that the angle QON be equal to the angle HEP , further from L to the infinite line NO the line LR parallel to OQ ; and I describe an arc through the three points L, R, M . Here it is to be borne in mind that when the angle HEF is right, as here, the centre of the circle on which the arc is described falls in N , and when that angle is acute, it falls above it in NR , but when the angle is obtuse, it falls below it in RN produced. Further I draw EG . Thereafter from the two points C and M I draw two lines to one and the same point of the arc, *viz.* to the point S , so that the angle CSM is equal to the angle GEF (but it is to be noted that the mathematical drawing of this angle did not occur to me during the description of this matter, but mechanically it can be done, among other things, by cutting an angle of paper equal to GEF , whose sides EG and EF have the required length, this angle of paper being so placed that the sides EF, EG pass through the two points, C, M and the end point (E) touches the circumference, which can be brought about by turning to one side and the other. It is also to be noted that such touching of the end point of the paper can only take place mathematically, *viz.* in the point S , for from there to M that point comes without the circumference and from S to L it always falls within it. We preferred to give this mechanical method here rather than leave the matter undiscussed, the more so in order that others who have a mind may seek the mathematical operation); thereafter LS . Further I draw from K and I two lines KT, IV at right angles to the infinite line

$^*)$ Parallelogram.



houckich op de oneyndelicke LM, voort VW ewewijdeghe met SL, en van T tot inde oneyndelicke VW, de lini TW ewewijdeghe met SM, daer na WX rechthouckich op LM, en WX voorwaert tot Y in KI, daer na stel ick opt punt Y een lini even an WX rechthouckich opt glas, t'welck soo sijnde, ick seght t'eynde der selve lini t'begheerde ooght te wesen. TBEREYTSSEL. Laet ghetrocken worden van C tot in SM de lini CZ, ewewijdeghe met LS, sghelijcx van C tot in SL de lini Ca ewewijdeghe met MS, daer na RM.

T B E W Y S.

Den houck LRN, is even anden houck MRN, en den houck HEP, even sijnde met LRN deur t'werck, is oock even anden houck PEF, daerom den houck LRM is even anden houck HEF; Maer den houck LSM (commende inde selve booch LR, M) is even anden selven houck LRM, daerom den houck LSM

as versch.
3 bomen
daer,

LM , further VW parallel to SL , and from T to the infinite line VW the line TW parallel to SM , thereafter WX at right angles to LM , and I produce WX to Y in KI . Thereafter I erect in the point Y a line equal to WX at right angles to the glass; this being so, I say that the end point of this line is the required eye. PRELIMINARY. Let there be drawn from C to SM the line CZ parallel to LS , similarly from C to SL the line Ca parallel to MS ; thereafter RM .

PROOF

The angle LRN is equal to the angle MRN , and the angle HEP , being equal to LRN by the procedure, is also equal to the angle PEF , therefore the angle LRM is equal to the angle HEF . But the angle LSM (coming in the same arc

L S M is even anden houck HEF, voort is den houck CSZ even anden houck GEF, en ghelijck GF ewewijdeghe is met HE, en GH met FE, alsoo CZ met aS, en C a met ZS, daerom den vierhouck SZ C a, als verschaeulicke vierhouck; is ghelijck metten vierhouck EFGH, en van desen vierhouck SZ C a, weseude W de voet, of anders gheseyt weseude het oogh ten eynde der lini even an WX; ghestelt opt punt Y rechthouckich opt glas, soo is A B C D de schaeu, als de linien der form uytwijfen, lijckformich sijnde ande wercking van t'vinden der schaeu in der cortheden 3 lidts 6 voorbeelt. Maer weseude A B C D schaeu gesien uyt sulcken oogh, soo moet dat oogh oock t'begheerde sijn.

T B E S L V Y T. Weseude dan ghegheven een ewewijdich vierzijdich plat, dat schaeu is van een verschaeulick plat, op t'welck het glas int verschaeuwen een houck maeckte even an een ghegheven houck, en weseude de selve schaeu sonder eenige sijde of lini die tusschen twee houcken ewewijdich mette glasgront is, maer hebbende de verschaeulicke form ten minsten twee ewewijdighe zijden, of linien die tusschen de houcken ghetrocken sijn, of ghetrocken connen worden, wy hebben het oogh ghevonden na den eysch.

8 WERCKSTICK. 14 VOORSTEL.

Weseude ghegeven een vierzijdich of meerzijdich plat, dat schaeu is van een verschaeulick plat, op t'welck het glas int verschaeuven een houck maeckte even an een ghegheven houck, en weseude de selve schaeu sonder eenige sijde of lini die tusschen twee houcken ewewijdich mette glasgront is, maer hebbende de verschaeulicke form ten minsten twee ewewijdeghe zijden, of linien die tusschen de houcken ghetrocken sijn, of ghetrocken connen worden, en boven dien bekend sijnde den houck die eenige sijde der ghegheven schaeu int verschaeuven op de glasgront maeckte. Het oogh te vinden.

Dit 14 voorstel verschilt vant 13 daer in, dattet ghemeen is over alle* veel. *Multilatera Plana.* sijdeghe platten, maer wecom daer teghen moeter bekend sijn wat houck eenige lini der schaeu int verschaeuwen op de glasgront maeckte, t'welck int 13 voorstel niet noedich en was, om dat de glasgront uyt de ghegheven schaeu ghevonden wiert. Doch anghesien sulcken houck dickwils bekend wort in voorghestelde schaeuwen of schilderyen, deur eenige ander bystaende linien diemen weer op de glasgront rechthouckich te commen, soo can t'vinden des ooghs van sulcke schaeuwen inde daet sijn ghebruyck hebben, waer deur wy t'selve hier beschrijven.

1 Voorbeelt vande schaeu eens verschaeulicken vierhoucx met alleenelick twee ewewijdeghe zijden.

T G H E G H E V E N. Laet A B C D, de schaeu sijn vande verschaeulicke form E F G H inde vloer, waer af de twee zijden HE, GF, ewewijdich sijn, maer d'ander

G der

LRM) is equal to the said angle LRM , therefore the angle LSM is equal to the angle HEF . Further the angle CSZ is equal to the angle GEF , and just as GF is parallel to HE and GH to FE , thus CZ is parallel to aS and Ca to ZS . Therefore the quadrangle $SZCa$ (the object quadrangle) is similar to the quadrangle $EFGH$, and since W is the foot of this quadrangle $SZCa$ or, in other words, the eye is at the end point of the line equal to WX , erected in the point Y at right angles to the glass, $ABCD$ is the image, as the lines of the figure show, which is similar to the operation of the finding of the image in the 6th example of the 3rd section of the abridgements. But since $ABCD$ is the image, seen from the said eye, that eye must also be the required eye.

CONCLUSION. Hence, given a parallel quadrilateral plane figure, which is the image of a plane figure with which in the drawing operation the glass made an angle equal to a given angle, the said image not having any side or line between two angles parallel to the glass base, but the object figure having at least two parallel sides or lines that have been or can be drawn between the angles, we have found the eye, as required.

8th PROBLEM

14th PROPOSITION

Given a quadrilateral or multilateral plane figure, which is the image of a plane figure with which in the drawing operation the glass made an angle equal to a given angle, the said image not having any side or line between two angles parallel to the glass base, but the object figure having at least two parallel sides or lines that have been or can be drawn between the angles, while moreover the angle which one of the sides of the given image made with the glass base in the drawing operation is known: to find the eye.

This 14th proposition differs from the 13th in that it applies generally to all multilateral plane figures, but on the other hand it must be known what angle one of the lines of the image made with the glass base in the drawing operation, which was not necessary in the 13th proposition because the glass base was found from the given image. But since this angle often becomes known in given perspective drawings or pictures from some other accessory lines, which are known to be at right angles to the glass base, the finding of the eye of such images may be useful in practice, for which reason we will here describe it.

*1st Example, of the Image of a Quadrangle
Having Only Two Parallel Sides.*

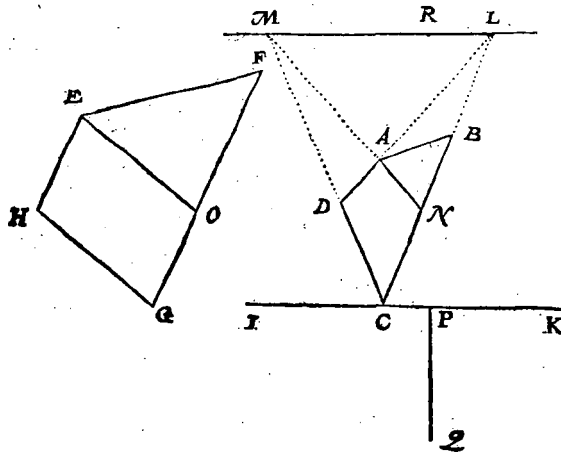
SUPPOSITION. Let $ABCD$ be the image of the figure $EFGH$ in the floor, whose two sides HE , GF are parallel, but the other two GH , FE non-parallel.

dertwee GH, FE onevewijdich, en den houck D sy schaeu van H, en t'glas heb int verschaeuwen rechthouckich gheweest opt verschaeulick plat, en ewewijdich met JK, die ick hier (sly datser int verschaeuwen deur streckte of niet) doe strecken deur t'punt C sulcx dat den houck die eenighe sijde ick neem DC, int verschaeuwen op de glasgront maeckte, even was metten houck DCI.

T B E G H E E R D E. Wy moeten het oog vinden.

T W E R C K.

Ick treck DA en CB voorwaert, tot datse vergaren in L, en deur L de oneyndelicke LM ewewijdighe met KI, daer na CD voorwaert tot datse die oneyndelicke ontmoet, t'welck sy in M, en van M deur A een lini tot datse CL ontmoet, t'welck sy in N, voort van E, tot in FG de lini EO, ewewijdighe met GH: Dit soo sijnde, ANCD is schaeu des ewewijdighen vierhouck E O G H; Hier af het oog ghevonden deur het 1 voorbeeld van desen, t'welck sy ten eynde der lini even an PQ, ghestelt opt punt R, rechthouckich opt glas, men heeft t'begeerde, waer af t'bewijs openbaer is, deur de verkeerde wercking vant vinden der schaeu in der cortheden 3 lids 6 voorbeeld.



2 Voorbeeld vande schaeu eens verschaeulicken rechtlinich plats soot valt, doch hebbende ten minsten na t'inhoudt des voorstels, twee ewewijdighe sijden of linien, die tuschen de houcken ghetrocken sijn of ghetrocken connen worden.

T G H E G H E V E N. Laet ABCDEF de schaeu sijn vande verschaeulicke form GHIKLM soot valt, doch hebbende de verdachte of ghetrocken linien tuschen de houcken M, H, en I, L, ewewijdich, dat is MH ewewijdich met LI, en den houck A sy schaeu van G, voort hebbe t'glas int verschaeuwen gheweest rechthouckich opt verschaeulick plat, en de glasgront ewewijdich met NO,
fulcx

And let the angle D be the image of H , and let the glass have been at right angles to the object plane figure in the drawing operation and parallel to IK , which here (no matter whether in the drawing operation it passed through it or not) I take to pass through the point C , so that the angle which one of the sides — I assume DC — made with the glass base in the drawing operation was equal to the angle DCI .

WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

I produce DA and CB until they meet in L , and through L I draw the infinite line LM parallel to KI ; thereafter I produce CD until it meets that infinite line. Let this be in M , then from M through A I draw a line until it meets CL . Let this be in N . Further I draw from E to FG the line EO parallel to GH . This being so, $ANCD$ is the image of the parallel quadrangle $EOGH$. When hereof the eye has been found by the 1st example of the present proposition *) , which shall be at the end point of the line equal to PQ , erected in the point R at right angles to the glass, we have found the required eye, the proof of which is evident by the operation reverse to that of the finding of the image in the 6th example of the 3rd section of the abridgements.

2nd Example, of the Image of a Rectilinear Plane Figure of Any Form, But Having at Least, According to the Contents of the Proposition, Two Parallel Sides or Lines That Have Been or Can Be Drawn Between the Angles.

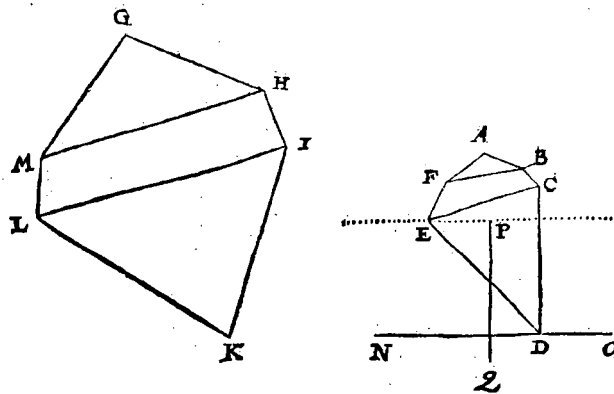
SUPPOSITION. Let $ABCDEF$ be the image of the object figure $GHIKML$ of any form, but having the auxiliary or drawn lines between the angles M , H and I , L parallel, i.e. MH parallel to LI , and let the angle A be the image of G . Further, let the glass have been at right angles to the plane figure in the drawing

*) Something is wrong in this reference. What is meant is the 7th Problem, 13th Proposition.

fulcx dat den houck die eenighe sijde ick neem ED int verschaeuwen op de glasgront maeckte, even was metten houck EDN. TBEGHEERDE. Wy moeten het oogh vinden.

TWERCK.

Want den houck F schaeu is van M, en B van H, soo treck ick FB; Sghelijcx want den houck E schaeu is van L, en C van I, soo treck ick EC, t'welck soo sijnde, de vierhouck FBCE, is schaeu des verschaeulicken vierhoucx MHIL, hebbende twee ewewijdeghe sijden, daer af het oogh gevonden deur het 1 voorbeelt, treckende de glasgront deur E ewewijdich met NO, en de rest als int selve 1 voorbeelt, men vindt dat oogh ten eynde der lini, neem ick, even an PQ, gheslelt opt punt R rechthouckich opt glas, en men heeft t'begheerde: Waer af t'bewijs openbaer is. TBESLVT. Wefende dan ghegeven een vierlijdich of meersijdich plat, dat schaeu is van een verschaeulick plat, opt t'welck het glas



int verschaeuwen een houck maeckte, even an een ghegeven houck, en wefende de selve schaeu sonder eenighe sijde of lini die tusschen twee houcken ewewijdich mette glasgront is, maer hebbende de verschaeulicke form ten minsten twee ewewijdeghe sijden of linien, die tusschen de houcken ghetrocken sijn of getrocken connen worden, en boven dien bekennt sijnde den houck die eenighe sijde der ghegeven schaeu int verschaeuwen op de glasgront maeckte, wy hebben het oogh ghevonden na den eysch.

VERVOLGH.

Anghesien de schaeuwen van lichamen al in platten bestaen, soo volght daer uyt dattet oogh van een dier platten ghevonden sijnde deur de voorgaende reg'helen, datmen heeft het oogh des heelen lichaems (uytgenomen van schaeuwen die int verschaeuwen met haer verschaeulicke form ewewijdich waren, want die int besonder of alleen anghesien meughen het oogh overal hebben, om datse als int glas sijnde, gheen veranderingen crijghen deur versetting des ooghs) la oock van alle ander omstaende schaeuwen der verschaeulicke formen by dat lichaem vervough, en t' selve angaende. Maer op dat alles noch claerder sy, sullen daer af voorbeelt stellen in deser voughen.

operation, and the glass base parallel to NO , so that the angle which one of the sides — I assume ED — made with the glass base in the drawing operation was equal to the angle EDN . WHAT IS REQUIRED. We have to find the eye.

PROCEDURE

Because the vertex F is the image of M , and B of H , I draw FB ; similarly, because the vertex E is the image of L , and C of I , I draw EC . This being so, the quadrangle $FBCE$ is the image of the quadrangle $MHIL$ having two parallel sides. When hereof the eye has been found by the 1st example by drawing the glass base through E parallel to NO and the rest as in said 1st example, that eye is found at the end point of the line — I take it — equal to PQ , erected in the point R at right angles to the glass; and thus we have found the required eye, the proof of which is evident.

CONCLUSION. Hence, given a quadrilateral or multilateral plane figure, which is the image of a plane figure with which in the drawing operation the glass made an angle equal to a given angle, the said image not having any side or line between two angles parallel to the glass base, but the object figure having at least two parallel sides or lines that have been or can be drawn between the angles, while moreover the angle which one of the sides of the given image made with the glass base in the drawing operation is known, we have found the eye, as required.

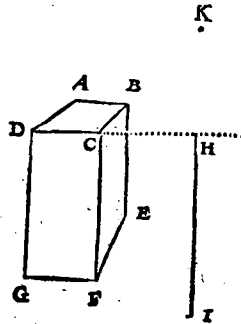
SEQUEL

Since the images of solids consist entirely of plane figures, it follows that when the eye of one of those plane figures has been found by the foregoing rules, we have found the eye of the whole solid (except in the case of images which in the drawing operation were parallel to their object figures, for these, when considered separately or alone, can have the eye anywhere, because, being in the glass, they do not undergo any change when the eye is displaced); yea, also of any other adjacent images of the figures belonging to that solid and having some connection therewith. But in order that everything may be clearer still, we will give an example thereof, as follows.

T G H E G H E V E N. Laet $A B C D E F G$ sijn de schaue eens verschaelicken viercanten pylaers, die ghelijck is anden pylaer wiens hooghe $D G$, en sijde des gronts $G F$, en was het glas int verschauwen ewewijdich mettet plat als $D C F G$ tusschen den gront en het deckfel: En heeft dese schaue in haer de schaeuwen van drie platten als blijkt. **T B E G H E E R D E.** Wy moeten het ooggh vinden.

T W E R O K.

Ick stel my selven voor dattet glas int reyckenen streckte (s' sy dat den verschauwer dat int verschauwen soo mocht ghestelt hebben of niet) deur de ewewijdege vierhouck $D C F G$, daerfe int verschauwen ewewijdich me was, en nemende het verschaelick deckfel diens schaue $A B C D$, al oft op de vloer laghe, ick vinde deur her 1 voorbeeld des 12 voorstels het ooggh als ten eynde der lini even, neem ick, an $H I$ ghestelt opt punt K rechthouckich opt glas, welck ooggh oock het ooggh der heele verschaelicke form moet sijn.



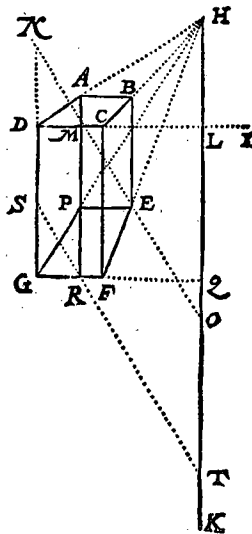
I M E R C K.

Wy hebben int werck ghenomen dattet verschaelick deckfel diens schaue $A B C D$ op de vloer ligh: En volghende sulck ghestelde het ooggh ghevonden: Maer want dat de eyghentlicke vloer niet en is, en dat ymant ant besluyt mocht twijfelen, soo sullen wy daer af verclaring doen.

Laet $A B C D E F G$ een viercante pylaer sijn alfooren, maer deurluchtich, waer in noch gheteykent sijn de linien als volght: $D A$ en $C B$ sijn voortghetrocken tot datse versamen in H , en $D C$ die als glasgront ghenomen wiert, is oneyndelick voortghetrocken na I , waer op rechthouckich ghetrocken de oneyndelicke $H K$, sy snijt $D I$ in L ; Daer nae getrocken $A M$ rechthouckich op $D I$, en $G D$ voortghetrocken tot N , alfoo dat $D N$ even sy an $D C$, daer na van N deur M een rechte lini tot datse $H K$ ontmoet in O , voort op het punt H een lini ghestelt even an $O L$, en rechthouckich opt plat daer de schaue in is, het eynde der selve is het ooggh, ghelijck int voorgaende werck ghevonden wiert.

Maer om nu te behoonen dat dit soo wel het waer ooggh is, als het ooggh ghevonden deur wercking op den eyghen vloer, soo laet ghetrocken worden $G H$, en $F E$ voorwaert, die vallen moet in H , daer na $E P$, ewewijdege met $F G$, en commende P in $G H$, sulcx dat $P E F G$ de schaue beteykent des verschaelicken grondts inden eyghen vloer.

Om van dese schaue $P E F G$ het ooggh te vinden, ick doe alfooren, treckende de glas-



SUPPOSITION. Let $ABCDEFG$ be the image of a right quadrangular prism which is similar to a prism whose height is DG and the side of whose base is GF , while in the drawing operation the glass was parallel to the plane figure $DCFG$ between the base and the cover; then this image has in it the images of three plane figures, as is apparent. **WHAT IS REQUIRED.** We have to find the eye.

PROCEDURE

I imagine that in the drawing operation the glass passed (no matter whether the draughtsman put it thus in the drawing operation or not) through the parallel quadrangle $DCFG$, to which it was parallel in the drawing operation, and taking the image $ABCD$ of the cover to be in the floor, I find the eye, by the 1st example of the 12th proposition, at the end point of the line equal — I take it — to HI , erected in the point K at right angles to the glass, which eye must also be the eye of the whole figure.

1st NOTE

In the procedure we have assumed the image $ABCD$ of the cover to be in the floor, and according to this supposition we have found the eye. But because that is not the floor itself and because someone might doubt the solution, we will give an explanation thereof.

Let $ABCDEFG$ be a right quadrangular prism, as above, but transparent, in which have also been drawn the following lines: DA and CB have been produced until they meet in H , and DC , which was taken for the glass base, has been produced indefinitely towards I . Drawn at right angles to this is the infinite line HK ; it intersects DI in L . When thereafter AM is drawn at right angles to DI , and GD is produced to N so that DN be equal to DC , a straight line then being drawn from N through M until it meets HK in O , and a line being erected in the point H , equal to OL and at right angles to the plane which contains the image, the end point of this line is the eye, as was found in the foregoing procedure.

But in order to prove that this is the true eye just as well as the eye found by the operation in the floor itself, let GH be drawn, and let FE be produced, which must fall in H , thereafter EP parallel to FG , P falling in GH , so that $PEFG$ denotes the image of the base in the floor itself.

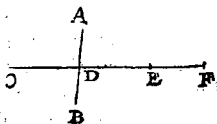
de glagrondt GF voorwaert, tot datse HK ontmoet in Q, en PR rechthouckich op de glagrondt GQ, en teyken in GD t'punt S, alsoo dat GS even is an GF, daer na van S deur R een lini tot datse HK ontmoet in T, voort opt punt H een lini ghestelt even an TQ, en rechthouckich opt plat daer de schaeu in is, het eynde der selve moet openbaerlick het oogh wesen.

Maer dat dit eynde, en t'eynde der lini na t'eerste besluyt, alleen selve punt is, volghet daer uyt, dat TQ even is an OL, t'welck aldus bethoont wort: AM voortghetrocken sijnde, streckt deur P tot R, sulcx dat des rechthouckigen driehoucx SGR, sijde GR, even is an DM, en GS even an DN, deur t'werck, en daerom is dederde sijde NM, even en ewewijdeghe met SR, en haer voortgetrocken linien als MO en RT, moeten inde twee rechthouckighe driehoucken MOL, RTQ, oock even en ewewijdich sijn, alsoo oock moeten ML met RQ, en vervolghens, ghelijck wy bethoonen wilden, OL met TQ.

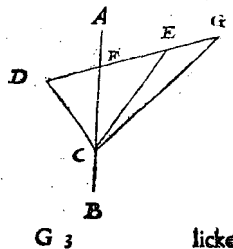
Hier uyt is oock openbaer ghenouch, datmen t'selve oogh alsoo vinden can deur d'ander twee afgaende vierhouckighe schaeuwen BEFC, APGD, te weten deur BEFC nemende de oneyndelicke daer FC in is voor glagrondt: Maer deur de vierhouck APGD nemende de oneyndelicke daer GD in is voor glagrondt, want deur de selve ghevonden de boveschreven lini die op H moet staen, sy sal oock even sijn met OL of TQ. Sulcx datmen uyt foodanighe vier vierhouckighe schaeuwen, verkiefen mach de bequaemste daer de tuchwerckelicke handeling de meeeste sekerheyt in heeft.

2 M E R C K.

Want ymant dencken mocht, waerom hier int vinden des ooghs niet begoft en wiert met voorbeelden wesende de schaeu een punt, lini, of driehouck, soo sullen wy daer af de reden verclaren, welke int ghemeen gheseyt is, datse gheen seker eenich besluyt, maer oneyndelicke besluyten hebben. Om t'selve breeder te verclaren, en eerst van t'punt, soo laet AB een glas sijn overcant ghesien, C een verschaeulick punt, D sijn schaeu, daer na ghetrocken van C deur D de lini CDE, en E voor oogh ghenomen, tis kennelick dat tet voor oogh van C sal meughen verstrecken: Maer CDE voortghetrocken tot F, soo sal F mette selve reden oock voor oogh van C meughen ghenomen worden, en alsoo met oneyndelicke ander.



Angaende de lini ick segh aldus; soo t'een uysterste der verschaeulicke lini int glas is, t'ander daer buyten, de schaeu van uysterste punt datter buyten is, wort ghesien tot t'selve plaets des glas deur oneyndelicke verscheyden ooghen, als boven gheseyt is, en t'ander eynde int glas wesende, sijn schaeu en verandert van plaets niet, deur verstelling des ooghs, daerom can de schaeu van sulcke lini uyt oneyndelicke verscheyden plaetsen ghesien worden. Om t'welck by voorbeelt te verclaren, Laet AB t'glas sijn overcant ghesien, CD een verschaeulicke lini, dienseen uysterste C int glas is, t'ander uysterste D daer buyten, E het oogh, van welck getrocken het strael ED, deurborende t'glas AB in F, als schaeu van D, en FC is de schaeu der verschaeu-



G 3 licke

In order to find the eye of this image $PEFG$, I proceed as above, producing the glass base GF until it meets HK in Q , drawing PR at right angles to the glass base GQ . And in GD I mark the point S such that GS is equal to GF . Thereafter I draw a line from S through R until it meets HK in T ; further I erect in the point H a line equal to TQ and at right angles to the plane containing the image; the end point of the latter must evidently be the eye.

But that this end point and the end point of the line according to the first solution are one and the same point follows from the fact that TQ is equal to OL , which is proved as follows: AM produced passes through P to R , so that the side GR of the right-angled triangle SGR is equal to DM , and GS is equal to DN by the procedure, and therefore the third side NM is equal and parallel to SR , and these lines produced, *viz.* MO and RT , must also be equal and parallel in the two right-angled triangles MOL , RTQ . Thus ML must also be equal and parallel to RQ , and consequently, as we wanted to show, so must OL to TQ .

From this it is also clear enough that the eye in question can thus be found from the other two receding quadrangular images $BEFC$, $APGD$, to wit from $BEFC$ by taking the infinite line containing FC for the glass base, but from the quadrangle $APGD$ by taking the infinite line containing GD for the glass base, for when from this is found the aforesaid line that has to stand in H , it will also be equal to OL or TQ , so that from these four quadrangular images one may choose the most suitable, with which the mechanical operation provides the greatest certainty.

2nd NOTE

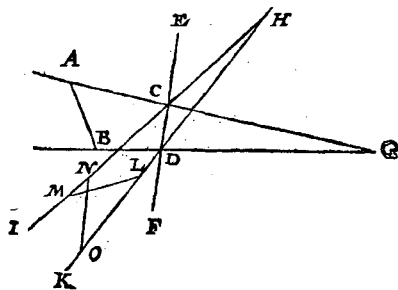
Because someone might wonder why in finding the eye we did not begin with examples in which the image is a point, line or triangle, we will explain the reason thereof, which, generally speaking, is that they do not admit of one certain solution, but of an infinite number of solutions. In order to explain this more fully, first for a point, let AB be a glass seen transversely, C an object point, D its image. When thereafter the line CDE is drawn from C through D , and E is taken for the eye, it is evident that it may serve for the eye of C . But when CDE is produced to F , for the same reason F may also be taken for the eye of C , and thus with an infinite number of other points.

As regards a line, I say as follows. If one end point of the object line is in the glass, the other outside it, the image of the end point that is outside it is seen in the said place of the glass by an infinite number of different eyes, as has been said above *); and if the other end point is in the glass, the image of this does not change its place when the eye is displaced; therefore the image of such a line can be seen from an infinite number of different places. In order to explain this by means of an example, let AB be the glass seen transversely, CD an object line, whose one end point C is in the glass, the other end point D outside

*) p. 75 Sequel.

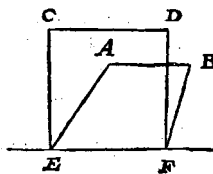
licke DC. Maer om nu te bethoonen dat dese FC oock voor schau van DC can verstrecken, ghesien wesende van een ander oogh dan E, soo laet DE voortgetrocken worden tot G, welck punt G voor oogh genomen, het siet FC noch voor schau van DC, en alsoo met oneyndelicke ander.

Maer de verschaelicke lini t'eenemael buyten t'glas sijnde, als neem ick AB, diens schacu CD, int glas EF overcant ghesien, en G het oogh, ick seggh dat alle punt van ghedaente als H voor oogh ghenomen, soo can CD schacu sijn van oneyndelicke ander verschaelicke linien even an AB; want treckende van H deur C en D, twee linien als HC I, en HD K, en daer tusschen vervought de linien L M, N O even an AB, de selve



ve L M, N O sijn openbaerlick verschaelicke linien diens schacu CD, en vervolgens de schacu CD can oneyndelicke menichte van verscheyden ooggen hebben.

Tis wel waer dat soomen de verschaelicke lini t'haerder gheselde plaets gave, datmen aldan het oogh nergens versetten en can sonder verandering der schacu te krijghen, doch wantet selden ghebeurt dat de verschaelicke lini int glas onder of by, of inde schacu met sulcke beteyckening ghestelt wort, soo en schijnet niet dat de vinding des ooghs deur sulcke manier seer begheert is. Nochtans om hier met een te verclaren, hoemen, of sulcx ghebeurde, daer me leven soude, soo laet AB schacu sijn vande verschaelicke CD, welcke schacu AB ewewijdich sijnde mette glasgront EF, alsoo gesien wiert doen t'glas rechthouckich stont op de glasgront, en ligghende de verschaelicke CD inde vloer tot die ghegeven plaets oock ewewijdich van EF, en dat nootfakelick deur dien CD daer af ewewijdeghe is. Om hier van het oogh te vinden, ick treck vande twee punten C en D, op EF, eenighe twee ewewijdeghe linien als CE, DF, tot op de glasgront EF. T welck soo sijnde ick fouck hier het oogh vande ghegeven ABFE der verschaelicke CDFE, na de manier des 13 voorsels, en heb t'begheerde.



Maer soo de schacu niet ewewijdich en waer mette glasgront, als neem ick dese lini AB, schacu vande verschaelicke CD, onevwijdich vande glasgront EF, men sal om t'oogh te vinden, aldus doen: Ick treck DC en BA voorwaert, tot datse inde glasgront vergaren in G (inde glasgront moeten se vergaren, soo t'ghegeven warachtich is, te weten AB ware schacu te sijn van CD, inder voughen als vooren:) Ick treck daer na AH rechthouckich op EF, en van C verschaelicke punt des schacus A, treck ick deur H de oneyndelicke CI; Sghelijcx treck ick BK rechthouckich op EF, en van D verschaelicke punt des schacus B, deur K de lini DL, ontmoetende de oneyndelicke CI in L, daer na LM ewewijdeghe met GD, en gherakende de glasgront EF in M, voort

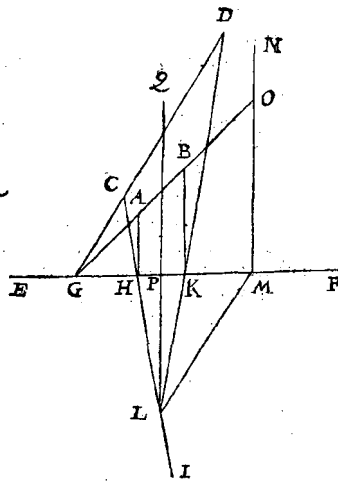
it, E being the eye, from which let there be drawn the ray ED , piercing the glass AB in F , the image of D , then FC is the image of the object line DC . But in order to show now that this FC may also serve as the image of DC when seen by an eye other than E , let DE be produced to G , and when this point G is taken for the eye, it still sees FC as the image of DC , and thus with an infinite number of other points.

But when the object line is altogether outside the glass, as — I take it — AB , whose image is CD in the glass EF , seen transversely, G being the eye, I say that when any point of such a kind as H is taken for the eye, CD may be the image of an infinite number of other object lines equal to AB , for when from H through C and D are drawn two lines, HCI and HDK , and the lines LM , NO , equal to AB , are placed between these, these lines LM , NO are evidently object lines having CD for their image, and consequently the image CD may have an infinite multitude of different eyes.

It is indeed true that if the object line is given in position, then the eye cannot be displaced anywhere without the image undergoing a change, but since it seldom happens that the object line is placed in the glass below, near or in the image with this intention, it seems that the finding of the eye in this manner is not frequently required. Nevertheless, in order to explain here at the same time how we ought to proceed if this happened, let AB be the image of the object line CD , which image AB , being parallel to the glass base EF , was thus seen when the glass was at right angles to the glass base and the line CD lay in the floor at the given place, also parallel to EF , and such necessarily so, because CD is parallel thereto. In order to find the eye of this, I draw from the two points C and D to EF two parallel lines CE , DF to the glass base EF . This being so, I here find the eye of this given $ABFE$ of the object figure $CDFE$, after the manner of the 13th proposition, and have found the required eye.

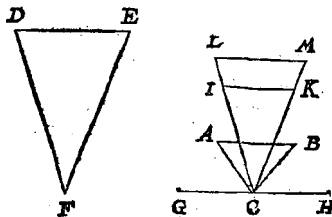
But if the image is not parallel to the glass base, as — I take it — the line AB opposite, the image of the object line CD , non-parallel to the glass base EF , in order to find the eye the following procedure has to be taken. I produce DC and BA until they meet in the glass base in G (they have to meet in the glass base, if the supposition is true, to wit that AB is the true image of CD , in the same manner as above). Thereafter I draw AH at right angles to EF , and from C , the object point of the image A , I draw through H the infinite line CI . Similarly I draw BK at right angles to EF , and from D , the object point of the image B , through K the line DL , meeting the infinite line CI in L ; thereafter LM parallel to GD and meeting the glass base EF in M ; further I draw the infinite line MN

voort de oneyndelicke MN rechthouckich op de selve glasgront, en GB voorwaert tot inde oneyndelicke MN, die gherakende in O, daer na LPQ rechthouckich op de glasgront EF, en snyende de selve in P, oock alsoo dat PQ even is an MO. Dit soo sijnde men sal opt punt Q een lini stellen even an LP, en opt glas sulckē houck makende als t'glas op de vloer, en t'uyterste dier lini is openbaerlick t'begheerde oogh.



Angaende den drichouck die heeft oock oneyndelicke besluuten, want soo een sijde inde glasgront is, die en verandert niet deur beweging des ooghs, alsoo oock en doen d'ander tweelinien, als t'oogh beweeght int oneyndelick strael vande verschaeulicken houckpunt deur haer schaeu, sulcx dar de heele schaeu des drichoucx dan sonder verandering blijft, alijst den verschaeulicken drichouck bedeckende, en daer me overcommende. Dergelijcke is oock te verstaen vande drichouck die de naeste sijde ewewijdich heeft mette glasgront, om datmen int soucken des ooghs het glas daer deur mach doen strecken,

Maer soo de verste sijde des verschaeulicken drichoucx metter glasgront ewewijdich waer het oogh can oock tot oneyndelicke verscheyden plaetsen vallen. Om t'welck by voorbeelt te verclaren; Laet ABC de schaeu sijn eens verschaeulicken drichoucx ghelijck met DEF, voort is de verste sijde AB ewewijdich neem ick mette glasgront GCH, diens glas int verschaeuwen rechthouckich stont opt plat der verschaeulicke form: Laet nu vant punt C ghetrocken worden de twee linien CI, CK en IK, sulcx dat de drichouck IKC ghelijck is met DEF: Laet daer na CI voortghetrocken worden tot L, en CK tot M, daer na LM ewewijdeghe met IK, en sal soo wel den drichouck LCM, als ICK, ghelijck sijn met DEF. Dit soo wesende,



tis openbaer meughelick her oogh alsoo te connen gestelt worden, datmen de twee punten AB (midts datmen verstaet ABC te sijn int glas rechthouckich op de vloer) sal sien overcommen mette twee puntē IK, als schaeuwen der selve, en sal dan ABC sijn schaeu der verschaeulicke IKC: Tis oock openbaer meughelick her oogh te connen ghestelt worden tot noch een ander plaets, alsoo datmen de voorschreven twee punten A, B, sal sien overcommen mette twee punten L, M, als schaeuwen der selve, en sal dan ABC, sijn schaeu der verschaeulicke form LMC, die soo wel als ICK, ghelijck sijnde met DEF, ver-

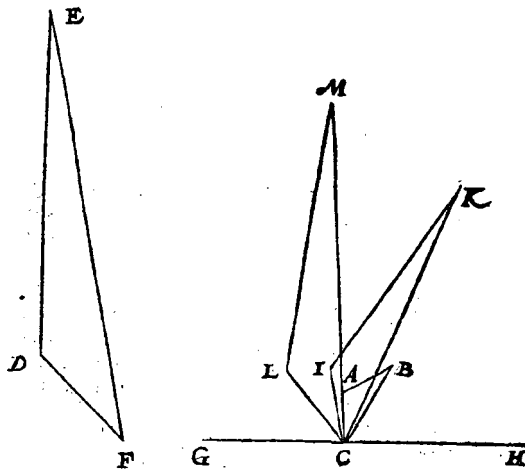
at right angles to the said glass base, and I produce GB to the infinite line MN , meeting it in O ; thereafter I draw LPQ at right angles to the glass base EF and intersecting it in P , also so that PQ is equal to MO . This being so, in the point Q has to be erected a line equal to LP and making with the glass the same angle as the glass with the floor; then the end point of this line is evidently the required eye.

As regards the triangle, this also has an infinite number of solutions, for if one side is in the glass base, this does not change when the eye moves; nor do the other two lines when the eye moves in the infinite ray from the angle of the object figure through its image, so that the whole image of the triangle then remains unchanged, always covering the object triangle and coinciding therewith. The same is also to be understood for the triangle which has the nearest side parallel to the glass base, because in the finding of the eye the glass may be made to pass through it.

But if the furthest side of the object triangle is parallel to the glass base, the eye may also fall at an infinite number of different places. In order to explain this by means of an example, let ABC be the image of a triangle similar to DEF ; further, the furthest side AB is parallel — I take it — to the glass base GCH , whose glass in the drawing operation was at right angles to the plane of the object figure. Now let there be drawn from the point C the two lines CI , CK , and IK so that the triangle IKC is similar to DEF . Thereafter let CI be produced to L and CK to M ; thereafter let LM be drawn parallel to IK ; then the triangle LCM as well as ICK will be similar to DEF . This being so, it is evidently possible for the eye to be so placed that the two points A , B (provided ABC be taken to be in the glass at right angles to the floor) will be seen to coincide with the two points I , K , as images thereof, and ABC will then be the image of the object triangle IKC . It is also evidently possible for the eye to be placed in yet another place, so that the aforesaid two points A , B will be seen to coincide with the two points L , M , as images thereof, and then ABC will be the image of the figure IMC , and the latter as well as IKC , being similar to DFE , will each serve for the

strecken elck voor ghegheven verschaulicke form. Sulcx dat de schaeu ABC can ghesien worden van twee verscheyden ooghen, en vervolghens van oneyndelicke verscheyden ooghen.

Sghelijcx salmen oock verstaen vande driehouck sonder eenighe ewewijdeghe mette glasgront. Laet by voorbeelt ABC schaeu sijn eens verschaulicken driehoucx ghelijck met DEF : Voort is de sijde AB ewewijdich, neem ick, mette glasgront GCH , diens glas int verschaeuwen rechthouckich stont opt plat der verschaulicke form. Laet nu vant punt C ghetrocken worden de twee linien CI , CK , sulcx dat den driehouck IKC ghelijck is met DEF , en schaeu van ABC . Laet voort op een ander plaets geteykent worden den driehouck LMC , oock ghelijck met DEF , maer grooter dan IKC , en dat tot sulcken plaets daermen de verschaulicke lini LM can sien overcommen met haer schaeu AB . Dit soo wesende, de woorden der verclaring op de voorgaende form ghedaen, sullen oock dienen tot dese, en sal eyntlick besloten worden ABC schaeu te connen sijn van oneyndelicke verschaulicke driehoucken ghelijck met DEF uyt verscheyden ooghen ghesien.



Maer soo den verschaulicken driehouck ghegheven waer t'haerder plaets daerse int verschaeuwen was, soo en valter maer een besluyt. Om van t'welck by voorbeelt te spreken, laet den driehouck ABC de schaeu sijn des verschaulicken driehoucx DEC , en FG de glasgront, diens glas opt verschaulick plat rechthouckich quam. Om hier af het ooggh te vinden, ick treck van E tot inde glasgront de lini EG ewewijdeghe met DC , en van G deur B de oneyndelicke GBH , en CA voorwaert ontmoetende die oneyndelicke in H , en deur H de oneyndelicke HI ewewijdege met FG , en AB voorwaert ontmoetende die oneyndelicke in I , en vande twee punten H en I twee linien rechthouckich op FG , als HF en IK ; Daer na de oneyndelicke FL ewewijdeghe met DC , en KM ewewijdeghe met ED , en gerakende FL in M , daer na MN rechthouckich op FG , en de selve MN treck ick voort tot O in HI , daer na op O een lini ghestelt even an NM en rechthouckich opt glas, Het eynde dier lini is t'begheerde ooggh.

TBEREÏTSEL VAN TBEWYS. Ick treck CP even en ewewijdege met DE ,

given object figure, so that the image ABC can be seen by two different eyes, and consequently by an infinite number of different eyes.

The same is also to be understood of a triangle without any side parallel to the glass base. For example, let ABC be the image of a triangle similar to DEF . Further I assume the side AB to be parallel to the glass base GCH , whose glass in the drawing operation was at right angles to the plane of the object figure. Let there now be drawn from the point C the two lines CI , CK , and IK so that the triangle IKC is similar to DEF and image of ABC . Further let there be drawn in another place the triangle LMC , also similar to DEF , but larger than IKC , such in the place where the line LM can be seen to coincide with its image AB . This being so, the words of the explanation for the foregoing figure will also serve for the present one, and finally it has to be concluded that ABC may be the image of an infinite number of triangles similar to DEF , seen by different eyes.

But if the object triangle is given in its position, where it was in the drawing operation, there is only one solution. To speak of this by means of an example, let the triangle ABC be the image of the triangle DEC , and FG the glass base, whose glass was at right angles to the plane figure. In order to find the eye hereof, I draw from E to the glass base the line EG parallel to DC , and from G through B the infinite line GBH , and I produce CA until it meets this infinite line in H ; and through H I draw the infinite line HI parallel to FG , and I produce AB until it meets this infinite line in I ; and from the two points H and I , I draw two lines at right angles to FG , viz. HF and IK . Thereafter I draw the infinite line FL parallel to DC and KM parallel to ED , meeting FL in M , then MN at right angles to FG , and I produce this MN to O in HI . When thereafter a line is erected in O equal to NM and at right angles to the glass, the end point of this line is the required eye.

PRELIMINARY TO THE PROOF. I draw CP equal and parallel to DE , further CI intersecting GH in Q , and I produce ED and BA , which necessarily meet in the glass base GF , which shall be in R .

PROOF

This preliminary thus having been made, we see a figure of the same kind as that of the 6th example of the 3rd section of the abridgements, from which it appears that $ABQC$ is the image of the quadrangle $DEPC$, and from the reverse operation it appears that the eye must come as has been said above.

FAVTMERCING.

Anghefen sommighe fouten in ghegheven schaeuwen deur t'eerste opsicht merckelick sijn, welcke kennis soo wel dient om int verschaeuwen sich daer voor te wachten, als om van gemaecte schaeuwen wel te oirdeelen, soo sullen wy daer af de vijf volghende reghelen beschrijven.

T E N 1.

Soomen bevonde in gheen rechte lini te ligghen de schaeuwen van drie of meer verschaeulicke punten, welcke verschaeulicke punten men weet in een rechte lini te ligghen, men is deur het 1 voorstel verickert datter inde verschaeuwing ghemist is.

T E N 2.

Wanneer wy in eenighe schaeu linien sien, die wy weten schaeuwen te moeten sijn van verschaeulicke ewewijdeghe linien ewewijdich metter glas, welcke schaeuwen nochtans metter daer niet ewewijdich gherrocken en sijn, men can daer uyt oirdeelen de verschaeuwing qualick ghedaen te wesen, als verickert sijnde deur het 2 voorstel.

T E N 3.

Soo de schaeuwen van verschaeulicke platten die wy weten ewewijdich te moeten sijn metter glas, niet ghelijck en waren met haer verschaeulicke form, t'fy datse bestaan in rechte of cromme linien, men weet datter ghemist is deur het boveschreven 2 voorstel.

T E N 4.

Als wy in eenighe schaeu linien sien, die wy weten schaeuwen te moeten sijn van verschaeulicke ewewijdeghe linien onevewijdich metter glas, welcke schaeuwen voortghetrocken wesende, nochtans niet in een selve punt en vergaren, men can daer uyt oirdeelen de verschaeuwing qualick ghedaen te wesen, waer af t'bewijs bestaat int 3 voorstel.

T E N 5.

Als wy in eenighe schaeu linien sien, die wy weten schaeuwen te moeten sijn van verscheyden partien van verschaeulicke ewewijdeghe linien, die mette vloer oock ewewijdich sijn, maer metter glas onevewijdich, en d'een partie onevewijdich van d'ander: Soo al de saempunten dier verscheyden partien, niet in een rechte linien vielen, men can daer uyt oirdeelen de verschaeuwing qualick ghedaen te wesen, waer af doirsaeck blijkt int 4 voorstel.

DETECTION OF ERRORS

Since some errors in given images are noticeable at the first glance, we will describe for this the five following rules (which knowledge is useful, both for avoiding such errors in perspective drawing and for rightly evaluating already drawn images).

1.

If we find that the images of three or more object points, which are known to be in a straight line, are not in a straight line, we can be sure, by the 1st proposition, that an error has been made in the drawing operation.

2.

If in an image we see lines which we know must be the images of parallel lines parallel to the glass, which images nevertheless have not in actual fact been drawn parallel, we can infer from it that the drawing has been performed in a defective manner, of which we are sure by the 2nd proposition.

3.

If the images of plane figures which we know must be parallel to the glass are not similar to the object figures, no matter whether they consist of straight or curved lines, we know by the aforesaid 2nd proposition that an error has been made.

4.

If in an image we see lines which we know must be the images of parallel lines non-parallel to the glass, which images, when produced, nevertheless do not meet in the same point, we can infer from it that the drawing has been performed in a defective manner, the proof of which is formed by the 3rd proposition.

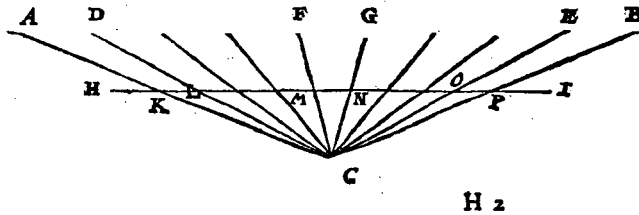
5.

If in an image we see lines which we know must be the images of different sets of parallel lines, which are also parallel to the floor, but non-parallel to the glass, while one set is non-parallel to the other; if all the meeting points of those different sets do not fall in a straight line, we can infer from it that the drawing has been performed in a defective manner, the cause of which is apparent from the 4th proposition.

6 Hoofstlick vande volcommen navolging der const.

Ettelike meesters in dadelick verschauwen, houden daer voor, datmen int verschauwen niet heel volcomelick en moet navolghen de reghelen deser const, maer somwijllen wat behaghelicker voor t' ooggh stellen dat teghen de reghel gaer: Gheven daer af voorbeelt, segghende dat als ymant staet voor en by t' middel van een langheghevel met pylaren van t' een eynde tottetander, de pylaren die int middel sijn, sullen haer int gesicht veel wijder van malcander verthoonen, dan die na by de eynden staen, nochtans, segghen sy, en moetenmen int verschauwen sulcke schijn niet volghen, maer soodanighe pylaren al ewewijt van malcander setten, na de ghemeene manier diemen in sulcke gheteykende schauwen deurgaens siet onderhouden te sijn, want soomen t' verkeerde dede, te weten datmen die pylaren onevewijdich stelde ghelijckse verschijnen, rfoude onbehaeghlicke verschaewing sijn. Maer al dit is ghemist, nyt oirfaeck dat sulcke pylaren inde schaeu al ewewijt van malcander ghestelt wesende, en rnatuerlick ooggh oock t' sijnder plaets, soo krijghense van selfs de behoerlicke schijnbaer naerding die de ware verschaelicke pylare schijnbaerlick krijgen.

Maer om hier af by voorbeelt noch claerder te spreken, laet de ondergestelde puntē tusschē A en B, beteyckenen de grōnden der voorschrevē verschaelicke



APPENDIX

6TH CHAPTER, OF THE PERFECT APPLICATION OF THE ART

Several experts in practical perspective drawing consider that in perspective drawing one should not follow the rules of this art quite perfectly, but sometimes give a more pleasant display, though it be contrary to the rule. They give an example thereof, saying that if a man stands in front and near the middle of a long façade with columns from one end to the other, the columns in the middle will appear to the eye to be much further apart than those near the ends; nevertheless, they say, in drawing the perspective image one should not imitate this appearance, but put all such columns equally far apart, according to the common manner which is generally seen to be adhered to in such drawn images, for if one did the reverse, to wit, if one put those columns not equally far apart, as they appear to be, this would be an unpleasant perspective. But all this is wrong, because when such columns are all put equally far apart in the image and the natural eye is also in its proper place, they will automatically get the right apparent distance under which the actual columns appear.

But to make this even clearer by means of an example, let the points between *A* and *B* given below denote the bases of the aforesaid columns in the front

pylaren inde voorghel van een ghesicht, en het oogh voor 't middel van dien sy C, welck oogh d'uyterste pylaren als A en D, of B en E, malcander schijnbaerlick veel naerder sien sal dan de middelste pylaren, als F en G, uyt oirfaeck dat den houck A C D, of B C E, veel cleender is dan den houck F C G. Laet nu ghetrocken worden de lini H I, als glas ewewijdich mette rye der pylaren A B, en snyende de linien dieder strecken van C totte pylaren ter plaetsen als men siet, te weten A C, D C, F C, G C, E C, B C inde punten K, L, M, N, O, P, en sullen die gemeene sneed inde lini H I, als schaeuwen der pylaren, al ewewijt van malcander vallen, ghelijck de verschaulicke pylaren tusschen A en B. Dit soo wese, men siet dat de pylaren die tusschen H en I alsoo ewewijt van malcander staen, haer behoortlicke schijnbaer naerdering krijghen van C ghesien, want K C L of A C D is al een selven houck, alsoo oock is M C N of F C G, sghelijcx O C P of E C B: Sulcx dat de verschaeuwers in foodanighe stelling der pylaren tusschen H en I al ewewijt van malcander, teghen de reghel der verschaeuwing niet en doen, ghelijck sy selfs meynen, maer moet alsoo ghedaen sijn om volcomelick te verschaeuwen.

Tis wel soo datmen somwijlen schaeuwen siet, als van menschen, gedierten, en dergelijcke, die deur een vrye hanttreck behaechlicker ghedaen sijn als ander deur moeylicke teyckening nae reghelen der verschaeuwing ghewrocht; Maer dat heeft een ander bescheyt, deur dien sulcke linien d'een d'ander soo niet en beschamen, ghelijck wel doen ewewijdeghe linien in ghesichten, want of een peert sijn voer een duym hoogher of leegher opheft, of dat een mensch een duym meer of min boest, daer en valt soo seker oordeel niet op hoet eyghentlick wesen moet.

Merckt oock dat ghelijck boochsche linien van ghedierten, behaeghlicker en lichter gheteyckent worden deuren vrye handtreck van eenen diet wel gheleert heeft, dan deur vinding van veel punten, alsoo worden ter contrari in teyckening van ghesichten, rechte linien (waer in de verschaeuwing van ghesichten meest befaet) bequamer en syyverderghetrocken langs een regel, dan deur een vrye handtreck.

7 Hoofstlick vant glas.

Ick heb erghens ghelesen, en dat na mijn beste onthoudt in *Albert Durer*, alwaer hy willende verclaren wat eyghentlicke verschaeuwing is, seght datmen de verschaulicke saeck soude sien deur een plat glas, en sich inbeelden dat tegene men soo int glas siet, daer in gheschildert is, want dats de ware volcomen schaeu ghesien vant oogh op die plaets. Dese beschrijving der schaeu (welcke ons hier vooren beweeghde een glas te bepalen) heeft sijn VORSTELICKE GHE NADE soo bequaem ghedocht, dat hy sulcke schaeu niet alleen in een glas en heeft willen bedencken, maer dadelick daer in teykenen, doende tot dien eynde bereyden een glas, inder voughen als de byghevoughde form anwijst, alwaer A het glas bediet ('t welck was 't glas van een groote cristalijne spiegel) draeyende op de carniere B, om dat soo recht of scheef te stellen als men wil, en wort vast ghemaect metter schroefken C: Tgaetken daermen deur siet is D, 't welcmen naerder en verder vant glas can schuijven, en dat hechten metter schroefken E: T'glas can oock hoogher en leggher ghestelt worden, en dan valt ghemaect metter schroefken F.

façade of a building and let the eye in front of the middle of this be C , which eye will see the extreme columns A and D or B and E apparently much nearer to one another than the central columns F and G , because the angle ACD or BCE is much smaller than the angle FCG . Let there now be drawn the line HI for the glass, parallel to the row of the columns AB and intersecting the lines extending from C to the columns in the places seen, to wit AC , DC , FC , GC , EC , BC , in the points K , L , M , N , O , P ; then these common intersections in the line HI (the images of the columns) will all be equally far apart, like the columns between A and B . This being so, it is seen that the columns which between H and I are equally far apart get their right apparent distance, as seen from C , for KCL or ACD is all the same angle, and so is MCN or FCG , and likewise OCP or ECB , so that the draughtsmen do not act contrary to the rule of perspective in putting all the columns between H and I thus equally far apart, as they themselves think, but it has to be done in this way in order to draw a perfect image.

It is indeed true that we sometimes see perspective images, such as of men, animals, and the like, which have been done more pleasantly by a free stroke of the hand than other images which have been wrought by laborious drawing in accordance with the rules of perspective. But this has another explanation, because with such lines one does not put the other as much to shame as do the parallel lines in buildings, for when a horse lifts its foot an inch higher or lower, or when a man stoops an inch more or less, it cannot be judged with such certainty how it really ought to be.

Note also that whereas curved lines of animals are drawn more pleasantly and easily by a free stroke of the hand of one who has learned it well than by the finding of many points, in the drawing of buildings straight lines (of which a perspective image of buildings mostly consists) are drawn more conveniently and accurately along a ruler than by a free stroke of the hand.

7TH CHAPTER, OF THE GLASS

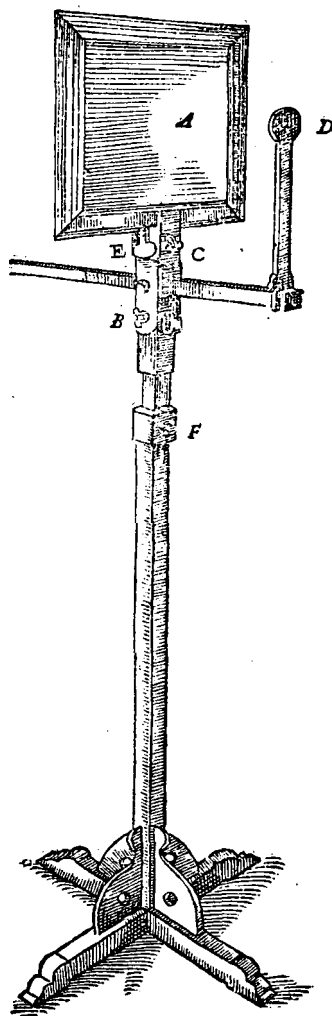
I have read somewhere, and if I remember rightly: in *Albert Dürer*¹⁹⁾, how, wishing to explain what perspective proper is, he says that one ought to see the object figure through a plane glass and imagine that what one thus sees in the glass is painted on it, for that is the true perfect image seen by the eye in that place. This description of the image (which induced us herebefore to define a glass) appeared so suitable to his PRINCELY GRACE that he wanted not only to imagine such an image in a glass, but also to actually draw it therein, and to this end had a glass made in the way shown in the annexed figure, where A denotes the glass (which was the glass of a large crystal mirror), pivoting about the hinge B , so that it may be put as straight or inclined as desired, and fixed by means of the small screw C . The hole through which one may look is D , which can be pushed nearer to and further away from the glass and be fixed with the small screw E . The glass may also be set higher or lower and then be fixed with the small screw F .

¹⁹⁾ In A. Dürer, *Unterweysung der Messung* (1525), see footnote ¹⁷⁾ of the Introduction.

Deſe ghedaente vant glas (waer me ſijn VORSTELICKE GENADE ſchaeuwen teyckende ſo van menſchen als anders, ſulcx dat ſchijnt mette waerheyte meughen gheſeyt worden, dat ſtanden van menſchen niet meuglick en ſijn uyter oogh ſonder glas, ſoo volcomelick gheteyckent te worden). hebben wy willen beſchrijven, op dat ſo ymant tot der ghelijcke begeerich waer, dit tot voorbeeld mach nemen, verbeterende t'gene hy hier in noch bequamer mocht vinden, om dattet tot grondelicke kennis der verſchaeuwing voorderlick is. Ick achte dattet ſijn VORSTELICKE GENADE gheholpen heeft om te mercken en verbereren ettelicke onvolcomentheden die in mijn eerſte begrijp deſer verſchaeuwing waren: Als onder anderen de ghemeene regel der vinding des ooghs van verſchaeulicke formen die t'glas noch met ſijde noch met punt gheraken, t'welck wy eerſt als wat duyſters ongevoert ghelaten hadden.

Voort iſt ghebeurt dat wy inde vinding des ooghs ettelicke voorſtellen beſchreven hadden, waer in de verſchaeulicke form als gegheven by haer ghegeven ſchaeu, gheſtelt was ghelijckſe int verſchaeuwen gheſtaen hadde, deur t'welck het vinden des ooghs lichter viel: Doch ſijn VORSTELICKE GENADE de ſaeck grondelicker inſende, ſeyde hier in onvolcomentheyte te wesen, omdat ons ſulcx inde *daet niet en ontmoet, wantmen inde ſchilderijen ſoodanighe verſchaeulicke formen by de ſchaeuwen t'haerder plaets niet en teyckent.

T'welck wy ſinde in reden gegront te wesen, hebben die voorſtellen verandert, en in die plaets ander gheſtelt ſulcke als hier vooren te ſien is.



We wanted to describe this form of the glass (by means of which his PRINCELY GRACE drew perspective images both of men and of other things in such a way that it seems it may be said in truth that postures of men cannot possibly be drawn so perfectly at sight, without a glass) in order that, if anyone should be desirous of doing similarly, he may take this for example, improving it by anything more suitable that he may find in this respect, because it promotes a thorough knowledge of perspective. I consider it has helped his PRINCELY GRACE to perceive and correct several imperfections that were present in my first conception of this perspective, such as, among other things, the general rule of the finding of the eye of object figures which have neither a side nor a point in the glass, which we had first left untouched, as being obscure.

Further it happened that in the finding of the eye we had described several propositions in which the object figure had been put as given beside its given image, as it had stood in the projection, by which means the finding of the eye was easier. But his PRINCELY GRACE, understanding the matter more thoroughly, said that here was an imperfection, because in practice we do not meet with this, for in paintings such object figures are not drawn beside the images in their places.

And since we saw that this was reasonable, we changed those propositions and replaced them by others such as are to be seen herebefore.

8 Hoofstlick van t'vinden der schaewven deur gbetalen.

Alfoo sijn VORSTELICKE GHENADE verdocht hadde meughelick te sijn, datmen deur ghegheven bekende ghetalen van een verschaelicke form, soude connen segghen hoe groot dat sullen vallen de sijden en houcken van haer schaew: Soo sullen wy, om dattet tot dese * stof dient, en mijns wetens een onghehoorte nieuwe manier van rekening is, eenige voorbeelden beschrijven by sijne VORSTELICKE GHENADE berekent als volght.

TGHEGHEVEN. Laet ABCD een verschaelick viercant sijn inde vloer, hebbende elcké sijde van 2 voer, en de sijde DC voortghetrocken tot E, also dat CE doet 3 voer: Daer na van Eghetrocken rechthouckich op DE delini EF van 4 voer, soo beteyckent F de voer, waer op verdocht wort een sienderlijn rechthouckich op de vloer van 5 voer, en t'glas streckte deur DC rechthouckich op de vloer. TBEGHEERDE. Men wil weten hoe lanck elck van d'ander drie sijden der schaewen sal vallen, mette grootheyte der vierhoucken, oock hoe verre de twee ewewijdeghe sijden van malcanderen sijn.

TBEREYTSSEL. Op dattet ghedacht int werck een gront heb om op te steunen, soo sullen wy tot dien eynde dese ghereetschap maken: Laet FE voortwaert ghetrocken worden tot G, also dat EG als siendermaet, doe de 5 ghegeven voeten der sienderlijn; Daer na syghetrocken DG, CG, AF, snyende DE in H; Daer na HI rechthouckich op DE, en gherakende DG in I, Daer na IK ewewijdeghe met DE, en vallende K in CG, voort KN rechthouckich op DE. Dit soo wesende, de vierhouck I F D, sal schaew sijn des verschaelicken vierhouck ABCD, daer af wy moeten vinden de langde der sijden en grootheyte der houcken, oock mede de lini IH, als langde tuschen de twee ewewijdeghe sijden IK, DC: Daer na sijn AB en IK voortghetrocken tot L, en M, gherakende mette selve punten L, M, de lini FG.

T W E R C K.

Anghesien LF ewewijdeghe is met AD, en AL met DH, soo moet den driehouck ALF, gelijk sijn metten driehouck ADH, en haer

Homologa
latera.

* lijkstandighe sijden everedenich. Daerom segh ick FL 6, geeft

LA 5, wat AD 2? Comt DH

$1\frac{1}{2}$

Die ghetrocken van DE 5 blijft voor HE dats oock voor IM

$3\frac{1}{2}$

DE 5 gheeft EG 5 wat IM $3\frac{1}{2}$ tweede in d'oirden comt voor MG

$3\frac{1}{2}$

Die ghetrocken van GE 5 blijft voor ME, dats oock voor KN, en de begheerde IH

$1\frac{1}{2}$

GE 5, gheeft EC 3, wat MG $3\frac{1}{2}$ derde in d'oirden? comt voor MK

2

Die ghetrocken van IM $3\frac{1}{2}$ derde in d'oirden blijft voor de begheerde IK

$1\frac{1}{2}$

De driehouck IHD heeft drie bekende palen, te weten IH vierde in d'oirden, DH eerste in d'oirden, en den houck IHD recht. Hier me ghesocht d'ander drie onbekende palen, worden bevonden deur het 5 voerstel der platte driehoucken te weten de begheerde sijde ID

$\sqrt{\frac{12}{9}}$

Den begheerden houck IDH

45 tr.

En den houck DIH

45 tr.

Daer toe vergaert den houck HIK 90 tr. comt voor den begheerden houck DIK

135 tr.

8TH CHAPTER, OF THE FINDING OF THE IMAGES BY MEANS
OF NUMBERS

Since his PRINCELY GRACE thought it possible that by means of given known values of an object figure one should be able to say how great will be the sides and angles of its image, we will, because it is useful for this subject matter and to my knowledge is a new method of calculation not yet heard of, describe a few examples calculated by his PRINCELY GRACE as follows.

SUPPOSITION. Let $ABCD$ be a square in the floor, each side of which is 2 feet, and let the side DC be produced to E so that CE is 3 feet. When thereafter from E the line EF of 4 feet is drawn perpendicular to DE , F denotes the foot, on which is imagined an observer's line at right angles to the floor, of 5 feet, while the glass passed through DC at right angles to the floor. **WHAT IS REQUIRED.** It is required to know how long each of the other three sides of the images will be, as also the magnitude of the quadrangles, also how far apart the two parallel sides are.

PRELIMINARY. In order that our thought may have a foundation in the construction on which to base itself, we shall make the following preparations: Let FE be produced to G so that EG , as observer's measure, be the given 5 feet of the observer's line. Thereafter let there be drawn DG , CG , AF , intersecting DE in H ; then HI at right angles to DE and meeting DG in I ; thereafter IK parallel to DE , K falling in CG ; further KN at right angles to DE . This being so, the quadrangle $IKCD$ will be the image of the quadrangle $ABCD$, of which we have to find the length of the sides and magnitude of the angles, also the line IH , the length between the two parallel sides IK , DC . Thereafter AB and IK have been produced to L and M , meeting the line FG in these points L , M .

PROCEDURE

Since LF is parallel to AD and AL to DH , the triangle ALF must be similar to the triangle ADH , and its homologous sides must be proportional to those of the latter. Therefore I say:

FL (6) gives LA (5); what does AD (2) give? This gives for DH	$12/3$
When this is subtracted from DE (5), there remains for HE , <i>i.e.</i> also for IM	$31/3$
DE (5) gives EG (5); what does IM ($31/3$), the second in the list, give? This gives for MG	$31/3$
When this is subtracted from GE (5), there remains for ME , <i>i.e.</i> also for KN and the required IH	$12/3$
GE (5) gives EC (3); what does MG ($31/3$), the third in the list, give? This gives for MK	2
When this is subtracted from IM ($31/3$), the third in the list, there remains for the required IK	$11/3$

The triangle IHD has three known terms, to wit IH , the fourth in the list, DH , the first in the list, and the angle IHD , which is right. When the other three unknown terms are sought herewith, they are found by

the 5th proposition of plane triangles, to wit the required side ID is

$$\frac{\sqrt{50}}{9}$$

The required angle IDH

$$45^\circ$$

And the angle DIH

$$45^\circ$$

When to this is added the angle HIK (90°), the required angle DIK becomes

$$135^\circ$$

GE (5) gives EC (3); what does KN ($1\frac{2}{3}$), the fourth in the list, give?

This gives for NC

$$1$$

The triangle KNC has three known terms, to wit KN ($1\frac{2}{3}$), the fourth in the list, NC (1), the eleventh in the list, and the angle KNC , which is right.

When the other three unknown terms are sought herewith, they are found

by the 5th proposition of plane triangles, to wit, the required side CK is

$$\frac{\sqrt{34}}{9}$$

And the angle KCN is $59^\circ 2'$; when this is subtracted from 180° , there remains for the required angle KCD

$$120^\circ 58'$$

And the angle NKC is $30^\circ 58'$; when this is subtracted from the angle IKN (90°), there remains for the required angle IKC

$$59^\circ 2'$$

END OF PERSPECTIVE.

INDEX

- abridgements (perspective), 869 ff
 absurd number, 460, 533, 738
 ABU KAMIL, 470
 ADRIAEN ANTHONISZ, 3
 ADRIANUS ROMANUS, 474, 767
 aem, 383
 aestimatio ficta, 645
 " vera, 645
 ALBERTI, L. B., 787, 788, 789
 ALEXANDROV, A. D., 125
 Algebra, 329, 463, 549, 681, 682
 ALHAZEN, 786, 789, 790
 Aliza, 473, 618
 AL-KASHI, 385
 AL-KHWARIZMĪ, 464, 467, 468, 470, 474,
 586, 598, 608
 ALLENT, A., 382
Almagest, see PTOLEMY
 Amasias, 470, 475, 594
 ANTHEMIUS, 765
 AP(P)IANUS, P., 23, 378, 751
 APOLLONIUS, 121, 129, 765
 application of areas, 465
 ARCHIBALD, R. C., 17, 24, 123, 124, 380,
 384, 751
 Archimidean spiral, 765, 767
 ARCHIMEDES, 6, 7, 121, 126, 128, 129,
 298, 299, 303, 311, 323, 325, 327, 735,
 764, 767
Architecture (Huyshou), 785, 801
 astrolabe, 773
 astrologer, 393
 astronomical computations, 393
 aulne, 383

 Babylonians, 18
 BALDI, 13, 14
 BALL, W. W. R., 131
 BARBARO, D., 128, 789
 BARENDTZ, W., 8
 BARNARD, F. P., 373
 BAROZZI, F., 766
 BAROZZI DA VIGNOLA, J., 789
 BARTJES, W., 8
 BAS, F. DE, 135
 BAULDE, D., 480
 Bauhütten, 788
 BEECKMAN, I., 8, 801
 beghin, 401, 404, 754
 beginning, 460, 500, 514
 BENEDETTI, G. B., 123, 767, 789
 BERTIE, F., 480

 BEYER, J. H., 379, 380
 BIGOURDAN, G., 383, 384
 binomial, 540, 714 ff, 723
 " , conjoint, 544
 " , disjoint, 544
 BION, N., 429
 BLAEU, W. J., 8
 BLAGRAVE, J., 383
 BLASCHKE, W., 125
 BLOMFIELD, R., 382
 BOETHIUS, 122, 547, 548
 BOMBELLI, R., 5, 128, 377, 459, 460, 462,
 471, 473, 474, 527, 539, 586, 617, 619
 BONCOMPAGNI, B., 14
 BONFILS, E., 375
 BORDA, 384
 BORTOLOTTI, E., 128, 377, 462, 471, 472
 BOSMANS, H., 14, 19, 23, 377, 385, 459,
 463, 474, 648, 656, 737, 740, 756
 BRAHE, T., 766
 BRAUNMÜHL, A. V., 374, 751 ff
 BRESSIEU, M., 752, 753
 BRIGGS, H., 23, 380, 381, 382, 384
 BROERSZ, C. J., 23
 BROESSOON, 23
 BRÜCKNER, M., 128
 BRUNELLESCHI, F., 787
 BÜRGI, J., 379, 380
 bulwark, 811
 BURGER, C. P., 373

 CAJORI, F., 374, 377, 380, 382, 385, 472,
 711
 CALLET, 384
 CALVERT, H. R., 383
 CALVIN, J., 387
 Calvinism, 22
 CAMPANUS, J., 533, 534, 535
 CANTOR, M., 14, 20, 374, 379, 472, 751,
 768, 789
 CARAVAGGIO, M. A., 788
 CARDAN, J., see CARDANO
 CARDANO, G., 5, 17, 123, 471, 472, 473,
 474, 476, 586, 594, 612, 617, 625, 645,
 650, 667, 677, 767
 CARDANO's solution of the cubic
 equation, 471 ff
 CARDANO's transformation methods,
 472, 629
 casus irreducibilis, 5, 473, 617, 618, 619
 catoptrics, 785, 790, 791, 807
 census, 468

center of vision, 815
 CERCEAU, JACQUES DU, 789
 CEULEN, L. V., 3, 7, 21, 23, 476, 736, 737,
 740, 751, 764, 767
 C.G.S. system, 384
 CHARLEMAGNE, 383
 CHARLES THE BALD, 383
 CHOISY, A., 787
 chord, see tables
 circle (perspective), 905
 circumferentor, 765
 CITTERT, P. H. V., 429
 CLAES PIETERSZ., 3
 CLAVIUS, C., 6, 121, 122, 123, 124, 125,
 168, 169, 172, 173, 180, 181, 306, 307,
 378, 379, 380, 459, 752, 753, 754, 755,
 765, 817
 COIGNET, M., 15, 23, 379
 COLEN, COLLEN, see CEULEN
 COMMANDINO, F., 6, 7, 121, 123, 126, 129,
 785, 789, 817
 commencement, see beghin
 complex numbers, 460, 472, 475, 617 ff
 conic section, 909
 continuum, 460, 501, 502, 765
 COOLIDGE, J. L., 766, 788
 COPERNICUS, N., 752, 766
 COPHART, F., 127, 224, 225
 cosa, 509, 681
 COSS, 377, 461
 COSSIST, 463, 471
 COUSIN, J., 789
 COXETER, H. S. M., 128
 CRANMER, T., 387
 CREMONA, L., 793
 croix des mathématiciens, 712 ff
 ,, rectangulaire, 429
 cross-staff, 429
 CRUYNINGHEN, M. V., 133, 134, 135
 CUNDRY-ROLLETT, 131

DANTI, E., 786, 789
 DA VINCI, L., 788
 DAVIS, C. B., 15, 19
 decimal notation, 373 ff, 766
 ,, point, 380, 382
 DE DECKER, E., 8, 23, 24, 378, 381, 382,
 755
 DEE, J., 123
 DEIDIER, 382
 DEL MONTE, G., 8, 764, 765, 773, 775,
 779, 785, 789, 790, 791
 DE MOIVRE, A., 619
 denominator, 517
 DEPAU, R., 385
 derivative, 521, 677
 DESCARTES, R., 5, 8, 461, 583
 detection of errors (perspective), 955
Dialectike, 447

DICKSON, L. E., 562
 dignity, 517
 dime numbers, 401, 407
 DIOCLES, 129
 DIOPHANT, DIOPHANTOS, 459, 467, 476,
 497, 499, 501, 586
 diopter, 765
 dioptrics, 807
 discounting, 20, 22
 distance point, 789
 division of angle, 384
 dixme, 382
 docid, 510
 DODOENS, R., 378
 DOU, J. P., 8, 382, 399
 DOUCET, R., 15
 drawing of curves, 771 ff
 DÜRER, A., 6, 121, 124, 125, 126, 222, 223,
 766, 788, 789, 790, 791, 959
 DU CERCEAU, J., 789
 DUMORTIER, 382
 DIJKSTERHUIS, E. J., 129, 385, 461, 467,
 476, 792, 793

Eertclootscrift, 801
 EHRENBERG, R., 15
 ellipse, 765, 766, 773, 777, 791
 ENRIQUES, F., 476
 equation, l' *Arithmétique* passim
 ,, arbitrary degree, 745
 ,, biquadratic, 649 ff, 686
 ,, cubic, 612 ff, 684, 745
 ,, quadratic, 594 ff
 ,, theory of, 463
 équerre d'arpenteur, 429
 ERATOSTHENES, 129, 767
 EUCLID, passim
 EULER, L., 382, 619, 751
 EUTOCIUS, 6, 128, 129, 130, 302, 303, 734,
 767
 EVANS, A., 13
 exponent, 517, 568
 exponential notation, 462, 471
 extraction of roots, 580
 EYCKE, S. V. D., 21
 eye, 789, 790, 815, 819
 ,, finding of the, 911 ff

false position, see rule of -
 FASOLA, G. N., 788
 FAVRE, A., 383
 FERRARI, L., 5, 123, 473, 518, 586, 650,
 767
 FERRO, S. DEL, 472, 586
 FINK, T., 752, 753
 floor, 781, 815
 floor-line glass point, 817
 FLORIDO, 586
 FOIX, F. DE, 128

foot, 815
 foreshortening, 8, 787
 fortification, 785, 790, 801, 807, 809, 811
 FRANCESCHI, P. DEI, 788
 FRÉART DE CHANTELOU, R., 786
 FRIEDLEIN, G., 766
 FUGGER, I3, 15

 GALILEI, G., 785
 GANDZ, S., 375
 GAUSS, C. F., 475
 GECHAUFF, TH., see VENATORIUS
 GELLIBRAND, H., 384
 GEMMA FRISIUS, 751
 gettons, 373
 GILBERT, Ph., 474, 740
 GINSBURG, J., 375, 378, 379
 GIRARD, A., 19, 378, 382, 459, 472, 475,
 674, 740, 751, 756, 792
 GIROLAMO DI PIERO, 14
 GLAISHER, J. W. L., 380
 glass, 791, 803, 817
 „ base, 817
 „ ground, 791
 „ (for drawing images), 959, 961
 gnomon, 469, 598
 GOUGEON, L., 382
 GOVI, G., 786
 grand parti, 15
 grandeur, 502
 GRAVELAAR, N. L. W. A., 121, 380, 472,
 629, 751, 768
 GRAVESANDE, W. J. 's, 793
 greatest common divisor of two polyno-
 mials, 462, 577
 GREGORY XIII, 459
 GROOT, J. C. DE, 3, 480, 736
 GROTIUS, H., 3
 ground line, 789, 791, 817
 „ plane, 791, 801, 807, 815
 GUIDO UBALDUS, see DELMONTE
 GUNTER, R. T., 765, 766
 GÜNTHER, S., 128, 751

 HAAFTEN, M. V., 20, 21, 23, 381, 385
 HARDY, G. M., 377
 HEATH, T. L., passim
 HEIBERG, J. L., 129, 766, 786
 HENRI II, king of France, 15, 26, 27, 383
 HERON, 129, 130, 300, 301, 467, 723, 765,
 767
 HILBERT, D., 765
 Hindu-Arabic numerals, 4, 373, 381
 HOBBE JACOBSZ., 23
 HOECK, G. V. d., 23
 HOLT, E. G., 788
 HOLTZMANN, W., 459
 homologous terms, 161
 homology, 790, 791
 HONDIUS, H., 792

HONDIUS, J., 8
 HOPE-JONES, W., 767
 HÜGEL, L. F. J., 786
 HUNRATH, K., 376, 380
 HUYGENS, CHR., 8, 384, 792
Huysson, see *Architecture*

 IBN AL-HAITHAM, 786
 ichnography, 787, 801
 image, 815
 images by means of numbers, 963
 imaginaries, 463, 473, 617, 618, 619
 incommensurable quantities, 529, 533,
 712 ff, 723 ff
 interest, compound, 21 ff, 32 ff
 „ , detrimental, 20 ff, 33 ff
 „ , profitable, 20 ff, 33 ff
 „ , simple, 20 ff, 33 ff
 irrationals, 4, 459, 533, 738
 IVINS, W. M., 789

 JAMNITZER, W., 128
 JONG, C. DE, 767
 JOVE, M., 19

 KARPINSKI, L. C., 8, 373, 375, 378, 464,
 468, 469, 470
 KASIR, D. S., 472
 KEPLER, J., 7, 125, 126, 127, 379
 KERN, G. J., 788
 KIELY, E., 765
 KUENINCXBERGE, I. V., see REGIOMONTA-
 NUS

 LANSBERGEN, PH. V., 8, 751, 752, 753, 756
 LAPLACE, P. S., 384
 law of cosines, 753, 754, 755
 „ „ sines, 755
 LAZARD, 382
 LEIBNIZ, G. W., 14, 765
 LEONARDO DA VINCI, 788
 LEONARDO OF PISA, 14, 17, 123, 124
 linea terrea, 789
 logarithms, 756
 LONDE, DE LA, 382
 LORIA, G., 472, 789, 790, 791, 793
 loxodrome, 7, 9
 LYTE, H., 378, 383

 MACDONALD, W. R., 381
 MAGINI, A., 379
 magnitude, 502
 MAHOMED OF BAGDAD, 123
 MANITIUS, K., 374, 766
 MARLO, MAROLOIS, S., 8, 792
 MASACCIO, T., 787
 MASTERSON, T., 23, 374
Mathematical Theses, 536, 738
 MAUPIN, G., 474

- MAURICE, PRINCE OF ORANGE, 3, 7, 8,
379, 751, 756, 767, 768, 769, 785, 791,
792, 795, 801, 811, 829, 959, 960, 963
- MAUTZ, O., 379
- MAZINGHI, A., 14
- mazzocchio, 787
- mean proportional, 567, 724
- mechanical operation, 790, 839, 845, 847
- MEDICI, 13
- meeting line, 817
" point, 817
- MEHMKE, R., 384
- MENELAOS, 755
- MENGER, K., 6
- MENNHER, V., 15, 23
- MERCATOR, R., 9
- METIUS, 3
- MEURS, J. OF, 375
- MICHEL, H., 773
- MICHELANGELO, 788
- MIKAMI, Y., 385
- mirrors, 786
- MÖBIUS, K. F., 755
- MOHAMMED IBN MUSA, see AL-KHWARIZMĪ
- moins de moins, 460, 617
- MOIVRE, A. DE, 619
- Molens, Van de*, 7
- MONGE, G., 787, 788
- MONTAIGLON, A. DE, 789
- MONTE, G. U. DEL, see DELMONTE
- MONTROIAL, J. DE, see REGIOMONTANUS
- MORGAN, M. H., 787, 801
- MORREN, TH., 792
- MOUTON, G., 384
- multinomial = polynomial, 716 ff
- MURIS, J. DE, see MEURS, J. OF
- NAGEL, A., 373
- NAPIER, J., 23, 376, 380, 381, 382
- negative roots, 471, 475, 642 ff, 672
- NEUGEBAUER, O., 467
- NICOLAAS PIETERSZ., see PETRI
- NICOMACHUS, 122
- Nile, 27
- nominator, 568
- NORTON, R., 24, 378, 387, 447, 451
- number concept, 460, 501
- numbers; absurd, 460, 738
" algebraic, 462, 519
" arithmetical, 514, 519
" complex, 460, 617, 618, 619
" composite, 503
" geometrical, 461, 509, 519, 528
" imaginary, 463, 617, 618, 619
" inexplicable, 460, 738
" irrational, 460, 738
" irregular, 460, 738
" negative, 460, 642 ff, 672
" prime, 503
" surd, 460, 738
- NUNES, P. G., 463, 474
- observer's line, 811, 815
" "s measure, 811, 815
- OCKENDEN, R. E., 378
- OMAR KHAYYAM, 472
- D'OOGHE, M. L., 122
- Optique, Optics*, 785, 792, 799
- optics, 785, 807
- Opus Palatinum*, 4, 375, 752
- ORE, O., 472
- orthodrome, 9
- orthographic projection, 787, 788
- orthography, 787, 801
- OTHO, L. VALENTINUS, 752
- OUGHTRED, W., 382
- OZANAM, J., 382
- π , 767
- PACIOLI, PACIUOLI, L., 14, 17, 18, 123,
128, 472, 474, 535, 586
- PAGNINI, G. F., 13
- PANOFSKI, E., 788
- PAPINI, G., 787
- PAPPERITZ, E., 793
- PAPPUS, 6, 126, 766
- parabola, 767
- parallactic instrument, 766
- parallelogram (perspective), 877 ff, 917,
933
- PASCAL, B., 559
- PEGOLOTTI, F. B., 13, 17, 19
- PÉLERIN, J., 789
- PENA, J., 786
- perch, 427
- perspective, 807
" , fundamental theorem of,
790, 825
" , inverse problem of, 790, 791,
911
- PETRI, N., 3, 23
- PEURBACH, G., 374, 378, 752
- PICARD, J., 384
- picture plane, 791
- PIERO DEI FRANCESCHI, 788
- PIERRE DE SOVONNE, 23
- PITISCUS, B., 380, 751, 753, 755
- PLANCIUS, P., 3, 8
- plane network, 263 ff
- planispheres, 807
- PLATO, 129, 734
- plinthid, 511
- plus de moins, 460, 617
- POGO, A., 384
- POINSOT, L., 128
- polygons, 767
- polyhedra, see solids
- POST, W. C., 21
- postponed quantities, 633, 677, 688
- POT, 383

POUDRA, 786, 789, 793
 prime, 401, 405
 prime vertical, 815
 principal, 30 ff
 primitive quantity, 521
 PROCLUS, 766
 projection, central, 785
 " , orthographic, 787, 788
 proportion, 143, 155, 388, 767
 " , alternated, 143, 165
 " , arithmetical, 546, 739
 " , binary, 157
 " , changed, 143
 " , continuous, 159
 " , discontinuous, 161
 " , duplicate, 169
 " , geometrical, 546, 739
 " , harmonic, 546, 739
 " , inverted, 143, 163
 " , irrational, 153
 " , irregular, 143
 " , perturbed, 143, 167
 " , positive, 143
 " , regular, 143
 " , ternary, 157
 " , transformed, 143, 163
 " , triplicate, 169
 PTOLEMY, 374, 423, 711, 751, 766, 786, 789
 " s rods, 766
 punctum concursus, 790, 791
 " principale, 789
 PYTHAGORAS, 429

quadrangle (perspective), 877 ff, 911 ff
 quadrilateral, 911 ff
 quantity, 502, 583
 quantités postposées, 633, 677, 688
 querna da bis, 594

RAA, F. J. G. TEN, 135
 radicals, 559
 radix, 468
 RAFAEL, 788
 RAMUS, P., 3, 509
 ratio, 143, 145, 151, 710, 711
 " , arithmetical, 151, 546
 " , binary, 147, 157
 " , changed, 143
 " , compound, 151
 " , duplicate, 167
 " , equal, 147
 " , inverted, 143, 155
 " , irrational, 153
 " , irregular, 143
 " , perturbed, 143, 155
 " , positive, 143
 " , rational, 149
 " , regular, 143
 " , simple, 151, 546

ratio, submultiple, 151, 546
 " , sub-superparticular, 122, 151, 546
 " , sub-superpartiens, 122, 151, 546
 " , superparticular, 122, 151, 546
 " , superpartiens, 122, 151, 546
 " , transformed, 143, 153
 " , triplicate, 167, 169
 ray, 817
 rechtcrays, 429, 765
 RECORDE, R., 387
 reduction, 587, 589
 reflection, 785, 786, 799
 refraction, 785, 786, 791, 797, 799
 REGIOMONTANUS, J., 374, 378, 423, 500,
 501, 752, 753, 754, 755
 regula, see rule
 regula Aliza, 473, 618
 RENE, G., 788
 res, 509, 682
 RHAETICUS, G. J., 4, 752
 rhumb line, 9
 RICCARDI, P., 793
 RIESE, A., 23, 537, 539
 RISNER, F., 786
 RIVARD, 382
 ROBERT OF CHESTER, 464
 rod, roede, 383, 427
 roersouckers, 399
 ROHN, K., 793
 ROMANUS, A., see ADRIANUS ROMANUS
 root, 461, 517, 524, 738
 roots, complex, 617, 618, 619
 " , negative, 642 ff, 672
 ROOVER, R. DE, 14
 ROSEN, F., 464, 468, 469
 ROZENFELD, B. A., 385
 RUCELLAI, G., 14
 RUDOLFF, C., 23, 375, 376, 532, 538, 539
 RUFFI, 384
 rule of algebra, 681
 " , alligation, 711
 " , company, 711
 " , double false position, 124, 567,
 711
 " , false position, 121, 124, 206, 207 ff,
 462
 rule of fellowship, 711
 " , five, 711
 " , mixture, 711
 " , three, 581, 588, 711
 saemlijn, 817
 saempunt, 791, 817
 SANFORD, V., 385
 SARTON, G., 14, 374, 375, 380, 384, 385,
 787
 scenographia, 785, 787, 790, 792, 799, 801
 SCHEFFERS, G., 793
 SCHMIDT, F., 765
 SCHÖNBERGER, L., 766

SCHOOTEN, F. V., 7, 382, 753, 765
 SCHWENTER, D., 755
 SCULTETUS, A., 751
 second, 401; 405
 SEMS, J., 379, 380, 382, 399
 SERENUS, 799
 SERLIO, S., 789, 790, 791
 sexagesimal fractions, 374
 shadow construction, 790
 side, 509
 similar association, 165
 sinus, see table
 sinus versus, 753
 SIRIGATI, L., 789
 SMITH, C. S., 383
 SMITH, D. E., 124, 374, 375, 380, 385, 464
 SMITH, J., 387
 SNEL, see SNELLIUS
 SNELLIUS, R., 3, 7
 SNELLIUS, W., 7, 9, 767
 solids, augmented regular, 124 ff, 223 ff
 " , regular, 124 ff, 223 ff, 766, 790
 " , truncated regular, 223 ff
 " , semiregular, 124 ff, 766
 sphere, 790
 spherical triangles, 753, 755, 756
Spiegelschaeuwen, 785
 stage, 787, 790
 STAMPIOEN DE JONGE, J. J., 756
 STEVIN, H., 801
 STIFEL, M., 5, 470, 474, 475, 554, 594
 STRONG, E. W., 765
 STRUIK, RUTH, 476
 sun-dials, 807
 surd, 4, 460, 532, 738
 sursolidum, 531
 surveyor's cross, 429, 765
 SYMON JACOB VAN COBURG, 23

 tables of chords, 374
 " , interest, 56 ff
 " , sines, 374, 754
 " , tangents, 374
 TACQUET, A., 377
 TANNERY, P., 476
 TARTAGLIA, N., 17, 18, 23, 123, 472, 586,
 612, 616, 632, 765, 767
 TAYLOR, E. G. R., 3; 387
 tenth progression, 403
 tercia puncta, 789
 term, 145
 TERQUEM, O., 382
 theodolite, 765
 THEODOSIUS, 754, 755
 THEON OF ALEXANDRIA, 754, 785, 786
Theses, Mathematical, 536, 738
 TIMERDING, H. E., 376
 TOH, L. F., 131

Traité des incommensurables grandeurs, 5, 6, 712
Traité des triangles, 751
 trapezium, 921
 trapondt, 766
Treatise on incommensurable magnitudes,
 459, 476, 712
 TRENCHANT, J., 4, 14 ff, 26, 27, 44, 45, 84,
 85
 triangle (perspective), 949
 trigonometry, 9, 751
 triquetrum, 766
 TROPFKE, J., passim
 truncated regular solids, see solids
 two mean proportionals, 129, 567

 UCELLO, P., 787
 ULUGH BEG, 385
 unity, 460, 494, 738

 vanishing point, 787, 817
 VASARI, G., 787
 VAUBAN, S. DE, 382
 VELDE, A. J. V. D., 382
 VENATORIUS, 6, 128
 VER EECKE, P., 129, 766, 786, 791
 VERHAEGHE, F. T., 382
 verification (perspective), 869
 VERROOTEN, J., 384
 verschaeuwlyck punt, 803
 vertical plan, 809
 VIATOR, 789
 VIÈTE, F., 23, 375, 376, 384, 474, 753,
 755, 756
 VIGNOLA, J. B. DE, 789
 VIOLA, T., 789
 VITELLIO, see WITELLO
 VITRUVIUS, M., 787, 790, 801
 VLACQ, A., 381, 384
 VOOYS, C. G. N. DE, 399
 VREDEMAN DE VRIES, H., 792

 WAARD, C. DE, 801
 WALLER ZEPER, C. M., 14, 17, 18, 19, 23,
 24
Wanschaeuwing, 785, 791, 796
 WEBER, H., 463
Weeghconst, 736
 weights and measures, 383, 427 ff
 WELSER, 13
 WENTZEL, M., 17, 23
 WEYER, S. V. D., 382
 WEYMOUTH, F., 378
 WHITE, J. D., 380
 WIELEITNER, H., 462
 WIENER, C., 793
 WINTERBERG, C., 128, 788
 WITELLO, 786, 789, 790
 WITT, R., 24
 WOEPCKE, 123
 WOLFF, G., 788

WREN, C., 384
WRIGHT, E., 380
WRIGHT, E. M., 377
WIJDENES, P., 384
Wysentyt, 767
XYLANDER, 459, 476

YANG HUI, 385
yard, 429

ZAMBERTI, B., 6, 533, 534, 535, 536, 817
ZEUTHEN, H. G., 467
ZINNER, E., 403
ZUCCARO, F., 788

1944

1944

TABLE OF CONTENTS

FIRST PART

The Mathematical Works of Simon Stevin	1
General Introduction	3
Tafelen van Interest. Tables of Interest	11
Introduction	13
Tafelen van Interest, Midtsgaders de Constructie der selve	25
Supplement (1590)	112, 113
Problemata Geometrica	119
Introduction	121
Problematum Geometricorum Libri V	133
Problemata Geometrica	135
De Thiende. The Tenth	371
Introduction	373
De Thiende. Dime	386, 387

SECOND PART

L'Arithmétique. Arithmetic	457
Introduction	459
Le Premier Livre d'Arithmétique. First Book	494
Le Second Livre d'Arithmétique. Second Book	552
La Pratique d'Arithmétique	709
Appendice Algébrique	740
Selections from Wisconstighe Ghedachtenissen, Mathematical Memoirs	747
De Driehouckhandel. Trigonometry	749
Introduction and Summary	751
De Meetdaet. The Practice of Measuring	763
Introduction	764
De Deursichtighe. Perspective	783
Introduction	785
Eerste Boeck der Deursichtighe. Van de Verschaeuwing	798
First Book of Optics. Of Scenography, commonly called Perspective	799
Index	954
Corrigenda et Addenda	976

*Corrigenda et Addenda**First part*

- p. 6 1.36 For: oportounity read: opportunity.
p. 385 1.8 For: Bey read: Beg.
For: 1429 read: 1429 (?)
1.10 For: Rosenfel'd read: Rosenfel'd and A. P. Yuškevič.
For: 6. 62 read: p. 62.
p. 387 1.37 For: E. J. R. read: E. G. R.

Second part

- p. 788 1.25 For: Zuccari. Zuccari read: Zuccaro. Zuccaro.
p. 789 1.9 For: punctus principalis read: punctum principale.