

# Les géodésiques des métriques finslériennes et pseudo-finslériennes faibles de basse régularité

Présentée le 21 avril 2023

Faculté des sciences de base  
Groupe Troyanov  
Programme doctoral en mathématiques

pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences

par

**Guillaume BURO**

Acceptée sur proposition du jury

Prof. C. Hongler, président du jury  
Prof. M. Troyanov, directeur de thèse  
Prof. A. Papadopoulos, rapporteur  
Prof. C. Vernicos, rapporteur  
Prof. G. Moschidis, rapporteur

---

*Cette thèse est dédiée à Norbert Raboud*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>Mots-clés</b>	<b>7</b>
<b>Résumé</b>	<b>8</b>
<b>A panorama of the thesis</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>16</b>
<b>1 Considérations générales sur les espaces métriques finslériens</b>	<b>32</b>
1.1 Espaces métriques faibles et normes de Minkowski faibles . . . . .	32
1.1.1 Espaces métriques faibles . . . . .	32
1.1.2 Normes de Minkowski faibles . . . . .	35
1.2 Espaces de longueur et métriques finslériennes faibles. . . . .	40
1.2.1 Espaces de longueur . . . . .	40
1.2.2 Métriques finslériennes faibles . . . . .	44
1.2.3 Différents points de vue sur la géométrie finslérienne . . . . .	47
<b>2 Généralisations et unification des théorèmes de Busemann-Mayer-Kobayashi pour les espaces Finslériens de basse régularité</b>	<b>55</b>
2.1 Théorème de convexification de Busemann-Mayer-Kobayashi . . . . .	55
2.1.1 Remarque sur les hypothèses du théorème . . . . .	64
2.2 Dérivée métrique et longueur intrinsèque . . . . .	64
2.2.1 Relations entre la dérivée métrique de Busemann-Mayer et celle de Ivanov . . . . .	68
2.3 Régularité des géodésiques métriques en dimension 2 . . . . .	69
2.3.1 Pseudo-cercles de Busemann-Mayer . . . . .	70
2.3.2 Preuve de la régularité des géodésiques . . . . .	72
2.3.3 Preuves des résultats techniques . . . . .	76
<b>3 Considérations générales sur les espaces métriques pseudo-Finlériens</b>	<b>81</b>
3.1 Espaces-temps métriques . . . . .	82
3.1.1 Pseudo-normes de Minkowski . . . . .	83
3.2 Variétés pseudo-finlériennes . . . . .	87

TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.1	Point de vue de géométrie convexe sur la géométrie pseudo-finslérienne . . . . .	90
3.2.2	Longueur intrinsèque . . . . .	97
3.2.3	Autres travaux . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Théorèmes de type Busemann-Mayer-Kobayashi dans le contexte pseudo-Finslérien</b>	<b>98</b>
4.1	Théorème de concavification de type Busemann-Mayer-Kobayashi . . . . .	98
4.2	Longueur intrinsèque pseudo-finslérienne . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Géodésiques spéciales</b>	<b>110</b>
5.1	Géodésiques Spéciales . . . . .	110
5.2	Exponentielle spéciale . . . . .	115
5.3	Théorème de Hopf-Rinow pour les géodésiques spéciales . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Géométrie systolique Finslérienne</b>	<b>122</b>
6.1	Le disque finslérien de Cossarini-Sabourau . . . . .	124
6.2	La sphère de Cossarini-Sabourau et son ratio systolique . . . . .	127
	<b>Conclusion et questions</b>	<b>134</b>
	<b>Index</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>

# Remerciements

J'aimerais commencer par remercier Marc Troyanov, mon directeur de thèse. Quand je me suis engagé dans cette thèse, il est venu me voir et m'a dit «Tu verras, la relation entre un directeur de thèse et son doctorant, c'est un peu plus qu'une relation patron-employé»... Et comment ! En plus des grands moments de recherche, de belle mathématique, de débats divers sur la philosophie, la politique, la situation internationale et l'état général du monde, je peux dire que nous avons vécu beaucoup de moments forts d'amitié, qui j'en suis certain dureront pour toujours. Ce doctorat fut fabuleux, et je pense que c'est en grande partie grâce à toi Marc, donc merci beaucoup pour tout, et vivement les collaborations et autres grandes discussions futures. Merci aussi à Elisabeth d'avoir soutenu Marc et donc moi ! J'aimerais ensuite remercier les rapporteurs, qui sont Athanase Papadopoulos, Constantin Vernicos et Georgios Moschidis ainsi que Clément Hongler, le président du jury, pour leurs remarques avisées et pour les conseils pour mon avenir académique le soir de ma soutenance.

Merci à Maroussia pour le soutien moral, les aides administratives (en particulier la réservation de salles...) et les heures passées à faire des grandes thèses absolument non mathématiques dans son bureau ou à Satellite. Merci également à Anne et à Anna, qui en tant que secrétaires de l'école doctorale m'ont soutenu et bien aidé dans certaines de mes luttes administratives telles que l'obtention de crédits. J'aimerais aussi remercier toutes les secrétaires de l'institut de math, dont Sara, Ariane, Valérie, Marcia, Samantha, et pas Virginie, qui n'est plus en maths.

J'aimerais maintenant remercier les collègues-amis ! Tout d'abord le gang des numériciens : Léo, Paride, Sam, Maude et Emile qui sont fabuleusement dirigés par Marco. Merci pour tous les cafés et toutes les bières ! Ensuite l'équipe de topologues, Adélie, Célia, Jérôme, Samuel, Kelly et Nicolas. Merci quand même à Virgine, même si elle est partie au Rolex. Merci à Gauthier, compagnon de midi ! Je n'oublie pas les collègues du groupe Troyanov ! Merci à Bruno et Marcos d'avoir supporté mes extravagances en partageant le tableau noir ! Merci à Adrien pour la découverte des chants cosaques, du métal galactique et qu'il est possible de faire une thèse ici. Merci à Davide pour les gros mots en italien et un grand merci à Louis sans qui j'aurais pas fait un doctorat et il manquerait le chapitre 5 de cette thèse. Merci aussi à David pour les clopes, les cafés, les bières et les "Non, Anne n'est pas là aujourd'hui". Merci à Orane pour les rires et m'avoir supporté ! J'aimerais encore remercier les copains du CMS, Sam (j'ai déjà parlé de lui non ?), Mathieu et Simon (j vous promets, un jour on ouvrira un bar) et François qui gère tous ces fous. J'aimerais remercier aussi tous les étudiants que j'ai eut en assistanat, avec qui j'ai bu des verres à Sat et avec lesquels j'ai toujours eut du plaisir à causer maths et autre ! Merci d'ailleurs à tous ces gens avec qui j'ai bu des verres à Sat, comme Sam par exemple (encore lui !). Merci aussi à tout ceux qui ont fait que ma vie sur ce campus soit agréable tels que les femmes de ménage, les gens qui servent les repas, les vendeuses du Négoce et les employés de toutes ces entreprises pas forcément visibles mais sont indispensables au bon déroulement d'une thèse à l'EPFL. Passons au milieu plus privé. J'aimerais remercier toute ma famille, mes parents pour le soutien indéfectible, toujours là, tranquilles, même

## TABLE DES MATIÈRES

---

dans les moments difficiles, toujours prêts à rattraper le coup si je me vautre et à fêter le coup si je réussis. Je ne serais pas allé très loin sans des parents comme vous. Merci à Jérémie ! Je ne saurais jamais dire à quel point je suis content que tu lises ces lignes, et à quel point je suis heureux que tout aille bien. Quand tu liras ceci, Heidy aura peut être accouché, qu'est ce que je me réjouis ! Merci à Heidy et merci à [ ] (Baby Buro dont je ne connais pas encore le prénom. En 4 lettres il parait !). Merci à Grand-Père et Grand-Mère chez qui j'aime tant aller dîner quand je suis à Salins et qui me faites toujours me sentir si bien. Merci à Bertrand, le docteur de la famille, pour ces conseils avisés sur le monde académique et pour les discussions "d'étudiants". Un grand merci (et un bec !) à Noémi pour l'amour et le soutien pendant cette année de rédaction, pour ces soirées au chalet et ces moments fabuleux dans la maison du Chapitre. Pas sûr que j'aurais tenu la pression si t'avais pas été là dans la cuisine quand je sortais de la chambre avec ma tête de hiboux. Je te miom ! Merci à Manoa pour le soutien moral par le catch, la confiance et l'intérêt pour ce truc bizarre que je fais, ça me fait tellement de bien de vous avoir dans ma vie vous deux ! Merci à Pascale pour les choux farcis et la surveillance de l'état de mes chaussures avant les moments importants. Merci enfin à Milenko, Dimitri et Milena, je suis content de faire (un peu) partie de votre famille ! Merci aux copains ! Cédric, pour les grandiloquentes soirées de délires mathématico-physico-philosophico-ethilo-intello-bombeatomico-culinaires à la Grenette ou dans tout lieu pourvu de papier, de bière et de nourrissement en tout genre. Merci à Julien pour les picoleries, pour les délires pour les soirées nus dans la piscine (J'ai pas osé mettre merci à Julien et Laeti puis mettre "soirée nus" afin de lever les ambiguïtés, mais merci à Laeti aussi !). Merci à Jordan pour les scandales, à Ozan et Karni pour les soirées Rakì et à toute la fine équipe du collège. Merci à GroJo pour les doubles entrecôtes, à Sam (oui, encore le même !) pour ses délires mystiques. Merci aussi à Virginie, qui est partie du bâtiment MA, mais qui reste une amie. Un grand merci à Valentin et Tabitha pour les farameux moments de canards et le soutien moral dans toutes les situations, à grand coups de bières sur canapé rouge, de tours en Opel et de Rhythm'n'Blues. Merci à Jonathan et Magaly pour (le vin !) les dimanches à Chamoson et l'amitié de longue date ! Merci aux copains de la musique, le comité de Trad Jazz Corners que je revois chaque mois avec le même plaisir, aux Doors Revival, qui m'ont connu quand j'avais pas encore ma matu et au Moonlight Gang. Sans tous ces concerts et ces aventures, ça n'aurait pas été possible non plus de pouvoir être bien pour faire cette thèse. Merci au copains de la plongée, Gatien le docteur instructeur, Kostas le binome psychanalyste, Nico le juriste aux gros poumons, Robin le Physicien Diver et Chris le tireur de portraits pour ces merveilleuses plongées qui m'ont fait tant de bien. Merci aux "têtes de porc" Adrien, Lionel et Richard pour l'échange interculturel Vaud-Valais et pour les nombreux délires dans la cité lausannoise. Merci à mes colocs de St Roch 13, l'appartement de l'absurde peuplé par Cloé (qui a tenu bien longtemps), Azélie, Clémence, Prisca, Gagus, Stiff, Lucas, Jessi, Thibault et tous les gens de passage ! Merci aux "voisins" Adélie et Forrest, c'était une chouette période quand vous étiez là ! Merci à Bertrand-François pour les belles soirées à Préverenges. Merci à Philippe et Virginie du Cygne, ainsi qu'à toute leur équipe qui m'ont nourri et abreuvé maintes fois en me laissant à mes pérégrinations spatio-temporelles sur leurs sets de tables.

Finalement, merci aux mathématiques. Sans les maths je ne serais pas du tout la même personne, je n'aurais pas le même esprit, la même vision du monde, le même romantisme dans mon rapport à la nature et le même amour de l'esthétique. Merci aux penseurs, aux chercheurs et aux découvreurs qui ont posé les briques sur lesquelles je peux faire tenir le grain de sable qu'est cette thèse.

*"Gloire à celui qui n'ayant pas d'idéal sacro-saint,  
Se borne à ne pas trop emmerder ses voisins."*

**-Georges Brassens**

# Mots-clés

Géodésiques, Finsler, métrique finslérienne, géométrie métrique, espace métrique, distance, distance projective, distance de Minkowski, norme de Minkowski, jauge de Minkowski, espace de longueur, longueur intrinsèque, longueur finslérienne, convexe, champ de convexes, dérivée métrique, métrique convexifiée, Busemann-Mayer, espace-temps métrique, pseudo-distance, causalité, pseudo-norme de Minkowski, espace de Lorentz-Minkowski, jauge de Lorentz-Minkowski, champ de cônes, cône de causalité, convexe fondamental, métrique pseudo-finslérienne, longueur pseudo-finslérienne, métrique fortement convexe, géodésiques spéciales, exponentielle spéciale, quasi-Thalès, Théorème de Hopf-Rinow, systole, sphère de Calabi-Croke, sphère de Cossarini-Sabourau, ratio-systolique finslérien.

**Classification AMS :** 53B40, 53C22, 53C60.



# Résumé

Ce travail porte sur l'étude des géodésiques des métriques finslériennes faibles de basse régularité en passant par différents points de vue sur la géométrie et en déduisant des résultats liés à ces points de vue. Nous commençons par revisiter, unifier et généraliser les résultats d'un article de Herbert Busemann et Walter Mayer de 1941 revu partiellement par Shoshichi Kobayashi, puis en tirons les conséquences et montrons que quelques uns de ces résultats peuvent s'adapter à une géométrie de type espace-temps.

Nous définissons ensuite une notion de "géodésiques spéciales" et une application exponentielle spéciale pour les métriques finslériennes faibles, permettant de démontrer un théorème de Hopf-Rinow adapté aux métriques finslérienne faibles de basse régularité. Les résultats de Hopf-Rinow spécial, combinés au résultats de Busemann-Mayer, permettent de construire des métriques satisfaisant un théorème de type Hopf-Rinow en partant d'un champ d'ouverts étoilés sur une variété différentiable.

La thèse se termine par la construction concrète d'une métrique finslérienne faible de faible régularité sur la sphère de dimension 2 et en étudie le flot des géodésiques spéciales afin de comprendre des propriétés systoliques remarquables de cette métrique.

# Abstract

This work is about the study of geodesics of weak Finsler metrics of low regularity viewed from various points of view on geometry and deducing results coming from these points of view. We begin by understanding, unifying and generalising results from a 1941 article by Herbert Busemann and Walter Mayer and partially reviewed by Shoshichi Kobayashi. We discuss some consequences of these results and show that some of them can be adapted to Finsler space-time geometry.

We then define “special” geodesics and a “special” exponential map for weak Finsler metrics, allowing us to prove a Hopf-Rinow type theorem for weak Finsler metrics of low regularity. The combination of the special Hopf-Rinow’s theorem and the Busemann-Mayer theorem, say that, given a field of star-shaped open sets on a differentiable manifold, we can construct some metrics that satisfy a Hopf-Rinow type theorem on that manifold.

We end this thesis by constructing a weak Finsler metric of low regularity on the two dimensional sphere with some remarkable systolic properties.

# A short description of the thesis

## Work on Busemann-Mayer's theorems

This section focuses on the Busemann's point of view of Finsler geometry, which is very synthetic. There are explanations, generalisations and unifications of Busemann-Mayer-Kobayashi theorems [Kob91], [May41]. We start with a few definitions.

**Definition 1** : Let  $M$  be a differentiable manifold. An upper semi-continuous functional  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  is a *weak finsler metric* if it satisfies the following conditions :

1.  $F(x, v) \geq 0$  for all  $(x, v) \in TM$
2.  $F(0) = 0$  and  $F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v)$ , for all  $\lambda > 0$  and  $(x, v) \in TM$ .
3.  $F(x, v + w) \leq F(x, v) + F(x, w)$  for all  $(x, v), (x, w) \in TM$ .

**Definition 2** :

- Let  $X$  be a finite dimensional real vector space and  $\Omega$  be a star shaped domain around  $0 \in X$ . The *Minkowski gauge* of  $\Omega$  is the functional  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  defined as

$$\Phi(x) = \inf \{t \geq 0 \mid x \in t\Omega\}.$$

Note that when  $\Omega$  is a convex set, the Minkowski gauge of  $\Omega$  is a weak norm on  $X$ .

- Let  $M$  be a differentiable manifold. A subset  $\Omega \subset TM$  is a field of star shaped domains around  $0 \in TM$  if for every  $x \in M$ , the set  $\Omega_x = \Omega \cap T_x M$  is a star shaped domain around  $0$ .
- Let  $M$  be a differentiable manifold and  $\Omega \subset TM$  a field of star shaped domains around  $0 \in TM$ . The Minkowski gauge of  $\Omega$  is the functional  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that for all  $x \in M$ , the function  $\Phi(x, -) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}_+$  is the Minkowski gauge of  $\Omega_x$ .  
Note that when  $\Omega_x$  is convex for all  $x \in M$ , the Minkowski gauge of  $\Omega \subset TM$  is a weak finsler metric.
- Given a Minkowski gauge  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , we define the distance between two points  $x, y \in M$  as

$$d_\Phi(x, y) = \inf \int_a^b \Phi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

where the infimum is taken over all curves  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  such that  $\gamma(a) = x$  and  $\gamma(b) = y$ . When a weak finsler metric  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  is given, the distance  $d_F$  is defined the same way.

**Theorem A** (Theorem 2.3) : Let  $M$  be a differentiable manifold and  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}$  the Minkowski gauge of  $\Omega$ , a field of star shaped domains around  $0 \in TM$ . Consider  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  the Minkowski gauge of the convex

---

hull of  $\Omega$ , denoted by  $\text{Conv}(\Omega)$  (which implies that  $F$  is a weak Finsler metric). Then for all  $x, y \in M$ ,

$$d_{\Phi}(x, y) = d_F(x, y).$$

The next theorem is about the equality between the Finsler length and the intrinsic length and about the metric derivative.

**Definition 3 :**

- Given a weak Finsler manifold  $(M, F)$  and a continuously differentiable curve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , the *Finsler length* of  $\gamma$  is

$$\ell_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

and the *intrinsic length* of  $\gamma$  is

$$\ell_{d_F}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d_F(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right\}$$

where  $d_F$  is the Finsler distance, and the supremum is taken over all partitions  $\{t_i\}_{i=0}^n$  of  $[a, b]$ .

**Theorem B** (Theorem 2.16) : *Let  $M$  be a differentiable manifold endowed with a Lipschitz weak Finsler metric  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Then for all continuously differentiable curves  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , we have*

$$\ell_F(\gamma) = \ell_{d_F}(\gamma)$$

**Theorem C** (Theorem 2.21) (Metric derivative) : *Consider a chart  $\mathcal{U} \subset M$  of the differentiable manifold  $M$  and let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$  be two sequences such that  $x_n \neq y_n$  that are converging to the same point  $x_0 \in \mathcal{U}$ . Suppose that  $\xi_n = \frac{y_n - x_n}{|x_n - y_n|}$  converges to a vector  $\xi$ , then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{|y_n - x_n|} = F(x_0, \xi).$$

We can write this a weaker result, that is more about metric derivative in the usual way :

**Theorem C'** (Theorem 2.23 (Metric derivative (bis))) : *Let  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathcal{U}$  an arc-length parametrized curve that is differentiable at 0, then*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_F(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|} = F(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)).$$

**Definition 4 :** Let  $(M, F)$  be a weak Finsler manifold. A curve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  is a *metric geodesic* if for all  $t_0 \in [a, b]$  there exists  $\varepsilon > 0$  such that for all  $r < s < t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , we have

$$d(\gamma(r), \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) = d(\gamma(r), \gamma(t)).$$

The next theorem is a review of what is done in the article of Busemann-Mayer [May41]. In this theorem, the manifold has dimension 2.

We moreover suppose that the Finsler structure is strictly convex and Lipschitz.

---

**Theorem D** (Theorem 2.40) : *Let  $(M, F)$  be a two dimensionnal strictly convex and Lipschitz weak Finsler manifold then the metric geodesics are continuously differentiable.*

## Timelike Busemann-Mayer-Kobayashi

In this part of the thesis, we proved Busemann-Mayer type theorems in the timelike setting.

### Definition 5 :

1. Let  $X$  be a finite dimensional real vector space. A *Minkowski pseudo-norm* is a functional  $f$  defined on an closed convex and proper cone of apex 0, called  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$  (proper means that there exist a supporting hyperplane of  $\mathcal{C}$  through 0 that contains only 0) we call such a cone a *causal cone*. Moreover,  $f$  must satisfy
  - Positivity :  $f(x) \geq 0$  for all  $x \in \mathcal{C}$  and  $f(x) > 0$  for all  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$  and  $f(0) = 0$ .
  - Positive homogeneity :  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  for all  $x \in \mathcal{C}$  and all  $\lambda > 0$ .
  - Concavity :  $f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$  for all  $x, y \in \mathcal{C}$  and all  $0 < t < 1$ .
2. Given a manifold  $M$ , a *cone field*  $\mathcal{C} \subset TM$  is an closed subset of  $TM$  such that  $\mathcal{C}_x = \mathcal{C} \cap T_x M$  is a convex an proper cone of apex 0.
3. Let  $M$  a differentiable manifold and a cone field  $\mathcal{C} \subset TM$  . A *weak pseudo-Finsler metric*  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous functional such that for all  $x \in M$ ,  $f(x, -) : \mathcal{C}_x \rightarrow \mathbb{R}$  is a Minkowski pseudo-norm.
4. Let  $M$  a weak pseudo-Finsler manifold which causal cone is denoted by  $\mathcal{C}$ . A continuously differentiable curve  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  is called a *causal curve* if for all  $t \in [a, b]$ , we have that  $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{C}_{\sigma(t)}$ . We call  $\sigma$  a *strictly causal curve* if  $\dot{\sigma}(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma(t)}$ .
5. Let  $(M, \mathcal{C}, f)$  a weak pseudo-Finsler manifold. Given two distinct points  $x, y \in M$ , we say that  $x \preceq y$  if there exist a causal curve between  $x$  and  $y$  and that  $x \prec y$  if there exist a strictly causal curve between  $x$  and  $y$
6. Let  $(M, \mathcal{C}, f)$  a weak pseudo-Finsler manifold and two points  $x, y \in M$  such that  $x \preceq y$ , then the pseudo-distance between  $x$  and  $y$  is

$$\rho_f(x, y) = \sup \int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt$$

where the supremum is taken over all causal curves  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  from  $x$  to  $y$ .

In this thesis we developed a different and more synthetic way to see a Minkowski pseudo-norm. .

### Definition 6 :

- Let  $X$  be a finite dimensional vector space. A *Valinor set* is a domain  $\mathcal{D} \subset X$  with the following properties
  1.  $\mathcal{D}$  is connected, non-empty, open and contained in a causal cone.
  2.  $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ .
  3. (Anti-star shaped) If  $x \in \mathcal{D}$ , then for all  $\lambda \geq 1$ , we have  $\lambda x \in \mathcal{D}$ .

- Given a Valinor set  $\mathcal{D}$  in a finite dimensional vector space  $X$ , the *cone* over  $\mathcal{D}$  is the set

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} := \{x \in X \mid \text{there exists } \lambda > 0 \text{ such that } \lambda x \in \overline{\mathcal{D}}\} \cup \{0\}.$$

and the set

$$B = \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{D}}$$

is called the *unit ball*.

- Given a Valinor set  $\mathcal{D}$  in a real finite dimensionnal vector space  $X$  and the cone  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  over  $\mathcal{D}$ , there is a causality relation  $\preceq$  on  $M$  defined by

$$x \preceq y \quad \text{if} \quad y - x \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}.$$

- Given a Valinor set  $\mathcal{D}$ , the *Lorentz-Minkowski gauge* of  $\mathcal{D}$  is the functional  $\phi_{\mathcal{D}} : \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$\phi_{\mathcal{D}}(x) = \sup \{t > 0 \mid x \in t\overline{\mathcal{D}}\}.$$

Note that if the Valinor set  $\mathcal{D}$  is convex, then  $\phi_{\mathcal{D}}$  is a Minkowski pseudo-norm.

As in the usual Finsler setting, we will use the definitions on a vector space to build a metric on a manifold, for which the vector spaces will be the tangent space at a point.

**Definition 7 :**

- Let  $M$  be a differentiable manifold. A *Valinor sets field* is an open subset  $\mathcal{D} \subset TM$  such that  $\mathcal{D}_x := T_x M \cap \mathcal{D}$  is a Valinor set for the vector space  $T_x M$ .
- Given a Valinor sets field  $\mathcal{D}$  on a differentiable manifold  $M$ , we can define the Lorentz-Minkowski gauge  $\phi_{\mathcal{D}} : TM \rightarrow \mathbb{R}$  that is given by  $\phi_{\mathcal{D}}(x, v) = \phi_{\mathcal{D}_x}(v)$ .

Observe that given a Valinor sets field and taking the Lorentz-Minkowski gauge of each of the Valinor sets in  $T_x M$  endowes the space with a pseudo-Finsler structure when  $\mathcal{D}$  is convex.

**Theorem E** (Theorem 2.13) *Let  $M$  be a differentiable manifold endowed with a Valinor sets field  $\mathcal{D} \subset TM$  such that its Lorentz-Minkowski gauge is continuous and the unit ball is bounded. Then, for all  $x, y \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  such that  $x \prec y$ , we have*

$$\rho_{\phi}(x, y) = \rho_f(x, y),$$

where  $\phi$  is the Lorentz-Minkowski gauge of  $\mathcal{D}$  and  $f$  is the Lorentz-Minkowski gauge of  $\text{Conv}(\mathcal{D})$ .

**Definition 8 :**

- Given a weak pseudo-Finsler manifold  $(M, \mathcal{C}, f)$  and a continuously differentiable causal curve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , the *pseudo-Finsler length* of  $\gamma$  is

$$\ell_f(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

and the intrinsic length of  $\gamma$  is

$$\ell(\gamma) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d_f(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right\}$$

where  $d_f$  is the pseudo-Finsler distance, and the infimum is taken over all partitions  $\{t_i\}_{i=0}^n$  of  $[a, b]$ .

**Theorem F** (Theorem 4.17) *Let  $(M, \mathcal{C}, f)$  a pseudo-Finsler manifold such that  $f$  is Lipschitz. Then for all piecewise  $\mathcal{C}^1$  causal curve  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  we have,*

$$\ell_f(\sigma) = \ell(\sigma).$$

There is also a theorem on metric derivative that occurs in a chart  $\mathcal{U}$  of the manifold  $M$ .

**Theorem G** (Timelike metric derivative) *Let  $x_n, y_n \in \mathcal{U}$  two sequences such that  $x_n \neq y_n$  and  $x_n \prec y_n$  for all  $n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ . Let  $v_n := \frac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|}$  and  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . Then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{|y_n - x_n|} = f(x_0, v).$$

## Special geodesics

In this section, we return to Finsler geometry. We present some new results in which the difficulty was to set up the good definition and prove the local existence and uniqueness of the the special exponential map. The aim of this chapter is to define an analog of the Riemannian exponential map, but for non-strictly convex weak Finsler metrics.

**Definition 9 :**

1. Let  $(M, F)$  be a weak Finsler manifold of class  $\mathcal{C}^{3,1}$ . The strongly convexified metric of  $F$  is  $F_\varepsilon = \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  where  $h$  is an auxiliary complete Riemannian metric.
2. Given  $(M, F)$  a weak Finsler manifold of class  $\mathcal{C}^{3,1}$ , a special geodesic is a uniform limit of geodesics for the strongly convexified metric  $F_\varepsilon$ .

**Definition 10 :** Let  $\{F_\varepsilon\}$  be a family of strongly convex Finsler metrics of class  $\mathcal{C}^{3,1}$  on a manifold  $M$ . We say that  $\{F_\varepsilon\}$  is  $\lambda, \eta$ -quasi-Thales on the open set  $\mathcal{U}$  if the following is satisfied :

- (i)  $0 < \eta < \text{Inj}(F_\varepsilon, x)$  for all  $x \in U$  and  $0 < \lambda$ .
- (ii) for all  $x, y \in B(x_0, \eta)$  and all  $t \in [0, 1]$  we have

$$\frac{t}{\lambda} d_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(x(t), y(t)) \leq \lambda t d_\varepsilon(x, y),$$

where  $x(t)$  is the geodesic from  $x_0$  to  $x$  and  $y(t)$  is the geodesic from  $x_0$  to  $y$  and  $d_\varepsilon$  is the distance coming from  $F_\varepsilon$ .

This definition is very useful for the construction of an exponential map for a non-strictly convex weak Finsler metric. The role of the  $\lambda, \eta$ -quasi-Thales property is to make the exponential maps of  $F_\varepsilon$  well defined and make their injectivity radii greater than a uniform constant, and thus, when  $\varepsilon$  goes to 0, to have a strictly positive injectivity radius for the limit application, that we will call the *special exponential*.

**Theorem I :** *Let  $(M, F)$  a weak-Finsler manifold where  $F$  is  $\mathcal{C}^{3,1}$ , and the family of  $F_\varepsilon$  is  $(\lambda, \eta)$ -quasi-Thales, then there exist special geodesics, and they are geodesics for  $F$ . Moreover, the special geodesics are differentiable.*

---

**Theorem J** (Theorem 5.15) Let  $(M, F)$  a weak Finsler manifold of class  $\mathcal{C}^{3,1}$  for which the sequence of strongly convexified metrics is  $\lambda, \eta$ -quasi-Thales. Then for all  $x_0 \in M$ , if  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) = \{v \in T_{x_0}M \mid F(x_0, v) < \eta\}$ , there exists an application

$$\Phi_{x_0} : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$$

such that for all  $v \in \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$  we have

$$\Phi_{x_0}(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{x_0}^\varepsilon(v)$$

where  $\Phi_{x_0}^\varepsilon = \exp_{x_0}^\varepsilon : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$  is the restriction of the  $\varepsilon$ -exponential map (the exponential map of  $F_\varepsilon$ ) to the ball  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$ . Moreover, the application  $\Phi_{x_0} : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M \rightarrow \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset M$  is bijective.

**Definition 11** : Let  $(M, F)$  a weak Finsler manifold of class  $\mathcal{C}^{3,1}$  for which the sequence of strongly convexified metrics is  $\lambda, \eta$ -quasi-Thales We define the *special exponential* by

$$\begin{aligned} \text{Spexp}_p : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_pM &\rightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

where  $\gamma_v$  is the special geodesic such that  $\gamma(0) = p$  and  $\dot{\gamma}(0) = v$ .

When these objects are defined, the proof of a Hopf-Rinow theorem for the special geodesics follows the usual arguments, since the proof of this theorem is essentially metric and uses the exponential map (as in the classical case of a Riemannian manifold).

**Definition 12**

- We say that a metric is called complete for the special geodesics if every special geodesic can be defined on  $[0, \infty]$ .
- We say that a metric space is forward complete if every sequence  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq k} d(x_k, x_m) = 0$$

converges.

**Theorem K** (Theorem 5.22) : Let  $(M, F)$  a weak Finsler manifold of class  $\mathcal{C}^{3,1}$  for which the sequence of strongly convexified metrics is  $\lambda, \eta$ -quasi-Thales. Then,  $M$  is forward complete if and only if it is complete for the special geodesics.

In the proof of the special Hopf-Rinow theorem, we also showed the following.

**Scholium** : Let  $(M, F)$  a weak Finsler manifold of class  $\mathcal{C}^{3,1}$  for which the sequence of strongly convexified metrics is  $\lambda, \eta$ -quasi-Thales. Given  $x, y \in M$ , there always exists a special geodesic  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  such that  $\gamma(0) = x$  and  $\gamma(\ell) = y$  and  $\ell(\gamma) = d_F(x, y)$ .



---

## Finsler systolic ratio of the 2-dimensionnal sphere

The problem of the optimal systolic ratio on a compact Riemannian manifold is due to Mikhaïl Gromov in [Gro83] and developed by Mikhaïl G. Katz in [Kat07]. The particular question of the systolic ratio of the 2-dimensionnal sphere was investigated by Christopher Croke [Cro88], Florent Balacheff [Bal10] and Stéphane Sabourau [Sab09]

In collaboration with Louis Merlin, we described a new metric on the 2-dimensionnal sphere, inspired by [Cos20], that has remarkable systolic properties.

### Definition 13 :

- The *systol* of a Finsler sphere is the length of the shortest closed geodesic.
- The systolic ratio of a two dimensional Finsler sphere  $(M, F)$  is then defined as

$$\rho_{\text{Syst}}(M, F) = \frac{\text{Syst}_F(M)^2}{\text{Vol}_{HT}(M)}$$

where the supremum is taken over all Finsler metrics on  $M$  and the volume is the Holmes-Thompson volume.

Given a topological manifold, a classical question is to find the largest systolic ratio. This is a hard problem, even for the 2-sphere, the question is not yet completely answered [Bal10],[Sab09]. In collaboration with Louis Merlin, we developed a sphere with a large systolic ratio, and with a large number of closed geodesics.

**Theorem L** (Theorem 6.3) : *There exist a weak Finsler metric  $F$  (called Cossarini-Sabourau's metric) on the 2-dimensionnal sphere with systolic ratio*

$$\rho_{\text{sys}}(\mathbb{S}^2, F) = \frac{4\pi}{3}$$

Moreover, the sphere  $\mathbb{S}^2$  endowed with the Cossarini-Sabourau weak Finsler metric is called the *Cossarini-Sabourau sphere*. We needed to study the special geodesics flow on this sphere to compute precisely the length of the shorter closed geodesic. The proof is following combinatorial arguments to find a lower bound to the length and prove this is the systol.

The interest of this result is that the largest known Riemannian systolic ratio is the Calabi-Croke and the value of its systolic ratio is  $2\sqrt{3}$  (see [Cro88], [Bal10], [Sab09]) which is smaller than the Cossarini-Sabourau's systolic ratio, moreover, it has many closed geodesics that accomplish the systol and thus this metric is an intermediate example between the Zoll metrics (see [Bes12] and the Calabi-Croke metric. This metric has not the biggest known Finsler systolic ratio (see [Sab09]), but it is a good candidate to be a local maximum for the systolic ratio, giving an example of large systolic ratio that comes from another construction than the Calabi-Croke metric.

# Introduction

Cette thèse porte sur l'étude des géodésiques des variétés finslériennes et pseudo-finslériennes faibles et de basse régularité telles que décrites dans [Pap14a], [Pap09], [May41], [Iva01], [BCS00] et [PY19], [Bus67].

Nous commençons cette étude en exposant précisément les notions d'espaces métriques faibles, d'espaces de Minkowski, de structure de longueur pour arriver à la description des espaces finslériens faibles de basse régularité.

**Définition.** *Soit  $M$  une variété différentiable. Une métrique finslérienne faible sur  $M$  est la donnée d'une fonctionnelle  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  semi-continue supérieurement, convexe et homogène positive.*

Le courant dominant de la géométrie finslérienne au cours du XX<sup>ème</sup> siècle a été de supposer une plus grande régularité (habituellement au moins  $C^4$ ) et la condition de *forte convexité*, aussi appelée *condition de Legendre-Clebsch*, qui impose à la boule unité dans chaque espace tangent d'être de courbure de Gauss-Kronecker strictement positive. Cette condition vient du calcul variationnel classique et donne lieu à la construction de divers tenseurs et connexions qui permettent d'étudier la variétés finslériennes par des techniques de géométrie différentielles analogues la géométrie Riemannienne. Une référence standard sur ce point de vue est le livre de Bao, Chern et Shen [BCS00].

Par contraste, le présent travail se situe dans l'héritage et l'esprit de la vision de Herbert Busemann. Une large revue des travaux de Busemann a été effectuée par Athanase Papadopoulos dans [Pap18a] et [Pap18b]. Les hypothèses sur les métriques que nous considérerons dans ce textes seront affaiblies de deux manières. Premièrement, nous considérons des métriques finslériennes comme des fonctionnelles sur le fibré tangent d'une variété qui ne satisfont que l'homogénéité positive et l'inégalité (non-strict) du triangle mais qui peuvent être dégénérées ou non-symétriques. Deuxièmement, nous considérons des métriques de faibles régularité, c'est à dire des fonctionnelles semi-continues ou Lipschitz sur le fibré tangent.

L'étude des métriques finslériennes faibles de basse régularité est important dans la géométrie car ce type de métriques apparaît naturellement comme solution de problèmes d'optimisation d'invariants métriques. Ce phénomène peut se produire notamment lors de l'étude de questions telles que "Sous des contraintes de courbure, quelle métrique a un volume minimal?" (voir [Gro82]), "Quel est le volume minimal de remplissage?" (voir [Iva08], [Gro83]) et la question du ratio systolique optimal de la sphère de dimension 2, faisant apparaître des métriques telles que décrites dans le chapitre 6 (voir en particulier la proposition 6.8). Il est donc important de comprendre ce type de métriques finslériennes, et ceci passe par l'étude des géodésiques de ces espaces finslériens.

Dans le premier chapitre de cette thèse, le choix a été fait de prendre cette définition à rebours. Nous commençons par définir de façon très générale ce qu'est une distance faible sur un ensemble.

---

**Définition.** Soit  $X$  un ensemble. Une distance faible sur  $X$  est une fonctionnelle  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que

(i)  $d(x, x) = 0$ ,

(ii) (inégalité du triangle)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,

pour tous  $x, y, z \in X$ .

Ensuite, nous définissons ce qu'est une norme de Minkowski faible sur un espace vectoriel réel de dimension finie.

**Définition.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Une norme faible de Minkowski est une application  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  telle que pour tout  $x, y \in X$  et  $\lambda > 0$  on a

1. Positivité :  $F(0) = 0$ .

2. Homogénéité positive :  $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ .

3. Inégalité du triangle :  $F(x + y) \leq F(x) + F(y)$ .

Nous voyons alors que sous certaines hypothèses, une telle norme engendre toujours une distance faible et la proposition 1.10 donne une réciproque à cette affirmation.

Nous pouvons alors définir une métrique finslérienne sur une variété différentiable de la manière suivante.

**Définition.** Soit  $M$  une variété différentiable. Une métrique finslérienne est une fonctionnelle  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  semi-continue supérieurement telle que  $F(x, -) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une norme de Minkowski faible pour tout  $x \in M$ .

Tout au long de ce travail, nous allons utiliser cette définition de métrique finslérienne faible de basse régularité, mais en ajoutant des hypothèses métriques ou de régularité selon le cadre de travail, tout utilisant le moins d'hypothèses possibles.

Une métrique finslérienne faible induit une structure de longueur, telle que définie dans [Gro81]. En effet, en considérant une classe de courbes  $\Gamma$  que nous appellerons *admissibles* (typiquement les courbes continûment différentiables par morceaux, ou les courbes Lipschitz), la fonctionnelle de longueur finslérienne  $\ell : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  sera donnée par  $\ell_F(\gamma) = \int_\gamma F$ . Une structure de longueur étant donnée, nous pouvons alors définir une distance faible en prenant l'infimum de la longueur des courbes entre deux points donnés sur une variété ;  $d_F(x, y) = \inf_\Gamma \ell_F(\gamma)$ .

Ces définitions étant posées, nous pouvons définir trois notions de géodésiques sur une variété finslérienne. La première est purement exprimée en termes de distances, ce sont les *géodésiques métriques* (appelées "*Hilbert curves*" dans [May41]). La seconde implique la longueur finslérienne et demande donc que les géodésiques soient différentiables, ce sont les *courbes minimisantes* (définies dans [Iva01]). La troisième notions de géodésique apparaît comme solution de l'équation différentielle des géodésiques, présentées dans les livres classiques de géométrie Finslérienne tels que [BCS00]. Nous appellerons ces courbes les *géodésiques différentielles*, elles sont définies à conditions que la métrique finslérienne aie des propriétés de régularité supplémentaires. Voici les définitions formelles :

**Définition.** (Géodésique métrique) Soit  $(X, d)$  un espace métrique faible. Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est appelée géodésique métrique si pour tout  $t_0 \in [a, b]$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $r, s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  vérifient  $r < s < t$ , alors

$$d(\gamma(r), \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) = d(\gamma(r), \gamma(t)).$$

**Définition.** (Courbe minimisante) Soit  $X$  un espace topologique muni d'une structure de longueur. Une courbe admissible  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une courbe minimisante si pour tout  $s, t \in [a, b]$

$$\delta_\ell(\gamma(s), \gamma(t)) = \ell(\gamma|_{[s,t]}).$$

**Définition.** (Géodésique différentielles) Soit  $M$  une variété différentiable et  $F$  une métrique finslérienne faible de régularité  $\mathcal{C}^3$ . Dans un système de coordonnées locales, nous notons  $g_{ij}(x, v) = \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \partial v^j}(x, v)$  le tenseur fondamental de  $F$ . Nous supposons de plus que le tenseur fondamental est défini positif et nous notons  $g^{ij}$  son inverse. Une courbe  $\beta(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  est une géodésique différentielle pour la métrique finslérienne  $F$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  et solution de l'équation différentielle

$$\ddot{x}^k + \gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0,$$

où

$$\gamma_{ij}^k(x, v) = \frac{1}{2} g^{k\mu} \left\{ \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \right\}$$

sont les symboles de Christoffel généralisés (noter que le tenseur fondamental et les symboles de Christoffel généralisés dépendent de  $(x, v)$  et non pas seulement du point  $x$  comme c'est le cas en géométrie riemannienne).

Dans le cadre de la géométrie finslérienne étudié dans [BCS00], c'est à dire quand la métrique est  $\mathcal{C}^\infty$  et que le tenseur fondamental est défini positif, ces trois types de courbes optimales coïncident. Toutefois, dans notre cas, il faut faire attention car il peut même arriver que la définition de "courbe minimisante" et celle de "géodésique" n'aient aucun sens car la métrique n'est pas suffisamment régulière, ou les géodésiques métriques ne satisfont pas aux bonnes hypothèses de régularité.

Dans cette thèse, nous développons plusieurs points de vues complémentaires sur la géométrie finslérienne faible. Le point de vue principal sur cette géométrie est une vision synthétique provenant majoritairement de [Pap09], le second point de vue, complétant le premier dans le cas d'une métrique suffisamment régulière est celui qui a fait dire à Busemann que la géométrie finslérienne classique "évoque à la majorité des mathématiciens l'image d'une forêt impénétrable dont la végétation entière consiste en des tenseurs" [Pap09], toutefois ce point de vue est important pour avoir une équation des géodésiques, sous la condition que la métrique soit fortement convexe et suffisamment régulière. Une troisième approche consiste à construire une métrique finslérienne  $F$  comme la dérivée de la fonctionnelle distance  $d_F$ , mais il faut préciser les hypothèses sous lesquelles cette façon de voir est possible. Nous voyons ceci dans le chapitre 2.

Précisons donc ces différents points de vue sur la géométrie finslérienne :

1. *Géométrie convexe* ([Pap09]) : Soit  $\Omega \subset TM$ , un champ ouvert de convexes contenant la section nulle, ce qui signifie que  $\Omega_p = \Omega \cap T_p M$  est un convexe ouvert pour tout  $p$  contenant  $0 \in T_p M$ . Nous pouvons alors définir une métrique finslérienne sur  $M$  en prenant la jauge de Minkowski sur  $T_p M$  induite par le convexe ouvert  $\Omega_p$  :

$$F(p, v) = \inf \{ t > 0 \mid v \in t\Omega_p \}.$$

Remarquons que cette construction est également possible avec un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine, ce qui donne une jauge de Minkowski non-convexe, que nous utiliserons dans le chapitre 2. De

plus, notons que cette construction justifie le choix de la semi-continuité supérieure comme hypothèse minimale de régularité pour les métriques considérées. En effet, les jauges de Minkowski sont semi-continues supérieurement car les ensembles de sous-niveaux sont ouverts.

2. *Géométrie différentielle* ([BCS00]) : On définit une métrique finslérienne comme une fonction  $F$  suffisamment régulière sur le fibré tangent d'une variété différentiable, toutefois nous ne supposons pas en général que  $F$  est strictement convexe sur chaque espace tangent.
3. *Dérivée métrique* ([Iva08],[May41]) : Étant donné une variété différentiable munie de la structure d'espace métrique  $(M, d)$ , nous pouvons sous certaines conditions définir la dérivée métrique par la formule suivante :

$$F(p, v) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|}$$

où  $\gamma$  est une courbe  $C^1$  de  $M$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Un des résultats de cette thèse donne des conditions pour que la dérivée métrique soit la métrique finslérienne induisant la distance  $d$ .

Le second chapitre aborde les théorèmes de Herbert Busemann et Walter Mayer, énoncés et prouvés dans l'article de 1941 intitulé "On the foundations of calculus of variations" [May41]. Cet article contient des résultats encore importants aujourd'hui et mérite d'être réécrit dans un langage plus moderne. Nous avons décomposé cet article en trois grandes parties, contenant chacune ses propres théorèmes. Le premier théorème porte sur la convexification des jauges de Minkowski de champs d'ouverts étoilés autour de la section nulle du fibré tangent. Ce résultat a été revisité par Shoshichi Kobayashi [Kob91], mais dans un cadre différent de celui de Busemann et Mayer, en effet, dans [May41], la jauge considérée n'est pas symétrique mais est continue, alors que dans [Kob91], la jauge considérée est symétrique mais semi-continue supérieurement.

**Définition.** • Soit  $\Omega \subset TM$  un champ d'ouverts étoilé autour de l'origine, l'enveloppe convexe de  $\Omega$  est l'ensemble

$$\text{Conv}(\Omega) = \bigcup_{x \in M} \text{Conv}(\Omega_x)$$

où  $\text{Conv}(\Omega_x)$  est l'enveloppe convexe de  $\Omega_x$  dans l'espace vectoriel  $T_x M$ .

- Soit  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$ , alors la jauge de Minkowski de  $\text{Conv}(\Omega)$ , notée  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée le convexifié de  $\Phi$ .
- Soit  $M$  une variété différentiable et  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  une jauge de Minkowski sur  $M$ , alors pour tout  $x, y \in M$ , nous définissons

$$d_\Phi(x, y) = \inf \int_a^b \Phi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de  $x$  à  $y$ .

Un des résultats démontrés dans cette thèse est une généralisation du premier théorème de Busemann-Mayer et du résultat principal de l'article [Kob91], car la jauge considérée est semi-continue supérieurement et non-symétrique.

---

**Théorème** (Théorème 2.3. *BuseMay[Kob91, page 206]*) Soient  $M$  une variété différentiable connexe et  $\Omega \subset TM$  un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine. Soit  $\Phi$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$  et  $F$  le convexe de  $\Phi$ , alors, pour tout  $x, y \in M$ , on a

$$d_\Phi(x, y) = d_F(x, y).$$

Le preuve de ce théorème est liée au théorème de Minkowski-Carathéodory sur les enveloppes convexes (voir [Web94]).

La seconde section du chapitre 2 porte sur l'égalité entre la longueur intrinsèque et la longueur finslérienne, et sur des résultats concernant dérivée métrique.

**Définition.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique faible et  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe continue. Nous définissons la longueur intrinsèque de  $\gamma$  par :

$$\ell_d(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des partitions  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$  de  $[a, b]$ .

Un exemple classique de courbe sur laquelle la longueur intrinsèque ne coïncide pas avec la longueur finslérienne est l'*escalier du Diable* (le graphe de la fonction de Cantor-Vitali, voir [KF75, p. 334]), en effet, la longueur intrinsèque provenant de la distance euclidienne de l'escalier du Diable est 2 alors que la longueur finslérienne, c'est à dire la longueur vue comme l'intégrale de la vitesse de cette courbe vaut 1. La solution à ce problème est bien connue, en effet, dans le cas des métrique riemanniennes lisses les deux longueurs coïncident sur l'ensemble des courbes absolument continues [AT04]. Toutefois il n'est a priori pas clair que ceci est vrai pour les métriques finslériennes faibles de basse régularité sur la classe des courbes  $C^1$  par morceaux. Ceci est le propos du deuxième théorème de [May41]. Nous avons ajouté un minimum d'hypothèses à la métrique finslérienne faible afin que le théorème soit vrai et la classe de courbes considérées est celle des courbes continûment différentiables par morceaux.

**Théorème** (Théorème 2.16). [May41, Théorème 2, page 186] Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible dont la métrique  $F$  est Lipschitz, alors la longueur finslérienne coïncide avec la longueur intrinsèque donnée par  $d_F$  sur les courbes continûment différentiables par morceaux. C'est à dire que pour tout courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  continûment différentiable par morceaux, on a

$$\ell_F(\gamma) = \ell_{d_F}(\gamma).$$

L'idée de la démonstration de ce théorème est représentative de la vision de Busemann sur la géométrie finslérienne. Busemann voit très souvent les variétés finslériennes comme des variétés "infinitésimalement Minkowski", c'est à dire qu'il approxime la métrique finslérienne par de petits morceaux de normes de Minkowski, invariants par translation et projectifs, ce qui permet de déduire des résultats puissants dans de petits voisinages puis de réunir les petits morceaux et de déduire un résultat global sur la courbe entière.

De cette façon de voir sont directement déduits deux variantes d'un théorème portant sur la dérivée métrique. Ces résultats demandent de se placer dans un carte de la variété  $M$ , et le premier corollaire est plus général que le second, bien que moins synthétique.

---

**Théorème** (Théorème 2.21). [May41, Théorème 3, page 186] Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible dont la métrique  $F$  est Lipschitz et  $\mathcal{U} \subset M$  une carte de la variété  $M$ . Considérons  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  deux suites dans  $\mathcal{U}$  telles que pour tout  $n$  nous avons  $x_n \neq y_n$  et satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \in \mathcal{U}$  et  $v_n := \frac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|}$  converge vers un vecteur  $v$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{|y_n - x_n|} = F(x_0, v)$$

où nous avons noté  $|\cdot|$  la métrique euclidienne dans la carte  $\mathcal{U}$ .

Le second corollaire est une réécriture du premier en terme de courbes plutôt qu'en termes de suites, il est moins général que le premier, mais plus clair et permet une comparaison avec les résultats de Sergueï Ivanov [Iva08].

**Théorème** (Théorème 2.21, reformulé). [May41]

Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible dont la métrique  $F$  est strictement convexe et Lipschitz et  $\mathcal{U} \subset M$  une carte de la variété  $M$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe continûment différentiable en 0, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_F(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|} = F(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)).$$

Une petite section suit et montre que le théorème 3.7 de [Iva08] implique ces deux résultats, en effet, Ivanov démontre que toute distance Lipschitz provient d'une métrique finslérienne et donne même une forme explicite de la métrique finslérienne qui engendre la distance, cette métrique étant la différentielle faible d'un plongement de Kuratowski de l'espace métrique faible considéré au départ.

La troisième partie de ce chapitre porte sur la régularité des géodésiques métriques sur une surface finslérienne de basse régularité. Nous ne savons pas si ce résultat est généralisable en dimension supérieure, car les méthodes utilisées ici sont typiques de la dimension 2.

**Théorème** (Théorème 2.40). [May41, Chap. 6, page 194] Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de dimension 2 dont la métrique  $F$  est strictement convexe et Lipschitz, alors les géodésiques métriques pour  $d_F$  sont continûment différentiables.

La preuve de ce résultat est technique, elle utilise les propriétés d'une famille de courbes différentiables que Busemann-Mayer appellent des *pseudo-cercle* (voir définition 2.27) et le fait que la projection sur ces courbes est contractante.

Les résultats du chapitre 2 sont très généraux, excepté le théorème de régularité des géodésiques métriques, qui ne fonctionne qu'en dimension 2. Un des développements futurs à cette thèse pourrait être d'essayer de généraliser ce résultat à la dimension  $n$ .

Les chapitres 3 et 4 portent sur les métriques finslériennes de type espace-temps ou métriques pseudo-finslériennes. Ces métriques sont des généralisations des métriques pseudo-riemanniennes de la relativité générale [Ein16]. Les métriques pseudo-finslériennes faibles de basses régularité sont aux métriques pseudo-riemanniennes ce que les métriques finslériennes faibles de basse régularité sont aux métriques riemanniennes, toutefois, contrairement au cas pseudo-riemannien, une métrique pseudo-finslérienne n'est pas définie partout.

En effet, en dehors du “cône de causalité”, les métriques pseudo-finlériennes n’ont pas de sens. Ceci est une grande différence avec les chapitres précédents, car la relation de causalité est inévitable et ne permet pas, à priori, “d’adapter les résultats finlériens en inversant simplement les inégalités”.

Dans le développement de la théorie pseudo-finlérienne faible, nous procédons de la même manière que dans le chapitre 1, nous commençons par définir ce qu’est une pseudo-distance, ensuite une pseudo-norme de Minkowski et enfin une métrique pseudo-finlérienne. Les métriques pseudo-finlériennes ne sont définies que sur un cône de causalité et la pseudo-distance entre deux points n’est définie qu’entre deux points liés causalement, tel que nous allons le définir. Ceci est une différence importante entre la géométrie finlérienne et la géométrie pseudo-finlérienne.

**Définition.** Soit  $X$  un espace topologique de Hausdorff. On appelle  $X$  un espace-temps métrique si

1. Il existe un ordre partiel  $\prec$  sur  $X$  (appelé relation de causalité tel que  $\{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\}$  est fermé dans  $X \times X$  et pour chaque point  $p \in X$ , dans chaque voisinage  $\mathcal{U}$  de  $p$ , il existe des points  $x, y \in \mathcal{U}$  distincts de  $p$  tels que  $x \preceq p$  et  $p \preceq y$ ).
2. Il existe une fonction  $\rho : \{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\} \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et satisfaisant :
  - $\rho(x, y) \geq 0$  pour tout  $x \preceq y$  et  $\rho(x, x) = 0$ .
  - Si  $x \preceq y \preceq z$ , alors

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

que nous appellerons inégalité causale.

Nous appellerons la fonction  $\rho$  une pseudo-distance.

Nous définissons ensuite une pseudo-norme de Minkowski.

**Définition.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. On appelle cône de causalité un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset X$  qui est un cône convexe fermé propre de sommet  $0 \in X$  (propre signifie qu’il existe un hyperplan supporteur de  $\mathcal{C}$  passant par  $0$  et ne contenant que  $0$  ou que  $\mathcal{C}$  ne contient aucune droite).
2. La donnée d’un cône de causalité  $\mathcal{C}$  sur un espace vectoriel  $X$  induit la relation de causalité suivante,

$$x \prec y \quad \text{si} \quad y - x \in \mathcal{C}.$$

3. Soit  $(X, \mathcal{C})$  un espace vectoriel réel de dimension finie muni d’un cône causal satisfaisant

(a) Positivité :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{C}$  et  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$  et  $f(0) = 0$ .

(b) Homogénéité positive :  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{C}$  et tout  $\lambda > 0$ .

(c) Concavité :  $f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$  pour tout  $x, y \in \mathcal{C}$  et tout  $0 < t < 1$ .

Un espace vectoriel muni d’un cône de causalité et d’une pseudo-norme de Minkowski est appelé un espace-temps de Lorentz-Minkowski.

Un espace de Lorentz-Minkowski est un espace-temps métrique via l’égalité  $\rho(x, y) = f(y - x)$  pour  $x \preceq y$ . Inversement, les propositions 3.4 et 3.14 donnent des conditions pour qu’un espace-temps métrique soit un espace de Lorentz-Minkowski.



---

**Définition.** Une métrique pseudo-finslérienne sur une variété  $M$  est la donnée d'un sous-ensemble fermé  $\mathcal{C} \subset TM$  (appelé champ de cônes de causalité) tel que  $\mathcal{C}_x \subset T_x M$  est un cône de causalité et d'une fonctionnelle  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  semi-continue inférieurement, homogène positive et concave.

Notons que  $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}_x$  s'appelle un champ de cônes (de causalité) sur  $M$ . Le cône de causalité définit ce qu'est une courbe causale et induit la relation de causalité sur  $M$ .

**Définition.**

- Soit  $M$  une variété différentiable munie d'un champ de cônes de causalité, alors une courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  est appelée une courbe causale si pour tout  $t \in [a, b]$ , nous avons  $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{C}_{\sigma(t)}$  et une courbe strictement causale si pour tout  $t \in [a, b]$ , nous avons  $\dot{\sigma}(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma(t)}$ .
- Soit  $M$  une variété différentiable munie d'un champ de cônes de causalité et  $x, y \in M$ , alors nous notons  $x \preceq y$  si il existe une courbe causale de  $x$  vers  $y$  et  $x \prec y$  si il existe une courbe strictement causale de  $x$  vers  $y$ .

Étant donné un champ de cônes de causalité  $\mathcal{C}$  et une métrique pseudo-finslérienne  $f$  sur une variété  $M$  nous avons une structure de longueur sur l'ensemble des courbes causales, définie par

$$\ell_f(\sigma) = \int_{\sigma} f$$

et une pseudo-distance induisant une structure d'espace-temps métrique sur  $M$ , donnée par le relation de causalité énoncée plus haut et la pseudo-distance

$$\rho_f(x, y) = \sup \ell_f(\sigma)$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des courbes causales de  $x$  vers  $y$ .

Nous pouvons donc définir ce que sont les géodésiques des espaces-temps, telles que définies dans [PY19] et [Bus67].

**Définition.** (Géodésique pseudo-métrique) Soit  $(X, \preceq, \rho)$  un espace-temps métrique. Une courbe causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  est appelée géodésique pseudo-métrique si pour tout  $t_0 \in [a, b]$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $r, s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  vérifient  $r < s < t$ , alors

$$\rho(\sigma(r), \sigma(s)) + \rho(\sigma(s), \sigma(t)) = \rho(\sigma(r), \sigma(t)).$$

**Définition.** (Courbe maximisante) Soient  $X$  un espace topologique muni d'une structure de longueur de type espace-temps et  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe causale. On dit que  $\sigma$  est une courbe maximisante si pour tout  $s, t \in [a, b]$

$$\rho_\ell(\sigma(s), \sigma(t)) = \ell(\sigma|_{[s,t]}).$$

Pour démontrer des théorèmes inspirés par les résultats de [May41], il nous a fallu définir un nouveau formalisme en cherchant les points communs entre finslérien et pseudo-finslérien. L'un des points communs réside dans l'approche de type "géométrie convexe", en effet, la notion de *convexe de Valinor* permet de définir une métrique pseudo-finslérienne et une relation de causalité d'une façon très inspirée par la notion de jauge de Minkowski de la géométrie finslérienne classique.

---

**Définition** (Convexe de Valinor). Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie. Nous appelons convexe de Valinor un ensemble  $\mathcal{D} \subset X$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{D}$  est non-vide, convexe et ouvert.
2.  $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ .
3.  $\mathcal{D}$  est propre (i.e. ne contient aucune droite).
4. (Anti-étoilé) Si  $x \in \mathcal{D}$ , alors pour tout  $\lambda \geq 1$ , nous avons  $\lambda x \in \mathcal{D}$ .

Nous remarquons qu'il est également possible de se donner un ensemble de Valinor pas forcément convexe.

**Définition.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{D}$  un convexe de Valinor dans  $X$ . Nous pouvons alors définir un cône sur  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} := \{x \in X \mid \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda v \in \overline{\mathcal{D}}\},$$

où  $\overline{\mathcal{D}}$  désigne l'adhérence de  $\mathcal{D}$ . Nous définissons également l'ensemble

$$B = \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{D}},$$

appelé boule unité.

Un champ de convexes fondamentaux sur une variété  $M$  est la donnée d'un ensemble ouvert  $\mathcal{D} \subset TM$  tel que  $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \cap T_x M$  est un convexe de Valinor de  $T_x M$  pour tout  $x \in M$ . Nous pouvons alors définir un champ de cônes sur  $TM$  à partir de  $\mathcal{D}$ . Ceci induit un champ de cônes de causalité  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  et donc la relation de causalité. La métrique pseudo-finslérienne est donnée par la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$ , telle que définie ci-dessous.

**Définition.** Soit  $(M, \mathcal{D})$  une variété différentiable munie d'un champ de convexes fondamentaux. La jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$  est la fonctionnelle  $f : \overline{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$f_{\mathcal{D}}(x, v) = \sup \{t > 0 \mid v \in t\overline{\mathcal{D}_x}\}.$$

Remarquons qu'une telle fonctionnelle peut également être définie sur un champ d'ensembles fondamentaux pas forcément convexes. Nous noterons  $\phi$  la jauge de Lorentz-Minkowski d'un champ d'ensembles fondamentaux non convexes. Dans le cas où  $\mathcal{D}$  n'est pas convexe, nous pourrions considérer son enveloppe convexe  $\text{Conv}(\mathcal{D})$  et en prendre la jauge de Lorentz-Minkowski. Si  $\phi_{\mathcal{D}}$  est la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$ , alors la jauge de Lorentz-Minkowski  $f = \phi_{\text{Conv}(\mathcal{D})}$  est appelée le *concavifié* de  $\phi_{\mathcal{D}}$ .

Nous avons ainsi construit une approche de type géométrie convexe de la géométrie pseudo-finslérienne, et nous allons donc pouvoir utiliser des techniques et des résultats de géométrie convexe pour démontrer des analogues de type espace temps des résultats de Busemann-Mayer.

**Théorème** (Théorème 4.13). Soit  $M$  une variété différentiable munie d'un champ d'ensembles fondamentaux  $\mathcal{D}$  dont la boule unité est bornée et induisant une jauge de Lorentz-Minkowski continue. Notons  $\phi$  la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$  et  $f$  son concavifié. Alors pour toute paire de points  $x, y \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  tels que  $x \preceq y$ , on a

$$\rho_{\phi}(x, y) = \rho_f(x, y).$$

L'idée de la preuve de ce théorème est que les courbes maximisantes des pseudo-normes de Minkowski passant par les directions extrêmes des ensembles fondamentaux ne diminuent pas la longueur, il faut donc approximer les métriques pseudo-finslériennes par des pseudo-normes de Minkowski puis appliquer des résultats de géométrie convexe à  $\mathcal{D}$  pour démontrer le théorème.

La section suivante démontre un analogue du théorème sur les longueurs intrinsèques de Busemann-Mayer mais dans le cadre des métriques pseudo-finslériennes. Nous pouvons en effet également définir une longueur intrinsèque d'une courbe causale dans un espace-temps métrique de la manière suivante.

**Définition.** Soit  $(X, \preceq, \rho)$  un espace-temps métrique et soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe causale dans  $X$ , la longueur intrinsèque de  $\sigma$  est définie par

$$\ell(\sigma) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1}))$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des partitions  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$  de  $[a, b]$ .

Il s'agit de voir si cette longueur intrinsèque est égale à la longueur pseudo-finslérienne  $\ell_f$ . Le théorème suivant donne une réponse à cette question.

**Théorème** (Théorème 4.17). Soit  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne dont la pseudo-métrique est Lipschitz, alors la longueur pseudo-finslérienne  $\ell_F$  et la longueur intrinsèque  $\ell$  coïncident sur les courbes causales continûment différentiables. C'est à dire, pour toute courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  strictement causale et continûment différentiable par morceaux,

$$\ell_f(\sigma) = \ell(\sigma)$$

Ceci est une application du point de vue de Busemann sur la géométrie finslérienne, qui voit les métriques finslériennes comme des métriques infinitésimalement Minkowski, mais appliqué aux métriques pseudo-finslériennes, en prenant en comptes les contraintes de causalité et l'inégalité causale.

Dans les deux derniers chapitres de la thèse, nous revenons aux métriques finslériennes "de type espace seulement". Le chapitre 5 est la construction d'un analogue de l'application exponentielle riemannienne dans le cadre des métriques finslériennes de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ , mais non-strictement convexes. L'idée est qu'il existe des géodésiques spéciales parmi toutes les géodésiques d'une variété finslérienne.

Cette approche est inspirée de la notions de "distinguished geodesics" introduite par Busemann dans [BP87]. Un exemple est donné par les métriques projectives dans les ouverts de  $R^n$ , c'est à dire des métriques pour lesquelles les droites euclidiennes sont des géodésiques, que l'on peut donc considérer comme des géodésiques "spéciales". En particulier les métriques de Funk ou de Hilbert sont des exemples classiques de géométries finslériennes faibles projectives. De telles métriques admettent beaucoup de géodésiques et parmi elles, les lignes droites.

Dans le chapitre 5, nous proposons une construction qui distingue certaines géodésiques "spéciales" et nous montrons l'unicité locale de ces géodésiques.

**Définition.** Soit  $M$  une variété différentiable et  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  une métrique finslérienne faible de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$ , et  $h$  une métrique riemannienne lisse sur  $M$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , nous définissons la métrique fortement convexifiée de  $F$  par

$$F_\varepsilon = \sqrt{F^2 + \varepsilon h}.$$

---

**Définition.** Soit  $\{F_\varepsilon\}$  une famille de métriques finslériennes de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  fortement convexes sur une variété  $M$ . Nous disons que  $\{F_\varepsilon\}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès sur l'ouvert  $\mathcal{U}$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $0 < \eta < \text{Inj}(F_\varepsilon, x)$  pour tout  $x \in U$  et  $0 < \lambda$ .
- (ii) Pour tout  $x, y \in B(x_0, \eta)$  et tout  $t \in [0, 1]$  nous avons

$$\frac{t}{\lambda} d_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(x(t), y(t)) \leq t \lambda d_\varepsilon(x, y),$$

où  $x(t)$  est la géodésique de  $x_0$  à  $x$  et  $y(t)$  est la géodésique de  $x_0$  à  $y$  et  $d_\varepsilon$  est la distance induite par  $F_\varepsilon$ .

le fait d'être quasi-Thalès est une propriété clé des espaces que nous allons considérer. En effet, ceci aura pour effet de "bloquer" le rayon d'injectivité des métriques  $F_\varepsilon$  et permettra de montrer que les suites de métriques considérées ont de bonnes propriétés de convergence.

Les métriques  $F_\varepsilon$  sont des métriques fortement convexes et de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ , nous pouvons donc appliquer l'approche "géométrie différentielle" à cette suite de métriques et constater que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'équation des géodésiques finslériennes donne l'existence et l'unicité locale de géodésiques pour  $F_\varepsilon$  (voir [BCS00]). Ces géodésiques seront appelées des  $\varepsilon$ -géodésiques. En laissant  $\varepsilon$  tendre vers 0, la suite des  $\varepsilon$ -géodésiques converge et nous obtenons une géodésique particulière de  $F$  comme limite uniforme de  $\varepsilon$ -géodésiques, que nous appellerons *géodésique spéciale*.

**Théorème** (Corollaire 5.8 et Théorème 5.10). Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible, de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire sur  $M$ . Supposons que la famille de métriques fortement convexifiées  $F_\varepsilon = \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, alors la métrique  $F$  admet des géodésiques spéciales et ces géodésiques spéciales sont différentiables.

L'existence des géodésiques spéciales provient de la construction de la métrique fortement convexifiée et de la convergence des distances lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La preuve de la différentiabilité des géodésiques spéciales demande que la famille de métriques  $F_\varepsilon$  soit  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès.

Nous montrons ensuite qu'il est possible de construire une application "exponentielle spéciale", c'est à dire une application associant à tout  $(x, v) \in TM$ , la géodésique spéciale  $\gamma_v(t)$  telle que  $\gamma_v(0) = x$  et  $\dot{\gamma}_v(t) = v$ .

**Notation 0.1.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible, alors

$$\mathcal{B}(x_0, \eta) = \{v \in T_{x_0}M \mid F(x_0, v) < \eta\}$$

et

$$B(x_0, \eta) = \{x \in M \mid d_F(x_0, x) < \eta\}.$$

**Théorème** (Théorème 5.15). Soient  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire complète telle que la famille  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, alors pour tout  $x_0 \in M$ , il existe une application

$$\Phi_{x_0} : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$$

telle que pour tout  $v \in B(x_0, \frac{\eta}{2})$  nous avons

$$\Phi_{x_0}(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{x_0}^\varepsilon(v)$$

où  $\Phi_{x_0}^\varepsilon = \exp_{x_0}^\varepsilon : B(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$  est la restriction de l' $\varepsilon$ -exponentielle à la boule  $B(x_0, \frac{\eta}{2})$ .

De plus l'application  $\Phi_{x_0} : B(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M \rightarrow B(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset M$  est une bijection.

Ce théorème justifie la définition suivante :

**Définition** (Exponentielle spéciale). Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire complète telle que la famille  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, et notons  $\exp^\varepsilon : B(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M \rightarrow M$  l'exponentielle de  $F_\varepsilon$  (voir [BCS00]), alors l'exponentielle spéciale est l'application  $\text{Spexp}_{x_0} : B(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$  définie par

$$\text{Spexp}_x(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp_x^\varepsilon(v).$$

Il n'a pas été possible de démontrer que l'exponentielle spéciale est un homéomorphisme local, car une limite bijective d'homéomorphismes n'est pas forcément continue (voir l'exemple 5.2 "Tremblement de Terre"). La construction de l'exponentielle spéciale permet tout de même d'avoir une bijection locale entre l'espace tangent en un point de la variété et un voisinage de ce point. Dès lors, en ayant constaté que le théorème de Hopf-Rinow classique est un théorème utilisant presque seulement la notion de distance et l'application exponentielle (voir par exemple [GHL04]), nous pouvons démontrer un théorème de Hopf-Rinow pour les géodésiques spéciales, en utilisant les méthodes classiques, adaptées à l'exponentielle spéciale. Il s'agit tout de même de faire attention à la définition de complétude dans un espace métrique non-symétrique.

**Définition.** • Soit  $(X, d)$  un espace métrique faible. On dit que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  est une suite de Cauchy vers avant si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq k} d(x_k, x_m) = 0.$$

L'espace métrique faible  $(X, d)$  est dit complet vers avant si toute suite de Cauchy vers l'avant converge. Nous définissons de Cauchy vers l'arrière et complet vers l'arrière de la même manière. Nous dirons qu'un espace métrique est complet si il est complet vers l'avant et complet vers l'arrière.

- Une variété finslérienne faible  $(M, F)$  est dite géodésiquement complète pour les géodésiques spéciales si toute géodésique spéciale est définie (ou prolongeable) jusqu'à  $\infty$ .

**Théorème** (Théorème 5.22). Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire complète telle que la famille  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, alors  $F$  est géodésiquement complète pour les géodésiques spéciales si et seulement si elle est complète vers avant.

Remarquons maintenant que ce résultat représente une fin en soi, étant donné que nous pouvons considérer que nous construisons une métrique finslérienne faible en se donnant un champ de convexes étoilés sur une variété différentiable, par le premier théorème de Busemann-Mayer [May41], mais qu'une telle métrique, étant donnée par une enveloppe convexe, n'est pas strictement convexe. Toutefois, si la métrique construite est suffisamment régulière, nous pouvons construire des géodésiques spéciales et une exponentielle spéciale, qui donnera lieu à un théorème de Hopf-Rinow spécial.

Le dernier chapitre de cette thèse présente un travail en collaboration avec Louis Merlin. Nous avons développé un exemple de métrique finslérienne faible sur la sphère de dimension deux qui possède de bonnes propriétés systoliques.

- Définition.** 1. Soit  $F$  une métrique finslérienne sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . On appelle systole de  $F$ , et on notera  $\text{Syst}(F)$ , la longueur de la plus courte géodésique périodique de  $(\mathbb{S}^2, F)$ .
2. Étant donné une métrique finslérienne  $F$  sur  $\mathbb{S}^2$ , nous définissons le ratio systolique de  $F$  par

$$\rho_F(\mathbb{S}^2) = \frac{\text{Syst}(F)}{\text{Aire}_F(\mathbb{S}^2)}$$

où le volume finslérien est le volume de Holmes-Thompson tel que défini dans 1.

3. Nous appellerons ratio systolique optimal le supremum sur l'ensemble des métriques des ratios systoliques

$$\rho(\mathbb{S}^2) = \sup_F \rho_F(\mathbb{S}^2).$$

Ces définitions proviennent d'une question de géométrie riemannienne. La question du ratio systolique optimal riemannien sur une variété compacte a été soulevée par Mikhaïl Gromov dans [Gro83], inspiré par [Pu52] et [Bes51] puis notamment développée par Mikhaïl Katz dans [Kat07]. Dans son article de 1988 [Cro88], Christopher Croke démontre que le ratio systolique riemannien de la sphère  $\mathbb{S}^2$  est borné, il s'agit donc de trouver la métrique optimale pour ce ratio. Le plus grand ratio systolique connu est celui de la métrique de Calabi-Croke sur  $\mathbb{S}^2$ . La construction de Calabi-Croke consiste en deux triangles équilatéraux munis de la métrique euclidienne et collés par isométrie le long de leurs bords. Le ratio systolique de la sphère de Calabi-Croke est calculable par de la géométrie élémentaire et vaut  $2\sqrt{3}$ . Les avancées actuelles montrent que la métrique de Calabi-Croke est un bon candidat pour être le maximum, en effet, dans [Bal10] et [Sab09], Florent Balacheff et Stéphane Sabourau montrent que la sphère de Calabi-Croke est un maximum local pour les métriques riemanniennes, et même que l'analogue de la construction de Calabi-Croke, mais en équipant les triangles d'une métrique de type Manhattan, est un maximum local parmi les métriques finslériennes. Remarquer que toutes ces métriques sont singulières, et donc entrent naturellement dans notre cadre de travail.

La métrique sur  $\mathbb{S}^2$  que nous avons construit avec Louis Merlin est une métrique finslérienne faible. Cette construction est inspirée de l'article de Marcos Cossarini et Stéphane Sabourau [Cos20]. Dans cet article, les auteurs construisent un disque finslérien faible d'air minimale en utilisant des métriques projectives de Crofton. Dans notre travail, nous avons délibérément évité ce formalisme pour décrire la métrique de Cossarini-Sabourau, car cette métrique peut être décrite de façon plus synthétique, permettant de la mettre en relation claire avec le reste de cette thèse.

- Définition.** 1. Soient  $\theta_0, \theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  les trois formes linéaires définies par

- $\theta_0(v_1, v_2) = v_2$ ,
- $\theta_1(v_1, v_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ ,
- $\theta_2(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$ .

Définissons également trois fonctions de Heaviside  $h_0, h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  données par

$$h_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i(x_1, x_2) \geq 0, \\ 0 & \text{si } \theta_i(x_1, x_2) < 0. \end{cases}$$

La métrique de Cossarini-Sabourau sur le plan  $\mathbb{R}^2$  est la métrique finslérienne faible définie par

$$F_{CS}((x_1, x_2), (v_1, v_2)) = \sum_{i=0}^2 h_i(x_1, x_2) |\theta_i(v_1, v_2)|. \quad (1)$$

2. La boule unité  $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_{CS}((0, 0), (x_1, x_2)) \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  est appelé le disque de Cossarini-Sabourau.

Cette métrique est une métrique de Minkowski lorsque nous la restreignons à un des 6 secteur d'angle  $\frac{\pi}{3}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , un secteur sur deux portant une métrique dégénérée, étant simplement la projection sur une des demi droites  $L_k = \{te^{i\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}} \mid t \geq 0\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  et un secteur sur deux portant une métrique isométrique à la métrique de Manhattan, la métrique étant la somme des projections sur deux demi droites  $L_k$  (voir figure 6.2). Une autre façon de comprendre cette métrique est de spécifier la fonctionnelle de longueur sur  $\mathbb{R}^2$  qu'elle induit. Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sa longueur de Cossarini-Sabourau est donnée par

$$\ell_{\mathcal{H}}(\gamma) = \sum_{k=0,1,2} \int_{L_k} \text{Card}(\pi_k^{-1}(\gamma(t))) dt$$

où  $\pi_k$  désigne la projection orthogonale sur  $L_k$ . Nous pouvons facilement calculer le volume de Holmes-Thompson de ce disque, en effet, comme le volume de Holmes-Thompson de la boule unité d'une métrique de Minkowski est égal au volume de Holmes-Thompson de la boule duale, nous commençons par remarquer que le volume de la boule unité de la métrique de Manhattan vaut  $\frac{8}{\pi}$ , et le disque de Cossarini-Sabourau comporte trois secteurs dégénérés (d'air de Holmes-Thompson nulle) et trois secteurs isométriques à un quart de boule unité de Manhattan, donc

$$\text{Vol}_{HT}(\mathcal{H}) = \frac{3}{4} \frac{8}{\pi} = \frac{6}{\pi}.$$

Pour construire la sphère de Cossarini-Sabourau, nous prenons le double de  $\mathcal{H}$ , c'est à dire deux copie de  $\mathcal{H}$  collées le long de leur bord par isométrie. Nous obtenons alors une variété  $\mathcal{S}$  homéomorphe à  $\mathcal{S}^2$  munie d'une métrique finslérienne faible notée  $F_{CS}$  par abus de notation.

**Théorème** (Théorème 6.3). *Le ratio systolique de la sphère de Cossarini-Sabourau  $\mathcal{S}$  vaut  $\frac{4\pi}{3}$  et par chaque point de  $\mathcal{S}$  passe au moins trois systoles.*

La preuve de ce résultat est principalement combinatoire. Nous commençons par considérer les géodésiques spéciales de  $\mathcal{S}$  et constater que via la projection canonique  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ , le flot des géodésiques spéciales correspond au flot de billard euclidien dans un hexagone. Nous remarquons ensuite que les géodésiques spéciales périodiques ne sont pas plus courtes que les autres géodésiques périodiques. Il s'agit donc de calculer les longueurs de toutes les géodésiques spéciales périodiques et de constater que la longueur minimale possible pour une géodésique spéciale périodique vaut 4. Ceci demande de développer une dynamique symbolique que nous expliquons précisément dans le chapitre 6. Il s'agit ensuite de traiter 9 cas, étant donné que nous avons beaucoup de contraintes, les géodésiques spéciales devant être périodiques et suivre un flot de billard dans un hexagone. La plupart des géodésiques périodiques ont une longueur plus grande que 4 bien

---

avant de se refermer. Nous avons donc pu montrer que la systole vaut 4, et donc que le ratio systolique est  $\rho_{FCS}(\mathcal{S}^2) = \frac{4^2}{(12/\pi)} = \frac{4\pi}{3}$ . De plus, les courbes confondues à une hauteur de l'hexagone parcourue deux fois dans des sens différents sont des systoles, donc au moins trois systoles passent par chaque point de  $\mathcal{H}$ .

Ce dernier point fait de  $\mathcal{H}$  un bon candidat pour être un maximum local pour le ratio systolique parmi les métriques finslériennes.



# Chapitre 1

## Considérations générales sur les espaces métriques finslériens

### 1.1 Espaces métriques faibles et normes de Minkowski faibles

Nous allons définir les notions d'espaces métriques faibles, et d'espaces de Minkowski, qui sont un des cadres de travail dans lesquels nous allons évoluer tout au long de cette thèse. Les variétés Finslériennes faibles de basse régularité sont un exemple d'espaces métriques faibles dont chaque tangent est un espace de Minkowski faible. Une métrique finslérienne faible est donc une métrique infinitésimalement Minkowski faible, il est donc important dans un premier temps de comprendre les métriques faibles de Minkowski. Dans plusieurs résultats de cette thèse, nous utilisons des méthodes qui ramènent une métrique Finslérienne faible à un espace de Minkowski faible, par des approximations. Les espaces de Minkowski faibles et les métriques finslériennes faibles donnent naissance à des espaces métriques faibles, c'est à dire des ensembles munis de distances faibles. La terminologie *distance faible* se trouve dans le cours de topologie générale de Waclaw Sierpinski ([Sie52]). Cet auteur attribue cette notion à H. Ribeiro. Cette section sur les espaces métriques faibles et normes de Minkowski faibles est inspirée de [Iva01] et [Pap09].

#### 1.1.1 Espaces métriques faibles

**Définition 1.1.** (Espace métrique faible). Soit  $X$  un ensemble quelconque. Une fonction  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$  est une *distance faible* si pour tout  $x, y, z \in X$  elle satisfait les conditions suivantes :

- (i)  $d(x, x) = 0$ ,
- (ii) (Inégalité du triangle)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,

Un *espace métrique faible* est un couple  $(X, d)$  où  $d$  est une distance faible sur  $X$ . Nous demanderons souvent que la distance aie des propriétés supplémentaires, en particuliers nous dirons qu'une distance faible  $d$  sur  $X$  est

- *Non-dégénérée (ou séparante)* si  $d(x, y) > 0$  si et seulement si  $x \neq y$ .
- *Symétrique* si  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- *Finie* si  $d(x, y) < \infty$ .

Une distance dans le sens classique est une distance faible symétrique, non-dégénérée et finie. Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance.

**Remarque 1.2.** Tout au long de cette thèse, nous utiliserons l'inégalité du triangle, ainsi que des inégalités équivalentes. Dans le cas d'une distance symétrique, l'inégalité du triangle peut s'écrire de la manière suivante  $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$ . Dans le cas général d'espace métrique faible, cette inégalité se subdivise en plusieurs inégalités. Pour rendre ces inégalités plus visuelles, nous avons utilisé les notations  $p, u, v$  pour les éléments de  $X$  exprimant les inégalités suivantes, qui sont équivalentes à l'inégalité du triangle :

- $d(p, u) - d(p, v) \leq d(v, u)$ .
- $d(u, p) - d(v, p) \leq d(u, v)$ .
- $|d(p, u) - d(p, v)| \leq \max \{d(v, u), d(u, v)\}$ .
- $|d(u, p) - d(v, p)| \leq \max \{d(v, u), d(u, v)\}$ .

Les deux premières inégalités sont contenues dans les deux dernières, toutefois il est utile d'en prendre note pour la suite de cette thèse.

**Remarque 1.3.** Si  $(X, d)$  est un espace métrique faible et  $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction concave (c'est à dire que pour tout  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $0 < \lambda < 1$  nous avons  $\psi(\lambda s + (1 - \lambda)t) \geq \lambda\psi(s) + (1 - \lambda)\psi(t)$ ) telle que  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , alors  $d' := \psi \circ d$  est aussi une distance faible sur  $X$ .

Rappelons ici la preuve de cette remarque. Commençons par montrer que

$$\psi(s + t) \leq \psi(s) + \psi(t).$$

Posons  $\lambda = \frac{s}{s+t}$  et calculons

$$\psi(s) = \psi(\lambda(s + t) + 0) \geq \lambda\psi(s + t) \tag{1.1}$$

et

$$\psi(t) = \psi(0 + (1 - \lambda)(s + t)) \geq (1 - \lambda)\psi(s + t). \tag{1.2}$$

En additionnant (1.1) et (1.2), nous obtenons

$$\psi(s) + \psi(t) \geq \lambda\psi(s + t) + (1 - \lambda)\psi(s + t) = \psi(s + t).$$

Montrons de plus que  $\psi$  est croissante :

Si  $\psi$  n'était pas croissante, il existerait un  $t_0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $\psi(t_0 + \alpha) < \psi(t_0)$ , alors

$$\frac{\psi(t_0 + k\alpha) - \psi(t_0)}{k\alpha} \leq \frac{\psi(t_0 + k\alpha) - \psi(t_0)}{k\alpha} =: \lambda < 0.$$

Or ceci implique que  $\psi(t_0 + k\alpha) \leq \psi(t_0) + k\alpha\lambda < 0$ , mais pour tout  $t$ , par hypothèse  $\psi(t) > 0$ . La fonction  $\psi$  est donc croissante.

Nous sommes donc en mesure de montrer l'inégalité du triangle pour  $d' = \psi \circ d$  :

Soient  $x, y, z \in X$ , alors

$$d'(x, z) = \psi(d(x, z)) \leq \psi(d(x, y) + d(y, z)) \leq \psi(d(x, y)) + \psi(d(y, z)) = d'(x, y) + d'(y, z).$$

De plus les autres propriétés de métrique faible sont clairement vérifiées pour  $d' = \psi \circ d$ .

**Définition 1.4.** (Distance projective). Soit  $\mathcal{U} \subset X$  un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie  $X$ . Une distance faible  $d$  sur  $\mathcal{U}$  est dite *projective* si

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

lorsque  $y = tx + (1 - t)z$ , avec  $0 \leq t \leq 1$ .

Les distances projectives peuvent être vues comme des solutions du IV<sup>ème</sup> problème de Hilbert, car les segments de droites sont des géodésiques dans de tels espaces. En effet nous pouvons reformuler le IV<sup>ème</sup> problème de Hilbert de la manière suivante :

*"Caractériser toutes les distances projectives et étudier leurs propriétés".*

Les distances de Minkowski sont des exemples de distances projectives, mais les quelques hypothèses additionnelles permettent d'en faire des distances provenant d'une norme sur un espace vectoriel.

**Définition 1.5.** (Distance de Minkowski). Une *distance de Minkowski* sur un espace vectoriel réel de dimension finie  $X$  est une distance faible  $d$  sur  $X$  qui est projective et invariante par translation.

**Exemples.** 1. Soit  $X = \mathbb{R}^n$  et  $d(x, y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \dots + |y_n - x_n|^2}$ , une telle distance est appelée la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . L'espace  $\mathbb{R}^n$ , muni de la distance euclidienne, est un espace métrique de Minkowski.

2. Soit  $X = \mathbb{R}^n$  et  $d_1(x, y) = |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n|$ , alors  $d_1$  est une distance faible de Minkowski, symétrique, non-dégénérée et finie sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous l'appellerons *distance de Manhattan* ou parfois *distance  $\ell^1$* .

3. Soient  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire, alors  $d_\varphi(x, y) = \max\{0, \varphi(y - x)\}$  est une distance faible de Minkowski finie, dégénérée et non symétrique.

4. En appliquant la remarque 1.3 à la distance euclidienne  $d_{Eucl}$  et  $\psi(t) = \min\{t, 1\}$ , nous obtenons une distance  $d' = \psi \circ d_{Eucl}$  invariante par translation mais non projective, en effet, étant donnés  $x, y, z \in X$  tels que  $y = tx + (1 - t)z$  et  $0 < t < 1$  si  $d_{Eucl}(x, y) > 1$ , nous avons,

$$d'(x, y) + d'(y, z) > 1 = d'(x, z)$$

ce qui montre qu'il n'est pas possible que  $d$  soit projective car l'inégalité est stricte.

La notion de géodésique est fondamentale en géométrie. Il est effectivement essentiel de comprendre ce qu'est une "généralisation de ligne droite" dans une géométrie donnée. En géométrie riemannienne, une géodésique est souvent vue comme une solution d'une équation différentielle. Dans le cadre des espaces métriques faibles, il n'est pas question d'équation différentielle, l'espace topologique sur lequel nous travaillons n'est à priori pas une variété, et nous ne pouvons que travailler avec la notion de continuité et les propriétés de la distance faible. Il est donc nécessaire de donner une définition de géodésique métrique qui corresponde aux géodésiques riemanniennes le cas échéant, mais qui soit plus générale afin de pouvoir être utilisée dans le contexte d'un espace métrique faible.

**Définition 1.6.** (Géodésique métrique) Soit  $(X, d)$  un espace métrique faible. Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est appelée *géodésique métrique* si pour tout  $t_0 \in [a, b]$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $r, s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  vérifient  $r < s < t$ , alors

$$d(\gamma(r), \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) = d(\gamma(r), \gamma(t)).$$

**Remarque 1.7.** Dans [May41], H.Busemann et W.Mayer appellent les géodésiques métriques des "*Hilbert curves*".

### 1.1.2 Normes de Minkowski faibles

Dans l'étude des métriques finslériennes faibles, nous aurons besoin de comprendre la métrique sur l'espace tangent en un point d'une variété différentiable. Une métrique finslérienne faible restreinte à l'espace tangent en un point est une norme de Minkowski faible. Il est donc important de comprendre les normes faibles de Minkowski avant d'introduire les métriques finslériennes faibles.

**Remarque 1.8.**

- Sauf mention du contraire, les espaces vectoriels définis dans ce chapitre, sont réels et de dimension finie.
- Par commodité, nous allons nous donner une structure euclidienne auxiliaire sur les espaces vectoriels que nous considérons. Nous la noterons  $|\cdot|$ .

**Définition 1.9** (Norme faible de Minkowski). Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Une *norme faible* de Minkowski est une application  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  telle que pour tout  $x, y \in X$  et  $\lambda > 0$  nous avons

1. Positivité :  $F(0) = 0$ .
2. Homogénéité positive :  $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ .
3. Inégalité du triangle :  $F(x + y) \leq F(x) + F(y)$ .

Un espace de Minkowski faible est un couple  $(X, F)$  où  $F$  est une norme de Minkowski faible sur l'espace vectoriel  $X$ . Nous demanderons souvent à la norme de Minkowski faible des propriétés supplémentaires, en particuliers, nous dirons que  $F$  est

- *Non-dégénérée* si  $F(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- *Symétrique* (ou *réversible*) si pour tout  $x \in X$  nous avons  $F(-x) = F(x)$ .
- *Finie* si pour tout  $x \in X$ , nous avons  $F(x) < \infty$

**Proposition 1.10.** Soit  $d$  une distance de Minkowski faible sur un espace vectoriel réel  $X$ , alors la fonction  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  définie par  $F(x) = d(0, x)$  est une norme de Minkowski faible.

La preuve de cette proposition utilise la densité des nombres rationnels dans les entiers pour démontrer l'homogénéité de la norme de Minkowski faible donnée par  $F(x) = d(0, x)$ . La démonstration précise se trouve dans [Pap09, page 14]. L'importance de cette proposition réside dans le fait qu'une distance faible de Minkowski induit une norme faible de Minkowski. Inversement, nous pouvons construire une distance faible de Minkowski à partir d'une norme faible de Minkowski sur un espace vectoriel en posant

$$d(x, y) = F(y - x).$$

**Exemples.**

1. En considérant la norme euclidienne  $F(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , qui est en particuliers une norme faible de Minkowski, la distance associée est la distance euclidienne.

2. En considérant la norme  $F(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$  sur  $\mathbb{R}^n$ , la distance induite est la distance de Manhattan et est une distance de Minkowski .
3. La fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ \infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une norme de Minkowski faible sur  $\mathbb{R}$ .

4. Considérons un cône convexe ouvert  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  de sommet 0, alors la fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ |x| & \text{si } x \in \mathcal{C} \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , est une norme de Minkowski faible non symétrique.

5. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe ouvert et borné, contenant 0 dans son intérieur, alors pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , nous définissons

$$d_\Omega(x, y) = \lambda$$

où  $\lambda > 0$  est le réel positif tel que  $y - x \in \lambda \partial \Omega$ .

De telles métriques sont centrales dans cette thèse et sont le fondement de ce que nous appellerons le "point de vue géométrie convexe". Le fait qu'une telle distance est effectivement une distance faible (même une distance de Minkowski) sera démontré dans la section suivante.

6. Soit  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. Alors l'application définie par  $F(v) = |\theta(v)|$  est une norme de Minkowski faible sur  $\mathbb{R}^n$ .
7. Soit  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. L'application définie par  $F(v) = \max\{0, |\theta(v)|\}$  est une norme de Minkowski faible sur  $\mathbb{R}^n$ .
8. Soient  $\{\theta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=0}^m$  un ensemble de formes linéaires. L'application  $F(v) = \sum_{i=0}^m |\theta_i(v)|$  est une norme de Minkowski faible sur  $\mathbb{R}^n$ .
9. (Contre-exemple) Soient  $X$  un espace vectoriel et  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  une norme sur  $X$ , alors  $d(x, y) = \min\{\|y - x\|, 1\}$  est une distance qui est invariante par translation, mais qui n'est pas Minkowski car elle n'est pas projective. En effet, en prenant  $\|z\| = 1$  alors  $d(0, 2z) = 1 < 2 = d(0, z) + d(z, 2z)$ .
10. (Contre-exemple) Comme dans l'exemple précédent mais en définissant  $\rho_\alpha(x, y) = \|y - x\|^\alpha$ , alors  $\rho_\alpha$  est une distance si et seulement si  $0 < \alpha \leq 1$ . C'est une distance faible et invariante par translation, mais qui n'est pas projective pour  $\alpha < 1$ , donc  $\rho_\alpha$  n'est pas une distance de Minkowski.

Nous allons maintenant décrire la régularité d'une norme de Minkowski faible. Pour ceci, nous allons étudier comment la symétrie et la finitude des normes de Minkowski faibles vont influencer la régularité de ces normes. Commençons par définir l'ensemble sur lequel une norme de Minkowski faible est finie. Cet ensemble a une grande importance dans l'étude de la régularité des normes de Minkowski faibles, ce fait a été remarqué dans [Pap09].

**Définition 1.11.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  une norme de Minkowski faible, alors l'ensemble de finitude de  $F$  est

$$\mathcal{D}_F = \{x \in X \mid F(x) < \infty\}.$$

Le premier lemme décrit la structure de l'ensemble de finitude d'une norme de Minkowski.

**Lemme 1.12.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  une norme de Minkowski faible.

1. L'ensemble de finitude  $\mathcal{D}_F$  est un cône convexe de sommet  $0 \in X$ .
2. Si  $F$  est symétrique, alors l'ensemble de finitude  $\mathcal{D}_F$  est un sous-espace vectoriel de  $X$ .

*Démonstration.* 1. Il s'agit de montrer que pour tout  $x, y \in \mathcal{D}_F$  et tout  $\lambda, \mu > 0$ ,  $\lambda x + \mu y \in \mathcal{D}_F$ , or ceci provient directement de l'inégalité du triangle et de l'homogénéité positive de  $F$ . De plus, comme  $F(0) = 0$ , le point  $0 \in X$  est sommet du cône  $\mathcal{D}_F$ .

2. De la même manière que pour le point précédent, comme l'inégalité du triangle sur  $F$  pour deux points  $x, y \in \mathcal{D}_F$  prouve que  $x + y \in \mathcal{D}_F$ . De plus, comme  $F$  est symétrique, étant donné  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathcal{D}_F$ , nous obtenons que  $F(\lambda x) = |\lambda|F(x)$ , donc  $\lambda x \in \mathcal{D}_F$  et  $0 \in \mathcal{D}_F$ , ce qui prouve que  $\mathcal{D}_F$  est un sous-espace vectoriel de  $X$ .

□

Il s'agit maintenant de comprendre la régularité d'une norme de Minkowski faible. Nous remarquons que les sauts de la métrique se feront à la frontière entre  $\mathcal{D}_F$  et  $X \setminus \mathcal{D}_F$ , il est donc permis de penser que si une norme de Minkowski faible est finie elle sera continue alors qu'une norme de Minkowski faible sans propriété additionnelle ne le sera pas à la frontière de  $\mathcal{D}_F$ . Le lemme suivant éclaire cette intuition.

**Lemme 1.13.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  une norme de Minkowski faible. Si l'ensemble de finitude  $\mathcal{D}_F$  de  $F$  est un espace vectoriel alors  $F$  est continue sur l'intérieur relatif de  $\mathcal{D}_F$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{D}_F$  est un espace vectoriel, nous pouvons prendre une base  $\{e_i\}$  de  $\mathcal{D}_F$  et définir

$$C = \max_i (F(e_i) - F(-e_i)),$$

alors, étant donné  $x = \sum_i a_i e_i \in \mathcal{D}_F$ , nous avons

$$F(x) \leq \sum_i F(a_i e_i) \leq C \sum_i |a_i|.$$

Cette inégalité implique que si  $x \in \mathcal{D}_F$  tend vers 0, alors  $F(x)$  tend vers 0, alors, étant donné une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_F$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , nous obtenons

$$F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a - x_n + x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(a - x_n) + F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a + (x_n - a)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(a) + F(x_n - a) = F(a),$$

ce qui prouve le lemme. □

**Remarque 1.14.** Plus généralement, il est vrai que toute norme de Minkowski faible est continue sur son ensemble de finitude. Nous n'en donnons pas la preuve ici, mais nous pouvons la trouver dans [Web94, page 224].

**Définition 1.15.** Étant donné un espace de Minkowski  $(X, F)$ , nous appelons *boule unité* de  $F$  l'ensemble

$$\Omega_F = \{x \in X \mid F(x) < 1\}$$

et *boule unité rétrograde* l'ensemble

$$\Omega_F^r = \{x \in X \mid F(-x) < 1\}.$$

**Remarque 1.16.** Si  $F$  est une métrique symétrique, nous avons  $\Omega_F = \Omega_F^r$ , de plus, si  $F$  est dégénérées,  $\Omega_F$  est non compacte, et si  $F$  n'est pas finie, 0 appartient à la frontière de la boule.

**Proposition 1.17.** Soit  $F$  une norme de Minkowski faible sur un espace vectoriel de dimension finie  $X$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $F$  est finie ;
2.  $F$  est continue ;
3.  $\Omega_F$  est ouvert ;
4. 0 est un point intérieur de  $\Omega_F$

*Démonstration.* L'implication 1.  $\Rightarrow$  2. provient du lemme 1.13 et les implications 2.  $\Rightarrow$  3.  $\Rightarrow$  4. sont triviales. Pour prouver que 4.  $\Rightarrow$  1., supposons que  $F$  n'est pas finie, alors il existe un  $x \in X$  tel que  $F(x) = \infty$ , mais alors  $F(tx) = \infty$  pour tout  $t > 0$  par homogénéité. En particuliers,  $tx \notin \Omega_F$  pour tout  $t > 0$ , et donc 0 ne peut pas être contenu dans l'intérieur de  $\Omega_F$ . □

Nous remarquons que la convexité de la boule unité est équivalente à l'inégalité du triangle pour la norme de Minkowski faible. Ceci et l'homogénéité positive permettent de construire une norme de Minkowski faible sur un espace vectoriel, en partant d'un convexe contenant l'origine dans son adhérence.

**Définition 1.18** (Jauge de Minkowski). Soient  $X$  un espace vectoriel réel et  $\Omega \subseteq X$  un ensemble étoilé par rapport à l'origine  $0 \in X$ . La *jauge de Minkowski* de  $\Omega$  est la fonctionnelle  $F_\Omega : X \rightarrow [0, \infty]$  donnée par

$$F_\Omega(x) = \inf \{t > 0 \mid x \in t\Omega\}.$$

Le lemme suivant dit que toute norme de Minkowski faible et finie sur un espace vectoriel réel de dimension finie est bilipschitz à n'importe quelle norme finie sur cet espace.

**Lemme 1.19.** Soient  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $F$  une norme de Minkowski faible finie non-dégénérée sur  $X$  et  $|\cdot|$  une norme finie sur  $X$  (la norme euclidienne par exemple), alors il existe  $C_1, C_2 > 0$  tel que pour tout  $v \in X$  nous avons

$$\frac{1}{C_1}|v| \leq F(v) \leq C_2|v|.$$

*Démonstration.* Comme  $F$  est continue et comme la sphère euclidienne est compacte dans  $X$ , pour tout point  $v$  de la sphère, il existe  $C_1, C_2 > 0$  tels que  $\frac{1}{C_1} \leq F(v) \leq C_2$ . Le lemme s'ensuit car  $F$  est homogène.  $\square$

**Remarque 1.20.** Si la norme de Minkowski faible est finie mais possiblement dégénérée sur  $X$ , nous obtenons tout de même qu'elle est Lipschitz par rapport à toute autre norme sur l'espace vectoriel  $X$ , avec la même preuve que celle du lemme 1.19, mais sans borne inférieure positive.

**Proposition 1.21.** Soient  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $F$  une norme de Minkowski faible sur  $X$  et  $\Omega \subseteq X$  un convexe contenant  $0 \in X$ . Notons  $F_\Omega$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$  et  $\Omega_F$  la boule unité pour  $F$ . Nous avons alors

1. La jauge de Minkowski  $F_\Omega$  est une norme de Minkowski faible et si  $0$  est dans l'intérieur relatif de  $\Omega$ , alors  $\{x \in X \mid F(x) \leq 1\} = \overline{\Omega}$ .
2. Si  $\Omega$  est ouvert, alors  $\Omega = \Omega_{F_\Omega}$ .

*Démonstration.* Montrons que la jauge de Minkowski de  $\Omega$  est une norme de Minkowski faible. Soient  $x, y \in X$  et  $\lambda > 0$ .

1. •  $F_\Omega(0) = \inf \{t > 0 \mid 0 \in t\Omega\}$ , or  $\Omega$  contient  $0$ , donc  $F_\Omega(0) = 0$ .
- Pour  $\lambda > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} F_\Omega(\lambda x) &= \inf \{t > 0 \mid \lambda x \in t\Omega\} \\ &= \inf \left\{ t > 0 \mid x \in \frac{t}{\lambda}\Omega \right\} \\ &= \inf \{\lambda s > 0 \mid x \in s\Omega\} \\ &= \lambda \inf \{s > 0 \mid x \in s\Omega\} = \lambda F_\Omega(x) \end{aligned}$$

où on a posé  $s = \frac{t}{\lambda}$ .

- Comme  $\Omega$  est convexe, nous avons que pour  $s, t > 0$ , si  $\frac{x}{s} \in \Omega$  et  $\frac{y}{t} \in \Omega$ , alors

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s\frac{x}{s} + t\frac{y}{t}}{s+t} \in \Omega.$$

Ceci implique que si  $F_\Omega(x) < s$  et  $F_\Omega(y) < t$ , alors  $F_\Omega(x+y) < s+t$ , ce qui est équivalent à dire  $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$ .

Nous avons donc prouvé que  $F_\Omega$  est une norme de Minkowski faible.

- Montrons que  $\{x \in X \mid F(x) \leq 1\} = \overline{\Omega}$ .

Soit  $x \in \{x \in X \mid F(x) \leq 1\}$ , alors  $F_\Omega(x) \leq 1$  et donc  $tx \in \Omega$  pour tout  $0 < t < 1$ , ce qui implique que  $x \in \overline{\Omega}$ .

Pour montrer que  $\overline{\Omega} \subset \{x \in X \mid F(x) \leq 1\}$ , nous utilisons la continuité de la norme de Minkowski



faible  $F_\Omega$  sur son ensemble de finitude. En effet, comme 0 est dans l'intérieur relatif de  $\Omega$ ,  $F_\Omega < \infty$ , alors nous avons que  $\bar{\Omega} \subset \{x \in X \mid F(x) \leq 1\}$  car  $F_\Omega$  n'a pas de discontinuité sur  $\partial\Omega$ .

2. Supposons maintenant que  $\Omega$  est ouvert, alors  $F_\Omega$  est continue par le lemme 1.17 et nous obtenons alors directement  $\Omega = \Omega_F$ .

□

**Exemples.** Nous allons donner un exemple où  $\bar{\Omega} \neq \{x \in X \mid F(x) \leq 1\}$ .

Considérons

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

cet ensemble est convexe et

$$\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\},$$

et en considérant  $F_\Omega$ , alors  $F_\Omega(x, y) = \infty$  si  $y \leq 0$ , donc

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

car  $F_\Omega(x, y) = \infty$  si  $y \leq 0$ , donc  $\bar{\Omega} \neq \{x \in X \mid F(x) \leq 1\}$ .

## 1.2 Espaces de longueur et métriques finslériennes faibles.

### 1.2.1 Espaces de longueur

Dans cette section, nous définirons d'abord de façon très générale ce qu'est une structure de longueur sur un espace topologique, et les différentes propriétés d'un tel espace. Nous introduirons ensuite le cas particuliers d'espace muni d'une structure de longueur que sont les variétés finslériennes faibles. Cette section s'inspire de [Gro81], de [Iva01], de [Pap09] et de [BCS00].

**Terminologie.** Pour cette définition, nous appellerons courbe constante toute courbe  $c : [a, b] \rightarrow X$  telle que  $c(t) = x_0 \in X$  pour tout  $t \in [a, b]$  et courbe triviale toute courbe  $\tau : \{a\} \rightarrow X$  telle que  $\tau(a) = x_0$ .

**Définition 1.22.** (Structure de longueur)

Soit  $X$  un espace topologique. Une *structure de longueur* sur  $X$  est la donnée d'un couple  $(\Gamma, \ell)$ , où  $\Gamma$  est une classe de courbes admissibles qui est un sous-ensemble de toutes les courbes continues  $\gamma : I \rightarrow X$  (où  $I \subseteq \mathbb{R}$  est un intervalle) et  $\ell : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  est une fonctionnelle longueur tels que :

La classe de courbes  $\Gamma$  satisfait :

- (i)  $\Gamma$  contient les courbes constantes et est fermée pour les restrictions. C'est à dire, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une courbe admissible et  $a \leq c \leq d \leq b$ , alors la restriction  $\gamma|_{[c, d]}$  est aussi une courbe admissible.
- (ii)  $\Gamma$  est fermée pour la concaténation de courbes : Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une courbe telle que les restrictions  $\gamma|_{[a, c]}$  et  $\gamma|_{[c, b]}$  sont des courbes admissibles, alors  $\gamma$  est une courbe admissible.
- (iii)  $\Gamma$  est fermée pour les reparamétrisations : Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une courbe admissible et  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  est un homéomorphisme (appelé *reparamétrisation*), alors  $\gamma \circ \phi : [c, d] \rightarrow X$  est aussi une courbe

admissible. (Il est possible que la classe d'homéomorphisme soit restreint, par exemple aux homéomorphismes croissants)

La fonctionnelle longueur satisfait :

- (i) La longueur d'une courbe constante est toujours nulle.
- (ii) La fonctionnelle longueur  $\ell$  est additive :  $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]})$  pour tout  $c \in [a, b]$ .
- (iii) Pour une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  de longueur finie, la longueur  $\ell(\gamma|_{[a,t]})$  dépend continûment du paramètre  $t \in [a, b]$ .
- (iv) La longueur est invariante par reparamétrisation croissante :  $\ell(\gamma \circ \phi) = \ell(\gamma)$  pour toute reparamétrisation croissante  $\phi$ .

**Remarque 1.23.** • Étant donné une structure de longueur  $(\Gamma, \ell)$  sur un espace topologique  $X$ , nous avons supposé que la longueur des courbes constantes est nulle, toutefois il est possible de le démontrer, en supposant que la classe de courbes que nous considérons ne contient que des courbes de longueur finie. Si nous définissons la courbe  $c : [a, b] \rightarrow X$  par  $c(t) = x_0 \in X$  pour tout  $t$ , alors, par l'axiome d'additivité de la longueur :

$$\ell(c) = \ell(c|_{[a,b]}) = \ell(c|_{[a,d]}) + \ell(c|_{[d,b]}) = \ell(\tilde{c}) + \ell(\bar{c})$$

où  $\tilde{c}$  et  $\bar{c}$  sont des reparamétrisations de  $c$ , mais alors le fait que la longueur soit invariante par reparamétrisation implique  $\ell(c) = \ell(\tilde{c}) + \ell(\bar{c})$  et si nous supposons que  $\ell(c) < \infty$ , nous avons  $\ell(c) = 0$ .

- De même, les courbes triviales sont forcément dans  $\Gamma$ , car si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une courbe admissible, alors, par l'axiome de restriction,  $\gamma|_{[a,a]} = \gamma|_{\{a\}}$  appartient à  $\Gamma$ . De plus si nous considérons que  $\ell(\gamma) < \infty$  pour tout  $\gamma$ , la longueur de la courbe triviale est nulle par l'additivité de la longueur, en effets

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{\{a\}}) + \ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\gamma|_{\{a\}}) + \ell(\gamma)$$

ce qui force  $\ell(\gamma|_{\{a\}}) = 0$ .

Étant donné un espace topologique  $X$  muni d'une structure de longueur, nous pouvons alors définir une distance sur  $X$  à partir de cette longueur :

**Lemme 1.24.** Soient  $X$  un espace topologique,  $\Gamma$  une classe de courbes admissibles et  $\ell$  une fonctionnelle longueur sur  $X$ , alors la fonctionnelle  $d_\ell : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$d_\ell(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell(\gamma)$$

est une distance faible sur  $X$  qu'on appelle la distance induite par  $\ell$  ou distance intrinsèque .

*Démonstration.* Le fait que  $d_\ell(x, x) = 0$  provient du fait que la courbe la plus courte entre un point  $x$  et lui-même est la courbe constante égale à  $x$ , et l'inégalité du triangle vient de l'additivité de la longueur et du fait que l'infimum d'une somme est plus petit que la somme des deux infimums, en effets pour  $x, y, z \in X$ ,

$$d_\ell(x, y) + d_\ell(y, z) = \inf_{\gamma_1 \in \Gamma_{xy}} \ell(\gamma_1) + \inf_{\gamma_2 \in \Gamma_{yz}} \ell(\gamma_2) \geq \inf_{\gamma \in \Gamma_{xz}} \ell(\gamma) = d_\ell(x, z)$$

où, pour  $x, y \in X$ , nous avons noté  $\Gamma_{xy} = \{(\gamma : [a, b] \rightarrow X) \in \Gamma \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$ .  $\square$

**Définition 1.25.** Une *distance intrinsèque* est une distance provenant d'une structure de longueurs.

Donnons des exemples de structures de longueur sur un espace topologique.

- Exemples.**
1. Considérer  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme quelconque  $\|\cdot\|$ , alors l'ensemble des courbes continûment dérivables par morceaux et  $\ell(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$  forment une structure de longueur sur  $\mathbb{R}^n$ .
  2. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, alors l'ensemble des courbes continûment dérivables par morceaux sur  $M$  et la longueur donnée par  $\ell(\gamma) = \int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$  défini une structure de longueur sur  $M$ .
  3. Considérer l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni de la longueur euclidienne des chemins. Poser que les chemins admissibles sont les courbe polygonales dont les cotés sont parallèles à un des axes de coordonnées. Cette structure de longueur est différente de la structure euclidienne, pour laquelle, la classe des courbes admissibles est bien plus grande (les courbes continûment dérivables). Ceci est une autre façon de définir la distance de Manhattan, en prenant l'infimum des longueurs des courbes admissibles entre deux points. Pour illustrer la différence entre cette structure de longueur et la structure euclidienne, nous pouvons considérer les points  $(0, 0), (1, 1) \in \mathbb{R}^2$  et en calculer leurs distance de Manhattan. Ici, toute courbe polygonale dont chaque coté est soit parallèle à l'axe  $O_x$ , soit parallèle à l'axe  $O_y$  et joignant  $(0, 0)$  à  $(1, 1)$  est de longueur plus grande ou égale à 2. La distance de Manhattan entre  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$  est donc 2, alors que la distance euclidienne entre ces deux points est  $\sqrt{2}$ .

**Remarque 1.26.** En regardant les exemples précédents, nous remarquons que le choix de la classe de courbes admissible influence la géométrie de l'espace. Excepté des cas particuliers, nous allons préférer utiliser des fonctionnelles longueurs différentes plutôt que d'influer sur la classe de courbes admissibles. Dans un premier lieu, il semble naturel d'utiliser la classe des courbes continues, toutefois les courbes continues peuvent être non rectifiables, c'est pourquoi nous préférons souvent la classe des courbes Lipschitz, c'est à dire, les courbes  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  telles que  $d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq C|t - t'|$ , pour tout  $t, t' \in [a, b]$  et  $C > 0$  une constante positive.

Il s'agit toutefois de noter que la définition de structure de longueur inclu les variétés sous-Riemanniennes et sous-Finslériennes, telles que décrites dans [LD21] ou [ABB19].

**Définition 1.27.** (Longueur intrinsèque)

- Soient  $(X, d)$  un espace métrique faible et  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe continue. Nous définissons la *longueur intrinsèque* de  $\gamma$  par :

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

où le supremum est pris sur les partitions  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$  de  $[a, b]$ .

- Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est dite *rectifiable pour la distance faible  $d$*  si  $\ell(\gamma) < \infty$ .

Nous pouvons donc définir une longueur intrinsèque qui ensuite pourra nous redonner une distance en prenant l'infimum de cette fonctionnelle longueur entre deux points. En effet, la longueur intrinsèque induit une structure de longueur associée à une distance. Il est donc légitime de se demander sous quelles conditions on a l'égalité  $d_\ell = d$ .

**Proposition 1.28.** *La longueur intrinsèque est idempotente, c'est à dire, étant donné  $(X, d)$  un espace métrique faible, alors si  $\gamma$  est une courbe rectifiable dans  $(X, d)$ , nous obtenons*

$$\ell(\gamma) = L_{d_\ell}(\gamma)$$

où  $L_{d_\ell} = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$  est la métrique intrinsèque engendrée par  $d_\ell$ .

*Démonstration.* L'inégalité  $L_{d_\ell}(\gamma) \geq \ell(\gamma)$  est triviale car la longueur d'une courbe dans  $X$  ne sera jamais plus courte que la distance entre ses extrémités. Afin de prouver l'autre inégalité, soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable et  $\{t_i\}$  une partition de  $[a, b]$ . On remarque que  $d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \ell(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$ , car la partie de gauche de cette expression est l'infimum des longueurs  $L_d$  de courbes entre  $\gamma(t_i)$  et  $\gamma(t_{i+1})$ , et est donc plus petit que  $\ell(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$ . On obtient alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \ell(\gamma)$$

et comme  $\gamma$  est arbitraire, nous avons prouvé la proposition. □

Cette proposition montre qu'étant donné un distance faible, rien ne sert de passer à la longueur intrinsèque plus qu'une fois car nous retrouverons toujours la même fonctionnelle de longueur. Étant donné un espace métrique faible  $(X, d)$ , il est également légitime de se demander sous quelle condition  $d_\ell = d$ . La proposition suivante répond à la question :

**Proposition 1.29.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique faible. Si  $d$  est une distance intrinsèque, alors*

$$d_\ell = d$$

où  $d_\ell(x, y) = \inf \left( \sup \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right)$  avec le supremum portant sur les partitions de  $\gamma$  et l'infimum portant sur les courbes  $\gamma$  de  $x$  à  $y$ .

*Démonstration.* Par définition, comme  $d$  est une distance intrinsèque, il existe  $l$ , une fonctionnelle longueur telle que  $d = d_l$ . Considérer  $\ell$  la longueur induite par  $d$ . Nous constatons d'abord que pour toute courbe rectifiable  $\gamma$ , nous avons  $\ell(\gamma) \leq l(\gamma)$  pour la même raison que dans la proposition 1.28. De plus, clairement une fonctionnelle longueur plus petite induit une distance plus petite, donc  $d_\ell \leq d$ . De plus nous avons déjà trivialement que  $d_\ell \geq d$ , ce qui prouve la proposition. □

Étant donné que nous travaillons actuellement sur des espaces pour lesquels la longueur des courbes est bien définie, il fait sens de se poser à nouveau la question de ce qu'est une géodésique dans ce type d'espace. En géométrie riemannienne, une géodésique est aussi la solution d'un problème d'optimisation d'un lagrangien dépendant de la métrique riemannienne. Dans le cas général d'un espace de longueur, nous ne pouvons pas faire de calcul différentiel afin d'optimiser la fonctionnelle longueur afin de trouver les courbes minimisant localement la longueur.

**Définition 1.30.** (Courbe minimisante) Soit  $X$  un espace topologique muni d'une structure de longueur

- Une courbe admissible  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une *courbe minimisantes* si pour tout  $s, t \in [a, b]$

$$d_\ell(\gamma(s), \gamma(t)) = \ell(\gamma|_{[s,t]}).$$

- Une courbe admissible  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une courbe *localement* minimisante si pour tout  $t \in [a, b]$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\gamma$  est minimisante sur  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ .

### 1.2.2 Métriques finslériennes faibles

Les métriques finslériennes sont le sujet principal de cette thèse. En 1918, Paul Finsler défend sa thèse à l'université de Göttingen en apportant une généralisation des espaces de Riemann, appelés actuellement variétés riemanniennes. La géométrie riemannienne donne un produit scalaire sur chaque fibre du fibré tangent comme objet fondamental permettant de faire de la géométrie, c'est ce qui est appelé une métrique riemannienne. Le fibré tangent étant équipé d'une métrique riemannienne, il est alors possible de définir des angles entre les vecteurs tangents, des longueurs de vecteurs et donc des longueurs de courbes (en intégrant la norme de la vitesse de ces dernières) ou une forme volume canonique. Une métrique riemannienne est donc un outil permettant de faire de la géométrie sur n'importe quelle variété différentiable (on rappelle que n'importe quelle variété différentiable peut être équipée d'une métrique riemannienne [GHL04]). L'idée de Paul Finsler est de considérer chaque fibre du fibré tangent comme un espace vectoriel normé, généralisant l'idée de base de la géométrie riemannienne. En considérant une norme sur chaque espace tangent, on peut alors aussi définir une longueur de courbes en intégrant la norme de la vitesse, toutefois il n'est plus possible de parler d'angle entre des vecteurs tangents et il n'existe plus de forme volume définie de manière canonique. La dénomination "*espaces de Finsler*" nous vient de Elie Cartan [Car34], en 1934. L'intérêt d'étudier la géométrie finslérienne est multiple, il arrive fréquemment que des métriques finslériennes apparaissent naturellement dans divers domaines de la mathématique, comme en théorie de Teichmüller, en géométrie métrique ou dans des problèmes de géométrie systolique, comme nous verrons dans cette thèse. La définition habituelle de métrique finslérienne demande à la métrique de satisfaire aux propriétés habituelles d'une norme, comme la symétrie et l'homogénéité et également d'être très régulière sur le fibré tangent. Ici, nous allons relâcher ces hypothèses afin de définir une métrique finslérienne faible sur une variété différentiable.

**Définition 1.31.** (Métrique finslérienne faible) Soit  $M$  une variété différentiable. Une *métrique finslérienne faible* sur  $M$  est une fonction  $F : TM \rightarrow [0, \infty]$  semi-continue supérieurement (i.e.  $\{(x, v) \in TM \mid F(x, v) < r\}$  est un ouvert de  $T_pM$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ) et telle que pour tout point  $x \in M$ , la restriction  $F_x = F(x, -) = F|_{T_xM}$  est une norme de Minkowski faible sur  $T_xM$ .

Une variété finslérienne faible est un couple  $(M, F)$  où  $M$  est une variété différentiable et  $F$  est une métrique finslérienne faible. Selon le contexte, nous demanderons que la métrique finslérienne faible aie des propriétés supplémentaires, en particuliers, nous dirons qu'une métrique finslérienne faible  $F$  sur  $M$  est

- *Non-dégénérée* si  $F(x, v) = 0$  si et seulement si  $v = 0 \in T_xM$ .
- *Symétrique (ou réversible)* si  $F(x, -v) = F(x, v)$  pour tout  $x \in M$  et  $v \in T_xM$ .
- *Finie* si  $F(x, v) < \infty$  pour tout  $(x, v) \in TM$ .
- *Fortement convexe* si elle est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur le fibré tangent non-nul  $TM^0 = TM \setminus \{0\}$  et si pour tout

$(x, v) \in TM^0$ , la hessienne verticale de  $F^2$

$$g_{x,v}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0} F^2(x, v + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2) \quad (1.3)$$

est définie positive. La forme bilinéaire (1.3) est appelée le *tenseur fondamental* de la métrique finslérienne  $F$ .

**Remarque 1.32.** Nous remarquons ici que l'espace tangent en un point d'une variété finslérienne faible est un espace de Minkowski faible héritant des mêmes propriétés que la métrique finslérienne (c'est à dire que par exemple, si la métrique finslérienne faible  $F : TM \rightarrow [0, \infty]$  est symétrique, alors l'espace de Minkowski faible  $(T_x M, F(x, -))$  est symétrique pour tout  $x \in M$ ).

Étant donnée une métrique finslérienne faible, on définit sa boule unité et son indicatrice de la manière suivante :

**Définition 1.33.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne, alors la boule unité de  $F$  en  $x \in M$  est

$$\Omega_x^F = \{v \in T_x M \mid F(x, v) < 1\}$$

et l'indicatrice de  $F$  est  $\mathcal{I}_x^F = \partial \Omega_x^F$ .

Étant donnée une métrique finslérienne faible sur une variété différentiable  $M$ , nous pouvons construire une structure de longueur sur  $M$  puis en faire un espace métrique faible.

**Proposition 1.34.** Soient  $(M, F)$  une variété finslérienne faible et  $\Gamma$  la classe des courbes continûment différentiables par morceaux sur  $M$ , alors

1. La fonctionnelle  $\ell_F : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  définie par

$$\ell_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

induit une structure de longueur sur  $M$  que nous appelons longueur finslérienne.

2. La fonction  $d_F : M \times M \rightarrow [0, \infty]$  définie par

$$d_F(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_F(\gamma)$$

fait de  $(M, d_F)$  un espace métrique faible.

**Démonstration.** 1. Montrons que  $\ell_F$  satisfait aux hypothèses d'une fonctionnelle longueur.

- *Additivité* : Provient de l'additivité de l'intégrale.
- *Continuité* : Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe continûment différentiable de longueur finie, alors la fonction  $t \mapsto F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  est semi-continue supérieurement, en particulier elle mesurable. De plus elle est intégrable puisque la longueur de  $\gamma$  est supposée finie. Par conséquent la fonction  $t \mapsto \ell_F(\gamma|_{[a,t]}) = \int_0^t F(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau$  est absolument continue<sup>1</sup>, et donc elle est uniformément continue.

1. On sait que l'intégrale d'une fonction intégrable d'une variable est absolument continue, voir par exemple [KF75, p. 338–339].

- *Reparamétrisation* : Ce désuit de la formule de changement de variable de la théorie de l'intégration.
- 2. Étant donnée que  $\ell_F$  est une structure de longueur, par la proposition 1.24,  $d_F$  est une distance faible. □

- Exemples.**
1. Tout espace de Minkowski faible  $(X, F)$  est une variété finslérienne faible dont la métrique finslérienne est indépendante de  $x \in X$  (i.e. constante).
  2. Toute variété riemannienne  $(M, g)$  est une variété finslérienne fortement convexe, non-dégénérée, symétrique et finie. La métrique finslérienne est donnée par  $F(x, v) = \sqrt{g_x(v, v)}$ .
  3. Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne et  $\omega$  est une 1-forme différentielle sur  $M$ , alors  $F(x, v) = \sqrt{g_x(v, v)} + \max\{\omega_x(v), 0\}$  est une métrique finslérienne faible sur  $M$ .
  4. Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux métriques finslériennes faibles sur  $M$ , alors  $\max\{F_1, F_2\}$  et  $F_1 + F_2$  sont aussi des métriques finslériennes faibles.
  5. (Transformée de Zermelo) Soit  $F$  une structure finslérienne faible sur une variété  $M$  dont la boule unité dans l'espace tangent est  $\Omega \subset TM$ . Considérer un champ de vecteurs continu  $Z : M \rightarrow TM$  tel que  $F(x, Z(x)) < 1$ , alors nous pouvons définir une nouvelle structure finslérienne faible sur  $M$  en translatant la boule unité pour  $F$  par le champ de vecteur  $Z$ . La nouvelle boule unité est alors

$$\Omega_Z = \{(x, v) \in TM \mid v \in (\Omega_x - Z(x))\}.$$

Ceci permet alors de définir la métrique

$$F_Z(x, v) = \inf \left\{ t > 0 \mid \frac{1}{t}v \in \Omega_Z \right\}$$

et cette métrique, pour  $v \neq 0$ , satisfait

$$F \left( x, \frac{v}{F_Z(x, v)} + Z(x) \right) = 1.$$

C'est une métrique finslérienne faible que nous appellerons *transformée de Zermelo* de  $F$  respectivement au champ de vecteurs  $Z$ .

6. Soient  $\{\theta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=0}^m$  un ensemble de formes linéaires et  $\{h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=0}^m$  un ensemble de fonctions positives et semi-continues supérieurement. La fonctionnelle  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$F(x, v) = \sum_{i=0}^m h_i(x) |\theta_i(v)|$$

est une métrique finslérienne faible. Nous utiliserons une telle métrique dans le chapitre 6.

### Volume de Holmes-Thompson

En géométrie Finslerienne, il existe plusieurs notions naturelles de volume. Dans cette thèse, nous travaillerons avec le volume de Holmes-Thompson car il est particulièrement adapté aux questions reliant le volume total d'une variété aux géodésiques, ce qui sera fait dans le chapitre 6.

**Définition 1.35.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de dimension  $n$ . Soit  $B$  la boule unité pour  $F$  et soit  $B^* = \{\theta \in T^*M \mid \theta(v) \leq 1 \text{ pour tout } v \in B\} \subset T^*M$  la co-boule unité, alors pour tout borélien  $A \subset M$ , le volume de Holmes-Thompson de  $A$  est donné par

$$\text{Vol}_{\text{HT}}(A) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\bigcup_{x \in A} B_x^*} d\mathcal{L}$$

où  $\mathcal{L}$  est la mesure de symplectique sur  $T^*M$  et  $\omega_n$  le volume standard de la boule unité euclidienne.

Nous ne démontrons pas de résultats particuliers sur le volume de Holmes-Thompson. Nous n'utiliserons le volume de Holmes-Thompson que dans le chapitre 6 et il n'est pas nécessaire de s'attarder sur les propriétés de ce volume pour ce chapitre. Nous allons donner ici que quelques exemples de calcul du volume dans des cas simples qui pourront être repris dans le chapitre 6.

**Exemples.** 1. Considérer l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , alors la métrique euclidienne peut être vue comme une métrique de Minkowski. Le calcul du volume de la boule unité euclidienne nous donne alors

$$\text{Vol}_{\text{HT}}(B) = \frac{1}{\omega_n} \text{Vol}(B) \text{Vol}(B^*) = \omega_n.$$

2. Considérer  $\mathbb{R}^2$  muni de la métrique de Manhattan, alors le volume de la boule unité

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

est donné par

$$\text{Vol}_{\text{HT}}(U) = \frac{1}{\pi} \text{Vol}(U) \text{Vol}(U^*) = \frac{8}{\pi}$$

car le volume standard de  $U$  est 2 et le volume standard de  $U^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$  vaut 4.

3. Nous remarquons que le volume de Holmes-Thompson de la boule et le volume de Holmes-Thompson de la co-boule sont égaux sur un espace de Minkowski.

### 1.2.3 Différents points de vue sur la géométrie finslérienne

Nous allons maintenant voir différents points de vue possibles sur ce qu'est une métrique finslérienne. Certains de ces points de vue seront plus analytiques, et d'autres seront plus synthétiques, mais tous seront équivalents à la donnée abstraite d'une métrique finslérienne faible sur une variété différentiable  $M$ .

#### Géométrie convexe

Le premier de ces points de vue est ce que nous appellerons le point de vue "géométrie convexe". Ce point de vue est intéressant car il permet de lier des résultats de géométrie convexe à la géométrie finslérienne, via la boule unité de la métrique.

**Définition 1.36** (Champ d'ouverts). Soit  $M$  une variété différentiable.

- Un *champ d'ouverts* sur  $M$  est la donnée d'un sous-ensemble ouvert  $\Omega \subset TM$  contenant la section nulle.



- Un *champ d'ouverts étoilés autour de l'origine* est un champ d'ouverts  $\Omega \subset TM$  contenant la section nulle et tel que chaque  $\Omega_x$  est étoilé autour de  $0 \in T_xM$ . Un *champ de convexes* est un champ d'ouverts dont chaque  $\Omega_x$  est convexe.

**Remarque 1.37.** La donnée d'un champ de convexes sur une variété différentiable est équivalente à la donnée d'une métrique finslérienne faible. Ceci est une approche synthétique, car l'étude des convexes permettra de déduire les propriétés de la métrique et inversement. Par exemple, si les convexes du champ de convexes sont symétriques par rapport à  $0 \in T_xM$ , alors la métrique sera une métrique symétrique.

**Proposition 1.38.** [PT09] Soit  $M$  une variété différentiable, alors la donnée d'un champ de convexes  $\Omega \subset TM$  est équivalente à la donnée d'une métrique finslérienne faible  $F$  sur  $M$ .

*Démonstration.* Étant donné un champ de convexes  $\Omega \subset TM$ , on définit une fonction  $F_\Omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$F_\Omega(x, v) = F_{\Omega_x}(v) = \inf \{t > 0 \mid v \in t\Omega_x\}.$$

Clairement,  $F_{\Omega_x}$  est une norme de Minkowski faible sur  $T_xM$ ; montrons que  $F_\Omega$  est semi-continue supérieurement. Par définition,  $\Omega \subset TM$  est ouvert, et  $\Omega = \{(x, v) \in TM \mid F_\Omega(x, v) < 1\}$ . Nous remarquons que pour tout  $t > 0$ , l'ensemble  $\{(x, v) \in TM \mid F_\Omega(x, v) < t\}$  est soit vide (lorsque  $t \leq 0$ ) soit homéomorphe à  $\Omega$  (pour  $t > 0$ ). Par conséquent, tous les ensembles de sous-niveau de  $F_\Omega$  sont ouverts, ce qui implique que  $F_\Omega$  est semi-continue supérieurement. Nous avons montré que  $F_\Omega$  ainsi défini, est une métrique finslérienne faible sur  $M$ .

Inversement, étant donné une métrique finslérienne  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  sur une variété  $M$ , on note

$$\Omega_x = \{v \in T_xM \mid F(x, v) < 1\}$$

la boule unité pour  $F$  dans  $T_xM$ . Cet ensemble est un convexe de  $T_xM$  car  $F_x$  est une norme de Minkowski. De plus  $\Omega = \cup_{x \in M} \Omega_x \subset TM$  est ouvert car  $F$  est semi-continue supérieurement. Cela démontre que  $\Omega$  est un champ d'ouverts convexes sur  $M$ .  $\square$

Cette proposition permet d'utiliser des notions de la géométrie convexe en géométrie finslérienne.

**Exemples.** 1. (Métrique de Funk) Soit  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  un convexe ouvert. On définit la *métrique de Funk*  $F : T\mathcal{U} \rightarrow [0, \infty[$  par

$$F(x, v) = \inf \{t > 0 \mid v \in t\mathcal{U} - x\} = \inf \left\{ t > 0 \mid \left(x + \frac{v}{t}\right) \in \mathcal{U} \right\}.$$

Le champ de convexes de la métrique de Funk est

$$\Omega = \{(x, v) \in T\mathcal{U} \mid v \in (\mathcal{U} - x)\}.$$

Nous remarquons que cette métrique finslérienne faible n'est pas symétrique et que ses autres propriétés dépendent de la forme du convexe  $\mathcal{U}$ . Cette métrique finslérienne faible s'appelle la *métrique de Funk*. On remarque que si le convexe  $\mathcal{U}$  contient l'origine, la métrique de Funk est un cas particulier de transformée de Zermelo, en effet, en considérant le champ de vecteurs dans  $\mathcal{U}$  donné par  $Z(x) =$

$\overrightarrow{0x}$ , et en prenant la transformée de Zermelo de la métrique finslérienne faible donnée par la jauge de Minkowski de  $\mathcal{U}$ , nous avons obtenu la métrique de Funk sur  $\mathcal{U}$ .

2. (Métrique de Hilbert) Étant donné un convexe  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ , la symétrisation de la métrique de Funk  $F$  du convexe, donnée par

$$H(x, v) = \frac{1}{2}(F(x, v) + F(x, -v))$$

est appelée la *métrique de Hilbert*.

Les métriques de Funk et de Hilbert sont projectives.

### Dérivée métrique

Étant donné un espace métrique faible  $(X, d)$  il est légitime de se demander si la distance est intrinsèque, et même, plus précisément, si elle est finslérienne. Dans [May41], Busemann et Mayer donnent une réponse partielle à cette question, que Sergei Ivanov, dans [Iva08], généralise au cas d'une métrique finslérienne faible symétrique. Pour trouver une distance à partir d'une métrique finslérienne, nous procédons à une intégration, intuitivement, il paraît donc légitime de procéder à une opération de type "différenciation" pour retrouver la métrique finslérienne d'où provient la distance. Cette opération s'appelle la *dérivée métrique*. Toutefois, afin d'obtenir une définition consistante de dérivée métrique, il nous faut restreindre la classe des distances faibles et des courbes étudiées.

**Définition 1.39.** (i) Une courbe *Lipschitz* est une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  sur une carte  $\mathcal{U}$  d'un variété différentiable  $M$  telle que, pour tout  $t, t' \in [a, b]$ ,

$$d_{riem}(\gamma(t), \gamma(t')) \leq C|t' - t|$$

où  $d_{riem}$  est une distance riemannienne auxiliaire sur  $\mathcal{U}$  et  $C > 0$ .

**Remarque 1.40.** Le choix de la métrique riemannienne auxiliaire n'est pas important ici car en prenant  $t, t'$  suffisamment proches, nous avons, par l'uniforme continuité de  $\gamma$  sur le compact  $[a, b]$  que  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t')$  sont assez proches et nous savons que toutes les métriques riemanniennes sont localement Lipschitz les unes par rapport aux autres.

- (ii) Une distance faible  $d$  sur une variété  $M$  est dite *Lipschitz* si elle est localement Lipschitz respectivement à une distance riemannienne auxiliaire sur  $M$ . C'est à dire : Pour tout point  $x \in M$  il existe un voisinage  $x \in \mathcal{U} \subset M$  et une constante  $C > 0$  telle que

$$d(x, y) \leq C d_{riem}(x, y)$$

pour tout  $x, y \in \mathcal{U}$ .

**Remarque 1.41.** Noter qu'une distance Riemannienne est toujours localement bilipschitz à la métrique Euclidienne dans une carte, donc nous pouvons noter, dans une carte locale

$$d(x, y) \leq C|y - x|.$$

**Remarque 1.42.** Il existe des distances faibles qui ne sont pas localement Lipschitz. Par exemple sur  $\mathbb{R}^n$  munie de la norme euclidienne  $|\cdot|$ , étant donné  $0 < \alpha < 1$ , poser  $d^\alpha(x, y) = |y - x|^\alpha$ , si  $d^\alpha$  était Lipschitz, on aurait alors  $|y - x|^\alpha \leq C|y - x|$  et alors  $|y - x|^{\alpha-1} \leq C$ . Or  $\alpha - 1 < 0$ , donc si  $x$  tend vers  $y$ , alors  $|y - x|^{\alpha-1}$  tend vers l'infini, nous obtenons donc une contradiction,  $d^\alpha$  ne peut pas être Lipschitz.

**Définition 1.43.** (Dérivée métrique) Soient  $M$  une variété différentiable,  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  une distance faible et finie,  $x \in M$  et  $v \in T_x M$ . La *dérivée métrique* de  $d$  en  $x$  est donnée par la formule suivante :

$$F_d(x, v) := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|}$$

où  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$  est une courbe paramétrée naturellement et telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$  (nous disons ici que la courbe  $\gamma$  représente l'élément  $(x, v) \in TM$ ).

Le lemme suivant montre que la notion de dérivée métrique ne dépend pas du choix de la courbe représentant l'élément  $(x, v) \in TM$ .

**Lemme 1.44.** Soit  $d$  une distance Lipschitz sur une variété différentiable  $M$  et soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux courbes différentiables en 0 et telles que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  et  $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ , alors

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma_1(0), \gamma_1(t))}{|t|} = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma_2(0), \gamma_2(t))}{|t|}.$$

*Démonstration.* Nous avons, par les inégalités du triangle inverses (remarque 1.2) nous obtenons :

$$\left| \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma_1(0), \gamma_1(t))}{|t|} - \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma_2(0), \gamma_2(t))}{|t|} \right| \leq \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\max \{d(\gamma_2(t), \gamma_1(t)), d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\}}{|t|}.$$

De plus, comme  $d$  est Lipschitz et  $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C d_{riem}(\gamma_2(t), \gamma_1(t)) = C d_{riem}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = o(|t|) \quad t \rightarrow 0$$

et

$$d(\gamma_2(t), \gamma_1(t)) \leq C d_{riem}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = o(|t|) \quad t \rightarrow 0$$

car la métrique riemannienne auxiliaire est symétrique. Nous avons donc démontré le lemme.  $\square$

Les questions de dérivées métriques sont liées aux questions d'égalité entre la longueur intrinsèque et la longueur finslérienne sur l'ensemble des courbes, comme nous allons étudier au chapitre 2. Nous allons également expliquer sous quelles conditions la dérivée métrique d'une distance finslérienne redonne la métrique finslérienne qui a produit la distance.

### Point de vue analytique

Le point de vue analytique en géométrie Finslerienne est le point de vue développé dans [BCS00]. Si une métrique finslérienne faible a une régularité suffisante pour être dérivée et est fortement convexe, nous pourrions utiliser des stratégies de calcul tensoriel afin de décrire les géodésiques d'une telle métrique. Ceci est utile

notamment dans l'étude des géodésiques spéciales, qui seront étudiées au chapitre 5 de cette thèse.

Soit  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  un métrique finslérienne faible de classe  $\mathcal{C}^3$  et fortement convexe sur une variété  $M$  et soit  $g$  le tenseur fondamental associé à  $F$  (défini en (1.3)). Nous allons nous placer dans un système de coordonnées sur la variété  $TM$ . Plus précisément, si  $\mathcal{U} \subset M$  est un ouvert auquel sont associées les coordonnées  $x^1, \dots, x^n$ , alors un vecteur  $v \in T\mathcal{U}$  peut s'écrire  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Les  $2n$  fonctions  $x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n$  sont appelées *coordonnées naturelles* sur  $T\mathcal{U}$ . Nous pouvons écrire le tenseur fondamental en coordonnées :

$$g_{ij}(x, v) = \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \partial v^j}(x, v). \quad (1.4)$$

Le tenseur fondamental ressemble quelque peu à une métrique riemannienne, mais il est important de noter que ce tenseur est défini sur le tangent non nul  $T^0\mathcal{U}$  et pas sur  $\mathcal{U}$ . Ceci est une grande différence par rapport à une métrique riemannienne. Nous remarquons qu'en coordonnées, le tenseur fondamental se calcule de la façon suivante :

$$g_{(x,v)}(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x, v) \xi^i \eta^j$$

pour  $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $\eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ .

**Lemme 1.45.** *Le tenseur fondamental  $g$  et la métrique finslérienne  $F$  sont reliés par la formule suivante :*

$$F(x, v) = \sqrt{g_{(x,v)}(v, v)}.$$

*De plus, les coefficients  $g_{ij}(x, v)$  sont positivement homogènes de degré 0 par rapport à  $v$ .*

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient en appliquant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes à la fonction  $v \rightarrow \frac{1}{2}F^2(x, v)$ .  $\square$

Il s'agit maintenant de comprendre une troisième classe de courbes aux propriétés extrémales pour une fonctionnelle dépendant de la métrique finslérienne. Nous avons déjà défini les géodésiques métriques et les courbes minimisantes, nous allons maintenant définir ce qu'est une géodésique dans le cas d'une métrique finslérienne  $\mathcal{C}^3$  et fortement convexe.

**Définition 1.46.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible dont la métrique est  $\mathcal{C}^3$  et fortement convexe et  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe  $\mathcal{C}^1$ , alors l'énergie de  $\gamma$  est l'intégrale

$$E(\gamma) = \int_a^b F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Il est facile de démontrer qu'une courbe minimise l'énergie si et seulement si elle minimise la longueur finslérienne et est paramétrée à vitesse constante. Ceci permet donc de définir une *géodésique différentielle*.

**Définition 1.47.** Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est une *géodésique différentielle* si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie.

**Proposition 1.48.** *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible dont la métrique est  $\mathcal{C}^3$  et fortement convexe. Soit  $g$  le tenseur fondamental de  $F$ . Dans un système de coordonnées locales on note  $g_{ij}$  le tenseur fondamental*

et  $g^{ij}$  son inverse. Une courbe  $\beta(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est une géodésique différentielle pour la métrique finslérienne  $F$  si et seulement si on a

$$\ddot{x}^k + \gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

où

$$\gamma_{ij}^k(x, v) = \frac{1}{2} g^{k\mu} \left\{ \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \right\}$$

sont les symboles de Christoffel généralisés (noter que le tenseur fondamental et les symboles de Christoffel généralisés dépendent de  $(x, v)$  et non pas seulement de  $x$  comme en géométrie riemannienne).

Nous ne donnons pas de preuve de ce résultat qui est essentiellement calculatoire. Toutefois la preuve se trouve dans [Pap09, chapitre 3] et [BCS00].

Nous avons ainsi défini trois types de géodésiques. La première définition est celle de *géodésique métrique* (définition 1.6), c'est une définition purement métrique. La deuxième définition est celle de *courbe minimisante* (définition 1.30) et est dans une intersection entre la géométrie métrique et la géométrie différentielle et la troisième définition, celle de *géodésique différentielle* (définition 1.47) est une définition de géométrie différentielle, faisant intervenir une équation différentielle.

Une question naturelle est de savoir dans quelles circonstances ces définitions sont équivalentes. Notons premièrement qu'il est facile de vérifier que toute courbe minimisante est une géodésique métrique.

**Lemme 1.49.** *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible et  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , alors  $\gamma$  si  $\gamma$  est une courbe minimisante, elle est une géodésique métrique.*

*Démonstration.* Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe minimisante, c'est à dire, pour tout  $s, t \in [a, b]$  nous avons

$$d_F(\gamma(s), \gamma(t)) = \ell_F(\gamma|_{[s,t]}).$$

Ceci implique que pour  $t_0 \in [a, b]$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $r, s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  vérifient  $r < s < t$ , alors

$$d_F(\gamma(r), \gamma(s)) + d_F(\gamma(s), \gamma(t)) = \ell_F(\gamma|_{[r,s]}) + \ell_F(\gamma|_{[s,t]}) = \ell_F(\gamma|_{[r,t]}) = d_F(\gamma(r), \gamma(t)),$$

ce qui prouve que  $\gamma$  est une géodésique métrique. □

D'autre part, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 1.50.** *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne dont la métrique est  $\mathcal{C}^3$ , fortement convexe, symétrique et non-dégénérée, alors les géodésiques différentielles sont des courbes localement minimisantes.*

La preuve de ce théorème se trouve dans [BCS00, page 155]. Elle est semblable à la preuve dans le cas riemannien mais il faut prouver une version Finslérienne du Lemme de Gauss.

Une question qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse est le fait que les géodésiques métriques sont des courbes minimisantes. La clé de ce problème réside dans l'égalité entre la longueur intrinsèque et la longueur

finslérienne. En effet, si pour toute courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  nous avons

$$\ell(\gamma) = \ell_F(\gamma),$$

la preuve que les géodésiques métriques sont minimisantes serait directe. En effet, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une géodésique métrique et que l'inégalité ci dessus est vérifiée, nous aurons

$$\ell_F(\gamma) = \ell(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d_F(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = d_F(\gamma(a), \gamma(b))$$

ce qui impliquera que  $\gamma$  est une courbe minimisante.

Il existe différents théorèmes donnant une solution à cette question. Le premier se trouve dans [AT04] et concerne la dérivée métrique. Nous l'énonçons sans preuve.

**Théorème 1.51.** [AT04] Soit  $(X, d)$  un espace métrique symétrique non-dégénéré, alors pour toute courbe Lipschitz  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , nous avons

$$\ell(\gamma) = \int_a^b F_d(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

où  $F_d$  est la dérivée métrique de  $d$  (voir définition 1.43).

La preuve de ce résultat est assez profonde, relève de l'analyse géométrique et fait appel au théorème de Rademacher [EG15].

**Remarque 1.52.**

- Dans le cas où la distance  $d$  provient d'une métrique finslérienne non-dégénérée, symétrique et fortement convexe, la dérivée métrique nous redonne la métrique finslérienne, ce qui montre que le théorème est vrai pour les variétés finslériennes non-dégénérées, symétriques et fortement convexes.
- Nous remarquons également que dans le cas riemannien, nous avons égalité entre la distance intrinsèque et la distance riemannienne sur les courbes absolument continues.

Cette discussion implique donc le résultat suivant.

**Théorème 1.53.** Soient  $(M, F)$  une variété munie d'une métrique finslérienne de régularité  $\mathcal{C}^3$ , symétrique, non-dégénérée et fortement convexe et  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe Lipschitz, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\gamma$  est une géodésique métrique.
2.  $\gamma$  est une courbe localement minimisante.
3.  $\gamma$  est une géodésique différentielle.

*Démonstration.* 1.  $\Rightarrow$  2. est clair par le théorème 1.51, 2.  $\Rightarrow$  1. est trivial, 3.  $\Rightarrow$  2. est prouvé par le théorème 1.50. Il reste donc seulement à montrer qu'une courbe minimisante est une géodésique différentielle. Soit donc  $\gamma$  une courbe minimisante, c'est à dire pour tout  $s, t \in [a, b]$ ,  $\ell_F(\gamma|_{[s,t]}) = d_F(\gamma(s), \gamma(t))$ . On a alors, par la proposition 5.1.1 de [BCS00], que la courbe  $\gamma$  est critique pour la fonctionnelle longueur, ce qui implique que  $\gamma$  est une géodésique différentielle.  $\square$

**Remarque 1.54.** Nous avons montré l'équivalence entre géodésiques métrique et courbes minimisantes pour des métriques très régulières et satisfaisants tous les axiomes classiques des métriques finslérienne, toutefois, dans cette thèse, nous désirons affaiblir ces hypothèses.

Dans le théorème 2.16, Busemann et Mayer montrent que la longueur finslérienne et la longueur intrinsèque sont égales sur les courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux pour des métriques finslériennes faibles strictement convexes et Lipschitz. Ceci impliquera que si les géodésiques métriques d'une métrique finslérienne faible strictement convexe et Lipschitz sont  $\mathcal{C}^1$ , alors il y aura équivalence entre géodésique métriques et courbes minimisantes.

Busemann et Mayer montrent également qu'en dimension 2, les géodésiques métriques sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Chapitre 2

# Généralisations et unification des théorèmes de Busemann-Mayer-Kobayashi pour les espaces Finslériens de basse régularité

Dans ce chapitre, nous allons expliquer les résultats de l'article intitulé "*On the foundation of calculus of variations*" de Herbert Busemann et Walter Mayer [May41]. Il nous a semblé qu'il n'est pas totalement inutile de clarifier quelques points de ce texte.

### 2.1 Théorème de convexification de Busemann-Mayer-Kobayashi

Le premier théorème de Busemann-Mayer porte sur la convexification des métriques finslériennes faibles de faible régularité [May41, Théorème 1, page 184]. Ce théorème affirme qu'étant donné un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine sur une variété différentiable et en considérant la jauge de Minkowski de cet ouvert, la distance induite par cette jauge est égale à la distance induite par la jauge de Minkowski sur l'enveloppe convexe de chacun de ces ouverts étoilés. Ce résultat est important car il montre que la donnée d'un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine revient, géométriquement, à la donnée d'une métrique finslérienne faible.

Il existe une version du théorème de convexification écrite par Soshichi Kobayashi [Kob91, page 206], toutefois cette version est démontrée sous des hypothèses différentes de celles de [May41]. En effet, dans [May41], la métrique finslérienne faible n'est pas symétrique mais est continue, alors que dans [Kob91], la métrique finslérienne est semi-continue supérieurement mais symétrique.

Nous présenterons ici une version générale du résultat, qui contient les deux versions du théorème comme cas particuliers. Ce résultat utilise l'approche de géométrie convexe de la géométrie finslérienne. Nous allons donc utiliser des résultats de géométrie convexe [Web94], adaptés à la situation. De plus, une des idées principales de ce résultat est un point de vue "à la Busemann" de la géométrie finslérienne. Dans ses travaux, il arrive fréquemment que Busemann voie les espaces finslériens comme des espaces infinitésimalement Minkowski, il approxime donc les longueurs de courbes par des longueurs Minkowski de morceaux de courbes, et démontre le résultat en géométrie de Minkowski.



**Contexte de travail**

Soit  $M$  une variété différentiable. Soient  $\Omega \subset TM$  un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine et  $\Phi_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski de  $\Omega_x = \Omega \cap T_x M$  est donnée par

$$\Phi_x(v) = \inf \{t > 0 \mid v \in t\Omega_x\}.$$

La fonction  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie par  $\Phi(x, v) = \Phi_x(v)$  n'est en général pas une métrique finslérienne faible car elle ne satisfait pas forcément l'inégalité du triangle. Nous rappelons qu'une telle fonctionnelle est appelée une *jauge de Minkowski* et a été étudiée au chapitre 1. Par construction,  $\Phi$  est semi-continue supérieurement (les ensembles de sous-niveaux sont ouverts).

Étant donné une courbe continûment différentiable  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  nous pouvons définir la longueur de  $\gamma$  pour  $\Phi$  de la même manière que dans le chapitre 1 :

$$\ell_\Phi(\gamma) = \int_a^b \Phi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Étant donnés  $x, y \in M$ , nous définissons alors aussi la distance induite par la jauge de Minkowski  $\Phi$  de la même manière que dans le chapitre 1 :

$$d_\Phi(x, y) = \inf \ell_\Phi(\gamma)$$

où l'infimum porte sur l'ensemble des courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $x$  à  $y$ .

Le théorème de Busemann-Mayer-Kobayashi [May41][Kob91] met en évidence que cette construction induit une distance faible et surtout que cette distance faible est égale à la distance finslérienne induite par la jauge de Minkowski de l'enveloppe convexe de  $\Omega$ .

**Définition 2.1.** (i) Soit  $\Omega \subset TM$  un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine (contenant l'origine et tels que  $\Omega_x$  n'est pas forcément borné), l'*enveloppe convexe* de  $\Omega$  est l'ensemble

$$\text{Conv}(\Omega) = \bigcup_{x \in M} \text{Conv}(\Omega_x)$$

où  $\text{Conv}(\Omega_x)$  est l'enveloppe convexe de  $\Omega_x$  dans l'espace vectoriel  $T_x M$ .

(ii) Soit  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$ , alors la jauge de Minkowski de  $\text{Conv}(\Omega)$ , notée  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée le *convexifié* de  $\Phi$ .

**Remarque 2.2.** Nous notons que pour tout  $(x, v) \in TM$ , on a l'inégalité  $\Phi(x, v) \geq F(x, v)$  car  $\Omega \subset \text{Conv}(\Omega)$ .

**Théorème 2.3** (Busemann-Mayer-Kobayashi). [May41, Théorème 1, page 184][Kob91, page 206] Soient  $M$  une variété différentiable connexe et  $\Omega \subset TM$  un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine. Soient  $\Phi$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$  et  $F$  le convexifié de  $\Phi$ , alors, pour tout  $x, y \in M$ , nous avons

$$d_\Phi(x, y) = d_F(x, y).$$

**Remarque 2.4.** Pour démontrer ce théorème, il nous faut plusieurs lemmes et propositions relevant de l'analyse, de la géométrie convexe et de la géométrie finslérienne. Tout au long de cette section, nous noterons  $\Phi$  pour les jauges de Minkowski de champs d'ouverts étoilés autour de l'origine, et  $F$  pour leurs convexifiés.

Nous commençons par démontrer des lemmes d'approximation des métriques que nous étudions. Le premier lemme relève de l'analyse et nous permet de régulariser les jauges de Minkowski semi-continues supérieurement en les approchant par des fonctions continues. Le lemme suivant est le lemme 4 de [Kob91] où il est démontré pour les métriques finslériennes faibles symétriques, ici, nous avons démontré ce résultat pour les métriques faibles non-symétriques.

**Lemme 2.5.** [Kob91, Lemme 4, page 208] Soit  $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski d'un champ d'ouverts étoilés en 0, alors il existe une suite décroissante de fonctions continues  $\Phi_k : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui converge ponctuellement vers  $\Phi$ . De plus, si pour tout  $k$ ,  $F_k$  est le convexifié de  $\Phi_k$ , alors  $F_k$  est une suite décroissante et converge ponctuellement vers  $F$ , le convexifié de  $\Phi$ .

*Démonstration.* Considérer une métrique riemannienne auxiliaire sur  $M$  et  $SM \subset TM$  le fibré tangent unitaire pour cette métrique auxiliaire. Comme  $\Phi$  restreinte à  $SM$  est une fonction semi-continue supérieurement et positive, et par le fait que  $SM$  est un fibré dont la fibre est compacte, il est prouvé dans [McS44], que  $\Phi$  est la limite ponctuelle d'une suite décroissante de fonctions continues  $\Phi_k : SM \rightarrow \mathbb{R}_+$ . En étendant chaque  $\Phi_k$  par homogénéité positive, nous avons une suite décroissante de fonctions continues encore notées  $\Phi_k : TM \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\Phi(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x, v)$  pour tout  $(x, v) \in TM$ .

Pour tout  $k$ , nous notons  $F_k$  le convexifié de  $\Phi_k$ , alors, étant donné que  $\Phi < \Phi_{k+1} < \Phi_k$ , nous avons  $F < F_{k+1} < F_k$ . En effet, si  $\Phi_{k+1} < \Phi_k$ , alors la boule unité de  $\Phi_{k+1}$  contient la boule unité de  $\Phi_k$  et cet ordre d'inclusions est respecté par les enveloppes convexes.

De plus, étant donné  $(x, v) \in TM$ , nous pouvons choisir une métrique finslérienne auxiliaire  $G : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $G(x, v) = 1$ , et donc étant donné que  $\Phi(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x, v)$ , pour tout  $\varepsilon$  il existe un entier  $k_0 > 0$  tel que pour tout  $k > k_0$ ,

$$\Phi_k(x, v) < \Phi(x, v) + \varepsilon < \Phi(x, v) + \varepsilon G(x, v)$$

ce qui implique en convexifiant, que

$$F_k(x, v) < F(x, v) + \varepsilon G(x, v) = F(x, v) + \varepsilon$$

et donc  $F(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x, v)$ , et  $F$  est positivement homogène en  $v$  variable, ce qui montre le lemme.  $\square$

Avant de démontrer le prochain résultat finslérien, nous allons démontrer un lemme qui généralise le théorème des accroissements finis en dimension  $n$ .

**Lemme 2.6.** Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Pour toute partition  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $[a, b]$ , posons  $\Delta x_i = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$  et  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , alors il existe  $\delta > 0$  et une partition  $\{t_k\}$  de  $[a, b]$  telle que  $\max \Delta t_i < \delta$  et

$$\left| \dot{\gamma}(t_i) - \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \right| < \varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le théorème des accroissements finis dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $s_{ij} \in [t_i, t_{i+1}]$  tel que

$$\dot{\gamma}_j(s_{ij}) = \frac{\gamma_j(t_{i+1}) - \gamma_j(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.1)$$

Notons  $w_{ij} = \dot{\gamma}_j(s_{ij})$  et  $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in})$ .

Comme  $\gamma$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , nous avons que  $\dot{\gamma}$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ , donc il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\Delta t_i < \delta$ , alors pour tout  $s, t \in [t_i, t_{i+1}]$ , nous avons  $|\dot{\gamma}_j(s) - \dot{\gamma}_j(t)| < \varepsilon$ .

Coordonnée par coordonnée, nous pouvons donc choisir  $\delta > 0$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  nous avons  $|\dot{\gamma}_j(t_i) - w_{ij}| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , et donc

$$|\dot{\gamma}(t_i) - \mathbf{w}_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\dot{\gamma}_j(t_i) - \dot{\gamma}_j(s_{ij}))^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Nous obtenons alors, par l'équation 2.8 que

$$\left| \dot{\gamma}(t_i) - \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \right| = |\dot{\gamma}(t_i) - \mathbf{w}_i| < \varepsilon$$

ce qui prouve le lemme. □

Le lemme suivant, qui joue un rôle important, relève de la vision de la géométrie finslérienne de Herbert Busemann. L'idée est qu'une métrique finslérienne est infinitésimalement Minkowski et qu'il est donc possible d'approximer la longueur finslérienne d'une courbe par une somme de longueurs Minkowski de morceaux de courbes. Nous travaillons dans une carte  $\mathbb{R}^2$  de la variété  $M$ , et nous pouvons donc utiliser localement les propriétés algébriques de  $\mathbb{R}^n$  pour des points dans la variété.

**Définition 2.7.** Soient  $F : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une métrique finslérienne faible continue et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Soit  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  une subdivision de  $[a, b]$ . On définit l'*approximation Minkowski de la longueur de  $\gamma$  pour la subdivision  $\{t_i\}$*  par

$$S_N^F := \sum_{k=0}^{N-1} F(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)).$$

**Lemme 2.8.** Soient  $F$  une métrique finslérienne faible continue et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une subdivision suffisamment fine  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  de  $[a, b]$  telle que

$$|\ell_F(\gamma) - S_N^F| < \varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 2.6 et le fait que  $\dot{\gamma}$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  (car, quitte à changer la partition,  $\gamma$  est  $\mathcal{C}^1$ ), on obtient qu'il existe  $\delta > 0$  et  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  une partition de  $[a, b]$  satisfaisant  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i < \delta$  pour tout  $i$  tels que

$$\left| \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} - \dot{\gamma}(t_i) \right| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

où nous avons posé  $x_i = \gamma(t_i)$  et  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ .

Procédons maintenant à une estimation de  $S_N^F$  :

$$\begin{aligned} S_N^F &= \sum_i F(x_i, \Delta x_i) \\ &= \sum_i F\left(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right) \Delta t_i \\ &\leq \sum_i F\left(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} - \dot{\gamma}(t_i)\right) \Delta t_i + \sum_i F(x_i, \dot{\gamma}(t_i)) \Delta t_i. \end{aligned}$$

Par la définition de l'intégrale de Riemann, nous avons que  $\sum_i F(x_i, \dot{\gamma}(t_i)) \Delta t_i$  tend vers  $\int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ . Il s'agit de voir que  $\sum_i F\left(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} - \dot{\gamma}(t_i)\right) \Delta t_i$  tend vers 0. Si  $\Delta t_i < \delta$  pour tout  $i$ , en appliquant le résultat (2.2) nous obtenons

$$\sum_i F\left(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} - \dot{\gamma}(t_i)\right) \Delta t_i \leq A\varepsilon |b - a|$$

où  $A = \sup \{F(x, v) \mid x \in \mathcal{U}, |v| = 1\}$ , c'est à dire  $F(x, v) \leq A|v|$ . Le nombre  $A$  existe et est fini par le lemme 1.19.

Montrons l'autre inégalité :

$$\begin{aligned} \sum_i F(x_i, \dot{\gamma}(t_i)) \Delta t_i &\leq \sum_i F\left(x_i, \dot{\gamma}(t_i) - \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right) \Delta t_i + \sum_i F\left(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right) \Delta t_i \\ &= \sum_i F\left(x_i, \dot{\gamma}(t_i) - \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right) \Delta t_i + S_N^F. \end{aligned}$$

Nous avons les mêmes termes que dans le premier calcul, donc avons montré que  $\sum_i F\left(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} - \dot{\gamma}(t_i)\right) \Delta t_i$  est arbitrairement petit et donc,  $S_N^F$  est arbitrairement proche de  $\int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ .  $\square$

Nous passons maintenant aux lemmes de géométrie convexe qui vont permettre d'estimer les longueurs des courbes minimisantes pour la jauge de Minkowski non-convexe et qui nous permettront de montrer qu'en passant à l'infimum des longueurs pour le convexifié, nous "n'ajoutons pas des courbe minimisante plus courte". Les ensembles convexes considérés on le rôle des boules unités des différentes jauges que nous étudions et les propriétés de ces convexes comportent énormément d'information sur les métriques considérées. Nous allons voir que les courbes minimisantes des géométries finslériennes faibles suivent des directions qui sont les points extrêmes de la boule unité dans le tangent.

**Définition 2.9.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\Omega \subset X$  un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Un point  $x \in \Omega$  est appelé *point extrême* de  $\Omega$  si tout segment de  $\Omega$  passant par  $x$ , une des extrémités du segment est égale à  $x$ . C'est à dire, si  $x = ty + (1-t)z$ , avec  $y, z \in \Omega$  et  $t \in [0, 1]$ , alors  $x = y$  ou  $x = z$ .

Le lemme suivant utilise le théorème de Minkowski-Carathéodory (voir [Web94]) et en est une généralisation.

**Lemme 2.10.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\Omega \subset X$  un ensemble de dimension relative  $n$ , compact contenant l'origine, alors pour tout point  $x \in \text{Conv}(\Omega)$  (l'enveloppe convexe de  $\Omega$ ), il existe  $z_0, \dots, z_m \in \Omega$ , des points extrêmes et  $t_0, \dots, t_m > 0$  satisfaisants  $\sum_{i=0}^m t_i = 1$  tels que

$$x = \sum_{i=0}^m t_i z_i$$

*Démonstration.* Commençons par supposer que  $\Omega$  est convexe. Nous avons alors  $\Omega = \text{Conv}(\Omega)$ .

Nous allons prouver le lemme par induction sur la dimension  $n$ . Pour  $n = 0$ , le résultat est trivial, car  $\Omega$  est un point. Supposons alors que le lemme est vrai pour tout ensemble  $A \subset X$  de dimension plus petite ou égale à  $n - 1$ . Soient  $\Omega$  un convexe de dimension  $n$  et  $z_0 \in \Omega$  un point extrême. Soit  $x \in \Omega$  un point intérieur et considérons le segment euclidien  $[z_0, x]$ , alors le segment  $[z_0, x]$  peut se prolonger de la manière suivante : considérer  $\alpha = \sup \{t \mid tx + (1 - t)z_0 \in \Omega\}$  et soit  $y = \alpha x + (1 - \alpha)z_0$ . Comme  $\alpha \geq 1$  (car  $x$  est un point intérieur de  $\Omega$ ), nous avons  $x = \theta_0 z_0 + (1 - \theta_0)y$  où  $\theta_0 = 1 - \frac{1}{\alpha}$ .

Par construction,  $y$  est dans le bord de  $\Omega$  et donc  $y$  est contenu dans une face propre<sup>1</sup>  $\mathcal{F} \subset \Omega$ . Comme la dimension de  $\mathcal{F}$  est plus petite ou égale à  $n - 1$ , en utilisant l'hypothèse d'induction on obtient  $y = \sum_{j=0}^r \theta_j z_j$  où les  $z_j$  sont des points extrêmes de  $\mathcal{F}$  et les  $\theta_j > 0$  satisfont  $\sum_{j=0}^r \theta_j = 1$ . Comme les points extrêmes de  $\mathcal{F}$  sont aussi des points extrêmes de  $\Omega$ , nous obtenons

$$x = \sum_{i=0}^m t_i z_i$$

où  $t_i = (1 - \theta_0)\theta_i$ . Nous avons donc prouvé le lemme lorsque  $\Omega$  est convexe.

Supposons maintenant que  $\Omega \subset X$  est un ensemble compact de dimension relative  $n$  contenant l'origine. Comme les points extrêmes de  $\text{Conv}(\Omega)$  sont aussi les points extrêmes de  $\Omega$ , il suffit d'appliquer ce que nous venons de montrer à l'enveloppe convexe de  $\Omega$  et le lemme est démontré. □

Ce lemme de géométrie convexe est très utile et nous allons l'utiliser pour démontrer le lemme suivant qui est adapté à la situation de géométrie finslérienne qui nous intéresse.

**Définition 2.11.** Soit  $\Omega$  un domaine étoilé autour de  $0 \in X$ , une *direction extrême* de  $\Omega$  est un multiple positif d'un point extrême de  $\Omega$ .

**Lemme 2.12.** [May41, Théorème 2, page 179][Kob91, Lemme 1, page 207] Soit  $X$  un espace vectoriel de dimension finie.

Soient  $\Omega \subset X$  un domaine étoilé autour de l'origine,  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$  et  $F : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  le convexifié de  $\Phi$ .

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $x \in X$ , alors il existe  $z_0, \dots, z_m$  des directions extrêmes de  $\Omega$  telles que

$$x = z_0 + \dots + z_m \quad \text{et} \quad \Phi(z_0) + \dots + \Phi(z_m) \leq F(x) + \varepsilon. \quad (2.3)$$

*Démonstration.* Soit  $\Omega \subset X$  un domaine étoilé autour de l'origine.

Pour tout  $s > 0$ , définir  $s\Omega = \{sx \mid x \in \Omega\}$  et  $s\text{Conv}(\Omega)$  de la même façon.

1.  $\mathcal{F} \subset \Omega$  est une face propre si chaque point de  $\mathcal{F}$  est un point extrême.

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $r = F(x)$ , alors  $x \in (r + \varepsilon)\text{Conv}(\Omega)$ . Par le lemme 2.10, il existe  $y_0, \dots, y_m$  des points extrêmes de  $(r + \varepsilon)\Omega$  tels que

$$x = \sum_{i=0}^m t_i y_i \quad \text{avec} \quad t_i > 0, \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1$$

ceci qui implique alors que

$$\sum_{i=0}^m \Phi(t_i y_i) = \sum_{i=0}^m t_i \Phi(y_i) \leq (r + \varepsilon) \sum_{i=0}^m t_i \leq (r + \varepsilon) = F(x) + \varepsilon.$$

En posant alors  $z_i = t_i y_i$ , nous obtenons alors

$$x = z_0 + \dots + z_m \quad \text{et} \quad \Phi(z_0) + \dots + \Phi(z_m) < F(x) + \varepsilon.$$

□

**Scholie.** Dans le cas où  $F(x) > 0$ , nous pouvons retirer le  $\varepsilon$  et obtenir

$$\sum_{i=0}^m \Phi(t_i y_i) = \sum_{i=0}^m t_i \Phi(y_i) = r \sum_{i=0}^m t_i = r,$$

et donc

$$\Phi(z_0) + \dots + \Phi(z_m) = F(x)$$

et l'autre inégalité est satisfaite car pour tout  $x \in X$ , l'inégalité  $F(x) \geq \Phi(x)$  est vraie. Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité du triangle pour  $F$  ce qui prouve que si  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  est non-dégénérée, alors il existe  $z_0, \dots, z_m$  des directions extrêmes de  $\Omega$  telles que

$$x = z_0 + \dots + z_m \quad \text{et} \quad \Phi(z_0) + \dots + \Phi(z_m) = F(x). \quad (2.4)$$

Nous pouvons maintenant démontrer le cas particulier du théorème 2.3 pour les espaces de Minkowski. Nous pourrons ensuite appliquer le lemme 2.8 pour démontrer le théorème général sur les variétés finslériennes faibles.

**Proposition 2.13.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski d'un ensemble  $\Omega$  étoilé par rapport à l'origine et  $F : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  son convexifié, alors pour tout  $x, y \in X$ ,

$$d_\Phi(x, y) = d_F(x, y) \quad (= F(y - x)). \quad (2.5)$$

*Démonstration.* Soit  $\Omega \subset X$  étoilé par rapport à l'origine dont la jauge de Minkowski est  $\Phi$  et soit  $F$  le convexifié de  $\Phi$ , alors pour tout  $x \in X$  on a immédiatement  $F(v) \leq \Phi(v)$  car  $\Omega \subseteq \text{Conv}(\Omega)$ , et donc l'inclusion des boules unité induit cette inégalité entre les jauges de Minkowski. Ceci implique directement que  $d_\Phi(x, y) \geq d_F(x, y)$ .

Il s'agit donc de montrer  $d_\Phi(x, y) \leq d_F(x, y)$ . Pour prouver cette inégalité, il suffit de montrer qu'étant donné deux points  $x, y \in X$  et le segment euclidien  $[x, y]$ , il existe une courbe  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow X$  telle que  $\hat{\gamma}(a) = x$

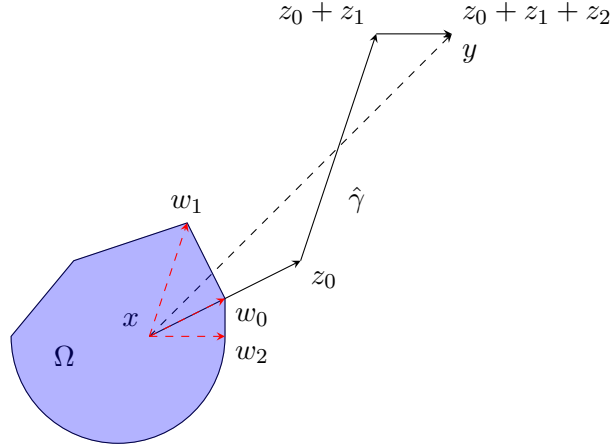


FIGURE 2.1 – La longueur de  $[x, y]$  est égale à la longueur de la courbe polygonale.

et  $\hat{\gamma}(b) = y$  et  $\ell_{\Phi}(\hat{\gamma}) \leq \ell_F([x, y])$ , étant donné que, comme nous avons vu au chapitre 1, les normes de Minkowski faibles sont projectives. Pour construire  $\hat{\gamma}$ , nous allons utiliser le lemme 2.12.

Considérons  $y - x$  le point de  $X$  auquel nous allons appliquer le lemme 2.12. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe donc  $z_0, \dots, z_m$  des points extrêmes de  $\Omega$  tels que  $\sum_{i=0}^m \Phi(z_i) \leq F(y - x) + \varepsilon$ , considérer alors  $\hat{\gamma}$  la courbe polygonale de  $x$  à  $y$  passant par  $z_0, z_0 + z_1, z_0 + z_1 + z_2, \dots, z_0 + \dots + z_m = y - x$ . Par le lemme 2.12, nous obtenons alors

$$\ell_{\Phi}(\hat{\gamma}) = \sum_{i=0}^m \Phi(z_i) \leq F(y - x) = \ell_F([x, y])$$

ce qui démontre la proposition. □

Étant donné ce résultat, nous pouvons montrer le lemme suivant. Il nous dit que le convexifié d'une jauge de Minkowski semi-continue supérieurement est bien une métrique finslérienne faible. Nous travaillons à nouveau dans une carte  $\mathcal{U}$  de la variété  $M$ .

**Lemme 2.14.** [May41, Théorème 3, page 180][Kob91, Lemme 3, page 207] Soient  $\Phi : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Minkowski d'un champ d'ouverts étoilés par rapport à l'origine  $\Omega \subset T\mathcal{U}$  et  $F : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  son convexifié, alors  $F : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une métrique finslérienne faible.

*Démonstration.* L'homogénéité positive, l'inégalité du triangle et le fait que  $F(0) = 0$  proviennent de la définition d'une jauge de Minkowski (définition 1.18) et de la proposition 1.21. Montrons la semi-continuité supérieure de  $F$  :

Soient  $v \in T_x\mathcal{U}$  et  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 2.12, il existe  $w_0, \dots, w_m \in T_x\mathcal{U}$  tels que

$$v = w_0 + \dots + w_m \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^m \Phi(x, w_i) < F(x, v) + \varepsilon$$

Comme  $\Phi$  est semi-continue supérieurement, pour tout  $i = 0, \dots, m$ , nous pouvons trouver  $\mathcal{V}_i$  un voisinage de  $w_i$  dans  $T\mathcal{U}$  tel que

$$\Phi(w'_i) \leq \Phi(w_i) + \frac{1}{m}\varepsilon \quad \text{pour tout } w'_i \in \mathcal{V}_i,$$

alors  $\mathcal{W} = \mathcal{V}_0 + \dots + \mathcal{V}_m$  est un voisinage de  $v = w_0 + \dots + w_m$  et pour tout  $v' = w'_0 + \dots + w'_m$ , avec  $w'_i \in \mathcal{W}_i$  nous obtenons

$$F(v) + 2\varepsilon \geq \sum_{i=0}^m \left( \Phi + \frac{1}{m}\varepsilon \right) \geq \sum_{i=0}^m \Phi(w'_i) \geq \sum_{i=0}^m F(w'_i) \geq F\left(\sum_{i=0}^m w'_i\right) = F(v').$$

Ce qui prouve que  $F$  est semi-continue supérieurement.  $\square$

Nous avons maintenant démontré tous les lemmes techniques qui vont nous servir à démontrer le théorème 2.3. Pour la preuve, nous allons effectuer plusieurs approximations : le lemme 2.5 pour la continuité, puis nous pourrons utiliser le lemme 2.8 qui découpe la courbe en une partition de "petits morceaux dont la longueur provient d'une norme de Minkowski" et ensuite nous appliquerons la proposition 2.13 à chaque morceau. En regardant à nouveau la courbe en entier, et en concaténant chaque courbe d'approximation, les inégalités obtenues prouvent le théorème.

Nous rappelons ici le théorème :

**Théorème ( 2.3).** [Busemann-Mayer-Kobayashi][May41, Théorème 1, page 184][Kob91, page 206] Soient  $M$  une variété différentiable et  $\Omega \subset TM$  un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine. Soient  $\Phi$  la jauge de Minkowski de  $\Omega$  et  $F$  le convexifié de  $\Phi$ , alors, pour tout  $x, y \in M$  nous avons

$$d_\Phi(x, y) = d_F(x, y).$$

*Démonstration.* Nous savons que  $d_F(x, y) \leq d_\Phi(x, y)$  car  $F(x, v) \leq \Phi(x, v)$  pour tout  $(x, v) \in T\mathcal{U}$ .

Pour montrer  $d_F(x, y) \geq d_\Phi(x, y)$  il suffit de voir que pour tout  $\varepsilon > 0$  et étant donné une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$  de régularité  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ , nous pouvons construire une autre courbe  $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathcal{U}$  de régularité  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $x$  vers  $y$  telle que  $\ell_\Phi(\hat{\gamma}) < \ell_F(\gamma) + 3\varepsilon$ .

Considérons  $\mathcal{U}$  une carte de  $M$  et soient  $x, y \in \mathcal{U}$ .

Notons d'abord que par le lemme 2.8, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partition  $\{t_i\}_{i=0}^N$  de  $[a, b]$  telle que

$$\left| S_N^F - \int_a^b F(\gamma(t), \gamma(t)) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors seulement le vecteur  $\Delta x_i = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$  et raisonnons comme dans la preuve de la proposition 2.13 avec ce vecteur. Ceci donne une approximation  $\tilde{\gamma}_i$  de  $\Delta x_i$  par des directions extrêmes  $w_j$  de la boule unité de  $\Phi$ , centrée en  $\gamma(t_{i-1})$  qui induit l'égalité (avec  $t_{i-1}$  fixé) entre la distance induite par la jauge de Minkowski  $\Phi(\gamma(t_{i-1}), -)$  et la distance provenant de la jauge de Minkowski  $F(\gamma(t_{i-1}), -)$ .

Soit  $\Phi_k$  une suite décroissante de fonctionnelles continues approximant  $\Phi$ . L'existence d'une telle suite est garantie par le lemme 2.5, alors la continuité de  $\Phi_k$  en  $x_i = \gamma(t_i)$  implique qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $y \in \mathcal{U}$  satisfaisant  $|y - x_i| < \delta$  et tel que

$$\Phi_k(y, v) < \Phi_k(x_i, v) + \frac{\varepsilon|v|}{b-a}.$$



Alors, en calculant  $\ell_{\Phi_k}(\tilde{\gamma}_i)$  et en appliquant le lemme 2.12 nous obtenons

$$\ell_{\Phi_k}(\tilde{\gamma}_i) = \int_{\tilde{\gamma}_i} \Phi_k < \sum_{j=0}^m \left( \Phi_k(\gamma(t_i), w_j) + \frac{\varepsilon|w_j|}{b-a} \right) = F_k(\gamma(t_i), \Delta x_i) + \frac{\varepsilon|\Delta x_i|}{b-a}.$$

Nous pouvons alors définir  $\tilde{\gamma}$  comme étant la concaténation des  $\tilde{\gamma}_i$ , donc la longueur de  $\tilde{\gamma}$  est la somme des  $\tilde{\gamma}_i$ , et nous obtenons :

$$\ell_{\Phi_k}(\tilde{\gamma}) = \sum_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \Phi_k \leq \sum_i \left( F_k(\gamma(t_i), \Delta x_i) + \frac{\varepsilon|\Delta x_i|}{b-a} \right) = S_N^{F_k} + \sum_i \frac{\varepsilon|\Delta x_i|}{b-a} \leq S_N^{F_k} + \varepsilon \leq \ell_{F_k}(\gamma) + 2\varepsilon.$$

Nous avons donc prouvé le théorème pour les jauges de Minkowski continues. Il reste à utiliser le lemme 2.5, pour obtenir

$$\ell_{\Phi}(\tilde{\gamma}) < \ell_{\Phi_k}(\tilde{\gamma}) + \varepsilon(b-a) \leq \ell_{F_k}(\gamma) + (2+b-a)\varepsilon < \ell_F(\gamma) + (3+b-a)\varepsilon$$

ce qui prouve le théorème car  $\varepsilon > 0$  est arbitraire. □

### 2.1.1 Remarque sur les hypothèses du théorème

Le théorème de convexification de Busemann-Mayer, tel que présenté dans cette thèse est une synthèse entre le résultat original de 1941 [May41] et l'article de S. Kobayashi [Kob91]. Aucun des deux résultats n'implique l'autre, les hypothèses sont différentes dans les deux théorèmes. En plus du travail de réécriture du résultat de Busemann-Mayer, et de clarification de certains résultats élagués par [Kob91], tels que 2.8, résultat capital dans l'esprit géométrique de Busemann, nous avons écrit un résultat plus général que les deux théorèmes.

## 2.2 Dérivée métrique et longueur intrinsèque

Dans cette section, nous allons éclaircir le théorème 2 page 186 de [May41], qui porte sur la question de l'égalité entre la longueur intrinsèque et la longueur finslérienne sur une variété, en lien avec des questions de dérivées métriques. Le résultat de dérivée métrique est une conséquence de l'égalité entre la longueur intrinsèque et la longueur finslérienne. Ce résultat est important car il donne une condition sur les distances pour que ces dernières soient finslériennes. Un résultat similaire se trouve dans [Iva08], le résultat de Sergeï Ivanov généralise le théorème 2 page 186 de [May41], toutefois les techniques de preuve sont très différentes, dans [May41], les auteurs utilisent des méthodes analytiques sur les fonctions distances, toujours dans l'esprit de l'approximation d'une métrique finslérienne par des morceaux de métriques de Minkowski. Dans [Iva08], Ivanov utilise les plongements de Kuratowski et leurs différentielles pour retrouver la métrique finslérienne qui a engendré la fonction distance. Dans cette section, nous exposerons le résultat de [May41], car il est important de réécrire cette preuve dans un langage plus moderne. Nous expliciterons également la relation entre [May41] et [Iva08].

Dans cette section, la métrique finslérienne que nous considérons est une métrique faible Lipschitz.

**Définition 2.15** (Métrique Lipschitz). Soient  $\mathcal{U}$  une carte dans une variété différentiable  $M$ . Une métrique finslérienne faible  $F : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite *Lipschitz* si il existe  $C > 0$  tel que

$$|F(x, w) - F(x, v)| \leq C|y - x| \max\{|v|, |w|\}$$

pour tout  $(x, v), (y, w) \in T\mathcal{U}$ , et où  $|\cdot|$  est la métrique euclidienne sur  $\mathcal{U}$ .

Le théorème principal de cette section est le suivant.

**Théorème 2.16.** [May41, Théorème 2, page 186] Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible dont la métrique  $F$  est Lipschitz, alors la longueur finslérienne coïncide avec la longueur intrinsèque donnée par  $d_F$  sur les courbes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  continûment différentiables par morceaux. C'est à dire

$$\ell_F(\gamma) = \ell_{d_F}(\gamma)$$

avec  $\ell_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$  et  $\ell_{d_F}(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d_F(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$  où le supremum est pris sur les partitions de  $[a, b]$ .

Pour montrer ce théorème, nous allons avoir besoin de quelques lemmes d'approximation des structures de longueur par des longueurs auxiliaires.

Pour commencer, nous définissons donc une longueur auxiliaire qui sera utile pour les approximations des longueurs finslériennes par des longueurs provenant de métriques de Minkowski.

**Définition 2.17.** Soient  $(M, F)$  une variété finslérienne faible. Nous allons considérer une carte  $\mathcal{U} \subset M$ .

- Pour chaque point  $x_0 \in \mathcal{U}$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe continûment différentiable, la *longueur centrée en  $x_0$*  est

$$\ell_{x_0}(\gamma) = \int_a^b F(x_0, \dot{\gamma}(t)) dt.$$

- Étant donnés  $x, y \in \mathcal{U}$ , la *distance centrée en  $x_0$*  est alors définie par

$$d_{x_0}(x, y) = \inf \ell_{x_0}(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur les courbes continûment différentiables de  $x$  à  $y$ .

- Nous allons également utiliser la longueur euclidienne et la distance euclidienne dans la carte  $\mathcal{U}$ , que nous noterons  $\ell_{Eucl}$  et  $d_{Eucl}$ . Nous noterons également  $[x, y]$  le segment euclidien entre  $x$  et  $y$ .

**Lemme 2.18.** [May41, Théorème 1, page 185] Soient  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  deux suites dans une carte  $\mathcal{U} \subset M$  telles que pour tout  $n$  nous avons  $x_n \neq y_n$  et satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_F([x_n, y_n])} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} = 1.$$

*Démonstration.* Nous commençons par prouver le résultat dans le cas où  $F$  est continue, et donc localement bilipschitz par rapport à la norme euclidienne dans  $\mathcal{U}$ . Il existe donc  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $v \in T_x\mathcal{U}$ ,

$$B|v| \leq F(x, v) \leq A|v|.$$

Comme l'indicatrice de  $F$  en  $x_0$  est strictement convexe, nous obtenons que  $\ell_{x_0}$  induit une distance projective, provenant d'une norme de Minkowski, donc les segments euclidiens sont minimisants, et par conséquent, pour toute courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  continûment différentiable par morceaux joignant  $x$  à  $y$  :

$$\ell_{x_0}(\gamma) \geq \ell_{x_0}([x, y]). \quad (2.6)$$

Considérons maintenant  $\gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe continûment différentiable par morceaux entre  $x_n$  et  $y_n$  telle que pour tout  $t \in [a, b]$  nous avons  $\gamma_n(t) \in B_{Eucl}(x_0, R_n)$  avec  $2 \max\{d_F(x_0, x_n), d_F(x_0, y_n)\} > R_n > \max\{d_F(x_0, x_n), d_F(x_0, y_n)\}$  et montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{x_0}(\gamma_n)}{\ell_F(\gamma_n)} = 1. \quad (2.7)$$

La continuité de  $F$  implique que pour un vecteur tangent  $v$  tel que  $|v| = 1$ , nous avons

$$C_n := \max\{F(x_n, v) - F(x_0, v)\}$$

est arbitrairement petit, si  $x_n$  suffisamment proche de  $x_0$ . De plus nous obtenons

$$\left| \frac{\ell_{x_0}(\gamma_n)}{\ell_F(\gamma_n)} - 1 \right| = \left| \frac{\ell_{x_0}(\gamma_n) - \ell_F(\gamma_n)}{\ell_F(\gamma_n)} \right| \leq C_n \frac{\ell_{Eucl}(\gamma_n)}{B \ell_{Eucl}(\gamma_n)} = \frac{C_n}{B}.$$

Ce qui prouve (2.7).

Maintenant, par définition de  $d_F$  comme l'infimum des longueurs  $\ell_F$ , pour  $n$  suffisamment grand, il existe une courbe continûment différentiable par morceaux  $\gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  de  $x_n$  à  $y_n$  telle que

$$0 \leq \ell_F(\gamma_n) - d_F(x_n, y_n) < \frac{|y_n - x_n|}{n}.$$

Noter que la propriété ci-dessus oblige  $\gamma_n$  à rester dans un voisinage de  $x_0$ . Donc en utilisant l'inégalité (2.6) nous obtenons

$$0 \leq \frac{\ell_F(\gamma_n)}{\ell_{x_0}(\gamma_n)} - \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}(\gamma_n)} < \frac{|y_n - x_n|}{n \ell_{x_0}([x_n, y_n])} = \frac{|y_n - x_n|}{n F(x_0, y_n - x_n)},$$

et donc par (2.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}(\gamma_n)} = 1. \quad (2.8)$$

Ensuite, en appliquant (2.6)

$$1 \geq \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_F([x_n, y_n])} = \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}(\gamma_n)} \frac{\ell_{x_0}(\gamma_n)}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} \frac{\ell_{x_0}([x_n, y_n])}{\ell_F([x_n, y_n])} \geq \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}(\gamma_n)} \frac{\ell_{x_0}([x_n, y_n])}{\ell_F([x_n, y_n])}.$$

Remarquons que c'est ici qu'il est important d'utiliser les inégalités avec un quotient et pas des différences, car nous avons

$$\ell_{x_0}([x, y]) \leq \ell_{x_0}(\gamma).$$

Ensuite nous obtenons, par (2.7) et (2.8) que la limite du côté droit de l'inégalité vaut 1, et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(y_n, x_n)}{\ell_F([x_n, y_n])} = 1.$$

Ce qui démontre le résultat pour une métrique finslérienne faible continue.

Si  $F$  est semi-continue supérieurement, en utilisant le lemme 2.5, nous obtenons la preuve du lemme en toute généralité car si une suite décroissante de métriques finslériennes faibles continues  $F_k$  converge vers  $F$ , alors nous avons  $\ell_{F_k} \rightarrow \ell_F$  et  $d_{F_k} \rightarrow d_F$ .  $\square$

Ce lemme implique directement le résultat suivant

**Corollaire 2.19.** [May41, Corollaire, page 186] Soit  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une métrique finslérienne faible strictement convexe sur chaque point d'un sous-ensemble compact  $K \subset \mathcal{U}$ , alors, étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$0 \leq \frac{\ell_F([x, y])}{d_F(x, y)} - 1 < \varepsilon$$

pour tout  $x, y \in K$  tels que  $|y - x| < \delta$ , où  $|\cdot|$  est la métrique euclidienne.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.16

*Démonstration.* (Du théorème 2.16)

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Considérons  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe continûment différentiable par morceaux, alors l'image de  $[a, b]$  par  $\gamma$  est compacte. Soient alors  $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\ell_{d_F}(\gamma)}$  et  $s_0 < s_1 < \dots < s_n$ , une subdivision de  $[a, b]$  satisfaisant  $\max_i |s_{i+1} - s_i| < \delta_1$  où  $\delta_1 > 0$ , donné par le corollaire 2.19, est tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \ell_F([\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})]) - \sum_{i=0}^{n-1} d_F(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} d_F(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) < \varepsilon \ell_{d_F}(\gamma) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m-1} \int_{[\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})]} F(x(t), \dot{x}(t)) dt \\ & \leq \sum_{i=0}^{m-1} F(\gamma(\tilde{t}_i), \dot{\gamma}(\tilde{t}_i))(s_{i+1} - s_i) \\ & \leq \sum_{i=0}^{m-1} \left( F(\gamma(\tilde{t}_i), \dot{\gamma}(\tilde{t}_i)) - \frac{\Delta x_i}{\Delta s_i} \right) \Delta s_i + F(x(\tilde{t}_i), \frac{\Delta x_i}{\Delta s_i}) \Delta s_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\tilde{t}_i$  est tel que  $F(x(\tilde{t}_i), \dot{x}(\tilde{t}_i)) = \max_{[s_i, s_{i+1}]} F(x(t), \dot{x}(t))$  avec  $\Delta x_i = \gamma(s_{i+1}) - \gamma(s_i)$  et  $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ . De plus, pour les mêmes raisons que dans le lemme 2.8, nous pouvons choisir  $\delta_2 > 0$  et une subdivision  $r_0 < r_1 < \dots < r_n$  of  $I$ , tels que  $\max_i |r_{i+1} - r_i| < \delta_2$  de sorte que

$$\left| \ell_F(\gamma) - \sum_{i=0}^{m-1} \int_{[\gamma(r_i), \gamma(r_{i+1})]} F_x(\dot{x}) \right| = |\ell_F(\gamma) - S_m^F| < \varepsilon/2.$$

Soient alors  $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  et une subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  de  $[a, b]$  tels que  $\max_i |t_{i+1} - t_i| < \delta$

$$|\ell_F(\gamma) - \ell_{d_F}(\gamma)| \leq \left| \ell_F(\gamma) - \sum_{i=0}^{m-1} \int_{[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]} F_x(\dot{x}) \right| + \left| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]} F_x(\dot{x}) - \ell_{d_F}(\gamma) \right| \leq \varepsilon$$

et  $\varepsilon$  est arbitraire, nous avons donc prouvé le théorème.  $\square$

**Remarque 2.20.** Ce théorème fait écho au théorème 1.53, en effet, nous avons démontré que la longueur intrinsèque est égale à la longueur finslérienne sur les courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, si la métrique est strictement convexe et Lipschitz. Ceci implique alors qu'une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux est une géodésique métrique si et seulement si elle est une courbe minimisante.

Nous pouvons aussi déduire le théorème de Busemann-Mayer sur la dérivée métrique. Ce théorème correspond au théorème 3 page 186 de [May41]

**Théorème 2.21.** [May41, Théorème 3, page 186] Soient  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  deux suites dans  $\mathcal{U}$  telles que pour tout  $n$  nous avons  $x_n \neq y_n$  et satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \in \mathcal{U}$  et  $v_n := \frac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|}$  converge vers un vecteur  $v$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{|y_n - x_n|} = F(x_0, v)$$

où nous avons noté  $|\cdot|$  la métrique euclidienne dans la carte  $\mathcal{U}$ .

*Démonstration.* Comme  $F(x_0, -)$  est une norme de Minkowski faible sur  $\mathcal{U}$ , nous avons

$$\int_{[x_n, y_n]} F(x_0, \dot{x}(t)) dt = |y_n - x_n| F(x_0, v).$$

Par conséquent, par le lemme 2.18 nous obtenons

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{\ell_{F_{x_0}}([x_n, y_n])} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{\int_{[x_n, y_n]} F(x_0, \dot{x}(t)) dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_F(x_n, y_n)}{|y_n - x_n| F(x_0, v)}$$

ce qui prouve le résultat.  $\square$

**Remarque 2.22.** Nous pouvons écrire le théorème de dérivée métrique de Busemann-Mayer d'une autre façon, facilitant la comparaison avec les résultats de [Iva08].

**Théorème 2.23.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe continûment différentiable en 0, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_F(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|} = F(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)).$$

### 2.2.1 Relations entre la dérivée métrique de Busemann-Mayer et celle de Ivanov

Dans cette section, nous allons étudier le lien entre le théorème de dérivée métrique de Busemann-Mayer [May41] et celui de Ivanov [Iva08]. Le théorème correspondant est le théorème 3.7 de [Iva08]. Il est assez clair que le théorème de Ivanov est une variante du théorème de Busemann-Mayer, mais il est utile de comprendre précisément dans quel sens. En fait, les hypothèses sont sensiblement différentes pour les deux résultats, et il

est important de comprendre les enjeux de chaque hypothèse. Nous commençons par énoncer le résultat de [Iva08], sans démonstration. Rappelons que tout espace métrique symétrique  $(M, d)$  admet un plongement isométrique dans  $L^\infty(M)$  (un exemple explicite est le plongement de Kuratowski).

**Théorème 2.24.** [Iva08] Soient  $(M, d)$  une variété différentiable équipée d'une distance symétrique et Lipschitz et  $\varphi : M \rightarrow L^\infty(M)$  un plongement isométrique de  $(M, d)$ , alors pour toute courbe Lipschitz  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|} = \|d_{\gamma(0)}\varphi(\dot{\gamma}(0))\|_\infty.$$

Ce résultat montre que la dérivée métrique est une métrique finslérienne faible, mais également, implique le corollaire suivant.

**Corollaire 2.25.** Soient  $(M, d)$  une variété métrique faible symétrique dont la métrique est intrinsèque et  $\varphi : M \rightarrow L^\infty(M)$  un plongement isométrique, alors  $d$  est une distance provenant de la métrique finslérienne

$$F_d(x, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(0), \gamma(t))}{|t|} = \|d_{\gamma(0)}\varphi(\dot{\gamma}(0))\|_\infty$$

où  $(x, v) \in TM$  est représenté par la courbe  $\gamma$ .

*Démonstration.* La preuve est très rapide car, étant donné que  $d$  provient d'une structure de longueur, nous avons que la longueur obtenue en intégrant la dérivée métrique est égale à la longueur intrinsèque provenant de  $d$  et alors les distances induites par ces deux longueurs sont égales, ce qui implique que  $d$  provient de la métrique finslérienne faible  $F_d$ .  $\square$

## 2.3 Régularité des géodésiques métriques en dimension 2

Dans cette section, nous présentons la démonstration de [May41] du résultat affirmant que les géodésiques métriques d'une surface finslérienne sont continûment différentiables si la métrique est Lipschitz et strictement convexe. Ce résultat correspond aux théorèmes 2 et 3 de [May41, page 194 à 197], et nous pouvons l'énoncer ainsi :

**Théorème 2.26.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de dimension 2 dont la métrique est strictement convexe et Lipschitz, alors les géodésiques métriques sont continûment différentiables.

Au vu de la nature locale de ce théorème, on peut considérer que  $F$  est une métrique finslérienne définie sur  $\mathbb{R}^2$ . Nous supposons de plus que  $F$  est Lipschitz, ce qui implique qu'il existe des constantes  $C$  et  $K$  telles que

$$|F(y, w) - F(x, v)| \leq C|y - x| \max\{|v|, |w|\}, \quad (2.10)$$

et

$$\frac{1}{K}|v| \leq F(x, v) \leq K|v|, \quad (2.11)$$

(voir la définition 2.15 et le lemme 1.19).

La démonstration du théorème est longue et technique, pour la rendre plus aisée à suivre, nous l'avons divisée en trois parties. Dans la première partie, on construit les "pseudo-cercles" de Buseman-Mayer, qui sont une

classe de courbes auxiliaires, continûment différentiables et qui jouent un rôle clé dans la preuve. Dans la seconde partie on démontre le résultat en admettant quelques résultats de nature technique et dans la troisième partie on démontre les résultats techniques.

Notons que les techniques utilisées ici sont propres à la dimension 2 et ne se généralisent a priori pas aux dimensions supérieures.

### 2.3.1 Pseudo-cercles de Busemann-Mayer

La clé de la démonstration de la régularité des géodésiques métriques réside dans la construction des *pseudo-cercles de Busemann-Mayer*, qui sont des courbes de classe  $C^1$  définies localement. La propriété importante des pseudo-cercles est que si une courbe continue  $\gamma$  traverse un pseudo-cercle en deux points, alors la  $F$ -longueur de  $\gamma$  peut être raccourcie en remplaçant l'arc de cette courbe entre les deux points par l'arc du pseudo-cercle. Le théorème 2.32 ci-dessous formule cette idée de façon précise.

Les pseudo-cercles sont des courbes intégrales d'un champ de vecteurs défini localement. Pour les définir, Nous fixons d'abord un point  $p \in \mathbb{R}^2$  et nous notons  $\Omega_p$  la boule unité de  $F$  au point  $p$ . Comme  $F$  est une métrique Finslérienne sur  $\mathbb{R}^2$ , nous pouvons identifier  $T_p\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{R}^2$  et considérer que cette boule est un ouvert du plan :

$$\Omega_p = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid F(p, q) < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Fixons un point  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  et choisissons des rayons  $0 < r < R$  tels que pour tout  $p \in \overline{B}(p_0, r)$ , la boule finslérienne  $\Omega_p$  est strictement incluse dans  $B(p_0, R)$  :

$$\bigcup_{p \in \overline{B}(p_0, r)} \overline{\Omega}_p \subset B(p_0, R).$$

Ici  $B(p_0, r)$  et  $B(p_0, R)$  sont les boules euclidiennes de  $\mathbb{R}^2$  centrées en  $p_0$  et de rayon  $r$  et  $R$  respectivement. Fixons encore un point  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$  et, pour  $p \in \overline{B}(p_0, r)$ . Par hypothèse  $\Omega_p$  est strictement convexe, il existe donc un unique point  $m = m_p \in \partial\Omega_p$  qui maximise l'aire orientée du triangle euclidien de sommet  $x_0, p, m$ . Cette condition peut s'écrire

$$(m - x_0) \wedge (p - x_0) = \sup \{(q - x_0) \wedge (p - x_0) \mid q \in \partial\Omega_p\},$$

où  $u \wedge v$  dénote le produit extérieur de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  (i.e.  $u \wedge v = u_1v_2 - u_2v_1$ ). Nous notons alors  $v_p = \overrightarrow{pm_p} = m_p - p$  et nous observons que l'application  $p \in \overline{B}(p_0, r) \mapsto v_p$  définit un champ de vecteurs continu qui ne s'annule en aucun point de  $\overline{B}(p_0, r)$ . Notons que ce champ de vecteurs dépend du choix du point  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$ , nous choisissons toutefois de ne pas alourdir l'écriture en notant par exemple  $v_p^{x_0}$ .

**Définition 2.27.** Un *pseudo-cercle* de Busemann-Mayer centré au point  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$  est une courbe  $\sigma : I \rightarrow B(p_0, r)$  de classe  $C^1$ , qui est une courbe intégrale maximale du champ  $v_p$ , i.e. pour tout  $t \in I$  on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = v_{\sigma(t)}.$$

Le théorème de Peano [Har02] sur les solutions d'équations différentielle à second membre continu nous

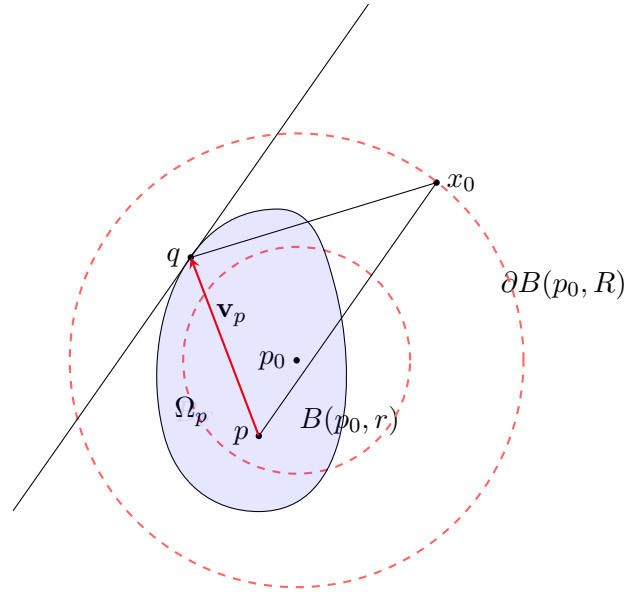


FIGURE 2.2 – Construction du champ de vecteurs  $v_p$ . Le triangle  $x_0 p q$  maximise l'aire orientée pour  $q \in \partial\Omega_{p_0}$ .

garanti l'existence d'un pseudo-cercle passant par chaque point  $p \in B(p_0, r)$ . Ce pseudo-cercle n'est par contre pas à priori unique car le champ de vecteurs  $v_p$  n'est en général pas Lipschitz.

**Exemple.** Il est facile de voir que si  $F$  est la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ , alors tout pseudo-cercle centré en  $x_0$  est un cercle euclidien centré en ce point paramétré naturellement. Cet exemple explique la terminologie.

**Lemme 2.28.** Soit  $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \overline{B}(p_0, r)$  un pseudo-cercle centré en  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$ , alors la fonction

$$t \in I \mapsto \theta(t) = \angle_{x_0}(p_0, \sigma(t)) \quad (= \text{l'angle en } x_0 \text{ du triangle orienté de sommets } x_0, p_0, \sigma(t))$$

induit un homéomorphisme entre  $\sigma(I)$  et l'arc de cercle  $\theta(a)\widehat{\theta(b)}$ . En particulier les pseudo-cercles sont des courbes simples et chaque pseudo-cercle sépare  $\overline{B}(p_0, r)$  en deux composantes connexes.

*Démonstration.* La preuve est évidente par la construction des pseudo-cercles.  $\square$

**Notation 2.29.** Nous noterons  $\Sigma^-$  la composante qui pointe vers  $x_0$  et  $\Sigma^+$  l'autre composante. Plus précisément :

$$\Sigma^- = \{y \in B(p_0, r) \mid (\overrightarrow{x_0 y} \wedge v_p)(\overrightarrow{x_0 p} \wedge v_p) > 0 \text{ pour tout } p \in \sigma(I)\}.$$

**Lemme 2.30.** Soient  $p \in B(p_0, r)$  et  $v$  un vecteur en  $p$  tel que  $F(p_0, v) = 1$ , et fixons  $t_0$ . Alors il existe  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$  tel que le pseudo-cercle  $\sigma_{x_0} : I \rightarrow B(p, r)$  est défini par les conditions initiales  $p$  et  $v$ .

*Démonstration.* Il suffit de regarder l'intersection entre  $\partial B(p_0, R)$  et une parallèle en  $p$  à une droite supportrice de  $\Omega_p$  au point  $p + v$ . Ce procédé donne un unique  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$  tel que l'air orientée du triangle  $x_0, p, p + v$  soit maximale et que  $\sigma_{x_0}$  satisfasse les conditions  $\sigma_{x_0}(t_0) = p$  et  $\dot{\sigma}_{x_0}(t_0) = v$ .  $\square$



**Notation 2.31.** Soient  $\sigma$  un pseudo-cercle et  $p, q$  deux points sur  $\sigma$ . Nous notons  $\sigma_p^q$  l'arc de pseudo-cercle entre  $p$  et  $q$ .

Nous énonçons maintenant une propriété fondamentale des pseudo-cercles. La preuve sera donnée dans la dernière partie de cette section.

**Théorème 2.32.** [May41, Lemme 5, page 191] Soient  $r > 0$  et  $R > 0$  tels que  $r + R < \frac{1}{KC}$  où  $C$  et  $K$  sont les constantes des inégalités (2.10) et (2.11)). Soit  $\sigma$  un pseudo-cercle dans  $B(p_0, r)$  de centre  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$  et  $p, q$  deux points sur  $\sigma$ . Alors pour toute courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma^+$  de  $p$  à  $q$ , on a

$$\ell_F(\gamma) \geq \ell_F(\sigma_p^q),$$

où  $\sigma_p^q$  est l'arc de pseudo-cercle de  $p$  à  $q$ .

**Remarque 2.33.** • Nous utiliserons les termes "côté convexe de  $\sigma$ " en parlant de  $\Sigma^-$  et "côté concave de  $\sigma$ " en parlant de  $\Sigma^+$ . Le théorème 2.32 justifie cette terminologie, en effet,  $\Sigma^-$  peut être appelé "convexe" car une propriété des ensembles convexes est que la projection sur ces derniers est contractante.

- Par le théorème 2.32, les pseudo-cercles sont un outil qui permet de montrer qu'une courbe n'est pas minimale. En effet, si une courbe entre deux points d'un pseudo-cercle contient un arc inclus dans  $\Sigma^+$ , il est impossible qu'elle soit minimale, car en projetant cet arc sur le pseudo-cercle, nous raccourcissons la courbe. Ce point est capital dans la démonstration de la régularité des géodésiques métriques.

### 2.3.2 Preuve de la régularité des géodésiques

**Démarche.** Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer le théorème 2.26. Esquissions d'abord brièvement la stratégie de la preuve :

1. Une première proposition affirme que si une géodésique métrique est différentiable à gauche, alors elle est aussi différentiable à droite, et les deux dérivées coïncident.
2. Nous montrerons que si une courbe n'est pas différentiable à droite, alors elle ne peut pas être minimale. Nous ferons ceci en projetant la courbe sur un pseudo-cercle bien choisi et en appliquant le théorème 2.32.
3. Nous montrerons ensuite qu'une courbe dont la dérivée n'est pas continue ne peut pas être minimale ; à nouveau en la projetant sur un pseudo-cercle bien choisi et en appliquant le théorème 2.32.

La première étape est donc le résultat suivant :

**Proposition 2.34.** Soient  $F : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1$  une métrique finslérienne Lipschitz et strictement convexe,  $\gamma : I = [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une géodésique métrique de  $x$  à  $y$  paramétrée naturellement et  $t_0 \in I$ . Si  $\gamma$  a une dérivée à droite en  $t_0$ , alors elle a une dérivée à gauche en  $t_0$  et les deux dérivées coïncident.

Le lemme suivant dit que si une courbe n'est pas différentiable à droite, alors elle pénètre une infinité de fois dans deux secteurs disjoints. Pour énoncer ce lemme nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 2.35.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe continue dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $0 \in I$  et  $\gamma(0) = p_0$ . On note

$$\mathcal{DL}_{p_0}(\gamma) = \left\{ v \in T_{p_0}\mathbb{R}^2 \mid \text{il existe une suite } \{t_k\} \text{ telle que } t_k > 0, t_k \rightarrow 0 \text{ et } v = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t_k) - p}{|\gamma(t_k) - p|} \right\}.$$

Cet ensemble est appelé l'ensemble des directions limites de  $\gamma$  en 0.

**Remarque 2.36.** • On peut reformuler cette définition en coordonnées polaires :

si  $\gamma(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$ , on a  $r(0) = 0$  et  $\theta$  est continue sur  $\{t > 0\}$ . L'ensemble des directions correspond à l'intersection

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \theta\left(]0, \frac{1}{n}]\right).$$

- La compacité du cercle  $\mathbb{S}^1$  entraîne que  $\mathcal{DL}_{p_0}(\gamma) \neq \emptyset$ .
- L'ensemble  $\mathcal{DL}_{p_0}$  est un ensemble de vecteurs unitaires. Par commodité, un vecteur unitaire de  $\mathcal{DL}_{p_0}$  sera parfois donné par sa coordonnée angulaire  $\theta$ .
- Une courbe  $\gamma$  est différentiable à droite en  $t = 0$  si et seulement si l'ensemble  $\mathcal{DL}_0(\gamma)$  est un singleton.

**Définition 2.37.** Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  une direction dans  $\mathbb{R}^2$  en coordonnées polaires. Le secteur de largeur  $\varepsilon$  dans la direction  $\theta$  est l'ensemble défini en coordonnées polaires par

$$\mathcal{S}_\varepsilon^\theta = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1, \quad |\phi - \theta| < \varepsilon\}.$$

**Lemme 2.38.** Soient  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\theta \in \mathcal{DL}_0(\gamma)$  une direction limite de  $\gamma$  en 0, alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\delta > 0$ , nous avons

$$\text{Card}(\gamma([0, \delta]) \cap \mathcal{S}_\varepsilon^\theta) = \infty.$$

Les trois résultats précédents seront démontrés dans la prochaine section. Avant de démontrer le théorème 2.26 nous démontrons d'abord que les géodésiques métriques sont différentiables en tout point :

**Théorème 2.39.** [May41, Chap. 6, page 194] Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe et  $F : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une métrique finslérienne Lipschitz et strictement convexe. Si  $\gamma$  n'est pas différentiable en tout point, elle n'est pas une géodésique métrique.

*Démonstration.* Supposons que  $\gamma$  n'est pas différentiable au point  $t_0 \in I$ . On peut supposer que  $t_0 = 0$  et que  $\gamma(0) = 0$ . On peut alors trouver  $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{DL}_0(\gamma)$  et  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  tels que  $\mathcal{S}_{\varepsilon_1}^{\theta_1} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon_2}^{\theta_2} = \emptyset$ .

Par le lemme précédent, nous avons que  $\gamma$  entre une infinité de fois dans  $\mathcal{S}_{\varepsilon_1}^{\theta_1}$  et dans  $\mathcal{S}_{\varepsilon_2}^{\theta_2}$ . Soit  $\xi$  le vecteur unitaire tel que  $\angle(\xi, \theta_1) = \angle(\xi, \theta_2) = \frac{1}{2}\angle(\theta_1, \theta_2)$ , de même direction que  $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ , et soit  $\sigma : I \rightarrow B(\gamma(0), r)$  un pseudo-cercle tel que  $\dot{\sigma}(0) = \xi$ .

Pour  $\delta > 0$  suffisamment petit, nous obtenons donc

$$\sigma([0, \delta]) \cap (\overline{\mathcal{S}_{\varepsilon_1}^{\theta_1}} \cup \overline{\mathcal{S}_{\varepsilon_2}^{\theta_2}}) = \{\gamma(0)\}.$$

Ceci implique que

$$\text{Card}(\gamma(I) \cap \sigma([0, \delta])) = \infty.$$

En particulier, il existe  $t_1, t_2 \in I$  tels que  $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \gamma(I) \cap \sigma([0, \delta])$  et  $\gamma([t_1, t_2]) \subset \Sigma^+$ , la composante concave de la boule délimitée par  $\sigma$ .

Par le théorème 2.32, nous pouvons raccourcir  $\gamma$  en projetant  $\gamma([t_1, t_2])$  sur  $\sigma([0, \delta])$  ce qui montre que  $\gamma$  n'est pas une géodésique métrique. □

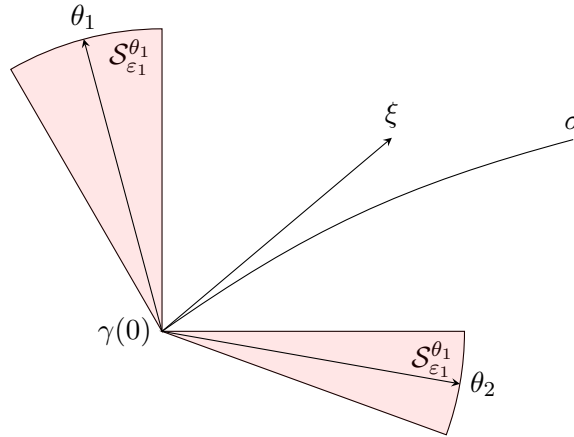


FIGURE 2.3 – Illustration du théorème 2.39

Le même type de stratégie, avec les pseudo-cercles, va nous permettre de montrer que les géodésiques métriques ont une dérivée continue.

**Théorème 2.40.** [May41, Chap. 6, page 194] Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe et  $F : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une métrique finslérienne Lipschitz et strictement convexe. Si  $\gamma$  n'est pas continûment différentiable en tout point, elle n'est pas une géodésique métrique.

*Démonstration.* Nous savons par le théorème 2.39, que  $\gamma$  est différentiable en tout  $t \in I$ . Supposons que la dérivée de  $\gamma$  n'est pas continue en  $t_0 \in I$ . Il existe donc une suite  $t_m \in I$  telle que  $\dot{\gamma}(t_m)$  tend vers  $\beta \neq \dot{\gamma}(t_0)$  lorsque  $t_m$  tend vers  $t_0$ .

Notons  $\phi = \angle(\dot{\gamma}(t_0), \beta)$  et  $\xi$  la bissectrice en  $\gamma(t_0)$  de  $\phi$ .

Soit  $x_0$  le centre d'un pseudo-cercle  $\sigma : [0, 1] \rightarrow B(\gamma(t_0), r)$  donné par les conditions initiales  $(\sigma(0), \dot{\sigma}(0)) = (\gamma(t_0), \xi)$  et tel que  $\dot{\gamma}(t_0)$  pointe dans  $\Sigma^-$  (c'est à qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\gamma(t_0 + \delta) \in \Sigma^-$ ). Construisons également la suite de pseudo-cercles  $\sigma_m$ , de centre  $x_0$  et tels que  $\dot{\sigma}_m(0) = \xi_{\gamma(t_m)}$  (le vecteur  $\xi_{\gamma(t_m)}$  est le vecteur unitaire en  $\gamma(t_m)$  parallèle à  $\xi$ ). Soit  $M \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $m > M$  nous avons  $\angle(\dot{\sigma}_m(0), \xi) < \frac{\phi}{4}$  et  $\dot{\gamma}(t_m)$  et  $\theta_m$  n'appartiennent pas au secteur  $S_{\frac{\phi}{2}}^{\xi_{\gamma(t_m)}}$ . Nous avons donc que  $\dot{\gamma}(t_m) \in \Sigma_m^+$  et  $\theta_m \in \Sigma_m^-$  où  $\Sigma_m^+$  et  $\Sigma_m^-$  sont les côtés concave et convexe de  $\sigma_m$ .

Nous pouvons maintenant appliquer le fait que  $\gamma$  intersecte  $\sigma_m$  de manière transverse en  $t_m$ .

Comme  $\dot{\gamma}(t_m)$  pointe dans  $\Sigma_m^-$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $m > M$ , nous avons  $\gamma(t_m - \delta) \in \Sigma_m^+$  et  $\gamma(t_m + \delta) \in \Sigma_m^+$ .

Nous pouvons également appliquer le fait que  $\gamma$  intersecte  $\sigma$  de manière transverse en  $t_0$ .

Comme  $\dot{\gamma}(t_0)$  pointe dans  $\Sigma^+$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $m > M$ , nous avons  $\gamma(t_0 + \delta) \in \Sigma^+$ .

Par conséquent, il suffit de montrer que  $\gamma(t_0) \in \Sigma_m^-$  et nous aurons que  $\gamma([t_0, t_m + \delta])$  coupe  $\sigma_m$  de manière transverse en deux points, ce qui permettra d'appliquer le théorème 2.32 et de conclure que  $\gamma$  ne peut pas être une géodésique métrique.

**Preuve que  $\gamma(t_0) \in \Sigma_m^-$  :**

Soit la suite

$$\theta_m = \frac{\gamma(t_0) - \gamma(t_m)}{|\gamma(t_0) - \gamma(t_m)|}$$

et remarquer que  $\theta_m$  tend vers  $-\dot{\gamma}(t_0)$  lorsque  $t_m$  tend vers  $t_0$ . Or  $\dot{\gamma}(t_0)$  pointe vers  $\Sigma^-$ , et comme  $\theta_m$  tend vers  $-\dot{\gamma}(t_0)$ , il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $m > M$ , les vecteurs  $\theta_m$  pointent à l'intérieur de  $\Sigma_m^-$ , or par construction de  $\theta_m$ , nous avons que  $\gamma(t_0) = \gamma(t_m) + |\gamma(t_0) - \gamma(t_m)|\theta_m$ , ce qui implique que  $\gamma(t_0) \in \Sigma_m^-$ .

Nous avons donc démontré le théorème car  $\gamma$  coupe le pseudo-cercle  $\sigma_m$  en deux points et est contenue dans la partie concave  $\Sigma_m^+$  entre ces points d'intersection. Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.32 et conclure que  $\gamma$  ne peut pas être une géodésique métrique si elle n'est pas  $\mathcal{C}^1$ .

□

Le théorème 2.26 est une conséquence directe des deux théorèmes précédents.

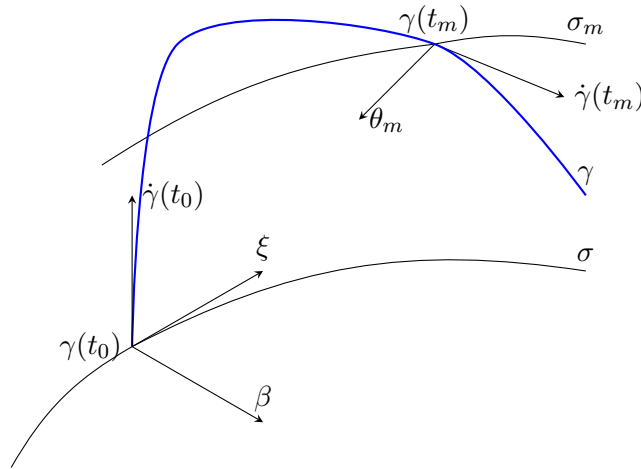


FIGURE 2.4 – Illustration du théorème 2.40

### 2.3.3 Preuves des résultats techniques

Dans cette section, nous allons démontrer les résultats utilisés pour prouver que les géodésiques métriques sont continûment différentiables, à savoir le théorème 2.32, la proposition 2.34 et le lemme 2.38.

Nous commençons par montrer deux lemmes techniques qui permettent de démontrer le théorème 2.32. Le lemme suivant peut être vu comme la définition de sous-différentielle de Clarke (voir [Cla90],[Cla75]).

**Lemme 2.41.** *Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  la boule unité pour une norme de Minkowski faible  $F$ ,  $L$  une droite support de  $\Omega$ ,  $v \in L \cap \Omega$  et  $\alpha$  un vecteur normal à  $L$  tel que  $\langle \alpha, v \rangle = 1$ , alors pour tout  $w \in \mathbb{R}^2$  nous avons*

$$F(w) - F(v) - \langle \alpha, (w - v) \rangle \geq 0.$$

*Démonstration.* Comme  $F(v) = 1$ , nous avons

$$F(w) - F(v) - \langle \alpha, (w - v) \rangle = F(w) - \langle \alpha, v \rangle - \langle \alpha, w \rangle + \langle \alpha, v \rangle = F(w) - \langle \alpha, w \rangle.$$

Il suffit donc de montrer que  $F(w) \geq \langle \alpha, w \rangle$ . Noter que chaque côté de cette équation est homogène, il suffit donc de montrer que  $F(w) \geq \langle \alpha, w \rangle$ , pour tout  $w \in \partial\Omega$ .

Par définition de la fonction support  $h_\Omega$  de l'ensemble convexe  $\Omega$  (voir [Web94]), nous avons que  $\langle \alpha, w \rangle \leq h_\Omega(\alpha)$  (nous rappelons que  $h_\Omega(\alpha) = \sup \{ \langle \alpha, v \rangle | v \in \Omega \}$ ). Ce supremum est atteint par  $v$  car  $v$  est un vecteur supporteur. De plus, par construction,  $\langle \alpha, v \rangle = 1$ , donc  $\langle \alpha, w \rangle \leq 1$  ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 2.42.** [May41, Lemme 1, page 189] *Soient  $x, y \in \mathbb{R}^2$  Soient  $[x, y]$  un segment euclidien dans  $\mathbb{R}^2$  et  $z \in ]x, y[$  un point intérieur au segment. Soient  $v$  et  $w$  deux champs de vecteurs parallèles entre eux sur  $\mathbb{R}^2$  tels que*

$$v|y - x| = w|z - x|,$$

*alors*

$$F(y, w) - F(z, v) \geq |v| \frac{|y - z|}{|x - z|} \left( \frac{1}{K} - C|x - z| \right)$$

*où  $C$  et  $K$  viennent des inégalités 2.10 et 2.11.*

*Démonstration.* En appliquant les hypothèses du lemme nous obtenons

$$\begin{aligned} F(y, w) - F(y, v) &= F\left(y, v \frac{|y - x|}{|z - x|}\right) - F(y, v) \\ &= F(y, v) \left( \frac{|y - z|}{|z - x|} - 1 \right) \\ &= F(y, v) \left( \frac{|y - z| - |z - x|}{|z - x|} \right) \\ &= F(y, v) \frac{|y - z|}{|x - z|} \\ &\geq \frac{1}{K} |v| \frac{|y - z|}{|x - z|}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 F(y, w) - F(z, v) &= (F(y, w) - F(y, v)) + (F(y, v) - F(z, v)) \\
 &\geq \frac{1}{K} |v| \frac{|y - z|}{|x - z|} + (F(y, v) - F(z, v)) \\
 &\geq \frac{1}{K} |v| \frac{|y - z|}{|x - z|} - C|v||y - z| \\
 &= |v| \frac{|y - z|}{|x - z|} \cdot \left( \frac{1}{K} - C|x - z| \right).
 \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la propriété de contraction des pseudo-cercles. Rappelons l'énoncé :

**Théorème.** 2.32 Soient  $r > 0$  et  $R > 0$  tels que  $r + R < \frac{1}{KC}$  où  $C$  et  $K$  sont les constantes de Lipschitz de la métrique finslérienne  $F$  (voir les équations (2.10) et (2.11)). Soit  $\sigma$  un pseudo-cercle dans  $B(p_0, r)$  de centre  $x_0 \in \partial B(p_0, R)$  et  $p, q$  deux points sur  $\sigma$ . Alors pour toute courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma^+$  de  $p$  à  $q$ , on a  $\ell(\gamma) \geq \ell(\sigma_p^q)$ , où  $\sigma_p^q$  est l'arc de pseudo-cercle de  $p$  à  $q$ .

*Démonstration.* Le long de cette preuve, étant donné  $x \in \Sigma^+$ , nous noterons  $\bar{x}$  la projection de  $x$  sur  $\sigma$ , dans la direction de  $x_0$ .

Commençons par montrer ce résultat localement. C'est à dire, pour une subdivision suffisamment fine de  $[a, b]$ , donnée par  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , montrons que

$$\ell([\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]) - \ell(\sigma_i) \geq 0$$

où nous avons noté  $\sigma_i = \sigma_{\frac{\gamma(t_{i+1})}{\gamma(t_i)}}$ , l'arc de pseudo-cercle correspondant à la projection de  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$  sur  $\sigma$ .

Soit  $x(t)$  une paramétrisation du segment  $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ , alors

$$\begin{aligned}
 &\ell([\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]) - \ell(\sigma_i) \\
 &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F(x(t), \dot{x}(t)) - F(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))) dt \\
 &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F(x(t), \dot{x}(t)) - F(\bar{x}(t), \kappa \dot{x}(t))) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F(\bar{x}(t), \kappa \dot{x}(t)) - F(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))) dt
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\text{où } \kappa = \frac{|\bar{x}(t) - x_0|}{|x(t) - x_0|}.$$

Par construction, le vecteur  $\pm (\kappa(x(t + \delta) - x(t)) - (\bar{x}(t + \delta) - \bar{x}(t)))$  est soit nul, soit à la direction de  $[x_0, \bar{x}(t + \delta)]$ , alors, en laissant  $\delta \rightarrow 0$ , nous obtenons que  $\pm (\kappa \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t))$  est parallèle à  $[x_0, \bar{x}(t)]$ .

Soit  $\alpha$  un vecteur supporteur de  $\Omega_{p_0}$ , par définition des pseudo-cercles, nous avons que  $[x_0, \bar{x}(t)]$  est orthogonal à  $\alpha$ , donc  $\kappa \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)$  est orthogonal à  $\alpha$  et donc, par le lemme 2.41, nous obtenons

$$F(\bar{x}(t), \kappa \dot{x}(t)) - F(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \geq \langle \alpha, \kappa \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) \rangle = 0.$$

donc le premier terme de (2.12) est positif.

Par le lemme 2.42, nous avons

$$\begin{aligned} & F(\bar{x}(t), \kappa \dot{x}(t)) - F(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \\ & \geq \kappa |\dot{x}(t)| \frac{|\bar{x}(t) - x(t)|}{|\bar{x}(t) - x_0|} \left( \frac{1}{K} - C |\bar{x}(t) - x_0| \right) \geq 0 \end{aligned}$$

car  $|\bar{x}(t) - x_0| < \frac{1}{KC}$  par hypothèse.

Le second terme de (2.12) est donc aussi positif et nous obtenons

$$\ell([\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]) - \ell(\sigma_i) \geq 0.$$

Maintenant, pour démontrer le théorème, nous appliquons le lemme 2.8 à cette inégalité :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \ell([\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \ell(\sigma_i) \geq \ell(\sigma_{\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}}) - \varepsilon$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ .

En prenant le supremum sur toutes les partitions, nous obtenons alors

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\sigma_{pq}).$$

□

Il s'agit maintenant de montrer que si une géodésique métrique est différentiable à gauche, alors elle est différentiable à droite et les deux dérivées coïncident. Pour cela, il faut démontrer le lemme suivant, qui est une conséquence du théorème 2.21.

**Lemme 2.43.** [May41, Théorème 4, page 188] Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $F : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une métrique finslérienne Lipschitz et strictement convexe et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suite convergentes vers  $x_0$  et telles que

$$I_n := \frac{d_F(x_n, y_n) + d_F(y_n, z_n)}{d_F(x_n, z_n)} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Nous avons alors que

$$E_n := \frac{|y_n - x_n| + |z_n - y_n|}{|z_n - x_n|} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

où  $|\cdot|$  est la métrique euclidienne.

*Démonstration.* Prouvons d'abord le résultat suivant :

Si  $I_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  alors

$$\frac{F(x_0, y_n - x_n) + F(x_0, z_n - y_n)}{F(x_0, z_n - x_n)} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Afin d'alléger les calculs, nous allons utiliser les notations suivantes :  $a_n := d_F(x_n, y_n)$ ,  $b_n := d_F(y_n, z_n)$ ,  $c_n = d_F(x_n, z_n)$  et

- $\alpha_{n,xy} := \frac{F(x_0, y_n - x_n)}{d_F(x_n, y_n)}$ ,
- $\alpha_{n,yz} := \frac{F(x_0, z_n - y_n)}{d_F(y_n, z_n)}$ ,
- $\alpha_{n,xz} := \frac{F(x_0, z_n - x_n)}{d_F(x_n, z_n)}$ .

Noter que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,xy} = \frac{\ell_{x_0}([x_n, y_n])}{d_F(x_n, y_n)} = 1$  par le lemme 2.18. Par ce lemme, nous obtenons aussi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,yz} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,xz} = 1$ .

Nous avons alors

$$\frac{F(x_0, y_n - x_n) + F(x_0, z_n - y_n)}{F(x_0, z_n - x_n)} = \frac{a_n \alpha_{n,xy} + b_n \alpha_{n,yz}}{c_n \alpha_{n,xz}}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , en prenant  $N > 0$  suffisamment grand pour avoir  $\alpha_{n,xy} - \alpha_{n,yz}, \alpha_{n,yz} - \alpha_{n,xz} \leq \varepsilon$ ,  $\alpha_{n,xz} \leq 1 + \varepsilon$  et  $\frac{a_n + b_n}{c_n} \leq 1 + \varepsilon$  pour tout  $n > N$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{a_n \alpha_n + b_n \alpha'_n}{c_n \alpha''_n} - \frac{a_n + b_n}{c_n} &= \frac{a_n(\alpha_n - \alpha''_n) + b_n(\alpha'_n - \alpha''_n)}{c_n \alpha''_n} \\ &\leq \frac{a_n \varepsilon + b_n \varepsilon}{c_n(1 + \varepsilon)} \\ &= \varepsilon \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{a_n + b_n}{c_n} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve (2.13).

Nous pouvons maintenant appliquer une homothétie  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaisant  $\varphi(x_n) = x_0$  et  $|\varphi(z_n) - \varphi(x_n)| = |\varphi(z_n) - x_0| = 1$

alors, puisque  $\varphi$  est une homothétie, nous obtenons

$$I_n = \frac{d_F(x_0, \varphi(y_n)) + d_F(\varphi(y_n), \varphi(z_n))}{d_F(x_0, \varphi(z_n))}$$

et

$$E_n = \frac{|\varphi(y_n) - x_0| + |\varphi(z_n) - \varphi(y_n)|}{|\varphi(z_n) - x_0|}.$$

Par contradiction, supposons que  $E_n$  ne converge pas vers 1, alors il existe  $y, z \in \mathbb{R}^2$  et une sous-suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\varphi(y_{n_k}) \rightarrow y$  et  $\varphi(z_{n_k}) \rightarrow z$  et telle que  $E_{n_k} \rightarrow 1 + \eta$  pour  $\eta > 0$ , alors  $y$  ne peut pas être dans le segment euclidien  $[x_0, z]$ . Or en appliquant (2.13), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_0, \varphi(y_n) - x_0) + F(x_0, \varphi(z_n) - \varphi(y_n))}{F(x_0, \varphi(z_n) - \varphi(x_n))} = 1$$

et comme  $F(x_0, -)$  est une norme de Minkowski faible strictement convexe, c'est une distance projective, nous avons une contradiction.  $\square$



Nous pouvons maintenant montrer la proposition 2.34, en supposant que toutes les courbes considérées sont paramétrées naturellement.

**Proposition.** 2.34 Soient  $\mathbb{R}^2$  une carte de la variété finslérienne  $(M, F)$  dont la métrique est Lipschitz et strictement convexe,  $\gamma : I = [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une géodésique métrique de  $x$  à  $y$  paramétrée naturellement et  $t_0 \in I$ . Si  $\gamma$  a une dérivée à gauche en  $t_0$ , alors elle a une dérivée à droite en  $t_0$  et les dérivées coïncident.

*Démonstration.* Soient  $(t_n) \subset I$  une suite de points telle que  $t_n > t_0$  pour tout  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$  (approche  $t_0$  par la droite). Étant donné  $t_n$  suffisamment proche de  $t_0$  il existe  $\tau_n \in I$  tel que  $\tau_n < t_0$  et  $|\gamma(\tau_n) - \gamma(t_0)| = |\gamma(t_n) - \gamma(t_0)|$ .

Comme  $\gamma$  est une géodésique métrique, nous savons que

$$\frac{d_F(\gamma(\tau_n), \gamma(t_0)) + d_F(\gamma(t_0), \gamma(t_n))}{d_F(\gamma(\tau_n), \gamma(t_n))} = 1$$

et en vertu du lemme 2.43 nous obtenons

$$\frac{|\gamma(\tau_n) - \gamma(t_0)| + |\gamma(t_0) - \gamma(t_n)|}{|\gamma(\tau_n) - \gamma(t_n)|} \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Nous constatons alors que la droite euclidienne passant par  $\gamma(\tau_n)$  et  $\gamma(t_0)$  converge vers la dérivée à gauche de  $\gamma$  en  $t_0$ . Comme le triangle  $\gamma(\tau_n)\gamma(t_0)\gamma(t_n)$  est isocèle, en appliquant la formule du cosinus, nous obtenons que l'angle en  $\gamma(t_0)$  entre  $\gamma(\tau_n)$  et  $\gamma(t_n)$  tend vers  $\pi$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

Rappelons la définition d'ensemble des directions limite d'une courbe.

**Définition.** 2.35 Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe. Nous définissons l'ensemble des directions limites de  $\gamma$  par

$$\mathcal{DL}_0(\gamma) := \left\{ \frac{\gamma(t_k)}{|\gamma(t_k)|} \mid t_k \rightarrow 0 \right\}'$$

qui est l'ensemble des points d'accumulation de directions limites (appelé aussi ensemble dérivé des directions limites) de  $\gamma$ .

**Lemme.** 2.38 Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\theta \in \mathcal{DL}_0(\gamma)$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  pour tout  $\delta > 0$ , nous avons  $\text{Card}(\gamma([0, \delta]) \cap \mathcal{S}_\varepsilon^\theta) = \infty$ , où  $\mathcal{S}_\varepsilon^\theta = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid |\phi - \theta| < \varepsilon\}$ , en coordonnées polaires.

*Démonstration.* Montrons que si il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $\text{Card}(\gamma([0, \delta]) \cap \mathcal{S}_\varepsilon^\theta) < \infty$ , alors  $\theta$  n'est pas la limite d'une sous-suite de  $(\frac{\gamma(t_k)}{|\gamma(t_k)|})_{k \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $t_0 = \min \{t \in [0, \delta] \mid \gamma(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon^\theta\}$ , alors pour tout  $t < t_0$ , nous avons  $\gamma(t) \notin \mathcal{S}_\varepsilon^\theta$ .

Si il existait une sous-suite  $(t_{k_i})$  telle que

$$\angle\left(\frac{\gamma(t_{k_i})}{|\gamma(t_{k_i})|}, \theta\right) \rightarrow 0$$

alors il existerait  $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que  $\gamma(t_{k_i}) \in \mathcal{S}_\varepsilon^\theta$  pour tout  $k_i > K(\varepsilon)$ , ce qui serait une contradiction.  $\square$

## Chapitre 3

# Considérations générales sur les espaces métriques pseudo-Finslériens

En 1915, Albert Einstein publie "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" [Ein16], article fondateur de la relativité générale, théorie vérifiée lors de l'éclipse totale de soleil du 29 mai 1919, faisant alors passer A. Einstein du statut de physicien très reconnu à celui de personnalité publique internationale. La base mathématique de cette théorie est la géométrie pseudo-riemannienne, c'est à dire l'étude des variétés munies d'un tenseur métrique non-défini positif, typiquement, en relativité, de signature  $(n, 1)$ . Un premier exemple de ce type de géométrie est celle de l'espace de Lorentz, introduit par Henri Poincaré pour la première fois en 1905 dans le texte connu en France sous le nom de "Mémoire de Palerme" [Poi05]. L'espace-temps de Lorentz est une géométrie pseudo-riemannienne plate dont le tenseur métrique est constant, c'est le cadre de travail dans lequel se décrit la relativité restreinte. L'espace de Lorentz est noté  $\mathbb{R}^{n,1}$  et n'est rien d'autre que  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la forme bilinéaire  $\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Une telle métrique sépare  $\mathbb{R}^{n,1}$  en trois régions :

- Les vecteurs de type temps :  $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle > 0\}$ .
- Les vecteurs de type lumière :  $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle = 0\}$ .
- Les vecteurs de type espace :  $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle < 0\}$ .

Nous remarquons alors que l'ensemble des vecteurs de type lumière forme un cône convexe de sommet  $0 \in \mathbb{R}^{n,1}$  appelé *cône de lumière*. De plus, l'ensemble des vecteurs tels que  $\langle x, x \rangle = -1$  forme un hyperboloïde asymptotique au cône de lumière. En relativité, la coordonnée  $x_0$  représente le temps, et donc, un point de  $\mathbb{R}^{n,1}$  représente un évènement de l'espace-temps. La vitesse de la lumière étant finie (selon le second postulat d'Einstein), deux évènements de l'espace-temps ne sont pas forcément liés causalement, c'est à dire qu'il existe des paires d'évènements dans l'espace-temps de Lorentz tels qu'aucune information n'est transmissible de l'un à l'autre. Mathématiquement, deux évènements  $x, y \in \mathbb{R}^{n,1}$  ne sont pas liés causalement si le vecteur  $y - x \in \mathbb{R}^{n,1}$  est de type espace, c'est à dire  $\langle y - x, y - x \rangle < 0$ . Dans le cas contraire, nous dirons que  $x$  et  $y$  sont causalement liés et nous noterons  $x \preceq y$  lorsque  $x_0 \leq y_0$  et  $\langle y - x, y - x \rangle \geq 0$ .

Ces notions sont une façon de voir la relativité restreinte. En relativité générale, le cadre de travail est une variété différentielle dont l'espace tangent en un point est un espace temps muni d'une métrique de signature  $(n, 1)$ .

Ces notions se généralisent en géométrie pseudo-finslérienne. De la même manière que la géométrie riemannienne se généralise en géométrie finslérienne.

Plus formellement, un espace-temps métrique est un espace topologique de Hausdorff  $X$  muni d'une relation d'ordre partiel  $\preceq$  appelée relation de causalité et d'une fonction continue  $\rho$  définie sur l'ensemble  $\{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\}$  et que nous appellerons la *pseudo-distance*. La fonction  $\rho$  ne se comportera pas comme une distance telle que dans la définition 1.1 ; l'inégalité du triangle pour une pseudo-distance s'énonce avec une inégalité inverse. Ces constructions inhabituelles trouvent leur justification dans la relativité générale. Deux évènements de l'espace temps sont liés causalement s'il est possible de passer d'un évènement à l'autre via un signal ne dépassant pas la vitesse de la lumière. De plus, la pseudo-distance entre deux évènements de l'espace temps est le *temps propre* de la relativité restreinte.

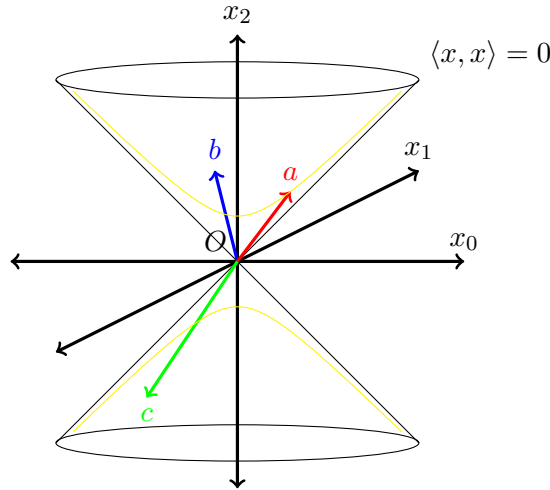


FIGURE 3.1 – Dans cet espace-temps de Lorentz,  $a$  est de pseudo-norme de Minkowski égale à 1, les vecteurs  $a$  et  $b$  ne sont pas liés causalement alors que  $c \preceq b$  et  $c \preceq a$ .

Dans cette section, nous allons définir les objets de base de la géométrie pseudo-métrique et pseudo-finslérienne pour énoncer et prouver par la suite des résultats de type Busemann-Mayer ([May41]) dans le cadre de ces géométries de type espace-temps. Cette section est inspirée de [?] et de [Bus67].

### 3.1 Espaces-temps métriques

**Définition 3.1** (Espace-temps métrique). Soit  $X$  un espace topologique de Hausdorff. Un triple  $(X, \preceq, \rho)$  est appelé un *espace-temps métrique* si

1. La relation  $\preceq$  est un ordre partiel sur  $X$  (appelé *relation de causalité*) tel que  $\{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\}$  est fermé dans  $X \times X$  et pour chaque point  $p \in X$  et chaque voisinage  $\mathcal{U} \ni p$  il existe  $x, y \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$  tels que  $x \preceq p$  et  $p \preceq y$ .
2. La fonction  $\rho : \{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\} \rightarrow [0, \infty]$  est continue, nous l'appelons la *pseudo-distance* sur  $X$  et qui satisfait les conditions suivantes
  - (i)  $\rho(x, x) = 0$  et  $\rho(x, y) \geq 0$  pour tout  $x \preceq y$ .
  - (ii) Pour tout  $x, y, z \in X$  tels que  $x \preceq y \preceq z$ , la fonctionnelle  $\rho$  satisfait l'inégalité suivante :

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

que nous appellerons *inégalité causale*.

Remarquons si les deux pseudo-distances  $\rho(x, y)$  et  $\rho(y, x)$  sont définies, alors  $x = y$ .

- Exemples.** 1. Soit  $T = (V, E)$  un arbre simplicial dont l'ensemble des sommets est  $V$  et l'ensemble des arêtes est  $E$ . Fixons un point base  $* \in V$  (la racine de l'arbre). Nous munissons  $V$  de la topologie discrète et définissons la relation  $\preceq$  sur  $V$  en posant que  $x \preceq y$  si et seulement si l'unique chemin simplicial de  $*$  à  $y$  passe par  $x$ , puis  $\rho(x, y)$  est le nombre d'arêtes de ce chemin. Noter que dans ce cas l'inégalité causale est toujours une égalité.
2. Dans l'espace de Lorentz  $\mathbb{R}^{n,1}$ , la causalité est définie par  $x \preceq y$  si et seulement si  $\langle y - x, y - x \rangle \geq 0$  et la pseudo-distance est définie par  $\rho(x, y) = \sqrt{\langle y - x, y - x \rangle}$ .

En voyant ces définitions, il est tentant de vouloir développer une théorie tout à fait semblable au chapitre 1. Toutefois, dans le cadre de la géométrie des espaces temps, la relation de causalité est à prendre en compte.

### 3.1.1 Pseudo-normes de Minkowski

Une notion fondamentale dans ce chapitre et le suivant est la suivante :

**Définition 3.2.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle *cône de causalité* (ou *cône causal*) un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset X$  qui est un cône convexe fermé propre de sommet  $0 \in X$  (propre signifie qu'il existe un hyperplan supporteur de  $\mathcal{C}$  passant par  $0$  tel que l'intersection entre ce plan et  $\mathcal{C}$  ne contient que  $0$ ).

La donnée d'un cône de causalité sur un espace vectoriel réel de dimension finie  $\mathcal{C} \subset X$  nous permet de définir la relation de causalité  $x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{C}$ . Réciproquement, une relation de causalité induit un cône de causalité à condition que cette relation soit projective et invariante par translation.

**Définition 3.3.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $\preceq$  une relation de causalité sur  $X$ .

- (i) La relation  $\preceq$  est dite *invariante par translation* si pour tout  $a \in X$  et pour tout  $x, y \in X$  nous avons que si  $x \preceq y$ , alors  $x + a \preceq y + a$ .
- (ii) La relation  $\preceq$  est dite *projective* si pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $x, y \in X$ , si  $x \preceq y$ , alors  $\lambda x \preceq \lambda y$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie. La donnée d'un cône de causalité non-vide sur  $X$  est équivalente à la donnée d'une relation de causalité au sens de la définition 3.1 invariante par translation et projective sur  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C} \subset X$  un cône de causalité et définissons la relation  $\preceq$  sur  $X$  par

$$x \preceq y \quad \text{si et seulement si} \quad y - x \in \mathcal{C}. \quad (3.1)$$

Montrons qu'il s'agit d'une relation de causalité sur  $X$ ,

1. La relation  $\preceq$  est un ordre partiel, en effet soient  $x, y, z \in \mathcal{C}$ , alors  $x \preceq x$  car  $x - x = 0 \in \mathcal{C}$ . Si  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ , alors  $y - x = x - y$  ce qui est équivalent à  $y - x = 0$  et alors  $x = y$ . Si  $x \preceq y$  et  $y \preceq z$ , alors  $y - x \in \mathcal{C}$  et  $z - y \in \mathcal{C}$ , or  $\mathcal{C}$  est un cône convexe, donc  $y - x + z - y = z - x \in \mathcal{C}$ , ce qui implique que  $x \preceq z$ .

2. La relation  $\preceq$  est trivialement invariante par translation.
3. Il est clair que  $\{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\} = \{(x, y) \in X \times X \mid (y - x) \in \mathcal{C}\}$  est fermé car  $\mathcal{C}$  est fermé dans  $X$ .
4. Soit  $p \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  et  $\mathcal{U}_p$  un voisinage de  $p$ , alors comme  $\mathcal{C}$  est un cône, il existe  $x, y \in \mathcal{U}_p \setminus \{p\}$  tels que  $x \preceq p \preceq y$ . En considérant maintenant un point arbitraire  $q \in X$ , il existe  $a \in X$  tel que  $q = p + a$ , alors l'ouvert  $\mathcal{U}_q := \mathcal{U}_p + a$  contient  $q$  et comme  $\preceq$  est invariante par translation, nous avons  $x + a \preceq q \preceq y + a$ .

Soit maintenant  $(X, \preceq)$  un espace vectoriel muni d'une relation de causalité invariante par translation et projective. Montrons que

$$\mathcal{C} = \{x \in X \mid 0 \preceq x\}$$

est un cône de causalité sur  $X$ ,

1. Si  $x, y \in \mathcal{C}$ , alors  $0 \preceq x$  et  $0 \preceq y$ , mais comme  $\preceq$  est invariante par translation, nous avons  $0 + y \preceq x + y$ , et alors  $0 \preceq y \preceq x + y$  et par transitivité de la relation de causalité, nous obtenons  $x + y \in \mathcal{C}$ .
2. Si  $x \in \mathcal{C}$ , alors  $0 \preceq x$ , alors pour tout  $\lambda > 0$ , nous avons  $\lambda 0 \preceq \lambda x$  ce qui est équivalent à  $0 = \lambda 0 \preceq \lambda x$ .
3. Par hypothèse,  $\{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\}$  est fermé. Or le cône  $\mathcal{C}$  est homéomorphe à

$$\{(0, x) \in \{0\} \times X \mid 0 \preceq x\} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\} \cap (\{0\} \times X),$$

qui est une intersection de deux ensembles fermés, donc un fermé.

4. Il est clair que  $0 \in \mathcal{C}$  et que c'est le sommet du cône.

□

A partir de maintenant, nous supposons toujours que le cône de causalité est d'intérieur non-vide.

L'appellation de *relation causale projective* dans la définition précédente est justifiée par le corollaire suivant :

**Corollaire 3.5.** *Soit  $\preceq$  une relation de causalité invariante par translation et projective sur l'espace vectoriel  $X$ , et  $x, y, z$  trois points de  $X$  tels que  $z \in [x, y]$ . Si  $x \preceq y$ , alors  $x \preceq z \preceq y$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  le cône de causalité induit par la relation  $\preceq$ . Si  $x \preceq y$ , alors  $(y - x) \in \mathcal{C}$ . Mais si de plus nous avons  $z \in [x, y]$ , alors il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $z = ty + (1 - t)x$  et nous obtenons donc  $z - x = t(y - x) \in \mathcal{C}$  et  $y - z = (1 - t)(y - x) \in \mathcal{C}$ , ce qui implique que  $x \preceq z$  et  $z \preceq y$ . □

Nous donnons maintenant une caractérisation des courbes causales dans un espace vectoriel réel de dimension finie.

**Proposition 3.6.** *Soit  $(X, \mathcal{C})$  un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un cône causal et notons  $\preceq$  la relation de causalité associée. Soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe continûment différentiable, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

- (i)  $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{C}$  pour tout  $t \in [a, b]$ .
- (ii)  $\sigma(r) \preceq \sigma(s)$ , c'est-à-dire  $\sigma(s) - \sigma(r) \in \mathcal{C}$  pour tous  $r, t \in [a, b]$  tels que  $r \leq t$ .

*Démonstration.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Notons  $X^*$  le dual de  $X$  et  $S_{\mathcal{C}} = \{\alpha \in X^* \mid \alpha(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{C}\}$ , alors  $x \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $\alpha(x) \leq 0$  pour tout  $\alpha \in S_{\mathcal{C}}$ , car  $\mathcal{C}$  est un cône convexe.

Donnons-nous un élément quelconque  $S_{\mathcal{C}}$ , alors par hypothèse on a  $\alpha(\dot{\sigma}(t)) \leq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ . Définissons la fonction  $g : t \mapsto \alpha(\sigma(t))$ , alors  $\dot{g}(t) = \alpha(\dot{\sigma}(t))$ , et donc, en appliquant le théorème des accroissements finis à  $g$ , nous obtenons que pour tout  $r, s \in [a, b]$  tels que  $r < s$ , il existe  $t_0 \in [r, s]$  tel que

$$\alpha(\dot{\sigma}(s))(s - r) = \alpha(\sigma(s)) - \alpha(\sigma(r)) = \alpha(\sigma(s) - \sigma(r)).$$

Par conséquent on a  $\alpha(\sigma(s) - \sigma(r)) \leq 0$ , ce qui conclut la preuve car  $\alpha$  est un élément quelconque de  $S_{\mathcal{C}}$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (i). On suppose que pour tous  $r < s \in [a, b]$  nous avons  $\sigma(s) - \sigma(r) \in \mathcal{C}$ . Alors  $\sigma(s) - \sigma(r) \in (s - r)\mathcal{C}$ , ce qui est équivalent à  $\frac{\sigma(s) - \sigma(r)}{s - r} \in \mathcal{C}$ , et comme  $r$  et  $s$  sont arbitraires, nous obtenons

$$\dot{\sigma}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma(t + \varepsilon) - \sigma(t)}{\varepsilon} \in \mathcal{C}.$$

□

**Corollaire 3.7.** Soit  $(X, \mathcal{C})$  un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un cône causal et notons  $\preceq$  la relation de causalité. Soient  $x, y \in X$ , alors  $x \preceq y$  si et seulement s'il existe une courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  de  $x$  à  $y$  telle que  $\dot{\sigma} \in \mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Si  $x \preceq y$ , il suffit de prendre la courbe  $\sigma : t \mapsto ty + (1 - t)x$  pour  $0 \leq t \leq 1$  et alors pour tout  $t$ , nous avons  $\dot{\sigma}(t) = y - x \in \mathcal{C}$ .

Inversement, s'il existe une courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  de  $x$  à  $y$  telle que  $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{C}$  pour tout  $t \in [a, b]$  alors par la proposition 3.6, nous avons que  $y - x = \sigma(b) - \sigma(a) \in \mathcal{C}$ , ce qui veut dire que  $x \preceq y$ . □

Quand à la causalité dans un espace vectoriel de dimension finie réel, nous pouvons citer le résultat suivant, dû à A. D. Alexandrov et revus dans [Pap18a, pages 133-141].

**Théorème 3.8.** [Ale67] Soit  $(X, \mathcal{C})$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  muni d'un cône causal et notons  $\preceq$  la relation de causalité. Si  $\mathcal{C}$  n'est pas le produit cartésien d'un rayon et d'un cône de dimension  $(n - 1)$ , alors toute bijection  $\phi : X \rightarrow X$  préservant la relation de causalité est linéaire.

Nous donnons maintenant la définition de pseudo-norme de Minkowski.

**Définition 3.9.** (Pseudo-norme de Minkowski) Soit  $(X, \mathcal{C})$  un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un cône de causalité. Une pseudo-norme de Minkowski est une fonctionnelle  $f : \mathcal{C} \subset X \rightarrow [0, \infty[$  satisfaisant

1. Positivité :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{C}$ ,  $f(x) > 0$  si  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$  et  $f(0) = 0$ .
2. Homogénéité positive :  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{C}$  et tout  $\lambda > 0$ .
3. Concavité :  $f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$  pour tout  $x, y \in \mathcal{C}$  et tout  $0 < t < 1$ .

Un triple  $(X, \mathcal{C}, f)$  où  $X$  est espace vectoriel réel de dimension finie,  $\mathcal{C}$  est un cône de causalité et  $f$  est une pseudo-norme de Minkowski est appelé un *espace de Lorentz-Minkowski*.

Remarquons de plus que  $f$  est continue sur  $\mathcal{C}$  car  $-f$  est convexe.

**Définition 3.10.** Soit  $\mathcal{C}$  un cône causal dans un espace vectoriel  $X$ , alors un ensemble  $B \subset \mathcal{C}$  est dit *concave* relativement à  $\mathcal{C}$  si  $\mathcal{D} = \mathcal{C} \setminus B$  est un ensemble convexe.

**Définition 3.11.** Soit  $(X, \mathcal{C}, f)$  un espace de Lorentz-Minkowski, on appelle *boule unité* l'ensemble  $B_f = \{x \in \mathcal{C} \mid f(x) \leq 1\} \subset \mathcal{C}$  et l'*indicatrice* de  $f$  est  $\mathcal{I}_f = \{x \in \mathcal{C} \mid f(x) = 1\}$ .

**Remarque 3.12.** • La boule unité d'une pseudo-norme de Minkowski  $f$  est concave.

- Nous avons défini un cône de causalité  $\mathcal{C}$  comme étant un ensemble fermé et une pseudo-norme de Minkowski  $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty[$  comme étant positive ou nulle.

Ceci donne plusieurs possibilités pour la boule unité et la pseudo-norme de Minkowski :

1. La boule unité  $B_f$  peut être asymptotique au cône de causalité, ce qui correspond à la situation où  $f$  est nulle sur les vecteurs appartenant au bord de  $\mathcal{C}$ ,
2. La boule  $B_f$  intersecte le bord de  $\mathcal{C}$  et alors pour tout  $x \in B_f \cap (\partial\mathcal{C} \setminus \{0\})$  nous avons  $f(x) > 0$  et  $f(0) = 0$ .

Les dénominations "espace-temps" ou "causalité" proviennent du fait que le cône de causalité est, dans le cas de l'espace temps de la relativité générale, le cône des directions tangentes à une ligne d'univers. Nous donnons maintenant la définition de pseudo-métrique projective sur un espace vectoriel.

**Définition 3.13.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie muni de la structure de pseudo-espace métrique  $(X, \preceq, \rho)$ , alors nous disons que  $\rho$  est projective si pour tout  $x, y, z \in X$  tels que  $x \preceq y \preceq z$  et  $y = tz + (1 - t)x$  avec  $t \in [0, 1]$ , nous avons

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z).$$

Nous avons un résultat semblable au théorème 1.10, mais pour un espace de Lorentz-Minkowski :

**Proposition 3.14.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie et supposons que  $(X, \preceq, \rho)$  est un espace-temps métrique dont la relation de causalité et la pseudo-distance sont projective et invariante par translations. Nous pouvons alors définir une structure d'espace de Lorentz-Minkowski  $(X, \mathcal{C}, f)$  où le cône de causalité est défini par

$$\mathcal{C} = \{x \in X \mid 0 \preceq x\}$$

et la pseudo-norme de Minkowski  $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty[$  est donnée par

$$\rho(x, y) = f(y - x)$$

Réciproquement, si  $(X, \mathcal{C}, f)$  est un espace de Lorentz-Minkowski, alors il existe une relation de causalité  $\preceq$  donnée par

$$(x \preceq y) \quad \text{si et seulement si} \quad (y - x \in \mathcal{C}),$$

et une pseudo-distance  $\rho : \{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\} \rightarrow \mathbb{R}_+$  projective et invariante par translation donnée par

$$\rho(x, y) = f(y - x)$$

tels que  $(X, \preceq, \rho)$  est un espace-temps métrique.

*Démonstration.* Les équivalences entre cône de causalité et relation de causalité ont été démontrées dans la proposition 3.4.

Soit  $(X, \preceq, \rho)$  un espace temps métrique dont la relation de causalité et la pseudo-distance sont invariantes par translation, alors pour tout  $a \in X$ , nous avons que  $x \preceq y$  est équivalent à  $x + a \preceq y + a$ , en particuliers,  $0 \preceq y - x$  et donc  $\rho(x, y) = \rho(0, y - x)$ . Soit  $x \in X$  tel que  $0 \preceq x$ , alors vérifions que  $f(x) := \rho(0, x)$  satisfait aux axiomes de pseudo-norme de Minkowski.

1.  $f(x) = \rho(0, x) \geq 0$  et  $f(0) = \rho(0, 0) = 0$ .

2. Pour montrer l'homogénéité positive, commençons par montrer que pour  $x \in X$  et  $\lambda, \mu \geq 0$  nous avons

$$f(\lambda x) + f(\mu x) = f((\lambda + \mu)x). \quad (3.2)$$

Ceci vient du fait que  $\lambda x \in [0, (\lambda + \mu)x]$  et que  $\rho$  est projective, et donc en calculant

$$\begin{aligned} f(\lambda x) + f(\mu x) &= \rho(0, \lambda x) + \rho(0, \mu x) \\ &= \rho(0, \lambda x) + \rho(\lambda x, (\lambda + \mu)x) \\ &= \rho(0, (\lambda + \mu)x) = f((\lambda + \mu)x) \end{aligned}$$

nous avons montré l'équation (3.2). Le lemme 3.2 page 14 de [Pap09] permet alors de montrer (en utilisant la densité des nombre rationnels dans les réels) que pour tout  $x \in X$  et pour tout  $\lambda \geq 0$  nous avons  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  (ce qui implique également que  $f(0) = 0$ ).

3. Soient maintenant  $x \preceq y$ , alors par la proposition 3.4, nous avons  $x, y \in \mathcal{C}$ , et donc, comme  $\mathcal{C}$  est un cône convexe, nous avons directement que  $x + y \in \mathcal{C}$ , de plus

$$f(x + y) = \rho(0, x + y) \geq \rho(0, x) + \rho(x, x + y) = \rho(0, x) + \rho(0, y) = f(x) + f(y),$$

ce qui prouve la concavité de  $f$ .

Soient  $x, y \in X$  tels que  $y - x \in \mathcal{C}$  (noter que  $y - x \in \mathcal{C}$  est une relation de causalité, par la proposition 3.4) et  $f$  une pseudo-norme de Minkowski sur  $X$ . Montrons que la fonctionnelle définie par  $\rho(x, y) := f(y - x)$  est une pseudo-distance  $\rho : \{(x, y) \in X \times X \mid x \preceq y\} \rightarrow \mathbb{R}_+$  sur  $X$ .

1.  $\rho(x, x) = f(x - x) = f(0) = 0$  et si  $y - x \in \mathcal{C}$ , alors  $x \preceq y$  et  $\rho(x, y) = f(y - x) \geq 0$ .

2. Soient  $x \preceq y \preceq z$  trois points de  $X$  tels que  $y \in [x, z]$ , alors

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = f(y - x) + f(z - y) \leq f(y - x + z - y) = f(z - x) = \rho(x, z).$$

□

## 3.2 Variétés pseudo-finslériennes

Nous allons maintenant définir ce qu'est une structure pseudo-finslérienne sur une variété différentiable. Cette définition est l'analogue de la définition de métrique finslérienne, excepté que nous sommes dans un cadre espace-temps. Cette définition est inspirée de [PY19] et de [Bus67]. Ce point de vue est plus synthétique et



plus proche des approches de la géométrie métrique. De plus il y a différents points de vue sur la géométrie pseudo-finslérienne, dont le très synthétique "point de vue de géométrie convexe".

Étant donné une variété différentiable nous allons définir ce qu'est un champ de cônes sur cette variété, dont la vocation sera d'induire une relation de causalité, nous pourrons alors définir ce qu'est une métrique pseudo-finslérienne.

**Définition 3.15** (Champ de cônes). Soit  $M$  une variété différentiable. Un *champ de cônes* sur  $M$  est la donnée d'un sous-ensemble fermé  $\mathcal{C} \subset TM$  contenant la section nulle et tel que

1. L'intérieur de  $\mathcal{C} \subset TM$  est dense dans  $\mathcal{C}$ .
2. Pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_x = \mathcal{C} \cap T_x M$  est un cône convexe de causalité dans de  $T_x M$  pour tout  $x \in M$  i.e. un cône convexe fermé, propre et de sommet 0.

**Définition 3.16.** (Métrique pseudo-finslérienne) Une *métrique pseudo-finslérienne* sur une variété différentiable  $M$  munie d'un champ de cônes  $\mathcal{C} \subset TM$  est la donnée d'une fonction semi-continue supérieurement  $f : \mathcal{C} \subset TM \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x, -)$  est une pseudo-norme de Minkowski sur  $T_x M$  pour tout  $x \in M$ .

Le triple  $(M, \mathcal{C}, f)$  où  $\mathcal{C}$  est un champ de cônes et  $f$  est une métrique pseudo-finslérienne sur  $M$  est appelé une *variété pseudo-finslérienne*.

**Définition 3.17.** (Courbe causale) Soit  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne. Une *courbe causale* est une courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  qui est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et telle que pour tout  $t \in [a, b]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(t + \varepsilon) - \sigma(t)}{\varepsilon} \in \mathcal{C}_{\sigma(t)} \subset T_{\sigma(t)} M \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{\sigma(t + \varepsilon) - \sigma(t)}{\varepsilon} \in \mathcal{C}_{\sigma(t)} \subset T_{\sigma(t)} M.$$

C'est à dire que pour tout  $t$ , la dérivée à gauche et la dérivée à droite de  $\sigma$  en  $t$  appartiennent au cône.

Nous noterons  $x \preceq y$  si deux points sont liés par une courbe causale.

**Définition 3.18.** Soit  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne faible dont la métrique est continue. Une courbe différentiable  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  est dite *strictement causale* si pour tout  $t \in [a, b]$ , le vecteur  $\dot{\sigma}(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma(t)}$ .

Nous noterons  $x \prec y$  si deux points sont liés par une courbe strictement causale.

**Remarque 3.19.** Dans la littérature, les notions de causalité sont souvent définies de la manière suivante : Soient  $x, y \in M$

1.  $x \ll y$  signifie que  $x \neq y$  et  $x \prec y$ .
2.  $x < y$  signifie que  $x \neq y$  et que  $x \preceq y$ .
3.  $x \leq y$  signifie que  $x \preceq y$ .

Nous pouvons alors, à partir d'une métrique pseudo-finslérienne sur  $M$ , définir une structure de longueurs sur l'ensemble des points de  $M$  liés causalement et ensuite une pseudo-distance sur  $M$ .

**Définition 3.20.** Soient  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne et  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe causale, alors la *longueur pseudo-finslérienne* de  $\sigma$  est définie par

$$\ell_f(\sigma) = \int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt,$$

et la *pseudo-distance* sur  $M$  est donnée par

$$\rho_f(x, y) = \sup \ell_f(\sigma),$$

pour  $x \preceq y$ , et où le supremum est pris sur l'ensemble des courbes causales  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  telles que  $\sigma(a) = x$  et  $\sigma(b) = y$ .

**Proposition 3.21.** *Soit  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne, alors il existe une métrique Lorentzienne lisse  $g$  sur  $M$  telle que  $\mathcal{C} \subset \{(x, v) \in TM \mid g_x(v, v) < 0\}$  et pour tout  $(x, v) \in \mathcal{C}$ , nous avons  $f(x, v) \leq \sqrt{|g_x(v, v)|}$ .*

*Démonstration.* (comparer avec le lemme 4.3 de [PY19]).

Donnons-nous un champ de vecteurs lisse  $\xi$  sur  $M$  tel que pour tout  $x \in M$ , nous avons  $\xi_x \in \mathcal{C}_x$  et  $f(x, \xi_x) = 1$ . Considérons une métrique riemannienne auxiliaire  $h$  sur  $M$  telle que  $h(\xi, \xi) \equiv 1$  et définissons une métrique Lorentzienne  $g$  par

$$g_x(v, w) = h_x(\xi_x, v)h_x(\xi_x, w) - \lambda(x)h_x(v, w),$$

pour  $v, w \in T_x M$ , où  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction lisse positive choisie telle que pour tout  $v \in \mathcal{C}_x$  on a

$$g_x(v, v) = h_x(\xi, v)^2 - \lambda(x)h_x(v, v) \geq f(x, v)^2 > 0.$$

Il est clair que  $g$  est une métrique lorentzienne sur  $M$  qui possède les propriétés voulues □

**Remarque 3.22.** La preuve de proposition montre également comment définir une relation d'ordre naturelle entre les structures pseudo-finslériennes, respectant l'inclusion des cônes de causalité.

**Corollaire 3.23.** *Tout point  $x$  d'une variété pseudo-finslérienne  $(M, \mathcal{C}, f)$  admet un voisinage  $U$  tel que si  $y \in U$  et  $x \preceq y$  alors  $\rho_f(x, y) < \infty$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 3.21, il existe une métrique pseudo-riemannienne  $g : TM \times TM \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  telle que  $\mathcal{C} \subset \{(x, v) \in TM \mid g_x(v, v) < 0\}$  et pour tout  $x, v \in TM$ , nous avons  $f(x, v) < g_x(v, v)$ . Ceci implique donc que pour toute courbe causale (dont la dérivée reste dans  $\mathcal{C}$ )  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  de  $x$  à  $y$ , alors pour tout  $t \in [a, b]$ , nous avons  $g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) < 0$  et

$$\ell_f(\sigma) = \int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt < \int_a^b g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) dt < \infty$$

ce qui implique que  $\rho_f(x, y) < \infty$ . □

**Remarque 3.24.** Bien que nous ayons montré qu'une distance pseudo-finslérienne est finie localement sur une variété, ça n'est à priori pas le cas globalement. La finitude globale de la pseudo-distance n'a pas d'influence sur les résultats de la suite de cette thèse et nous ne nous inquiétons donc pas de cette question.

Il s'agit maintenant de définir ce qu'est une géodésique dans un espace-temps. Comme dans le cas finslérien classique, nous n'avons pas suffisamment de différentiabilité pour pouvoir donner une équation différentielle dont les solutions sont les géodésiques, ni pour optimiser un lagrangien. C'est pourquoi nous allons à nouveau donner deux définitions de ce que sont les géodésiques dans un espace-temps.

**Définition 3.25.** (Géodésique pseudo-métrique) Soit  $(X, \preceq, \rho)$  un espace-temps métrique. Une courbe causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  est appelée *géodésique pseudo-métrique* si pour tout  $t_0 \in [a, b]$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $r, s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  vérifient  $r < s < t$ , alors

$$\rho(\sigma(r), \sigma(s)) + \rho(\sigma(s), \sigma(t)) = \rho(\sigma(r), \sigma(t)).$$

**Définition 3.26.** (Courbe maximisante) Soient  $(M, \mathcal{C}, f)$  un une variété pseudo-finslérien et  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  une courbe causale. On dit que  $\sigma$  est une *courbe maximisante* si pour tout  $s, t \in [a, b]$

$$\rho_\ell(\sigma(s), \sigma(t)) = \ell_f(\sigma|_{[s,t]}).$$

Nous allons maintenant énoncer différents points de vue sur la géométrie pseudo-finslérienne, inspirés des points de vue sur la géométrie finslérienne, toutefois cette façon de voir n'utilise pas les mêmes techniques car il faut prendre en compte les relations de causalité.

### 3.2.1 Point de vue de géométrie convexe sur la géométrie pseudo-finslérienne

Nous remarquons dans cette section, que la donnée d'un convexe ne contenant pas l'origine dans l'espace tangent détermine un cône, donc une relation de causalité, ainsi qu'une boule unité dans ce cône et permet donc de construire une métrique pseudo-finslérienne.

**Définition 3.27** (Convexe De Valinor). Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie. Nous appelons *convexe De Valinor*<sup>1</sup> un ensemble  $\mathcal{D} \subset X$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{D}$  est ouvert, convexe, non-vide.
2.  $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ .
3. (Anti-étoilé) Si  $x \in \mathcal{D}$ , alors pour tout  $\lambda \geq 1$ , nous avons  $\lambda x \in \mathcal{D}$ .
4.  $\mathcal{D}$  est propre (c'est à dire, ne contient aucune droite).

Nous pouvons alors définir la relation de causalité provenant de la donnée d'un convexe De Valinor.

**Définition 3.28.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{D}$  un convexe De Valinor dans  $X$ . Nous pouvons alors définir un cône sur  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} := \{x \in X \mid \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda v \in \overline{\mathcal{D}}\},$$

où  $\overline{\mathcal{D}}$  désigne l'adhérence de  $\mathcal{D}$ . Nous définissons également l'ensemble

$$B = \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{D}},$$

appelé *boule unité*.

---

1. "Valinor était béni, car les immortels y habitaient, et rien ne se flétrissait ni ne se desséchait, et les fleurs et les feuilles n'avaient aucune tache dans ce pays, et rien de ce qui vivait ne se gâtait ni ne tombait malade ; car même les pierres et les eaux étaient saintes." Valinor est une région fictive qui appartient au légendaire de l'écrivain britannique J. R. R. Tolkien, décrite dans Le Silmarillion. L'idée de cette terminologie a été suggérée par Constantin Vernicos.

Nous remarquons que  $\bar{B} = \bar{C} \setminus \mathcal{D}$  et que cet ensemble est étoilé.

Nous allons maintenant voir que la donnée d'un convexe De Valinor dans un espace vectoriel de dimension finie est équivalente à la donnée d'une pseudo-norme de Minkowski.

**Définition 3.29** (Jauge de Lorentz-Minkowski). Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{D} \subset X$  un convexe De Valinor. La *jauge de Lorentz-Minkowski* de  $\mathcal{D}$  est la fonction  $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  donnée par

$$f_{\mathcal{D}}(v) = \sup \{t \geq 0 \mid v \in t\bar{\mathcal{D}}\}.$$

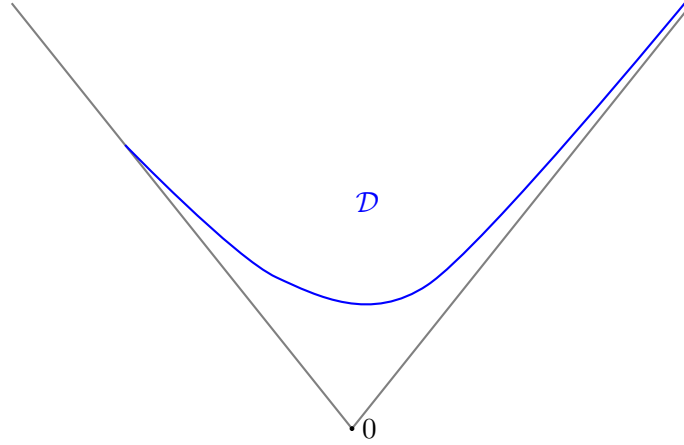


FIGURE 3.2 – Un exemple de convexe De Valinor  $\mathcal{D}$  et le cône de causalité associé.

**Remarque 3.30.** Voici quelques conséquences immédiates des définitions.

- La jauge de Lorentz-Minkowski  $f_{\mathcal{D}}$  est strictement positive sur  $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \setminus \{0\}$  si et seulement si la boule unité  $B$  est bornée.
- $\mathcal{D} = \{v \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \mid f_{\mathcal{D}}(v) > 1\}$ .
- $\bar{\mathcal{D}} = \{v \in \bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \mid f_{\mathcal{D}}(v) \geq 1\}$ .
- $B = \{v \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \mid f_{\mathcal{D}}(x) < 1\}$ .
- $\bar{B} = \{v \in \bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \mid f_{\mathcal{D}}(x) \leq 1\}$ .

**Proposition 3.31.** Soit  $\mathcal{D}$  un convexe De Valinor dans un espace vectoriel de dimension finie  $X$ , alors  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  est un cône causal et la jauge  $f_{\mathcal{D}}$  est une pseudo-norme de Minkowski.

*Démonstration.* Le fait que  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  est un champ de cônes convexes fermés propres de sommet 0 dans chaque espace tangent est trivial par la définition 3.28. Pour  $x, y$ , en posant  $x \preceq y$  si et seulement si  $y - x \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  la proposition 3.4 montre que  $\preceq$  est une relation de causalité.

Il s'agit maintenant de voir que  $f_{\mathcal{D}}$  est une pseudo-norme de Minkowski.

1. Soit  $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ , alors

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \sup \{t \geq 0 \mid x \in t\bar{\mathcal{D}}\} \geq 0$$

de plus, si  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}$ , nous avons

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \sup \{t \geq 0 \mid x \in t\bar{\mathcal{D}}\} > 0$$

et

$$f_{\mathcal{D}}(0) = \sup \{t \geq 0 \mid 0 \in t\overline{\mathcal{D}}\} = 0.$$

2. De plus, étant donné  $\lambda > 0$ , pour  $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ ,  $\lambda x \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  et

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(\lambda x) &= \sup \{t \geq 0 \mid \lambda x \in t\overline{\mathcal{D}}\} \\ &= \sup \{\lambda s > 0 \mid x \in s\overline{\mathcal{D}}\} \\ &= \lambda \sup \{s > 0 \mid x \in s\overline{\mathcal{D}}\} = \lambda f_{\mathcal{D}}(x), \end{aligned}$$

où nous avons posé  $t = \lambda s$ .

3. Commençons par remarquer que  $f_{\mathcal{D}}(x) > s$  est équivalent à  $\frac{x}{s} \in \mathcal{D}$ .

Soient  $x, y \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  tels que

$$\frac{x}{s} \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \frac{y}{t} \in \mathcal{D}.$$

La convexité de  $\mathcal{D}$  implique que  $\frac{x+y}{s+t} \in \mathcal{D}$ , or si nous prenons  $f_{\mathcal{D}}(x) > s$  et  $f_{\mathcal{D}}(y) > t$ , nous obtenons  $f_{\mathcal{D}}(x+y) > s+t$  et en passant au supremum, nous obtenons

$$f_{\mathcal{D}}(x) + f_{\mathcal{D}}(y) \leq f_{\mathcal{D}}(x+y).$$

Nous avons donc prouvé que dans un espace vectoriel de dimension finie, la donnée d'un convexe De Valinor  $\mathcal{D} \subset X$  induit une structure d'espace de Lorentz-Minkowski sur  $X$ .  $\square$

**Remarque 3.32.** Le point 4 de la définition 3.27 implique que  $\mathcal{D}$  n'est pas borné. Toutefois, il serait possible de se donner un ensemble  $\mathcal{D} \subset X$  borné, puis de l'étendre en un ensemble  $\mathcal{D}^+ \subset X$  qui serait anti-étoilé sans changer le cône causal et la pseudo-norme de Minkowski.

Considérons maintenant un champ de convexes De Valinor sur une variété, et montrons que ceci induira une structure de variété pseudo-finslérienne, de la même manière que dans l'approche de géométrie convexe de la géométrie finslérienne faible.

**Définition 3.33** (Champ de convexes De Valinor). Soit  $M$  une variété différentiable. Un *champ de convexes De Valinor* est sous-ensemble ouvert  $\mathcal{D} \subset TM$  tel que  $\mathcal{D}_x := T_x M \cap \mathcal{D}$  est un convexe De Valinor dans l'espace vectoriel  $T_x M$ .

A partir d'un champ de convexes De Valinor  $\mathcal{D} \subset TM$  on peut définir le champ de cône

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}} := \{(p, v) \in TM \mid \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda v \in \overline{\mathcal{D}}\}.$$

On considère aussi l'ensemble  $B = \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{D}}$ , alors  $\mathcal{C}_x = \mathcal{C} \cap T_x M$  et  $B_x = B \cap T_x M$  sont le cône causal et la boule unité au point  $x \in M$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition 3.34.** Soit  $M$  une variété différentiable, alors la donnée d'un champ de convexes De Valinor  $\mathcal{D}$  sur  $TM$  est équivalente à la donnée d'un champ de cônes  $\mathcal{C}$  et d'une métrique pseudo-finslérienne  $f_{\mathcal{D}}$  sur  $(M, \mathcal{C})$ .

*Démonstration.* La proposition 3.31 permet de démontrer cette équivalence, car chaque espace tangent de la variété  $M$  est un espace de Lorentz Minkowski. En effet, étant donné une structure pseudo-finslérienne sur  $M$ , il suffit de considérer le cône de causalité de la pseudo-métrique et le complémentaire de la boule unité comme convexe De Valinor.

Il faut montrer que la pseudo-métrique obtenue par cette construction est semi-continue supérieurement. En effet, nous avons que si  $f_{\mathcal{D}}$  est la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$ , alors pour  $\lambda > 0$ , les ensembles  $\{(x, v) \in TM \mid f(x, v) < \lambda\}$  sont homéomorphes à la boule unité, et donc ouverts à l'intérieur de  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ , par conséquent  $f_{\mathcal{D}}$  est semi-continue supérieurement dans  $\mathcal{C}$ .  $\square$

Nous noterons parfois  $(M, \mathcal{D})$  pour une variété pseudo-finslérienne, cette notation est justifiée par la proposition précédente.

Nous avons donc une façon plus synthétique de voir une géométrie pseudo-finslérienne, ce qui nous servira à démontrer des théorèmes tels que ceux de [May41], mais en géométrie pseudo-finslérienne. De même, cette construction permet de définir une métrique pseudo-finslérienne à l'extérieur d'un convexe.

Observons que l'ordre mentionné dans la remarque 3.22 correspond à l'inclusion des convexes De Valinor.

**Exemples.** 1. En suivant la construction de Athanase Papadopoulos et Sumio Yamada (voir [PY19]), nous définissons un analogue pseudo-finslérien de la métrique de Funk sur le complémentaire d'un domaine convexe.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert convexe ne contenant aucune droite, nous considérons alors la variété  $M = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  et définissons le champ de convexes De Valinor  $\mathcal{D} \subset TM$  de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \{(x, v) \in TM \mid \text{il existe } \lambda \leq 1 \text{ tel que } x + \lambda v \in \Omega\}.$$

Cette construction induit un champ de cônes sur  $M$ , nous avons

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \{(x, v) \in TM \mid \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } x + \lambda v \in \Omega\}.$$

Étant donnés  $x, y \in M$ , nous avons donc  $x \preceq y$  s'il existe une courbe différentiable  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  de  $x$  à  $y$  telle que pour tout  $t \in [a, b]$  nous avons  $\dot{\sigma}(t) \in \mathcal{C}$ .

Nous définissons alors la métrique pseudo-finslérienne de Funk  $f_{\Omega} : \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  de la manière suivante :

$$f_{\Omega}(x, v) = f_{\mathcal{D}_x}(v) = \sup \{t \geq 0 \mid v \in t\overline{\mathcal{D}}_x\}.$$

Étant donnés  $x, y \in M$  tels que  $x \preceq y$ , la pseudo-distance induite par  $f_{\Omega}$  est

$$\rho_{\Omega}(x, y) = \log \frac{|p(x, y) - x|}{|p(x, y) - y|}$$

où  $p(x, y)$  est le point d'intersection entre le rayon  $x + \lambda(y - x)$  (pour  $\lambda > 0$ ) et le bord de  $\Omega$ , et  $|\cdot|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . La preuve que  $\rho_{\Omega}$  est bien la pseudo-distance provenant de  $f_{\Omega}$  se

trouve dans [PY19]. Il est clair que cette pseudo-distance est projective. Nous avons donc défini une pseudo-métrique projective canonique à l'extérieur d'un convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

2. Soit  $X$  un espace vectoriel réel de dimension finie, nous pouvons construire une famille de pseudo-normes de Minkowski sur  $X \times \mathbb{R}$  à partir d'un convexe  $\Omega \subset X$ , que nous supposons ouvert, borné et contenant l'origine.

Pour  $p \geq 1$ , nous définissons le convexe De Valinor  $\mathcal{D} \subset X \times \mathbb{R}$  par

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t > 1 \quad \text{et} \quad x \in (t^p - 1)^{\frac{1}{p}} \cdot \Omega \right\}.$$

Le cône associé à  $\mathcal{D}$  est donné par

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \left\{ (x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in t \cdot \overline{\Omega} \right\},$$

et la boule unité pour cette pseudo-norme de Minkowski est

$$B_{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D} = \left\{ (x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 1 \quad \text{et} \quad x \in (t^p - 1)^{\frac{1}{p}} \cdot \Omega \right\}.$$

La pseudo-norme de Minkowski  $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est alors donnée par

$$f_{\mathcal{D}}(x, t) = (|t|^p - (F(x))^p)^{\frac{1}{p}}$$

où  $F : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la jauge de Minkowski de  $\Omega$ .

Observons qu'en choisissant que  $\Omega$  est un cube centré en 0, pour  $p = 1$  nous avons construit une pseudo-norme analogue à la norme de Manhattan.

De même, si  $\Omega$  est une boule euclidienne centrée en 0 et  $p = 2$  nous retrouvons la métrique de Lorentz-Minkowski de la relativité restreinte.

Cette construction permet d'obtenir une variété pseudo-finslérienne  $f$  sur  $M \times \mathbb{R}$  à partir d'une variété finslérienne  $(M, F)$  en procédant à la même construction sur chaque espace tangent après avoir choisi  $\Omega$  comme étant la boule unité pour  $F$ .

En utilisant l'approche "géométrie convexe" des géométries pseudo-finslériennes, nous pouvons mieux comprendre le comportement des géodésiques pseudo-métriques. Pour ceci, nous aurons besoin de considérer une variété pseudo-finslérienne  $(M, \mathcal{C}, f)$ , son espace tangent  $TM$  et son espace cotangent  $T^*M$ .

**Définition 3.35.** Soit  $(M, \mathcal{D})$  une variété différentiable munie d'un champ de convexes De Valinor dont le champ de cône associé est noté  $\mathcal{C} \subset TM$ . Pour tout  $x \in M$ , définissons

1. La co-boule unité pour  $f_{\mathcal{D}}$  par

$$B_x^* = \{ \theta_x \in T_x^*M \mid \theta_x(v) \geq f_{\mathcal{D}}(x, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in \mathcal{C}_x \}.$$

2. Soit  $v \in \mathcal{C}$ , alors l'ensemble des plans de support de  $B_x$  en  $v$  est défini par

$$B_{x,v}^* = \{ \theta_x \in B_x^* \mid \theta_x(v) = f_{\mathcal{D}}(x, v) \}.$$

3. La face de  $B_x$  en direction de  $v \in T_x M$ , de dimension minimale est alors donnée par

$$\text{Face}_{x,v}(B_x) = \{w \in \partial B_x \mid \theta_x(w) = 1 \text{ pour tout } \theta_x \in B_{x,v}^*\}.$$

4. Nous pouvons alors définir le cône sur la  $\text{Face}_{x,v}(B_x)$  en direction de  $v \in T_x M$  de la manière suivante :

$$\text{Cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v) = \{w \in \mathcal{C} \mid \theta_x(w) = f_{\mathcal{D}}(x, w) \text{ pour tout } \theta_x \in B_{x,v}^*\}$$

Ces différentes notions provenant de la géométrie convexe vont permettre de caractériser les géodésiques pseudo-métriques dans une variété pseudo-finslérienne.

Commençons par décrire les différentes propriétés de l'ensemble  $\text{Cône}_{f,x}(v)$ .

**Lemme 3.36.** *Soient  $(M, \mathcal{D})$  une variété pseudo-finslérienne,  $x \in M$  et  $v \in \mathcal{C}_x \subset T_x M$  non-nul, alors*

1. *Cône $_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$  est un cône convexe inclu dans  $\mathcal{C}$ .*
2. *Si  $w = w_1 + w_2$  avec  $w_1, w_2 \in \text{Cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$  non-nuls, alors*

$$f_{\mathcal{D}}(x, w) = f_{\mathcal{D}}(x, w_1) + f_{\mathcal{D}}(x, w_2).$$

3. *Si  $w = w_1 + w_2$  avec  $w_1, w_2$  non-nuls mais n'appartenant pas à un même cône de face, alors*

$$f_{\mathcal{D}}(x, w) > f_{\mathcal{D}}(x, w_1) + f_{\mathcal{D}}(x, w_2).$$

*Démonstration.* 1. Soit  $v \in \mathcal{C}$ , il est trivial par la linéarité des formes qui décrivent cône $_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , que pour tout  $w \in \mathcal{C}_x$  et tout  $\lambda > 0$ , si  $w \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , alors  $\lambda w \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ .

Il s'agit donc de montrer que cône $_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$  est convexe. Soient alors  $w_1, w_2 \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , il faut montrer que  $w_1 + w_2 \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ . Nous savons par définition que pour  $\theta_x \in B_{x,v}^*$ ,

$$\theta_x(w_1 + w_2) \geq f_{\mathcal{D}}(x, w_1 + w_2) \geq f_{\mathcal{D}}(x, w_1) + f_{\mathcal{D}}(x, w_2) = \theta_x(w_1) + \theta_x(w_2) = \theta_x(w_1 + w_2)$$

ce qui force les égalités partout, et donc  $w_1 + w_2 \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , qui est donc bien un cône convexe contenu dans  $\mathcal{C}$ .

2. Commençons par remarquer que par le point précédent, si  $w_1, w_2 \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , alors  $w_1 + w_2 \in \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v) \subset \mathcal{C}$ . Ainsi nous avons, pour tout  $\theta_x \in B_{x,v}^*$ ,

$$f_{\mathcal{D}}(x, w_1 + w_2) = \theta_x(w_1 + w_2) = \theta_x(w_1) + \theta_x(w_2) = f_{\mathcal{D}}(x, w_1) + f_{\mathcal{D}}(x, w_2)$$

ce qui prouve ce point.

3. Si  $w = w_1 + w_2$  avec  $w_1, w_2 \in \mathcal{C} \setminus \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , nous remarquons d'abord que  $w = w_1 + w_2 \in \mathcal{C}$ , car  $\mathcal{C}$  est un cône convexe.

Comme  $w_1, w_2 \notin \text{cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v)$ , il existe  $\tilde{\theta}_x \in B_{x,v}^*$  tel que  $\tilde{\theta}_x(w_1) > f_{\mathcal{D}}(x, w_1)$  et  $\tilde{\theta}_x(w_2) > f_{\mathcal{D}}(x, w_2)$ . Ceci implique alors que



$$f_{\mathcal{D}}(x, w_1 + w_2) = \tilde{\theta}_x(w_1 + w_2) = \tilde{\theta}_x(w_1) + \tilde{\theta}_x(w_2) > f_{\mathcal{D}}(x, w_1) + f_{\mathcal{D}}(x, w_2)$$

ce qui prouve ce point. □

**Remarque 3.37.** Les points 2. et 3. de ce lemme impliquent la chose suivante :

$$w_1 + w_2 \in \text{Cône}_{f_{\mathcal{D}},x}(v) \quad \text{si et seulement si} \quad f_{\mathcal{D}}(x, w_1 + w_2) = f_{\mathcal{D}}(x, w_1) + f_{\mathcal{D}}(x, w_2).$$

Nous rappelons la définition d'une géodésique pseudo-métrique.

**Définition 3.25** (Géodésique pseudo-métrique).

Soit  $(X, \preceq, \rho)$  un espace-temps métrique. Une courbe causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  est appelée *géodésique pseudo-métrique* si pour tout  $t_0 \in [a, b]$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $r, s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  vérifient  $r < s < t$ , alors

$$\rho(\sigma(r), \sigma(s)) + \rho(\sigma(s), \sigma(t)) = \rho(\sigma(r), \sigma(t)).$$

Ce lemme et cette remarque impliquent directement le résultat suivant :

**Théorème 3.38.** Soit  $(X, \mathcal{D})$  un espace de Lorentz-Minkowski dont le convexe De Valinor est  $\mathcal{D}$ . Soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe causale, alors  $\sigma$  est une géodésique pseudo-métrique pour  $f_{\mathcal{D}}$  si et seulement si pour tout  $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$ ,

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) \in \text{Cône}_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_3) - \sigma(t_1)) \quad \text{et} \quad \sigma(t_3) - \sigma(t_2) \in \text{Cône}_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_3) - \sigma(t_1)).$$

*Démonstration.* Nous commençons par rappeler que si  $\sigma$  est une courbe causale, alors pour tout  $a \leq s < t \leq b$ , nous avons que  $\sigma(s) \preceq \sigma(t)$ .

La preuve est immédiate par la remarque précédente, car pour deux point  $v \preceq w$  de  $X$ , nous définissons  $\rho_{f_{\mathcal{D}}}(v, w) = f_{\mathcal{D}}(w - v)$ , et donc si pour tout  $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$  nous avons  $\sigma(t_2) - \sigma(t_1) \in \text{Cône}_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_3) - \sigma(t_1))$  et  $\sigma(t_3) - \sigma(t_2) \in \text{Cône}_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_3) - \sigma(t_1))$ , alors pour tout  $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$ , nous avons  $\rho_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_1), \sigma(t_3)) = \rho_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) + \rho_{f_{\mathcal{D}}}(\sigma(t_2), \sigma(t_3))$ , ce qui prouve le théorème. □

Un corollaire direct de ce théorème est le suivant :

**Corollaire 3.39.** Soit  $(X, \mathcal{D})$  un espace de Lorentz-Minkowski dont le convexe De Valinor est strictement convexe, alors l'unique géodésique reliant deux points  $x, y \in X$  tels que  $x \preceq y$  est le segment affine  $[x, y]$ .

*Démonstration.* On sait que la pseudo-distance  $\rho$  dans un espace de Lorentz-Minkowski est projective, i.e. le segment  $[x, y]$  est géodésique. Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas d'autre géodésiques reliant ces deux points. Par le théorème 3.38, nous savons que toute corde d'une géodésique pseudo-métrique est contenue dans le cône construit sur une face de la boule unité. Or, la boule unité étant strictement concave (car  $\mathcal{D}$  est strictement convexe), il n'y a pas de face contenant plus qu'un point du bord de la boule  $\partial B$ , et donc le cône est une droite euclidienne passant par 0 et  $x$ , ce qui force toute géodésique pseudo-métrique à être une unique droite euclidienne. □

### 3.2.2 Longueur intrinsèque

De la même façon qu'en géométrie finslérienne, nous pouvons nous demander quand est-ce que la longueur induite par une métrique pseudo-finslérienne est une longueur intrinsèque intrinsèque. Ces deux questions sont liées et nous en apporterons une réponse dans la section 2 du chapitre 4.

**Définition 3.40.** Soit  $(X, \preceq, \rho)$  un espace-temps métrique et soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe causale dans  $X$ , la *longueur intrinsèque* de  $\sigma$  est définie par

$$\ell(\sigma) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1}))$$

où l'infimum est pris sur les partitions  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$  de  $[a, b]$ .

Une courbe causale dont la longueur intrinsèque est nulle est appelée *courbe de type lumière*.

Notons que nous avons utilisé le même terme pour la longueur intrinsèque que dans le chapitre 1, toutefois la confusion ne sera pas possible, car le contexte de l'utilisation de ces deux longueurs intrinsèques est très différent.

La question qui se pose alors, et dont nous allons parler au chapitre 4, est de savoir sous quelles conditions la longueur pseudo-finslérienne coïncide avec la longueur intrinsèque pour la pseudo-distance induite par la métrique pseudo-finslérienne.

### 3.2.3 Autres travaux

Pour conclure ce chapitre, mentionnons que l'étude des espaces pseudo-finslériens et des structures causales synthétiques est un sujet actuellement très actif. A titre d'exemples, mentionnons l'article [KS18] de M. Kunzinger et C. Sämann qui étudie une notion de courbures métriques de type  $CAT(\kappa)$  dans le contexte des espaces de longueurs Lorentzien et celui de E. Minguzzi qui considère l'hyperbolicité globale des structures pseudo-finslériennes [Min19]. Dans l'appendice de [JS20], M.A. Javaloyes et M. Sánchez survolent les différents points de vues sur la géométrie pseudo-finslérienne donnés par 6 auteurs différents. La question de la finitude d'une pseudo-distance est étudiée par A. Rennie et B.E. Whale dans [RW16]. De plus, Athanase Papadopoulos, dans [Pap18a] a écrit un article de review sur la chronogéométrie d'Alexandrov [Ale67].

## Chapitre 4

# Théorèmes de type Busemann-Mayer-Kobayashi dans le contexte pseudo-Finslérien

Le but de ce chapitre est de démontrer des résultats analogues aux résultats de Busemann-Mayer-Kobayashi ([May41],[Kob91]), unifiés et réexpliqués dans le chapitre 2. Toutefois ces résultats seront démontrés dans le cadre des variétés pseudo-finslériennes, donc dans un contexte de géométrie de type espace-temps, prenant en compte la notion de causalité, telle qu'expliquée dans le chapitre 3. Nous allons nous inspirer des techniques de preuve utilisées par Busemann-Mayer dans [May41], tout en les adaptant aux objets sur lesquels nous travaillons. Les hypothèses des théorèmes seront également différentes de celle du chapitre 2 étant donné que, par exemple, nous ne considérerons que des courbes causales. Le travail d'adaptation des problématiques, de même type que celles du chapitre 2 aux variétés pseudo-finslériennes, a demandé de développer la vision du chapitre 3 des espaces pseudo-finslériens faibles.

### 4.1 Théorème de concavification de type Busemann-Mayer-Kobayashi

Dans cette section, nous considérons une variété différentiable  $M$  munie d'une structure pseudo-finslérienne donnée par la jauge de Lorentz-Minkowski associée à un champ de De Valinor  $\mathcal{D}$  qui sont anti-étoilés par rapport à l'origine, mais pas forcément convexes (voir le chapitre 3).

Nous démontrons un théorème de concavification de jauge de Minkowski de type espace-temps, inspiré par le théorème 2.3 et par les techniques utilisées pour démontrer ce dernier. Une des idées clé du théorème 2.3 est que les géodésiques suivent les directions extrêmes de la boule unité de la métrique finslérienne. Il a donc fallu traduire ceci en langage propre à la géométrie pseudo-finslérienne, puis comprendre comment adapter les arguments finslérien au contexte pseudo-finslérien.

Nous commençons par travailler dans un espace vectoriel réel de dimension finie  $X$ , qui aura le rôle de l'espace tangent en un point de  $M$ . Si l'ensemble De Valinor  $\mathcal{D} \subset X$  n'est pas convexe, alors la jauge de Lorentz-Minkowski sur  $X$  associée à  $\mathcal{D}$  n'est pas forcément une pseudo-norme de Minkowski et nous la noterons  $\phi = \phi_{\mathcal{D}}$ . Notons que  $\phi$  ne satisfait pas forcément l'inégalité causale. Les premiers résultats sont des théorèmes de géométrie convexe de type Minkowski-Carathéodory [Web94], mais dans un cadre causal.

Nous introduisons d'abord quelques définitions adaptées des définitions 3.27, 3.28 et 3.31 pour préciser ce qui a été décrit ci-dessus.

**Définition 4.1** (Ensemble De Valinor). Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie. Nous appelons *ensemble De Valinor* un ensemble  $\mathcal{D} \subset X$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{D}$  est ouvert, connexe, non-vide, et contenu dans un cône causal.
2.  $0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ .
3. (Anti-étoilé) Si  $x \in \mathcal{D}$ , alors pour tout  $\lambda \geq 1$ , nous avons  $\lambda x \in \mathcal{D}$ .

**Définition 4.2.** • Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{D}$  un ensemble De Valinor dans  $X$ . Nous pouvons alors définir un cône sur  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} := \{x \in X \mid \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda v \in \overline{\mathcal{D}}\},$$

où  $\overline{\mathcal{D}}$  désigne l'adhérence de  $\mathcal{D}$ .

- L'ensemble

$$B = \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{D}}$$

est appelé *boule unité*.

- La *jauge de Lorentz-Minkowski* d'un ensemble De Valinor  $\mathcal{D}$  est la fonction  $\phi_{\mathcal{D}} : \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  donnée par

$$\phi_{\mathcal{D}}(v) = \sup \{t \geq 0 \mid v \in t\overline{\mathcal{D}}\}.$$

- Si  $\phi_{\mathcal{D}} : \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$ , la jauge de Lorentz-Minkowski de l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(\mathcal{D})$  sera appelé le *concauvé de  $\phi$* , et on la notera  $f_{\text{Conv}(\mathcal{D})}$ , ou plus simplement  $f$  s'il n'y a pas de risque de confusion.

**Remarque 4.3.** • Un ensemble De Valinor qui est convexe s'appelle un *convexe De Valinor* (voir définition 3.27).

- Le concauvé d'une jauge de Lorentz-Minkowski d'un ensemble De Valinor est une pseudo-norme de Minkowski (voir définition 3.9).
- Le cône  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  est un cône de causalité au sens du chapitre 3, c'est-à-dire convexe, fermé, d'intérieur non vide et de sommet 0.

**Lemme 4.4.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{D} \subset X$  un ensemble De Valinor tel que la boule  $B \subset \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  est bornée. Pour tout  $v \in \text{Conv}(\mathcal{D})$  il existe  $\lambda > 0$ ,  $w_0, \dots, w_n \in \mathcal{D}$  et des nombres positifs  $\{t_i\}_{i=1}^n$  tels que  $\sum_{i=1}^m t_i = 1$  et

$$\lambda v = \sum_{i=1}^m t_i w_i \tag{4.1}$$

*Démonstration.* Soit  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda v \in \mathcal{D}$ . Nous pouvons appliquer le théorème de Minkowski-Carathéodory (lemme 2.10) à  $\lambda v$  et  $\mathcal{D}$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Nous pouvons donc démontrer un analogue du théorème 2.12 mais dans un cadre causal.

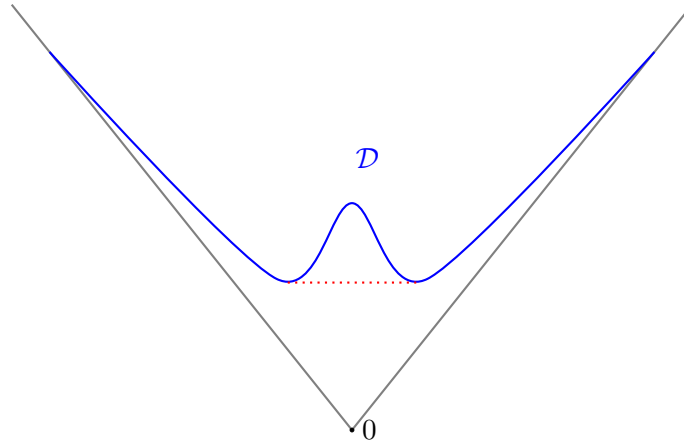


FIGURE 4.1 – Un exemple d'ensemble De Valinor  $\mathcal{D}$  et le cône de causalité associé. En pointillés le concavifié de  $\mathcal{D}$

**Théorème 4.5.** Soient  $X$  un espace vectoriel et  $\mathcal{D} \subset X$  un ensemble De Valinor tel que la boule unité  $B \subset \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  est bornée. Notons  $\phi = \phi_{\mathcal{D}} : \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$  et  $f : \overline{\mathcal{C}}_{\text{Conv}(\mathcal{D})} \rightarrow \mathbb{R}_+$  le concavifié de  $\phi$ . Alors pour tout  $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ , il existe des points extrêmes  $z_1, \dots, z_N$  de  $\mathcal{D}$  tels que

$$v = z_1 + \dots + z_N \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \phi(z_i) = f(v).$$

*Démonstration.* Par définition, il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda v \in \mathcal{D}$  (il faut choisir  $\lambda > 1/\phi(v)$ ). En posant  $f(v) = r$ , par homogénéité nous avons  $f(\lambda v) = \lambda r$ , alors  $\lambda v \in \lambda r (\text{Conv}(\mathcal{D}))$ , et donc il existe  $\{t_i\}_{i=1}^N$  tels que  $\sum_{i=1}^N t_i = 1$  et  $\{w_i\}_{i=1}^N$  des points extrêmes de  $\mathcal{D}$  tels que

$$\lambda v = \sum_{i=1}^N t_i w_i,$$

c'est-à-dire  $v = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\lambda} w_i$ . Nous obtenons alors

$$\sum_{i=1}^N \phi\left(\frac{t_i}{\lambda} w_i\right) = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\lambda} \phi(w_i) = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\lambda} \lambda r = f(v),$$

car  $\phi(w_i) = 1$  pour tout  $i$ . En posant  $z_i = \frac{t_i}{\lambda} w_i$  nous avons démontré le théorème.  $\square$

Montrons à présent un théorème de type Busemann-Mayer-Kobayashi (voir théorème 2.3) dans sa version espace-temps, incluant les questions de causalité.

**Théorème 4.6.** Soient  $X$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'un ensemble De Valinor  $\mathcal{D}$  tel que la boule  $B \subset \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  est bornée. Soit  $\phi : \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$  et  $f : \mathcal{C}_{\text{Conv}(\mathcal{D})} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la jauge de Lorentz-Minkowski associée à l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}$ , alors pour tout  $x, y \in \mathcal{C}$  tels que  $x \preceq y$ ,

nous avons

$$\rho_\phi(x, y) = \rho_f(x, y) (= f(y - x)).$$

*Démonstration.* Par définition, comme  $\text{Conv}(\mathcal{D}) \supset \mathcal{D}$ , nous avons immédiatement que pour tout  $v \in \mathcal{C}$ ,  $f(v) \geq \phi(v)$ . Par conséquent, pour tout  $x, y \in \mathcal{C}$  tels que  $x \preceq y$ , nous avons  $\rho_f(x, y) \geq \rho_\phi(x, y)$ , ce qui montre l'une des deux inégalités.

Montrons maintenant que pour tout  $x, y \in \mathcal{C}$  tels que  $x \preceq y$ , on a  $\rho_f(x, y) \leq \rho_\phi(x, y)$ . Pour montrer ceci, considérer le vecteur  $v = y - x \in \mathcal{C}$ . Nous savons que les pseudo-métriques de Minkowski sont des pseudo-distances projectives par la proposition 3.14, donc

$$f(v) = f(y - x) = \rho_f(x, y) = \ell_f([x, y]).$$

Il s'agit alors de construire une courbe causale  $\tilde{\sigma}$ , de  $x$  vers  $y$ , telle que  $\ell_\phi(\tilde{\sigma}) \geq \ell_f([x, y])$ . Par le théorème 4.5, nous savons qu'il existe  $z_1, \dots, z_N$  des points extrêmes de  $\mathcal{D}$  tels que  $v = z_1 + \dots + z_N$  et  $\sum_{i=1}^N \phi(z_i) \geq f(v)$ . En notant  $\tilde{\sigma}$  la courbe polygonale passant par  $z_1, z_1 + z_2, \dots, z_1 + \dots + z_N = v$ , nous avons

$$\ell_\phi(\tilde{\sigma}) = \sum_{i=1}^n \phi(z_i) \geq f(v)$$

et en passant au supremum des longueurs de courbes causales, nous obtenons bien l'inégalité voulue.  $\square$

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons des métriques pseudo-finslériennes continues sur une variété  $M$ , dont la boule unité est bornée dans chaque espace tangent. Le premier résultat affirme que les longueurs pseudo-finslériennes s'approximent bien par des morceaux de longueurs calculés avec la métrique pseudo-finslérienne "fixée en un point", c'est-à-dire une approximation Lorentz-Minkowski de la métrique pseudo-finslérienne. La définition suivante précise cette idée, pour la formuler nous nous plaçons dans une carte  $\mathcal{U}$  de la variété  $M$ .

**Définition 3.18.** Soit  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne faible dont la métrique est continue. Une courbe différentiable  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  est dite strictement causale si pour tout  $t \in [a, b]$ , le vecteur  $\dot{\sigma}(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma(t)}$ .

Nous noterons  $x \prec y$  si deux points sont liés par une courbe strictement causale.

**Remarque 4.7.** Soit  $\mathcal{U} \subset M$  une carte de  $M$  et  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe strictement causale, alors pour toute partition  $\{t_i\} \subset [a, b]$  suffisamment fine, le vecteur  $\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)$  est dans le cône  $\mathcal{C}_{\sigma(t_i)}$ . Ceci est clair car l'intérieur du cône est ouvert et la condition d'être une courbe strictement causale est une condition ouverte.

**Définition 4.8.** Soient  $f : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une métrique pseudo-finslérienne faible continue et une courbe strictement causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ . Soit  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  une subdivision de  $[a, b]$ . On définit l'approximation Lorentz-Minkowski de la longueur de  $\sigma$  pour la subdivision  $\{t_i\}$  par

$$S_N^F := \sum_{k=1}^N f(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})).$$

Dans le domaine de coordonnées  $\mathcal{U}$ , étant donné une courbe causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  et une partition  $\{t_i\}_{i=0}^N$ , nous noterons  $x_i = \sigma(t_i)$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  et  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

**Théorème 4.9.** Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une métrique pseudo-finslérienne continue sur un ouvert de carte d'une variété  $M$  et soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe strictement causale, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partition  $\{t_i\}$  de  $[a, b]$  telle que

$$|\ell_f(\sigma) - S_N^f| < \varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  une courbe causale, nous avons alors que, pour toute partition  $\{t_i\}_{i=0}^N$  la différence entre  $\ell_f(\sigma)$  et  $S_N^f$  peut être estimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |\ell_f(\sigma) - S_N^f| &= \left| \int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt - \sum_{i=1}^N f(x_{i-1}, \Delta x_i) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt - \sum_{i=0}^N f(\sigma(t_{i-1}), \dot{\sigma}(t_{i-1})) \Delta t_i \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=0}^N f(\sigma(t_{i-1}), \dot{\sigma}(t_{i-1})) \Delta t_i - \sum_{i=0}^N f(x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}) \Delta t_i \right| \end{aligned}$$

Étant donné  $\varepsilon > 0$ , par définition de l'intégrale de Riemann, nous pouvons choisir une partition de  $[a, b]$  telle que  $|\int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt - \sum_{i=0}^N f(\sigma(t_{i-1}), \dot{\sigma}(t_{i-1})) \Delta t_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus, comme  $f$  est continue en ses deux variables et homogène positive, lorsque la partition est suffisamment fine pour que  $|\dot{\sigma}(t_{i-1}) - \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}| < \delta(\varepsilon)$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^N f(\sigma(t_{i-1}), \dot{\sigma}(t_{i-1})) \Delta t_i - \sum_{i=0}^N f(x_{i-1}, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}) \Delta t_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^N \left[ f(\sigma(t_{i-1}), \dot{\sigma}(t_{i-1})) - f(x_{i-1}, \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}) \right] \Delta t_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Cela implique que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partition  $\{t_i\}_{i=0}^N$  suffisamment fine pour que

$$|\ell_f(\sigma) - S_N^f| < \varepsilon.$$

□

Nous avons donc un théorème d'approximation de la longueur pseudo-finslérienne d'une courbe causale par des morceaux de courbe mesurés avec une pseudo-métrique de Minkowski.

**Définition 4.10.** Un champ d'ensembles De Valinor sur une variété  $M$  est un sous-ensemble ouvert  $\mathcal{D} \subset TM$  tel que pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \cap T_x M$  est un ensemble De Valinor.

**Définition 4.11.** (i) Soient  $M$  une variété différentiable et  $\mathcal{D} \subset TM$  un champ d'ensembles De Valinor sur  $M$ . Nous pouvons alors définir un champ de cônes sur  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} := \{(x, v) \in TM \mid \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda v \in \overline{\mathcal{D}_x}\},$$

où  $\overline{\mathcal{D}}_x$  désigne l'adhérence de  $\mathcal{D}_x$ .

(ii) L'ensemble

$$B = \mathcal{C} \setminus \overline{\mathcal{D}}$$

est appelé *champ de boules unité*.

(iii) La *jauge de Lorentz-Minkowski* d'un ensemble De Valinor  $\mathcal{D}$  est la fonction  $\phi_{\mathcal{D}} : \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  donnée par

$$\phi_{\mathcal{D}}(x, v) = \sup \{ t \geq 0 \mid v \in t\overline{\mathcal{D}}_x \}.$$

(iv) Si  $\phi_{\mathcal{D}} : \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$ , la jauge de Lorentz-Minkowski de l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(\mathcal{D})$  sera appelé le *concaifié* de  $\phi$ .

**Remarque 4.12.** Soit  $\mathcal{D}$  un champ d'ensembles De Valinor induisant une jauge de Lorentz-Minkowski sur la variété  $M$ , et en considérant l'ensemble  $\text{Conv}(\mathcal{D}) = \bigcup_{x \in M} \text{Conv}(\mathcal{D}_x)$ , la jauge de Lorentz-Minkowski associée à l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}$  est une métrique pseudo-finslérienne (proposition 3.31). Nous noterons alors cette métrique  $f$  ou  $f_{\text{Conv}(\mathcal{D})}$ .

En utilisant les résultats précédents, nous pouvons démontrer une version pseudo-finslérienne du résultat de Busemann-Mayer-Kobayashi (2.3).

**Théorème 4.13.** Soit  $M$  une variété différentiable munie d'un champ d'ensembles De Valinor  $\mathcal{D}$ . Soient  $\phi$  la jauge de Lorentz-Minkowski de  $\mathcal{D}$  et  $f$  son concaifié, nous supposons de plus que  $\phi$  et  $f$  sont continues, alors pour toute paire de points  $x, y \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$  tels que  $x \preceq y$ , on a

$$\rho_{\phi}(x, y) = \rho_f(x, y).$$

*Démonstration.* Observons d'abord que si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $M$  tels que  $x \preceq y$ , alors  $\rho_f(x, y) \geq \rho_{\phi}(x, y)$ . En effet, pour tout  $p \in M$  et tout  $v \in \mathcal{C}_p$ , nous avons  $f(p, v) \geq \phi(p, v)$ .

Nous devons donc prouver l'inégalité inverse  $\rho_f(x, y) \leq \rho_{\phi}(x, y)$ . Pour cela, considérons une courbe causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  telle que  $\sigma(a) = x$  et  $\sigma(b) = y$  et montrons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une courbe causale  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\hat{\sigma} : [a, b] \rightarrow M$  telle que  $\hat{\sigma}(a) = x$  et  $\hat{\sigma}(b) = y$  et satisfaisant

$$\ell_{\phi}(\hat{\sigma}) \geq \ell_f(\sigma) - \varepsilon.$$

Nous supposons maintenant, sans perdre de généralité que la courbe  $\sigma$  est contenue dans le domaine d'une carte. Commençons par noter que, par le lemme 4.9, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une partition  $\{t_i\}_{i=1}^N$  de  $[a, b]$  telle que

$$|S_N^f - \ell_f(\sigma)| < \varepsilon.$$

En considérant alors seulement le vecteur  $\Delta x_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$  et en appliquant le théorème 4.6 à ce vecteur, nous obtenons qu'il existe  $z_1, \dots, z_n$  des points extrêmes de  $\mathcal{C}_{\sigma(t_i)} \setminus B_{\sigma(t_i)}$  tels que  $\Delta x_i = z_1 + \dots + z_n$  et

$$\sum_{i=1}^n \phi(\sigma(t_i), z_i) \geq f(\sigma(t_i), \Delta x_i).$$



Soit donc  $\hat{\sigma}_i$  la courbe polygonale passant par  $z_1, z_1 + z_2, \dots, z_1 + z_2 + \dots + z_n$ . Nous avons donc

$$\ell_\phi(\hat{\sigma}_i) \geq f(\sigma(t_i), \Delta x_i).$$

Nous pouvons alors définir  $\hat{\sigma}$  comme la concaténation des  $\hat{\sigma}_i$ , la longueur de  $\hat{\sigma}$  est donc la somme des longueurs des  $\hat{\sigma}_i$  et nous obtenons

$$\ell_\phi(\hat{\sigma}) = \sum_i \phi(\sigma(t_i), \hat{\sigma}_i) \geq \sum_i f(\sigma(t_i), \Delta x_i) = S_n^f - n\varepsilon \geq \ell_F(\sigma) - \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème. □

## 4.2 Longueur intrinsèque pseudo-finslérienne

Le but de cette section est de démontrer une version du théorème 2.16 dans le cadre pseudo-finslérien. Les métriques que nous considérerons ici sont de régularité Lipschitz et sont strictement concaves. Dans le chapitre 5, nous avons défini la longueur intrinsèque et la longueur pseudo-finslérienne. A priori il n'est pas évident que la longueur intrinsèque est égale à la longueur pseudo-finslérienne, et cette égalité permet de déduire des équivalences entre les différentes notions de géodésiques.

**Définition 4.14.** Une métrique pseudo-finslérienne  $f$  sur une variété différentiable  $M$  est dite localement *Lipschitz* si pour toute carte dont le domaine  $\mathcal{U} \subset M$  est relativement compacte, il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $(x, v), (y, w) \in T\mathcal{U}$ ,

$$|f(x, v) - f(y, w)| \leq A \|y - x\|_{Eucl} \max\{\|v\|_{Eucl}, \|w\|_{Eucl}\}$$

où  $\|\cdot\|_{Eucl}$  est la norme euclidienne dans la carte  $\mathcal{U}$ .

Dans la suite, la longueur pseudo-Finlérienne d'une courbe causale  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  par morceaux sera notée par

$$\ell_f(\sigma) = \int_a^b f(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) dt.$$

Nous notons aussi la longueur intrinsèque

$$\ell(\sigma) = \inf \sum_{i=0}^n \rho_f(\sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i)),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des partitions de  $[a, b]$ .

Le principal théorème de cette section affirme l'égalité de ces deux notions de longueur sous certaines conditions (voir théorème 4.17). Nous commençons par deux lemmes qui comparent les distances finslérienne entre deux points proches avec la longueur finslérienne du segment dans une carte reliant ces deux points. Par abus de notation étant donnés deux points dans une carte  $\mathcal{U}$  d'une variété  $M$  nous noterons  $[x, y]$  le segment euclidien, sans utiliser l'homéomorphisme de carte.

**Lemme 4.15.** Soient  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne dont la pseudo-métrique est continue et strictement concave,  $x_0 \in M$  et  $\mathcal{U} \subset M$  un domaine de carte relativement compact et contenant le point  $x_0$ .

Si  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  sont deux suites dans  $\mathcal{U}$  telles que  $x_n \neq y_n$  et  $x_n \prec y_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ , alors nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{x_0}(\sigma_n)}{\ell_f(\sigma_n)} = 1$$

où  $\sigma_n : [a, b] \rightarrow B_{Eucl}(x_0, R_n)$  une courbe strictement causale  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $x_n$  à  $y_n$ .

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si  $n$  est suffisamment grand, alors le segment euclidien  $[x_n, y_n]$  est contenu dans  $\mathcal{U}$  et c'est une courbe causale pour la pseudo-métrique  $f$  et pour la pseudo-norme de Minkowski  $f_0$ .

Comme nous avons supposé que  $\mathcal{U} \subset M$  est relativement compact, on peut trouver des constantes  $A, B > 0$  telles que pour tout  $(x, v) \in TU$  on a

$$B|v| \leq f(x, v) \leq A|v|. \quad (4.2)$$

Pour tout  $n$ , on peut choisir  $R_n > 0$  tel que

$$\max\{\rho_f(x_0, x_n), \rho_f(x_0, y_n)\} < R_n < 2 \max\{\rho_f(x_0, x_n), \rho_f(x_0, y_n)\},$$

ainsi qu'une courbe causale  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\sigma_n : [a, b] \rightarrow B_{Eucl}(x_0, R_n)$  reliant  $x_n$  à  $y_n$ . Comme la boule unité de  $f_0$  est supposée strictement concave, le corollaire 3.39 entraîne que

$$\ell_{x_0}(\sigma) \leq \ell_{x_0}([x, y]). \quad (4.3)$$

Nous pouvons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{x_0}(\sigma_n)}{\ell_f(\sigma_n)} = 1. \quad (4.4)$$

Comme  $\mathcal{U}$  est relativement compact,  $f$  est uniformément continue sur

$$\{(x, v) \in TU \mid v \in \mathcal{C}_x \text{ et } |v| \leq 1\},$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , où

$$c_n := \sup\{|f(x_0, v) - f(x_n, v)| : |v| = 1\}.$$

Par conséquent nous avons

$$\left| \frac{\ell_{x_0}(\sigma_n)}{\ell_f(\sigma_n)} - 1 \right| = \frac{|\ell_{x_0}(\sigma_n) - \ell_f(\sigma_n)|}{\ell_f(\sigma_n)} \leq \frac{c_n \cdot \ell_{Eucl}(\sigma_n)}{B \cdot \ell_{Eucl}(\sigma_n)} = \frac{c_n}{B},$$

où  $B$  est la constante de l'inégalité (4.7), ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 4.16.** Soient  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne dont la pseudo-métrique est continue et strictement concave,  $x_0 \in M$  et  $\mathcal{U} \subset M$  un domaine de carte relativement compact et contenant le point  $x_0$ .

Si  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  sont deux suites dans  $\mathcal{U}$  telles que  $x_n \neq y_n$  et  $x_n \prec y_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ , alors on

*a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{\ell_f([x_n, y_n])} = 1, \quad (4.5)$$

où  $[x_n, y_n]$  est le segment euclidien dans la carte  $\mathcal{U}$ ,  $\ell_f([x_n, y_n])$  est la longueur de ce segment pour la pseudo-métrique  $f$  et  $\ell_{x_0}([x_n, y_n])$  est la longueur de  $[x_n, y_n]$  pour la pseudo-norme de Minkowski définie par  $f_0 = f(x_0, \cdot)$ .

*Démonstration.* Nous savons, par définition de  $\rho_f$  que

$$\ell_f([x_n, y_n]) \leq \rho_f(x_n, y_n)$$

par conséquent

$$1 \leq \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{\ell_f([x_n, y_n])} = \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} \frac{\ell_{x_0}([x_n, y_n])}{\ell_f([x_n, y_n])}.$$

Nous savons, par le lemme 4.15 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{x_0}([x_n, y_n])}{\ell_f([x_n, y_n])} = 1,$$

il s'agit donc de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} = 1. \quad (4.6)$$

Étant donné  $n$  suffisamment grand, nous avons que

$$|\rho_f(x_n, y_n) - \ell_f([x_n, y_n])| < \frac{|y_n - x_n|}{n}$$

et comme nous avons supposé que  $\mathcal{U} \subset M$  est relativement compact, nous pouvons trouver des constantes  $A, B > 0$  telles que pour tout  $(x, v) \in T\mathcal{U}$  nous avons

$$B|v| \leq f(x, v) \leq A|v|. \quad (4.7)$$

par conséquent nous avons

$$\left| \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} - \frac{\ell_f([x_n, y_n])}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} \right| = \frac{|\rho_f(x_n, y_n) - \ell_f([x_n, y_n])|}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} \leq \frac{|y_n - x_n|}{nf(x_0, y_n - x_n)} \leq \frac{|y_n - x_n|}{nB|y_n - x_n|} = \frac{1}{nB}.$$

Comme  $B$  est fini et  $n$  arbitrairement grand, nous avons montré que  $\frac{\rho_f(x_n, y_n)}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])}$  tend vers la même limite que  $\frac{\ell_f([x_n, y_n])}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} \rightarrow 1$ , or par le lemme 4.15, nous savons que  $\frac{\ell_f([x_n, y_n])}{\ell_{x_0}([x_n, y_n])} \rightarrow 1$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat central de cette section :

**Théorème 4.17.** *Soit  $(M, \mathcal{C}, f)$  une variété pseudo-finslérienne dont la pseudo-métrique est localement Lipschitz et strictement concave, alors la longueur pseudo-finslérienne  $\ell_f$  et la longueur intrinsèque  $\ell$  coïncident sur les courbes causales continûment différentiables. C'est à dire, pour toute courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  causale*

et continûment différentiable par morceaux, nous avons l'égalité

$$\ell_f(\sigma) = \ell(\sigma).$$

*Démonstration.* Nous commençons par donner la preuve pour une courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  strictement causale. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que  $\sigma$  est de classe  $C^1$  et contenue dans le domaine d'une carte relativement compacte  $\mathcal{U} \subset M$ .

Donnons-nous une subdivision  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  de l'intervalle  $[a, b]$ , notons  $x_i = \sigma(t_i)$  et écrivons

$$\ell(\sigma) - \ell_f(\sigma) = A + B + C,$$

où nous avons défini

$$\begin{aligned} A &= \ell(\sigma) - \sum_{i=0}^{n-1} \ell_f([x_i, x_{i+1}]), \\ B &= \sum_{i=0}^{n-1} \ell_f([x_i, x_{i+1}]) - \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{x_i}([x_i, x_{i+1}]), \\ x_i C &= \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{x_i}([x_i, x_{i+1}]) - \ell_f(\sigma). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont arbitrairement petit si nous choisissons une subdivision suffisamment fine de l'intervalle  $[a, b]$ .

• **Estimation de  $A$  :**

Soit  $\epsilon < \frac{\eta}{3\ell_f(\sigma)}$ . Par le lemme 4.16, nous savons qu'il existe  $\delta_1 > 0$  tel que si la subdivision  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  vérifie  $\max_i |t_i - t_{i+1}| < \delta_1$ , alors

$$|\rho_f(x_i, x_{i+1}) - \ell_f([x_i, x_{i+1}])| \leq \epsilon \cdot \ell_f([x_i, x_{i+1}]).$$

En sommant sur  $i$ , nous obtenons donc

$$|A| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \rho_f(x_i, x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} \ell_f([x_i, x_{i+1}]) \right| \leq \epsilon \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \ell_f([x_i, x_{i+1}]) \leq \epsilon \cdot \ell_f(\sigma) < \frac{\eta}{3}.$$

• **Estimation de  $B$  :** Par le lemme 4.15, il existe  $\delta_2 > 0$  tel que si  $|t_{i+1} - t_i| < \delta_2$ , alors

$$\begin{aligned} |B| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \ell_f([x_i, x_{i+1}]) - \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{x_i}([x_i, x_{i+1}]) \right| \\ &\leq \epsilon \sum_{i=0}^{n-1} \ell_f([x_i, x_{i+1}]) \leq \epsilon \rho_f(x, y) < \frac{\eta}{3}. \end{aligned}$$

• **Estimation de  $C$**  : Par le théorème 4.9 nous savons qu'il existe  $\delta_3 > 0$  tel que si  $|t_{i+1} - t_i| < \delta_3$ , alors

$$|C| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{x_i}([x_i, x_{i+1}]) - \ell(\sigma) \right| = \left| S_n^f - \ell(\sigma) \right| < \frac{\eta}{3}.$$

En combinant ces trois estimations nous avons prouvé le théorème pour les courbes strictement causales.

Si la courbe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  est une courbe causale, il existe une suite  $y_n$  satisfaisant que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sigma(b)$  et pour tout  $n$  les points  $\sigma(a)$  et  $y_n$  sont liés par une courbe strictement causale  $\sigma_n : [a, b] \rightarrow M$  qui converge vers  $\sigma$  au sens de la convergence  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $n$ , nous avons donc l'égalité  $\ell(\sigma_n) = \ell_f(\sigma_n)$  et de plus

$$\ell(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_f(\sigma_n) = \ell_f(\sigma)$$

ce qui prouve le théorème. □

Nous obtenons également des résultats de dérivée métrique analogues à ceux du chapitre 2 (voir théorème 2.21). Pour cela il faut prendre une carte  $\mathcal{U} \subset M$  de la variété pseudo-finslérienne.

**Théorème 4.18.** Soient  $x_n, y_n \in \mathcal{U}$  deux suites telles que  $x_n \neq y_n$  et  $x_n \prec y_n$  sont liés par une courbe strictement causale pour tout  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ . Notons  $v_n := \frac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|}$  et  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{|y_n - x_n|} = f(x_0, v).$$

*Démonstration.* Remarquer que le vecteur  $v \in \mathcal{C}$  car le cône de causalité de  $f$  est fermé et nous avons supposé  $x_n \prec y_n$  sont liés par une courbe strictement causale, donc  $f(x_0, v)$  est bien défini. De plus, nous avons supposé que la métrique est strictement concave et par le théorème 4.17, nous avons que  $\ell_f([x_n, y_n]) = \ell_{\rho_f}([x_n, y_n])$ . Comme  $f(x_0, \cdot)$  est une pseudo-norme de Minkowski, nous avons

$$\int_{[x_n, y_n]} f(x_0, \dot{x}(t)) dt = |y_n - x_n| f(x_0, v).$$

Par conséquent, en appliquant le théorème 4.17, nous obtenons

$$\frac{\rho_f(x_n, y_n)}{|y_n - x_n| f(x_0, v)} \rightarrow 1 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_f(x_n, y_n)}{|y_n - x_n|} = f(x_0, v).$$

□

Nous avons donc pu démontrer des théorèmes du type des résultats de [May41], en développant un point de vue sur la géométrie pseudo-finslérienne inspiré par Busemann [Bus67], [May41]. Une question qui se pose est de trouver une construction de pseudo-cercles (voir chapitre 2) pseudo-finslériens, en s'inspirant

des constructions de [May41], afin de démontrer que les géodésiques des variétés pseudo-finslériennes de dimension 2 sont continûment différentiables.

## Chapitre 5

# Géodésiques spéciales

Dans le cadre de la géométrie finslérienne faible, une des possibilités est que la métrique  $F$  soit régulière mais pas strictement convexe. Notamment dans le chapitre 2, le convexifié d'une jauge de Minkowski d'un ouvert étoilé autour de l'origine n'est pas strictement convexe, il n'y a donc pas unicité de la géodésique entre deux points. En géométrie finslérienne, il est même possible que le rayon d'injectivité soit nul, par exemple en considérant la métrique de Manhattan, il existe une infinité de géodésiques entre chaque paire de points. Dans ce cas de figure, il semble donc a priori impossible de définir correctement une application exponentielle, à la manière de la géométrie riemannienne, comme cela est fait dans [BCS00]. Toutefois, étant donné une métrique finslérienne faible non strictement convexe, il existe une classe de géodésiques, parmi toutes les géodésiques considérées, qui sont des limites uniformes de géodésiques d'une approximation de la métrique faible par des métriques fortement convexes. Nous appellerons ces géodésiques les *géodésiques spéciales*, ce terme est inspiré de la notion de *distinguished geodesics* de Busemann [BP87]. Dans ce chapitre, nous allons construire des géodésiques spéciales, une application exponentielle pour ces géodésiques et ensuite démontrer un théorème de Hopf-Rinow pour les géodésiques spéciales. Il est intéressant de voir alors qu'en partant d'un champ d'ouverts étoilés autour de l'origine, les constructions du chapitre 2 donnent une métrique finslérienne faible non-strictement convexe, mais qu'en sélectionnant des géodésiques spéciales de cette métrique convexifiée, nous obtenons tout de même (sous certaines hypothèses de régularité et de complétude) un théorème de Hopf-Rinow, affirmant en particulier que chaque paire de points est reliée par géodésique spéciale réalisant la distance entre ces points.

### 5.1 Géodésiques Spéciales

Dans [BP87, pages 22-23], Busemann introduit une notion de géodésiques "distinguées" (*Distinguished geodesics* dans le texte), qu'il définit par une liste d'axiomes. Nous définissons ci-dessous une notion de "géodésiques spéciales" sur les variétés finslériennes faibles qui sont un cas particulier des géodésiques distinguées de Busemann.

Dans ce chapitre, nous définissons ces géodésiques spéciales et étudions leur propriétés. Puis nous construisons une application pour ces géodésiques et démontrons un théorème de type Hopf-Rinow. Pour ce faire, nous allons utiliser des méthodes provenant de la géométrie convexe et de l'analyse.

Considérons une variété différentiable  $M$  et  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$  une métrique finslérienne faible localement de

classe  $\mathcal{C}^{3,1}$  (c'est à dire que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  et les dérivées partielles d'ordre 3 sont Lipschitz). Donnons-nous également une métrique riemannienne auxiliaire lisse sur  $M$ , que nous noterons  $h$ .

**Définition 5.1.** Pour  $\varepsilon > 0$ , la métrique finslérienne

$$F_\varepsilon = \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$$

s'appelle la métrique *fortement convexifiée* de  $F$ , relativement à  $(h, \varepsilon)$ .

**Remarque 5.2.** La métrique auxiliaire  $h$  est choisie de façon arbitraire, il est toutefois important de la choisir de même régularité que la métrique finslérienne  $F$ , ou plus régulière. La métrique de Binet-Legendre, définie et étudiée dans [MT12] et [Mat17] est un candidat naturel de métrique auxiliaire, toutefois, elle n'est définie que pour les métriques finslérienne  $F$  finies et non-dégénérées.

**Définition 5.3.** Soit  $\{F_\varepsilon\}$  une famille de métriques finslériennes de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  fortement convexes sur une variété  $M$ . Nous disons que  $\{F_\varepsilon\}$  vérifie la condition  $\Delta(\lambda, \eta)$  sur l'ouvert  $\mathcal{U}$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $0 < \eta < \text{Inj}(F_\varepsilon, x)$  pour tout  $x \in U$  et  $0 < \lambda$ .
- (ii) Pour tout  $x, y \in B(x_0, \eta)$  et tout  $t \in [0, 1]$  nous avons

$$\frac{t}{\lambda} d_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(x(t), y(t)) \leq t \lambda d_\varepsilon(x, y),$$

où  $x(t)$  est la géodésique de  $x_0$  à  $x$  et  $y(t)$  est la géodésique de  $x_0$  à  $y$  et  $d_\varepsilon$  est la distance induite par  $F_\varepsilon$ .

On dira que la famille  $\{F_\varepsilon\}$  vérifie localement la condition  $\Delta(\cdot, \cdot)$  si chaque point de  $M$  admet un voisinage  $U \subset M$  et des constantes  $\lambda, \eta > 0$  telles que  $\Delta(\lambda, \eta)$ .

**Remarque 5.4.** Notons que la condition  $\Delta(1, \eta)$  exprime le théorème de Thalès de la géométrie euclidienne. Pour cette raison nous dirons que la famille de métrique finslériennes  $\{F_\varepsilon\}$  est  $\lambda, \eta$ -*quasi-Thalès* si tout point admet un voisinage vérifiant  $\Delta(\lambda, \eta)$ .

Dans la suite, nous allons supposer que la famille de métriques fortement convexifiées  $F_\varepsilon$  est toujours localement  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès.

Rappelons que dans un système de coordonnées locale, le tenseur fondamental de  $F$  est noté  $g_{ij}$  (voir définition 1.4). Ce tenseur n'est pas défini positif si la métrique n'est pas fortement convexe, toutefois le tenseur fondamental de  $F_\varepsilon$ , donné par

$$g_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} F_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} (F^2 + \varepsilon h) = g_{ij} + \varepsilon h_{ij} \quad (5.1)$$

est défini positif car  $h$  est une métrique riemannienne,  $F_\varepsilon$  est donc une métrique finslérienne fortement convexe et de régularité identique à celle de  $F$  car nous avons supposé que  $h$  est lisse. Nous pouvons alors écrire l'équation des géodésiques pour  $F_\varepsilon$  de la façon habituelle

$$\ddot{x}^k + \gamma_{ij}^k(\varepsilon) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad (5.2)$$



où les

$$\gamma_{ij}^k(\varepsilon) = \frac{1}{2}(g^\varepsilon)^{k\mu} \left\{ \frac{\partial g_{i\mu}^\varepsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}^\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \right\} \quad (5.3)$$

sont les symboles de Christoffel généralisés et  $(g^\varepsilon)^{ij}$  est le coefficient du tenseur fondamental inverse  $(g^\varepsilon)^{-1}$  (voir chapitre 1).

Comme nous avons supposé que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$ , on a  $g_{ij}^\varepsilon$  de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  et les  $\gamma_{ij}^k(\varepsilon)$  sont donc Lipschitz. Avec le théorème de Cauchy-Lipschitz, on déduit que les géodésiques différentielles de  $F_\varepsilon$ , qui sont les solutions de l'équation (5.2), existent localement, sont  $\mathcal{C}^2$ , et sont uniques pour des conditions initiales données dans  $TM$ .

**Définition 5.5.** 1. Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne telle que la métrique  $F$  est de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ , nous appelons  $\varepsilon$ -géodésiques les géodésiques de  $F_\varepsilon$  et les notons  $\gamma^\varepsilon$ .

2. Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ . Une géodésique métrique  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est appelée *géodésique spéciale* s'il existe une suite de  $\varepsilon$ -géodésiques qui converge uniformément vers  $\gamma$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

L'objet de ce chapitre est donc l'étude des géodésiques spéciales.

**Proposition 5.6.** Soient  $M$  une variété différentiable et  $F$  une métrique finslérienne faible de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$  sur  $M$ . Donnons-nous une métrique riemannienne auxiliaire  $h$  de classe  $\mathcal{C}^{3,1}$  et notons  $F_\varepsilon$  la métrique fortement convexifiée de  $F$ . Alors la distance  $d_{F_\varepsilon}$  converge ponctuellement vers  $d_F$ , i.e. pour tous  $x, y \in M$  on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{F_\varepsilon}(x, y) = d_F(x, y).$$

*Démonstration.* Pour tout domaine compact  $K \subset M$ , il existe une constante  $C < 0$  telle que pour tout  $x \in K$  et  $v \in T_x K$  nous avons

$$\frac{1}{C} h_x(v, v) \leq F^2(x, v) \leq C h_x(v, v).$$

Ceci implique que

$$F_\varepsilon^2(x, v) = F^2(x, v) + \varepsilon h_x(v, v) \leq F^2(x, v) + \varepsilon C F^2(x, v) = (1 + \varepsilon C) F^2(x, v).$$

D'autre part, par définition de  $F_\varepsilon$ , nous avons  $d(x, y) \leq d_\varepsilon(x, y)$ . Par conséquent nous avons

$$d(x, y) \leq d_\varepsilon(x, y) \leq \sqrt{1 + \varepsilon C} d(x, y),$$

pour tous  $x, y \in M$ , ce qui prouve la proposition. □

**Remarque 5.7.** Nous pouvons également démontrer que  $d_\varepsilon(x, y)$  converge vers  $d(x, y)$  uniformément sur  $M$ , mais ceci demande un peu plus de travail et n'est pas utile dans la suite.

**Corollaire 5.8.** Les géodésiques spéciales sont des géodésiques métriques.

*Démonstration.* La preuve est immédiate par la proposition précédente. □

Dans le cas d'une norme de Minkowski sur un espace vectoriel, on a le résultat suivant :

**Proposition 5.9.** *Si la métrique auxiliaire est la métrique euclidienne, les géodésiques spéciales d'une métrique de Minkowski sont les droites euclidiennes paramétrées affinement.*

*Démonstration.* Soit  $F$  une métrique de Minkowski sur  $\mathbb{R}^n$ , nous constatons en premier lieu que  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h_{Eucl}}$  est une norme de Minkowski strictement convexe, donc projective. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , les géodésiques de  $F_\varepsilon$  sont donc des droites euclidiennes. Une limite uniforme de droites euclidiennes est une droite euclidienne, donc les géodésiques spéciales sont des droites euclidiennes.  $\square$

Les géodésiques spéciales ne sont pas définies comme solution d'une équation différentielle<sup>1</sup> et nous ne savons donc a priori rien au sujet de leur régularité. Notre premier résultat affirme que sous l'hypothèse  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, ces géodésiques sont différentiables.

**Théorème 5.10.** *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible, de régularité  $C^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire complète sur  $M$ . Supposons que la famille de métriques fortement convexifiées  $F_\varepsilon = \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est localement  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, alors les géodésiques spéciales de  $F$  sont dérivables.*

*Démonstration.* Soit  $\gamma^\varepsilon : [0, \ell] \rightarrow M$  une  $\varepsilon$ -géodésique paramétrée naturellement. Fixons  $x_0 = \gamma^\varepsilon(0) \in M$  et  $\mathcal{U} \subset M$  une carte autour de  $x_0$  telle que dans ce système de coordonnées,  $x_0 = 0$ . Dans cette carte, comme les métriques considérées sont continues, sans perdre de généralité, elles sont bilipschitz à la métrique euclidienne  $|\cdot|$  sur  $\mathcal{U}$ , c'est à dire qu'il existe  $A > 0$  tel que

$$\frac{1}{A}|y - x| \leq d_\varepsilon(x, y) \leq A|y - x|.$$

Cette propriété et le fait que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la métrique  $F_\varepsilon$  est uniformément  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès impliquent que pour tout  $x, y \in \mathcal{U}$  et toutes  $\varepsilon$ -géodésiques  $x(t)$  de 0 à  $x$  et  $y(t)$  de 0 à  $y$ , nous avons

$$\frac{t}{A^2\lambda}|y - x| \leq |y(t) - x(t)| \leq A^2\lambda t|y - x|. \quad (5.4)$$

Soit  $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon$  une géodésique spéciale issue de 0, alors pour tout  $\eta > 0$  et pour tout  $t$ , il existe  $\delta_1 > 0$  tel que si  $\varepsilon < \delta_1$ , alors

$$|\gamma(t) - \gamma^\varepsilon(t)| < \frac{\eta}{3A^2\lambda}.$$

Nous savons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la courbe  $\gamma^\varepsilon$  est de régularité  $C^2$ , donc elle est dérivable, soit donc  $v_\varepsilon = \dot{\gamma}^\varepsilon(0)$  c'est à dire que pour tout  $\eta > 0$  il existe  $\delta_2 > 0$  tel que si  $|t| < \delta_2$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  nous avons

$$\left| \frac{\gamma^\varepsilon(t)}{t} - v_\varepsilon \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Comme  $\gamma^\varepsilon$  est supposée paramétrée naturellement,  $v_\varepsilon$  est une suite uniformément bornée, donc quitte à passer à une sous-suite, il existe  $v \in T_0\mathcal{U}$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\delta_3 > 0$  tel que si  $\varepsilon < \delta_3$  alors

$$|v_\varepsilon - v| \leq \frac{\eta}{3}.$$

1. Remarquer que la matrice  $g_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{ij}^\varepsilon$  n'est en général pas inversible et donc les symboles de Christoffel généralisés 5.3 ne sont a priori pas définis.

Nous avons alors, par l'inégalité 5.4 et les trois inégalités précédentes que pour tout  $\eta > 0$ , si  $|t| < \delta_2$  et  $\varepsilon < \min\{\delta_1, \delta_3\}$ , alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{\gamma(t)}{t} - v \right| &\leq \left| \frac{\gamma(t)}{t} - \frac{\gamma^\varepsilon(t)}{t} \right| + \left| \frac{\gamma^\varepsilon(t)}{t} - v_\varepsilon \right| + |v_\varepsilon - v| \\ &\leq A^2 \lambda |\gamma(t) - \gamma^\varepsilon(t)| + \left| \frac{\gamma^\varepsilon(t)}{t} - v_\varepsilon \right| + |v_\varepsilon - v| \\ &< \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\gamma$  est différentiable en  $t = 0$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ . □

Nous avons donc construit une classe de géodésiques différentiables et distinguées pour une métrique finslérienne faible non-strictement convexe de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ .

**Remarque 5.11.** • En prenant une métrique riemannienne auxiliaire projective, nous constatons que les géodésiques spéciales des métriques finslériennes projectives sont des droites euclidiennes.  
• Ainsi que montré dans l'exemple ci-dessous, les géodésiques spéciales dépendent du choix de la métrique auxiliaire.

**Exemples.** Soit  $S$  un triangle équilatéral euclidien que nous représentons dans  $\mathbb{R}^3$  comme l'enveloppe convexe  $S = \text{Conv}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ . Nous équipons  $S$  avec sa métrique de Hilbert. La métrique de Hilbert est projective (voir [Pap09]). Nous construisons des géodésiques spéciales pour cette métrique de Hilbert en prenant la métrique euclidienne comme métrique riemannienne auxiliaire. Les géodésiques spéciales ainsi obtenues sont alors les droites euclidiennes.

Construisons maintenant une métrique riemannienne  $g$  sur le simplexe, de telle sorte que les géodésiques spéciales obtenues en prenant  $g$  comme métrique auxiliaires, ne sont pas les droites euclidiennes.

Soit  $Q = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0, z = 1\}$  vu comme le premier quadrant de  $\mathbb{R}^2$ , alors l'application  $\Phi : (x, y, z) \mapsto (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$  induit une isométrie entre  $S$  et  $Q$ . Cette isométrie est projective, donc les droites de  $S$  sont envoyées sur des droites de  $Q$ . Considérer maintenant l'application  $\Psi : (x, y, 1) \mapsto (\log(x), \log(y)) \in \mathbb{R}^2$ . Cette application induit une métrique de Minkowski sur  $\mathbb{R}^2$ , en effet elle est invariante par translation et finslérienne. Cette métrique est donc projective.

Toutefois,  $\Psi$  n'est pas projective, donc les droites euclidiennes de  $\mathbb{R}^2$  ne sont pas envoyées sur les droites euclidiennes de  $Q$  par  $\Psi^{-1}$ .

Dans le cas d'une métrique de Minkowski, par le lemme 5.9 nous savons qu'en prenant la métrique euclidienne comme métrique auxiliaire, les géodésiques spéciales sont les droites euclidiennes. Définissons  $g = (\Phi^{-1} \circ \Psi^{-1})^* g_{Eucl}$ , les géodésiques spéciales associées à  $g$  sont le rappel par  $\Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}$  des droites euclidiennes dans  $S$ , et ne sont pas des droites euclidiennes car cette application n'est pas une isométrie projective.

## 5.2 Exponentielle spéciale

Nous pouvons maintenant construire une application exponentielle, de la même manière que l'exponentielle riemannienne, mais pour une géométrie finslérienne faible, non-strictement convexe et de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ .

La technique de construction de l'exponentielle spéciale est la suivante :

Nous savons que pour  $\varepsilon > 0$  et une métrique riemannienne auxiliaire complète  $h$ , la métrique finslérienne fortement convexe  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  induit une équation des géodésiques, dont les solutions (étant donné des conditions initiales  $(x, v) \in TM$ ) existent et sont uniques dans un ouvert  $\mathcal{U}$  autour de  $x$ . Nous rappelons que les géodésiques de  $F_\varepsilon$  sont appelées les  $\varepsilon$ -géodésiques. Nous allons étudier et définir une exponentielle spéciale, comme étant une limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 des exponentielles finslériennes des métriques  $F_\varepsilon$ . L'existence et l'unicité de l'application exponentielle finslérienne correspondant à une métrique finslérienne fortement convexe et de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  est garantie par les résultats de [BCS00, page 126].

**Définition 5.12.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible, dont la métrique est de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$  et  $x_0 \in M$ , l'application  $\varepsilon$ -exponentielle, notée  $\exp_{x_0}^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \subset T_{x_0}M \rightarrow M$  est définie par

$$\exp_x^\varepsilon(v) = \gamma_v^\varepsilon(1),$$

où  $\gamma_v^\varepsilon : [0, \ell] \rightarrow M$  est la  $\varepsilon$ -géodésique telle que  $\gamma_v^\varepsilon(0) = x$  et  $\dot{\gamma}_v^\varepsilon(0) = v$ . Ici  $\Omega_\varepsilon \subset T_{x_0}M$  est le domaine de l'application exponentielle de  $F_\varepsilon$  au point  $x_0$ .

Le but de cette section est à nouveau de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. Le fait que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la famille de métriques fortement convexifiées  $F_\varepsilon$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès (voir définition 5.3) assure que le rayon d'injectivité de  $\exp^\varepsilon$  au point  $x$  ne tend pas vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Remarque 5.13.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible, dont la métrique est de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  et  $\{F_\varepsilon\}$  une famille  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès de métriques fortement convexifiées de  $F$ , alors  $F$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès en restreignant la classe des géodésiques considérées aux géodésiques spéciales de  $F$ . Ceci est évident car la suite des distances  $d_\varepsilon$  converge uniformément vers  $d_F$ , par la proposition 5.6.

Cette définition synthétique force l'application exponentielle des métrique finslériennes faibles  $\mathcal{C}^{3,1}$  à être bien définie et bijective sur la boule  $B_F(x_0, \eta)$ , pour une métrique fortement convexe et  $\mathcal{C}^{3,1}$ , c'est que nous allons montrer dans cette section.

Par la section précédente, nous savons que toute limite uniforme de  $\varepsilon$ -géodésique est une géodésique. Toutefois il s'agit de montrer que la suite des  $\varepsilon$ -exponentielles contient une sous-suite convergente, dont la limite sera appelée l'exponentielle spéciale.

**Notation 5.14.** Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible et  $\eta > 0$ , alors

$$\mathcal{B}(x_0, \eta) = \{v \in T_{x_0}M \mid F(x_0, v) < \eta\}$$

et

$$B(x_0, \eta) = \{x \in M \mid d_F(x_0, x) < \eta\}.$$

**Proposition 5.15.** Soient  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de classe  $C^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire complète telle que la famille  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, alors pour tout  $x_0 \in M$ , il existe une application

$$\Phi_{x_0} : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$$

telle que pour tout  $v \in \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$  nous avons

$$\Phi_{x_0}(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{x_0}^\varepsilon(v)$$

où  $\Phi_{x_0}^\varepsilon = \exp_{x_0}^\varepsilon : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$  est la restriction de l' $\varepsilon$ -exponentielle à la boule  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$ .

De plus l'application  $\Phi_{x_0} : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M \rightarrow \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset M$  est une bijection.

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{x_0}^\varepsilon(v)$  existe. Nous pouvons supposer que  $\gamma_v^\varepsilon$  est une géodésique paramétrée naturellement et alors  $\Phi_{x_0}^\varepsilon(v) = \gamma_v^\varepsilon(F_\varepsilon(v))$ , ce qui implique, si  $0 < \varepsilon < 1$ , que

$$d(x, \Phi_{x_0}^\varepsilon(v)) \leq d_\varepsilon(x, \Phi_{x_0}^\varepsilon(v)) = \ell_\varepsilon(\gamma_v^\varepsilon|_{[0, F_\varepsilon(v)]}) = F_\varepsilon(v)$$

qui est borné. Ceci démontre que  $\Phi_{x_0}^\varepsilon$  est uniformément bornée.

De plus, étant donné  $v \in T_x M$  fixé et  $\gamma_v^\varepsilon : [0, \ell] \rightarrow M$  une  $\varepsilon$ -géodésique paramétrée naturellement et de vecteur tangent initial  $v$ , pour  $0 < \varepsilon < 1$  et  $t, t' \in [0, \ell]$ , nous avons

$$d(\Phi_{x_0}^\varepsilon(tv), \Phi_{x_0}^\varepsilon(t'v)) \leq d(\Phi_{x_0}^\varepsilon(tv), \Phi_{x_0}^\varepsilon(t'v)) = |t' - t|F_\varepsilon(v),$$

ce qui implique que la suite de fonctions  $t \mapsto \Phi_{x_0}^\varepsilon(tv)$  est équicontinue en  $\varepsilon$ . En appliquant le théorème de Arzélà-Ascoli (voir [Iva01]), il existe une sous-suite  $\{\varepsilon_k\}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_0}^{\varepsilon_k}(v)$  converge. Nous appelons cette limite  $\Phi_{x_0}$ .

Montrons que  $\Phi_{x_0}$  est une bijection entre  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M$  et  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset M$ .

Soient  $v, w \in \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$ . Supposons que  $\Phi_{x_0}(v) = \Phi_{x_0}(w)$ , alors comme  $F$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès sur les géodésiques spéciales nous avons que pour tout  $x, y \in B_{d_F}(x_0, \eta)$ ,

$$0 = \lambda d(\Phi_{x_0}(v), \Phi_{x_0}(w)) \geq td(\gamma_v(t), \gamma_w(t))$$

ce qui implique que  $\gamma_v(t) = \gamma_w(t)$  pour tout  $t$ , alors nous avons  $w = v$ , ce qui implique que  $\Phi$  est injective sur  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$ .

Montrons que pour tout  $y \in B_{d_{F_\varepsilon}}(x_0, \eta) \in M$ , il existe  $v \in \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2})$  tel que  $\Phi_{x_0}(v) = y$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , comme  $\Phi_{x_0}^\varepsilon$  est un difféomorphisme local, elle est surjective sur une boule  $B_{d_{F_\varepsilon}}(x_0, \frac{\eta}{2})$  car  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, donc pour tout  $y \in B_{d_{F_\varepsilon}}(x_0, \frac{\eta}{2})$ , il existe une suite  $\{v_\varepsilon\} \subset \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M$  telle que la  $\varepsilon$ -géodésique  $\gamma_{v_\varepsilon}^\varepsilon$  joint  $x$  et  $y$ , c'est à dire  $\Phi_{x_0}^\varepsilon(v_\varepsilon) = y$ . Or nous avons montré qu'il existe une limite aux suites  $\varepsilon$ -géodésiques, (qui sont les géodésiques spéciales), appelons  $\gamma$  cette limite. De plus, par la proposition ??, les géodésiques spéciales sont différentiables, donc  $v_\varepsilon$  converge vers  $v = \dot{\gamma}(0)$ , et nous avons bien  $\Phi_{x_0}(v) = y$ , ce qui prouve la surjectivité de  $\Phi_{x_0}$ .

Nous avons donc prouvé que l'application  $\Phi_{x_0}$  est une bijection locale de  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M$  vers  $\mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset M$  et donc son rayon d'injectivité est plus grand ou égal à  $\frac{\eta}{2} > 0$ .  $\square$

L'application  $\Phi_{x_0}$  que nous venons de construire sera appelée l'exponentielle spéciale de  $F$  en  $x_0$  :

**Définition 5.16** (Exponentielle spéciale). Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible de classe  $C^{3,1}$  et  $h$  une métrique riemannienne auxiliaire complète telle que la famille  $F_\varepsilon := \sqrt{F^2 + \varepsilon h}$  est  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, et notons  $\exp^\varepsilon : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \subset T_{x_0}M \rightarrow M$  l'exponentielle de  $F_\varepsilon$  (voir [BCS00]), alors l'exponentielle spéciale est l'application  $\text{Spexp}_{x_0} : \mathcal{B}(x_0, \frac{\eta}{2}) \rightarrow M$  définie par

$$\text{Spexp}_x(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp_x^\varepsilon(v).$$

**Remarque 5.17.** On peut montrer que sous les hypothèses de la proposition 5.15, l'application  $\exp_{x_0}^\varepsilon$  est un homéomorphisme  $\lambda$ -bilipschitz de la boule  $\mathcal{B}(x_0, \eta) \subset T_{x_0}M$  sur son image.

En effet, soient  $\varepsilon > 0$  et  $v_1, v_2 \in \mathcal{B}(x_0, \eta/2)$ . Notons  $x(t) = \exp_{x_0}^\varepsilon(tv_1)$  et  $y(t) = \exp_{x_0}^\varepsilon(tv_2)$  les  $\varepsilon$ -géodésiques définies par ces vecteurs et  $x = x(1), y = y(1)$ . La condition quasi-Thalès dit alors que

$$\frac{1}{\lambda} d_\varepsilon(x, y) \leq \frac{d_\varepsilon(x(t), y(t))}{t} \leq \lambda d_\varepsilon(x, y),$$

mais, par le théorème 2.21, nous avons que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} d_\varepsilon(x(t), y(t)) = F_\varepsilon(x_0, v_2 - v_1)$ , par conséquent nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda} d_\varepsilon(x, y) \leq F_\varepsilon(x_0, v_2 - v_1) \leq \lambda d_\varepsilon(x, y).$$

Réciproquement, si l' $\varepsilon$ -exponentielle est uniformément bilipschitz sur  $\mathcal{B}(x_0, \eta/2)$  pour tout  $x_0 \in U$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , alors la condition  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès est vérifiée pour la famille  $\{F_\varepsilon\}$ .

Nous pourrions être tentés de conclure que l'exponentielle spéciale, qui est obtenue à la Proposition 5.15, est un homéomorphisme sur son image, et même une application bilipschitz, puisqu'elle est limite d'une suite d'applications uniformément bilipschitz. Ce raisonnement n'est pas correct, car la suite  $\Phi_{x_0}^\varepsilon$  est uniformément bilipschitz mais pour la suite de métriques Finslérienne  $F_\varepsilon$ , toutefois elle n'est a priori pas uniformément bilipschitz pour une métrique fixe, indépendante de  $\varepsilon$ .

Nous ne pouvons donc pas conclure que l'exponentielle spéciale est une application localement bi-lipschitz et nous ne savons pas vérifier si elle est continue. Les exemples suivants montrent en effet qu'il est possible qu'une application bijective d'un ouvert du plan dans lui-même, qui est limite ponctuelle d'une suite de difféomorphismes n'est pas forcément continue.

Les exemples suivants montrent qu'une application bijective qui est limite ponctuelle de difféomorphismes n'est pas nécessairement continue.

**Exemples.** 1. Tremblement de Terre circulaire : Considérons le disque

$$\mathbb{D}^2 = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq r \leq 1\}$$

et définissons la suite  $\varphi_\varepsilon : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  d'applications  $C^\infty$  données par

$$\varphi_\varepsilon(r, \theta) = \begin{cases} (r, \theta) & \text{si } r \leq \frac{1}{2} - \varepsilon, \\ (r, \theta + \pi) & \text{si } \frac{1}{2} + \varepsilon \leq r \leq 1, \end{cases}$$

Nous remarquons que l'application  $\varphi_\varepsilon$  est un difféomorphisme du disque pour tout  $\varepsilon$ . La limite ponctuelle  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon$  est bijective et elle est clairement discontinue.

2. Tremblement de Terre radial : De la même manière, considérons l'application  $\psi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  donnée par  $\psi(r, \theta) = (f_\theta(r), \theta)$  où

$$f_\theta(r) = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)r + \frac{\theta}{2\pi}r^2.$$

Cette application est bijective mais n'est pas continue. De plus, nous pouvons l'approximer par une suite de difféomorphismes de  $\mathbb{D}^2$  en définissant une fonction lisse

$$f_\theta^\varepsilon(r) = \begin{cases} r & \text{si } \theta = 0 \\ r^2 & \text{si } \theta = 2\pi - \varepsilon, \end{cases}$$

et donc la suite de difféomorphismes  $\psi^\varepsilon(r, \theta) = (f_\theta^\varepsilon(r), \theta)$ , qui converge ponctuellement vers  $\psi$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 5.3 Théorème de Hopf-Rinow pour les géodésiques spéciales

Dans cette section nous démontrons un théorème de Hopf-Rinow pour les géodésiques spéciales. En fait, nous allons prouver que dans une variété complète et connexe, il existe une géodésique spéciale minimisante entre chaque paire de points. Ce résultat vient du constat que le théorème de Hopf-Rinow riemannien [GHL04] et finslérien classique [BCS00], est un résultat de géométrie métrique et sa preuve n'utilise que des propriétés topologiques et métriques de l'exponentielle. Il a donc fallu définir un substrat d'exponentielle dans le cas de la géométrie finslérienne faible, ce qui a été fait dans la section précédente. Nous avons donc les outils nécessaires à une adaptation de la preuve du théorème de Hopf-Rinow à la géométrie finslérienne faible.

Tout le long de cette section,  $(M, F)$  est une variété finslérienne faible telle que la métrique finslérienne  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^{3,1}$  et telle que les  $\varepsilon$ -approximations fortement convexes de  $F$  sont  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès.

**Définition 5.18** (Géodésiquement complet). Une variété finslérienne faible  $(M, F)$  est dite *géodésiquement complète en avant*<sup>2</sup> pour les géodésiques spéciales si toute géodésique spéciale est définie (ou prolongeable) jusqu'à  $+\infty$ .

Dans le but d'énoncer une généralisation du théorème de Hopf-Rinow aux géodésiques spéciales, nous définissons une version faible de la notion d'espace métrique complet.

**Définition 5.19.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique faible. Une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  est dite *de Cauchy vers avant* si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq k} d(x_k, x_m) = 0.$$

L'espace métrique faible  $(X, d)$  est dit *métriquement complet vers avant* si toute suite de Cauchy vers l'avant converge.

Une application standard du théorème de Arzela-Ascoli nous permet de prouver que si une variété finslérienne faible est complète, alors chaque paire de points est reliée par une géodésique métrique. Le résultat suivant nous dit que sous l'hypothèse  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, il existe une géodésique spéciale reliant deux points quelconques.

---

2. En anglais cela se dit *forward complete*.

**Théorème 5.20.** *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible connexe de régularité  $C^{3,1}$  telle que la famille des métriques fortement convexifiées  $\{F_\varepsilon\}$  est localement  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès. Si  $(M, F)$  est géodésiquement complète pour les géodésiques spéciales, alors pour tout  $x, y \in M$  il existe une géodésique spéciale de longueur minimale joignant  $x$  à  $y$ .*

*Démonstration.* Dans cette démonstration, nous adaptons les arguments de la preuve classique du théorème correspondant en géométrie riemannienne. Notons  $d = d_F(x, y)$  et considérons  $0 < \varepsilon < \min\{d, \eta(x)\}$  où  $\eta(x)$  est le rayon maximum de la boule autour de  $x$  où les approximations fortement convexes de  $F$  sont  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès, alors  $\Phi_{x_0}$  est une bijection de  $\{v \in T_x M \mid F(v) \leq \eta\}$  sur  $\bar{B}(x, \eta) = \{p \in M \mid d(x, p) \leq \eta\}$ . Par continuité de la distance et par compacité de la sphère, il existe un point  $y_1 \in \partial B(x, \varepsilon)$  tel que

$$d_F(y_1, y) = \min \{d_F(z, y) \mid z \in \partial B(x, \varepsilon)\}.$$

Comme l'application exponentielle spéciale est une bijection entre ces domaines, il existe un vecteur  $v \in T_x M$  tel que  $F(x, v) = \varepsilon$  et  $\text{Spexp}_x(v) = y_1$ .

Soit alors  $\gamma(t) := \text{Spexp}_x(tv_1)$  où  $v_1 = \frac{v}{F(x, v)}$ . Comme nous avons supposé que  $M$  est géodésiquement complète pour les géodésiques spéciales, nous avons que  $\gamma$  est complète, c'est à dire qu'elle se prolonge sur  $[0, \infty[$ . De plus,  $\gamma$  est paramétrée par la longueur d'arc car  $F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 1$ . Nous voulons montrer que  $\gamma(d) = y$ , c'est à dire que "la géodésique ne manque pas sa cible". Remarquons pour cela que pour tout  $t \in [0, d]$ , on a

$$t \geq d_F(x, \gamma(t)) \geq d_F(x, y) - d_F(\gamma(t), y), \quad (5.5)$$

et que ceci est valable même si  $d_F$  n'est pas symétrique. On considère maintenant l'ensemble  $J \subset \mathbb{R}$  défini par

$$J = \{s \in [0, d] \mid d(\gamma(s), y) = d - s\} \subset \mathbb{R}$$

et on remarque que la condition  $\gamma(d) = y$  est équivalente à  $d \in J$ .

Notons que pour tous  $s, t \in \mathbb{R}$  tels que  $s \in J$  et  $0 \leq t < s$ , on a

$$d_F(\gamma(t), y) \leq d_F(\gamma(t), \gamma(s)) + d_F(\gamma(s), y) \leq (s - t) + d - s = d - t$$

et en appliquant l'équation (5.5) avec  $s = t$ , nous obtenons

$$d(\gamma(t), y) = d - t$$

ce qui montre que pour tout  $0 \leq t < s$ , si  $s \in J$ , alors  $t \in J$ . Ceci prouve que  $J$  est un intervalle. Il suffit donc de montrer que  $J = [0, d]$ . Nous allons démontrer ceci par l'absurde.

Nous savons que  $0 \in J$  et que  $\varepsilon \in J$ . De plus,  $s \mapsto s + d_F(\gamma(s), y)$  est une application continue, ce qui implique que  $J$  est un intervalle fermé.

**Supposons par l'absurde que**  $t_0 = \sup J < d$ . Nous savons déjà que  $t_0 \geq \varepsilon$  et que  $t_0 \in J$ .

Considérons  $y_2 = \gamma(t_0)$  et prenons  $\varepsilon' > 0$  tel que  $\varepsilon' \leq \min\{\eta(y_2), d_F(y_2, y)\}$ , alors  $\text{Spexp}_{y_2}$  est une bijection entre  $\{w \in T_{y_2} M \mid F(y_2, w) \leq \varepsilon'\}$  et  $B(y_2, \varepsilon')$  et, de la même manière que plus haut, soit  $y_3 \in \partial B(y_2, \varepsilon')$  tel que  $d_F(y_3, y) = \min\{d_F(z, y) \mid z \in \partial B(y_2, \varepsilon')\}$ .

Il existe donc  $w \in T_{y_2} M$  tel que  $F(y_2, w) = \varepsilon'$  et  $y_3 = \text{Spexp}_{y_2}(w)$  et tel que



1.  $d_F(y_2, y) = d_F(y_2, y_3) + d_F(y_3, y) = \varepsilon' + d_F(y_3, y)$ .
2.  $d_F(y_2, y) = d - t_0$ .
3.  $d_F(x, y_3) \leq d_F(x, y_2) + d(y_2, y_3)$ .

Par 1) et 2), nous obtenons  $d_F(y_3, y) = d - t_0 - \varepsilon'$ .

De plus, par 3), nous avons

$$d = d_F(x, y) \leq d_F(x, y_3) + d_F(y_3, y) \leq t_0 + \varepsilon' + d - t_0 - \varepsilon' = d$$

ce qui force l'égalité

$$d = d_F(x, y_3) + d_F(y_3, y).$$

Nous obtenons donc

$$d_F(x, y_3) = d - d_F(y_3, y) = d - (d - t_0 - \varepsilon') = t_0 + \varepsilon'.$$

Soit alors  $\alpha : [0, t_0 + \varepsilon'] \rightarrow M$  une courbe donnée par

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } t \in [0, t_0] \\ \text{Spexp}_{y_2}((t - t_0)w_1), & \text{si } t_0 \in [t, t_0 + \varepsilon'] \end{cases}$$

où  $w_1 = \frac{w}{F(y_2, w)}$ .

Alors, par définition on a  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(t_0) = y_2$  et  $\alpha(t_0 + \varepsilon) = y_3$ , ce qui implique

$$\ell(\alpha) = t_0 + \varepsilon' = d_F(x, y_3) = d_F(\alpha(0), \alpha(t_0 + \varepsilon')).$$

Cette dernière égalité implique que  $\alpha$  est géodésique minimisante, donc  $\alpha(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in [0, t_0 + \varepsilon']$  et donc

$$d_F(\gamma(t_0 + \varepsilon), y) = d_F(y_3, y) = d - t_0 + \varepsilon'$$

et alors  $t_0 + \varepsilon' \in J$  ce qui est en contradiction avec la définition de  $t_0$ , donc  $t_0 = d$  et alors  $J = [0, d]$ .

Par conséquent,  $d_F(\gamma(d), y) = d - d = 0$ , donc  $\gamma|_{[0, d]}$  est une géodésique spéciale de longueur  $d$  (minimale) allant de  $x$  à  $y$ .  $\square$

**Corollaire 5.21.** *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible connexe de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  telle que la famille des métriques fortement convexifiées  $\{F_\varepsilon\}$  est localement  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès. Si  $(M, F)$  est géodésiquement complète pour les géodésiques spéciales, alors l'application  $\text{Spexp}_x : T_x M \rightarrow M$  est bien définie et surjective.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de Hopf-Rinow pour les géodésiques spéciales.

**Théorème 5.22** (Hopf-Rinow spécial). *Soit  $(M, F)$  une variété finslérienne faible connexe de régularité  $\mathcal{C}^{3,1}$  telle que la famille des métriques fortement convexifiées  $\{F_\varepsilon\}$  est localement  $\lambda, \eta$ -quasi-Thalès. Alors nous avons :*

- A. *Si  $(M, F)$  est géodésiquement complète en avant pour les géodésiques spéciales alors elle est métriquement complète vers l'avant.*

B. Si  $(M, F)$  est métriquement complète en avant et si de plus l'exponentielle spéciale en un point  $x_0 \in M$  est continue, alors  $(M, F)$  est géodésiquement complète en avant.

alors  $(M, F)$  est géodésiquement complète pour les géodésiques spéciales si et seulement si elle est complète vers l'avant.

*Démonstration.* A. On suppose par l'absurde que  $M$  est complète en avant mais pas géodésiquement complète en avant pour les géodésiques spéciales. C'est à dire qu'il existe une géodésique spéciale  $\gamma : [0, \ell[ \rightarrow M$ , qui ne s'étend à aucun intervalle  $[0, \ell + \varepsilon[$ , avec  $\varepsilon > 0$ , en restant une géodésique spéciale. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que  $\gamma$  est paramétrée par la longueur de l'arc

Considérer une suite croissante  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [0, \ell[$  qui converge vers  $\ell$  et noter  $q_i = \gamma(t_i)$ . Nous avons alors, pour  $i \leq j$ ,

$$d_F(q_i, q_j) \leq \ell_F(\gamma|_{[t_i, t_j]}) = |t_j - t_i|.$$

Par conséquent, la suite  $\{q_i\}$  est de Cauchy vers l'avant, et donc converge vers un point  $q \in M$ .

Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage de  $q$  tel qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\mathcal{W} \subset \text{Spexp}_x(T_x B_\delta)$  où  $T_x B_\delta = \{v \in T_x M \mid F_x(v) \leq \delta\}$  (nous appelons *boule géodésique* l'image par l'exponentielle spéciale d'une boule dans le tangent). Comme  $\mathcal{W}$  est ouvert dans  $M$  et contient  $q$ , pour  $j$  suffisamment grand,  $q_j \in \mathcal{W}$  et nous pouvons aussi supposer que  $t_j < \ell - \delta$ . Donc, par construction,  $B(q_j, \delta)$  est une boule géodésique et contient  $\mathcal{W}$ . Par construction de la boule géodésique  $B(q_j, \delta)$ , toute géodésique spéciale issue de  $q_j$  existe au moins sur un intervalle  $[0, \delta[$ .

En particuliers, la géodésique spéciale donnée par  $\sigma(0) = q_j$  et  $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(t_j)$  existe sur  $[0, \delta[$  et coïncide avec  $\gamma$ , donc elle est une prolongation de  $\gamma$ , ce qui est une contradiction et prouve donc l'affirmation A.

Pour prouver l'affirmation B, on suppose qu'il existe un point  $x_0$  tel que toute géodésiques issue de ce point s'étend sur  $[0, \infty[$  et que  $\text{Spexp}_x : TM \rightarrow M$  est continue. On doit montrer que toute suite de Cauchy vers l'avant de  $M$  converge.

Soit donc  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset M$  une suite de Cauchy vers l'avant et choisissons pour tout  $i$  une géodésique spéciale  $\gamma_i(t) = \text{Spexp}_{x_0}(tv_i)$  paramétrée naturellement, et reliant  $x_0$  à  $x_i$ . Si on note  $d_i = d_F(x_0, x_i)$ , alors  $x_i = \text{Spexp}_{x_0}(d_i v_i)$ . L'existence d'une telle géodésique est garantie par le théorème 5.20.

La suite  $\{d_i\}$  est clairement bornée dans  $\mathbb{R}$  et la suite  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est contenue dans la boule unité de  $T_{x_0} M$ . Par conséquent est  $\{d_i v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée dans  $T_{x_0} M$  et il existe donc une sous-suite  $\{d_{i_k} v_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un vecteur  $v \in T_{x_0} M$ . En utilisant l'hypothèse que l'exponentielle spéciale en  $x_0$  est continue, nous concluons que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Spexp}_{x_0}(d_{i_k} v_{i_k}) = \text{Spexp}_{x_0}(\lim_{i \rightarrow \infty} d_{i_k} v_{i_k}) = \text{Spexp}_{x_0}(v).$$

Le théorème est démontré. □

## Chapitre 6

# Géométrie systolique Finslérienne

*Les résultats de ce chapitre ont été développés conjointement avec Louis Merlin, ancien membre et ami du groupe Troyanov.*

Les métriques finslériennes sont une généralisation des métriques riemanniennes, c'est pourquoi, dans plusieurs cas, les résultats riemanniens sont sensiblement améliorés en se plaçant dans le cadre des métriques finslériennes. Par exemple pour des questions d'entropie minimale, nous pouvons comparer [BCG95] (riemannien) et [Ver99] (finslérien) ou pour la question de volume minimal d'un disque de rayon donné, voir [CCLW17] (riemannien) en comparaison avec [Cos20] (finslérien). Dans notre travail avec Louis Merlin, nous avons trouvé un exemple de variété finslérienne singulière ayant des propriétés systoliques à mi chemin entre les variétés de Zoll [Bes12], qui sont des 2-sphères dont toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur, et la sphère de Calabi-Croke [Cro88], [Bal10], [Sab09], qui est l'exemple actuel ayant le ratio systolique le plus grand connu. La question du ratio systolique a été posée par Mikhail Gromov en 1986 dans son article intitulé "*Filling Riemannian Manifolds*" [Gro83] et développée par Mikhaïl G- Katz dans [Kat07]. Classiquement, la systole est la longueur de la plus courte courbe fermée non homotope à 0 sur une variété riemannienne. Toutefois dans cette thèse nous ne définirons pas la systole de cette manière car nous travaillerons sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , qui est simplement connexe. C'est pourquoi, pour une métrique donnée, nous appellerons *systole* la longueur de la plus courte géodésique périodique dans  $\mathbb{S}^2$ . Cette valeur n'étant pas invariante par changement d'échelle, nous normalisons le carré de la systole par l'aire de la sphère. Le rapport entre le carré de la systole et l'aire de la sphère sera appelé *ratio systolique*. Dans [Cro88], Christopher Croke démontre que le ratio systolique est borné supérieurement, il est donc intéressant de chercher le ratio systolique optimal sur une variété donnée, et c'est de cette question que part la construction que nous allons présenter ici.

**Définition 6.1.** 1. Soit  $g$  une métrique riemannienne sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Nous appelons *systole* de  $g$ , et on note  $\text{Syst}(g)$ , la longueur de la plus courte géodésique périodique sur  $M$ .

2. Étant donné une métrique riemannienne  $g$  sur  $\mathbb{S}^2$ , nous définissons le *ratio systolique* de  $g$  par

$$\rho_g(\mathbb{S}^2) = \frac{\text{Syst}(g)^2}{\text{Aire}_g(\mathbb{S}^2)}.$$

3. Nous appellerons *ratio systolique optimal* le supremum sur l'ensemble des métriques riemanniennes des ratios systoliques

$$\rho(\mathbb{S}^2) = \sup_g \rho_g(\mathbb{S}^2).$$

Nous allons maintenant décrire un des bons candidats à l'optimalité du ratio systolique riemannien, qui induit également un maximum local pour le ratio systolique finslérien. Dans [Cro88], il est conjecturé que le ratio systolique riemannien optimal sur  $\mathbb{S}^2$  est atteint par la métrique de Calabi-Croke, qui est définie de la manière suivante :

Considérons le double d'un triangle équilatéral euclidien de côté de longueur 1, c'est à dire deux copies d'un triangle équilatéral recollé par isométrie le long de leur bord. La surface obtenue est une sphère plate avec trois singularités coniques, son aire vaut  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et sa systole est notamment réalisée par la réunion des deux hauteurs (une dans chacun des triangles) issues d'un même sommet. La longueur de la systole est égale à  $\sqrt{3}$  et le ratio systolique de la sphère de Calabi-Croke est donc  $2\sqrt{3}$ .

Il a été démontré dans [Bal10] et [Sab09] que la sphère de Calabi-Croke riemannienne est un maximum local pour le ratio systolique.

Dans [Sab09], il est prouvé que le ratio systolique de la sphère de Calabi-Croke munie de la métrique de Minkowski dont la boule unité dans  $\mathbb{R}^2$  est donnée par le parallélogramme de sommets  $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}), (0, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$  a un ratio systolique égal à  $\frac{3\pi}{2}$ . En effet, le tore plat de la figure 6.1 muni de la métrique finslérienne décrite plus haut est d'aire de Holmes-Thompson  $\frac{8}{\pi}$  pour la métrique finslérienne décrite plus haut. De plus, ce dessin représente un revêtement à trois feuillets, ramifié en trois points de la sphère de Calabi-Croke, donc le volume de la sphère pour cette métrique est  $\frac{1}{3} \times \frac{8}{\pi}$ , et la systole est de longueur 2 pour cette métrique, ce qui donne un ratio systolique de  $\frac{3\pi}{2}$ . Ce revêtement ramifié est la construction de base de [Bal10], reprise par [Sab09], qui permet également de démontrer l'optimalité locale des métriques de Calabi-Croke en appliquant l'inégalité systolique de Loewner [Bes51] sur le tore plat.

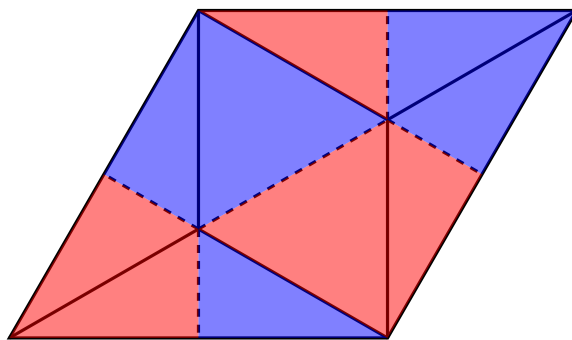


FIGURE 6.1 – Revêtement ramifié sur trois points, à trois feuillets, de la sphère de Calabi-Croke. Les parties bleues représentent un hémisphère et les parties rouges l'autre. En considérant les identifications des bords de ce parallélogramme, nous constatons que ce revêtement est un tore plat.

D'autre part, il existe une classe de variétés riemanniennes homéomorphes à la sphère dont toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur. Ces variétés s'appellent des variétés de Zoll [Bes12]. Elles ont un ratio systolique de  $\pi$ , qui est certes plus petit que le ratio systolique de la sphère de Calabi-Croke, mais dont

l'intérêt pour la systole réside dans le fait que par la réunion des systoles forment une partie dense du fibré unitaire tangent à la sphère.

Le théorème que nous démontrerons dans ce chapitre donne un exemple explicite d'une métrique sur la sphère dont le ratio systolique est plus grand que le ratio systolique des métriques de Zoll, mais conservant tout de même la propriété qu'il existe une systole passant par chaque point de la sphère. La construction de cette sphère est inspirée de l'article de Marcos Cossarini et Stéphane Sabourau [Cos20].

**Remarque 6.2.** Dans la suite de ce chapitre, nous élargissons la classe des métriques considérées pour le ratio systolique à la classe des métriques finslériennes faibles. Les définitions de la systole, du ratio systolique et du ratio systolique optimal restent les mêmes, excepté que les métriques considérées sont des métriques finslériennes et que le volume associé est le volume de Holmes-Thompson, défini dans le chapitre 1.

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant.

**Théorème 6.3.** *Il existe une métrique finslérienne faible lisse sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  dont le ratio systolique est arbitrairement proche de  $\frac{4\pi}{3}$  et telle que chaque point de la sphère appartient à une systole.*

## 6.1 Le disque finslérien de Cossarini-Sabourau

Nous allons ici décrire une métrique finslérienne faible sur  $\mathbb{R}^2$  dont le disque de Cossarini-Sabourau sera la boule unité. Cette construction provient de [Cos20], toutefois nous n'utiliserons pas la description de la métrique utilisant la géométrie intégrale. Nous allons définir une métrique finslérienne faible de manière explicite. Cette métrique est donnée par la somme des longueurs des images des trois projections d'un vecteur sur les demi-droites  $L_k = \left\{ te^{i\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}} \mid t \geq 0 \right\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , comme illustré dans la figure 6.2. Toutefois, pour les calculs, il est plus aisé de définir cette métrique de la façon suivante :

**Définition 6.4.** Soient  $\theta_0, \theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  les trois formes linéaires définies par

- $\theta_0(v_1, v_2) = v_2$ ,
- $\theta_1(v_1, v_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ ,
- $\theta_2(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$ .

Définissons également trois fonctions de Heaviside  $h_0, h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  données par

$$h_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i(x_1, x_2) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \theta_i(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$$

La métrique finslérienne faible de *Cossarini-Sabourau* sur le plan  $\mathbb{R}^2$  est définie par

$$F_{CS}((x_1, x_2), (v_1, v_2)) = \sum_{i=0}^2 h_i(x_1, x_2) |\theta_i(v_1, v_2)|. \quad (6.1)$$

**Remarque 6.5.** • Un autre description de la métrique de Cossarini-Sabourau est donnée par la longueur des courbes. Étant donné une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$ , nous pouvons définir sa longueur finslérienne de la manière suivante

$$\ell_{\mathcal{H}}(\gamma) = \sum_{k=0,1,2} \int_{L_k} \text{Card}(\pi_k^{-1}(\gamma(t))) dt$$

où  $\pi_k$  désigne la projection orthogonale sur  $L_k$ . Il est facile de voir que cette autre définition engendre la même géométrie sur  $\mathcal{H}$ . Cette façon de voir la métrique de Cossarini-Sabourau permet de parler de projection de courbes dans  $\mathcal{H}$  sur les demi-droites  $L_k$ .

- Nous parlerons également de *contribution* d'une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$  sur  $L_k$ , définie par

$$\text{Contribution de } \gamma \text{ sur } L_k = \int_{L_k} \text{Card}(\pi_k^{-1}(\gamma(t))) dt$$

- Remarquons que la métrique de Cossarini-Sabourau est une métrique finslérienne faible, la positivité et l'inégalité du triangle sont aisés à démontrer. De plus, cette métrique est dégénérée, car, au voisinage des droites  $L_k$ , les directions perpendiculaires à ces droites sont dégénérées car ce sont des métriques isométriques à la norme sur  $\mathbb{R}^2$  donnée par  $\|(v_1, v_2)\|_{deg} = v_2$ .
- La métrique ainsi décrite est une norme de Minkowski faible par morceaux, en effet le plan  $\mathbb{R}^2$  est séparé en 6 secteurs, définis par

$$A_k = \left\{ z = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \mid r \geq 0 \text{ et } \frac{k\pi}{3} < \alpha < \frac{(k+1)\pi}{3} \right\}, \quad (6.2)$$

pour  $k = 0, \dots, 5$  et chaque secteur est équipé d'une norme de Minkowski faible. En particuliers, pour  $k = 0, 2, 4$  la métrique est la métrique  $\ell^1$  et pour  $k = 1, 3, 5$  la métrique est dégénérée dans la direction orthogonale (euclidienne) à la demi-droite  $L_k$ .

La métrique finslérienne faible  $F_{CS}$  induit donc une distance faible entre chaque paire de points de  $\mathbb{R}^2$ . Nous noterons cette distance  $d_{CS} = d_{F_{CS}}$ .

**Définition 6.6.** Étant donné l'espace métrique  $(\mathbb{R}^2, d_{CS})$ , le *disque de Cossarini-Sabourau*, noté  $\mathcal{H}$ , est la boule unité pour la distance  $d_{CS}$  la métrique  $d_{CS}$  restreinte à  $\mathcal{H}$  sera notée  $d_{\mathcal{H}}$  (voir figure 6.2).

**Proposition 6.7.** *Le volume de Holmes-Thompson de  $\mathcal{H}$  muni de la métrique  $F_{CS}$  vaut  $\frac{6}{\pi}$ .*

*Démonstration.* Nous remarquons que la boule unité est un hexagone dont les intersections avec les secteurs  $A_k \subset \mathbb{R}^2$  forment 3 triangles équilatéraux équipés de la métrique  $\ell^1$  et 3 triangles équilatéraux dégénérés. Nous pouvons donc calculer directement le volume en additionnant les volumes des triangles  $\ell^1$ , qui sont des quarts de boule unité pour la métrique  $\ell^1$ . Nous avons donc

$$\text{Vol}_{\text{HT}}(\mathcal{H}) = \frac{3}{4} \times \text{Vol}_{\text{HT}}(\mathcal{H}) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{\pi} = \frac{6}{\pi}.$$

□

Le résultat suivant, dû à Cossarini-Sabourau [Cos20], énonce les principales propriétés de l'espace métrique  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ .

**Proposition 6.8.** 1. L'espace métrique  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  est la limite d'une suite d'espaces métriques finslériens lisses et fortement convexes.

2. Le volume de Holmes-Thompson des approximations  $C^{\infty}$  de  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  converge vers  $\frac{6}{\pi}$ .

3. Les géodésiques spéciales des approximations  $C^{\infty}$  sont des droites euclidiennes, et restent des géodésiques pour  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ .

Pour la démonstration de cette proposition exposée dans [Cos20], la métrique  $d_{\mathcal{H}}$  est définie comme une métrique de Crofton et la preuve fait appel à des résultats techniques de théorie de la mesure et un résultat de Pogorelov qui donne des conditions sur une mesure de Crofton pour que la distance associée soit finslérienne. Ci-dessous nous présentons une autre preuve qui utilise les notions et les résultats développés dans cette thèse.

*Démonstration.* Il s'agit de construire l'approximation. Commençons par construire une métrique lisse qui approxime  $F_{CS}$ .

Soit  $\eta > 0$  et définir  $F_{\eta,CS}((x, y), (v_1, v_2)) = \sum_{i=0}^2 h_i^{\eta}(x, y) |\theta_i(v_1, v_2)|$  où  $h_i^{\eta}$  sont des fonctions lisses telle que

$$h_i^{\eta}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_i(x, y) > \eta \\ 0 & \text{si } \theta_i(x, y) < -\eta \end{cases}$$

Dans un tel cas, pour tout  $\eta > 0$ , la métrique  $F_{\eta,CS}$  est une métrique lisse, mais pas encore fortement convexe. Pour construire une métrique fortement convexe, nous allons procéder selon la construction décrite dans le chapitre 5.

Nous définissons la métrique fortement convexifiée de la métrique lisse  $F_{\eta,CS}$  de la manière suivante, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$F_{\eta,CS}^{\varepsilon} := \sqrt{(F_{\eta,CS})^2 + \varepsilon g_{eucl}}$$

où nous avons choisi la métrique euclidienne comme métrique riemannienne auxiliaire car la métrique de Cossarini-Sabourau est une métrique de Minkowski par morceaux (donc projective), et nous désirons appliquer le lemme 5.9.

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la métrique  $F_{\eta,CS}^{\varepsilon}$  tend uniformément vers  $F_{\eta,CS}$ . De plus lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , le volume tend vers  $\frac{6}{\pi}$  qui est le volume du disque de Cossarini-Sabourau.

En effet, on considérant la construction de  $F_{\eta,CS}^{\varepsilon}$ , nous remarquons que la boule unité de cette métrique converge vers la boule unité de la métrique  $F_{CS}$ , donc la boule duale converge également, ce qui implique directement que le volume de Holmes-Thompson du disque de Cossarini-Sabourau muni de la métrique  $F_{\eta,CS}^{\varepsilon}$  converge vers  $\frac{6}{\pi}$ .

Les approximations étant des métriques fortement convexifiées de métriques de type  $\ell^1$ , les segments euclidiens sont donc des géodésiques pour ces approximations. En laissant tendre  $\varepsilon$  vers 0, nous procédons à la construction des géodésiques spéciales de  $F_{\eta,CS}$ , qui sont des segment euclidiens. En laissant tendre  $\eta$  vers 0, comme toutes les métriques sont projectives, les géodésiques spéciales de  $F_{\eta,CS}$  convergent vers les géodésiques spéciales de  $F_{CS}$ . Les choses se passent donc comme dans le chapitre 5 et donc les géodésiques spéciales du disque de Cossarini-Sabourau sont des segments euclidiens.  $\square$

**Remarque 6.9.** Dans la suite, nous allons travailler uniquement avec les géodésiques spéciales, car nous nous intéressons à des systoles, et en passant à la limite, les droites euclidiennes restent des géodésiques sans que

nous n'ajoutons ou ne néglignons de courbes plus courtes.

## 6.2 La sphère de Cossarini-Sabourau et son ratio systolique

Nous allons maintenant construire une sphère de façon similaire à la sphère de Calabi-Croke dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous allons prendre le double de l'hexagone  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ , c'est à dire nous collons deux hexagones de Cossarini-Sabourau le long de leurs bords pour obtenir une surface singulière  $\mathbb{S}^2$  homéomorphe à la sphère de dimension 2. En premier lieu, il s'agit de comprendre les géodésiques de cette sphère. Comme pour le disque de Cossarini-Sabourau, nous allons étudier les géodésiques via des approximations finslériennes lisses. En vertu de la proposition 6.8, nous savons déjà que chaque hémisphère est approximable. Dans notre construction, toutefois il semble que nous avons ajouté des singularités, qui sont les 6 sommets de l'hexagone. Ces 6 singularités sont en fait des singularités *apparentes* qui, via une carte locale, peuvent être supprimées, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 6.10.** *La métrique de Cossarini-Sabourau sur la sphère est approximée par des métriques lisse sur chacun des sommets des hexagones ainsi que sur les deux centres.*

*Démonstration.* Le lissage de la métrique au centre de l'hexagone a été fait dans la proposition 6.8. Pour les sommets des hexagones, étant donné  $p \in \mathbb{S}^2$  un sommet de  $\mathcal{H}$ , remarquons qu'il existe une carte affine  $\mathcal{U}$  autour de  $p$  telle que la métrique  $F_{CS} : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit de la manière suivante :

$$F_{CS}(x, y) = |x| + h(x)|y|$$

où

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Nous pouvons donc lisser  $F_{CS}$  dans  $\mathcal{U}$  en utilisant, comme dans la proposition 6.8, des approximations lisses de la fonction de Heaviside  $h$ . □

Sachant que les géodésiques de  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  peuvent être considérées comme étant les segments euclidiens, nous pouvons alors comprendre le flot des géodésiques spéciales de la sphère de Cossarini-Sabourau. On note  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{H}$  la projection canonique.

**Lemme 6.11.** *L'image par  $p$  des géodésiques spéciales de  $\mathbb{S}^2$  transverses au bord de  $\mathcal{H}$  consiste en des trajectoires de billard dans  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* A l'intérieur d'un hexagone, les géodésiques spéciales sont des lignes droites euclidiennes. Lorsqu'une géodésique spéciale atteint le bord de l'hexagone, elle le fait de manière transverse. Les géodésiques transverses au bord continuent en ligne droite lorsqu'elles ont traversé le bord. Étant donnés deux points  $p, q \in \mathbb{S}^2$  tels que  $p$  et  $q$  ne sont pas dans le même hémisphère. Si la trajectoire entre  $p$  et  $q$  n'était pas une trajectoire de billard, il y aurait une autre droite plus courte entre  $p$  et  $q$ . La loi est donc la loi de réflexion de Descartes. □

Nous ne considérerons pas les géodésiques intersectant le bord de  $\mathcal{H}$  sur un segment car elles n'interviendront pas dans le calcul de la systole.



Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 6.12.** *La systole de  $(\mathbb{S}^2, d_{\mathcal{H}})$  vaut 4 et est atteinte par un segment passant deux fois par une hauteur de  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* La propriété importante de l'hexagone que nous allons utiliser est qu'il pave le plan. Ceci sera très utile pour étudier les géodésiques fermées de  $\mathbb{S}^2$ . Dans  $\mathcal{H}$ , il n'y a pas de géodésique enfermée, nous allons donc supposer que le point de départ des géodésiques appartient au bord de  $\mathcal{H}$ .

Dans l'hexagone, il y a deux types de triangles équilatéraux dont un sommet est le centre de l'hexagone, étant donné  $k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  nous avons :

En reprenant les notations des secteurs  $\ell^1$  et des secteurs dégénérés décrites en 6.2, nous pouvons partitionner  $\mathcal{H}$  en 6 triangles équilatéraux portant deux sortes de métriques :

1. Les triangles à l'intérieur des secteurs  $A_j$  pour  $j = 1, 3, 5$  (contenant un segment de  $L_k$ ) seront appelés *triangles dégénérés*, car la géométrie à l'intérieur de ces triangles permet des segments non triviaux de longueur 0 (voir 6.2 pour la définition des  $A_j$ ).
2. Les triangles à l'intérieur des secteurs  $A_j$  pour  $j = 0, 2, 4$  (ne contenant pas de  $L_k$ ) seront appelés *triangles  $\ell^1$* .

Dans le but de démontrer le théorème, nous allons développer un formalisme symbolique pour les classes de géodésiques ayant des trajectoires de billard intersectant les mêmes suites de côtés de  $\mathcal{H}$ .

**Alphabet :** La dynamique symbolique s'exprime par des mots écrits dans l'alphabet

$$\mathcal{A} = \{a_k, b_k, \alpha_{k,j}, \beta_{k,j} \mid k, j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}.$$

**Construction des mots :**

- Chaque intersection d'un triangle dégénéré contenant  $L_k$  avec le bord de  $\mathcal{H}$  sera notée  $b_k$  et le coté opposé à  $b_k$ , (appartenant à un triangle  $\ell^1$ ) sera noté  $a_k$ .
- Chaque mot commence soit par  $a_k$  soit par  $b_k$ , car nous pouvons supposer sans perdre de généralité qu'une géodésique fermée a pour point de base un point du bord de  $\mathcal{H}$ .
- Les mots sont associés aux trajectoires de billard. Lorsqu'une trajectoire de billard touche un bord de  $\mathcal{H}$ , nous ajoutons la lettre correspondant à l'arête que la trajectoire a rencontré. Par exemple, si la géodésique touche  $a_k$ , nous ajoutons  $a_k$  au mot correspondant.
- Lorsqu'une géodésique coupe une diagonale de  $\mathcal{H}$ , si la géodésique sort d'un triangle  $\ell^1$  labellisé  $a_k$  et entre soit dans le triangle dégénéré  $b_{k+1}$  soit dans le triangle dégénéré  $b_{k+2}$ . Dans ce cas, nous ajoutons la lettre  $\alpha_{k,k+1}$  ou  $\alpha_{k,k+2}$  au mot correspondant à la géodésique.
- Lorsqu'une géodésique coupe une diagonale de  $\mathcal{H}$ , si la géodésique sort d'un triangle dégénéré, labellisé  $b_k$  et entre soit dans le triangle  $\ell^1$  noté  $a_{k+1}$  soit dans le triangle  $\ell^1$  noté  $a_{k+2}$ . Dans ce cas, nous ajoutons la lettre  $\beta_{k,k+1}$  ou  $\beta_{k,k+2}$  au mot correspondant à la géodésique.

**Grammaire :**

Nous allons maintenant définir une grammaire sur les mots représentant des classes de géodésiques. Cette grammaire provient de la géométrie du billard euclidien dans l'hexagone.

1. Un  $a_k$  est toujours suivi par un  $\beta_{k,l}$  avec  $l = k + 1$  ou  $l = k + 2$ .

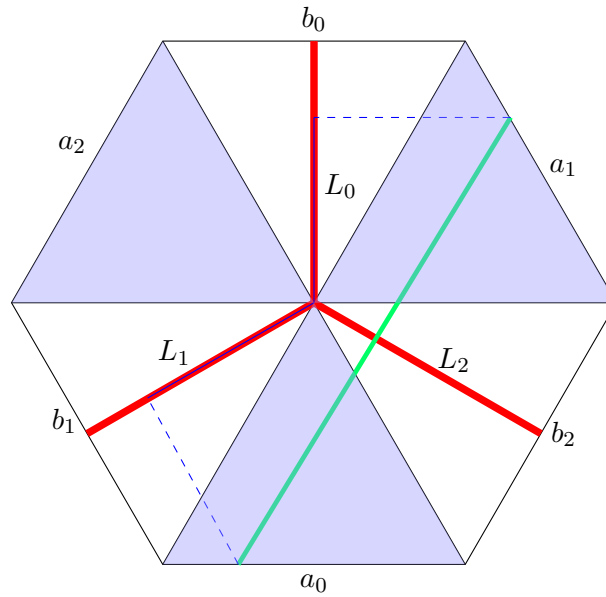


FIGURE 6.2 – Labélisation de l’hexagone et exemple de calcul de la longueur d’une trajectoire de type  $m = a_0\alpha_{0,2}\beta_{2,1}a_1$  dont une partie est dégénérée car perpendiculaire à  $L_2$ .

2. Un  $b_k$  est toujours suivi par un  $\alpha_{k,l}$  avec  $l = k + 1$  ou  $l = k + 2$ .
3. Un  $\alpha_{k,l}$  est toujours suivi par un  $b_l$  ou par un  $\beta_{l,j}$  avec  $j = k + 1$  ou  $j = k + 2$ .
4. Un  $\beta_{k,l}$  est toujours suivi par un  $a_l$  ou par un  $\alpha_{l,j}$  avec  $j = k + 1$  ou  $j = k + 2$ .

**Remarque 6.13.** Il est important de remarquer que nous désirons étudier les géodésiques fermées, donc chaque mot doit contenir  $3+2n$  lettres latines ( $n \in \mathbb{N}$ ) car une géodésique qui a commencé sur "l’hexagone du dessus" de la sphère doit se refermer en arrivant "par dessous". De plus il est clair qu’un mot fermé doit se terminer par la même lettre que la lettre de départ.

Il s’agit maintenant de calculer la longueur de chaque géodésiques fermées et de remarquer que la plus courte est forcément de longueur 4. Nous adoptons une stratégie visant à démontrer que la longueur de toute géodésique fermée est plus grande ou égale à 4. Pour ceci, il faut borner inférieurement toutes les longueurs. Dans le calcul de la longueur, il y a des mots qui reviennent souvent et dont la longueur est connue. Pour le calcul de la borne inférieur de la longueur des géodésiques fermées, il suffira de repérer dans chaque mot représentant une classe de géodésiques les mots que nous décrivons ici, en suivant une règle de lecture et de remarquer ensuite que toute géodésique fermée atteint une longueur supérieure à 4 avant de se refermer.

Nous allons maintenant définir quatre type de mots finis qui nous aiderons à minorer les longueurs des géodésiques. Nous appelons ces mots des "mots magiques".

**Mots magiques :**

Pour exprimer les mots magiques et leur longueur, nous allons utiliser la lettre  $G$  qui symbolisera toute lettre grecque.

1. (Diamètres) : Tout mot de type  $a_kGGGb_k$  ou  $b_kGGGa_k$  est appelé un *diamètre* de l’hexagone et a une longueur 2. Un tel mot sera noté  $\mathcal{D}$  (voir figure 6.3).

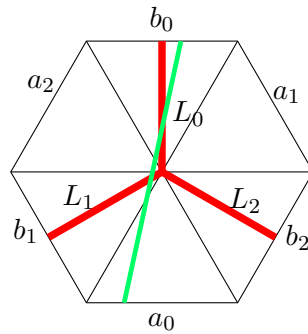


FIGURE 6.3 – Diamètre

**Remarque 6.14.** Il n'est a priori pas clair que la contribution en longueur de la projection sur  $L_1$  additionnée à la contribution de la projection sur  $L_2$  donne 1, toutefois, remarquons que la trajectoire doit passer soit par les deux triangles les plus à gauche soit par les deux triangles les plus à droite. Supposons que la courbe passe par les deux triangles de droite et notons  $(x, 2)$  les coordonnées de l'extrémité haute de la géodésique ( $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ). La contribution sur  $L_1$  provient de tous les triangles sauf celui en  $b_0$  et la contribution sur  $L_2$  ne vient que du triangle en  $a_0$ . Un calcul élémentaire montre que la contribution sur  $L_1$  est de  $\frac{1-\sqrt{3}x}{2}$  et que la contribution sur  $L_2$  est de  $\frac{1+\sqrt{3}x}{2}$ , ce qui se somme à 1.

- (Rayons) : Tout mot de type  $GGb_k$  ou  $b_kGG$  est appelé un *rayon* de l'hexagone et a une longueur 1. Un tel mot sera noté  $\mathcal{R}$  (voir figure 6.4).

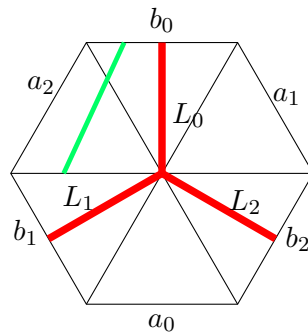


FIGURE 6.4 – Rayon

- (Losanges) : Tout mot de type  $Ga_kGG$  est appelé un *losange* et a une longueur 1. Un tel mot sera noté  $\mathcal{L}$  (voir figure 6.5).
- (Losanges croix) : Tout mot de type  $b_{k+1}\beta_{k+1,k}a_k\alpha_{k,k+2}b_{k+2}$  ou  $b_{k+2}\beta_{k+2,k}a_k\alpha_{k,k+1}b_{k+1}$  est appelé un *losange croix* et a une longueur 2. Un tel mot sera noté  $\mathcal{CL}$  (voir figure 6.6).

**Remarque 6.15.** Pour représenter les losanges et les losanges croix, nous avons utilisé un développement de l'hexagone permettant de ne pas dessiner les géodésiques du flot de billard de manière brisée mais avec des segments euclidiens, ce qui rend beaucoup plus aisés les calculs de bornes inférieures à la longueur

Il s'agit maintenant de définir la règle de lecture d'un mot afin d'en trouver la borne inférieure pour la longueur.

**Règles de lecture :**

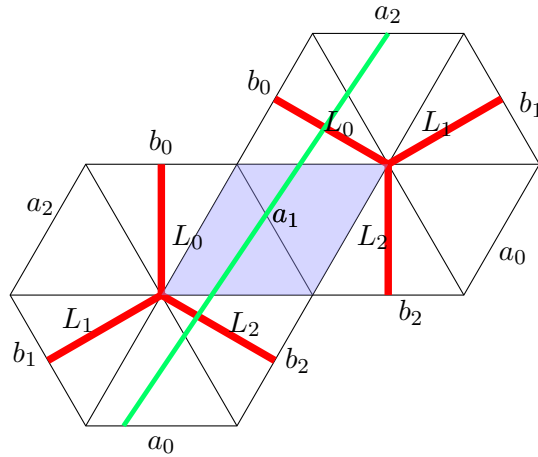


FIGURE 6.5 – Losange : les contributions sur  $L_0$  et sur  $L_2$  s'additionnent à 1.

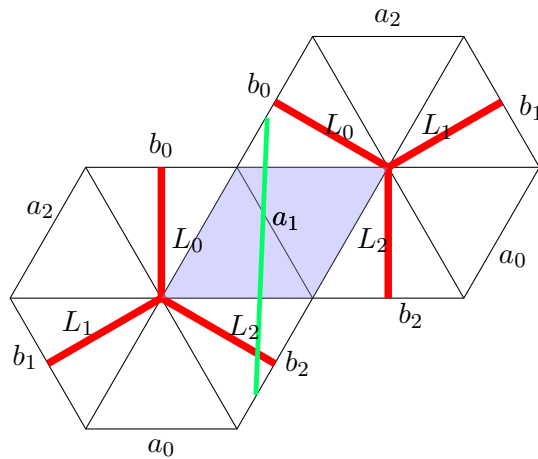


FIGURE 6.6 – Losange croix, les contributions sur  $L_2$  et sur  $L_0$  s'additionnent pour donner 2

1. Chaque mot se lit de gauche à droite.
2. Lorsque l'on tombe sur un mot magique  $m$  :
  - Si  $m$  est un diamètre, ne pas compter les rayons qu'il contient.
  - Si  $m$  est un losange, ne pas compter les rayons qu'il contient
  - Deux rayons peuvent être imbriqués de deux manières :
    - Nous pouvons avoir un mot de type  $b_k G G b_l$  avec  $l = k + 1$  ou  $l = k + 2$ . Un tel mot a une longueur 2.
    - Nous pouvons avoir un mot de type  $G G b_k G G$ , un tel mot a une longueur 2 et nous ne comptons pas les rayons qu'il contient.

Nous pouvons maintenant commencer l'étude de cas des trajectoires fermées possibles et montrer que la borne inférieure de la longueur est forcément 4, puis expliciter une géodésique fermée de longueur 4, ce qui prouvera le théorème. Par symétrie, nous n'analyserons que les trajectoires commençant par  $a_0$  et sortant du premier hexagone par  $b_2, a_1$  ou  $b_0$  ainsi que les trajectoires commençant en  $b_0$  et sortant du premier hexagone par  $a_2, b_1$  ou  $a_0$ .

**Trajectoires partants de  $a_0$  :**

1.  $m = \overbrace{a_0\alpha\beta\alpha b_0}^{\mathcal{L}} \underbrace{\beta\alpha\beta b_0}_{\mathcal{L}}$  : Couvre exactement deux diamètres, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) = 4$ . Les courbes fermées de ce types sont des systoles, car  $m$  est cyclique et de longueur exactement 4.
2.  $m = \overbrace{a_0\alpha\beta\alpha b_0}^{\mathcal{D}} \underbrace{\beta_{0,1}\alpha_{1,2}b_2}_{\mathcal{R}} \overbrace{\beta_{2,0}\alpha_{0,1}b_1}_{\mathcal{R}}$  : Couvre un diamètre et deux rayon, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
3. Il y a deux possibilités pour le cas (3) :
  - $m = a_0\alpha_{0,2} \overbrace{\beta_{2,1}\alpha_{1,0}\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,0}\beta_{0,1}}^{\mathcal{L}} \overbrace{\beta_{0,1}\alpha_{1,2}b_2\beta_{2,0}\alpha_{0,1}}^{\mathcal{R}}$  : Couvre deux losanges et deux rayons, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
  - $m = a_0\alpha_{0,2} \overbrace{\beta_{2,1}\alpha_{1,0}\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,1}\beta_{1,0}}^{\mathcal{L}} \overbrace{\beta_{1,0}a_0\alpha_{0,2}\beta_{2,1}\alpha_{1,2}\beta_{2,0}}^{\mathcal{L}}$  : Couvre quatre losanges, et ne se referme pas en revenant à  $a_0$  car le nombre de lettres latines est  $4 \neq 3 + 2n$ , ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
4.  $m = a_0\alpha_{0,2} \overbrace{\beta_{2,1}\alpha_{1,2}\beta_{2,0}\alpha_{0,1}}^{\mathcal{L}} \underbrace{b_1\beta_{1,2}\alpha_{2,0}\beta_{0,1}a_1}_{\mathcal{D}}$  : Couvre un losange, un rayon et un diamètre, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
5.  $m = a_0\alpha_{0,2} \overbrace{b_2\beta_{2,1}\alpha_{1,0}b_0\beta_{0,2}\alpha_{2,1}b_1}_{\mathcal{R}}$  : Couvre quatre rayons imbriqués, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
6.  $m = a_0\alpha_{0,2} \overbrace{\beta_{2,1}\alpha_{1,2}\beta_{2,0}\alpha_{0,1}b_1\beta_{1,2}\alpha_{2,0}\beta_{0,1}a_1}_{\mathcal{D}}$  : Couvre deux diamètres, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
7.  $m = a_0\alpha_{0,2} \overbrace{b_2\beta_{2,1}\alpha_{1,0}b_0\beta_{0,2}\alpha_{2,1}b_1}_{\mathcal{R}}$  : Couvre quatre rayons imbriqués, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
8. •  $m = a_0\alpha_{0,2}b_2 \overbrace{\beta_{2,1}\alpha_{1,0}\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,0}\beta_{0,1}\alpha_{1,2}b_2\beta_{2,1}\alpha_{1,0}}^{\mathcal{L}}$  : Couvre un losange, un diamètre et un rayon, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
- $m = a_0\alpha_{0,2}b_2 \overbrace{\beta_{2,1}\alpha_{1,0}b_0\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,1}b_1}_{\mathcal{C}\mathcal{L}}$  : Couvre deux losanges croix, ce qui implique que  $\ell_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.

**Trajectoires partants de  $b_0$  :**

1.  $m = \overbrace{b_0\beta\alpha\beta a_0\alpha\beta\alpha b_0}^{\mathcal{D}}$  : Couvre exactement deux diamètres, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) = 4$ . Les courbes fermées de ce types sont des systoles, car  $m$  est cyclique et de longueur exactement 4.
2.  $m = \overbrace{b_0\beta-\alpha-\beta-a_0}^{\mathcal{D}}\alpha_{1,0}\underbrace{\beta_{1,2}a_2\alpha_{2,0}\beta_{0,1}a_1\alpha_{1,0}\beta_{0,2}}_{\mathcal{L}}$  : Couvre un diamètre et deux losanges, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
3.  $m = \overbrace{b_0\beta_{0,2}\alpha_{2,1}b_1\beta_{1,0}\alpha_{0,2}b_2}^{\mathcal{R}}$  : Couvre quatre rayon, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
4.  $m = \overbrace{b_0\beta_{0,2}\alpha_{2,1}b_1\beta_{1,2}\alpha_{2,0}b_0}^{\mathcal{R}}$  : Couvre quatre rayon, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
5.  $m = \overbrace{b_0\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,1}\beta_{1,0}a_0\alpha_{0,2}\beta_{2,1}a_1\alpha_{1,0}b_0}^{\mathcal{L}}$  : Couvre deux losange et un losange croix, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce type peuvent être des géodésiques fermées mais sont plus longues que des systoles.
6.  $m = \overbrace{b_0\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,1}b_1\beta_{1,0}a_0\alpha_{0,2}b_2}^{\mathcal{C}\mathcal{L}}$  : Couvre deux losanges croix, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
7.  $m = \overbrace{b_0\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,1}b_1\beta_{1,0}\alpha_{0,2}b_2\beta_{2,0}\alpha_{0,1}}^{\mathcal{C}\mathcal{L}}$  : Couvre un losange croix, puis deux rayons, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.
8.  $m = \overbrace{b_0\beta_{0,2}a_2\alpha_{2,1}b_1\beta_{1,0}a_0\alpha_{0,2}b_2}^{\mathcal{C}\mathcal{L}}$  : Couvre deux losanges croix, ce qui implique que  $l_{\mathcal{H}}(m) \geq 4$ . Les courbes de ce types sont donc plus longues que la systole, car  $m$  n'est pas cyclique.

Nous avons donc vérifié toutes les possibilités de trajectoire, et obtenu que leur longueur était forcément bornée inférieurement par 4. Nous avons donc montré que les trajectoires cycliques les plus courtes étaient de longueur 4, ce qui implique que la sphère de Cossarini-Sabourau a une systole égale à 4. Nous savons que nous n'avons oublié aucune trajectoire car nous sommes passés par toutes les possibilités, de plus, l'angle  $\theta_{dep}$  entre une trajectoire et le côté de  $\mathcal{H}$  où commence la trajectoire satisfait  $0 < \theta_{dep} < \frac{2\pi}{3}$ , par symétrie de l'hexagone. Sans perdre de généralité, si la trajectoire commence par  $a_0$  le mot ne peut que être complété de trois manières différentes :

- $a_0\alpha_{0,2}b_2$ , et alors l'angle aigu entre  $b_2$  et la trajectoire est noté  $\theta^{a_0b_2}$  et nous avons  $0 < \theta^{a_0b_2} < \frac{\pi}{3}$  donc la trajectoire ne peut plus continuer que continuer dans la direction de  $\beta_{2,1}$ , et ainsi de suite. Le nombre de possibilité de trajectoires de billard diminue donc rapidement.

- $a_0\alpha_{0,2}\beta_{2,1}a_1$ , et alors l'angle aigu entre  $a_1$  et la trajectoire est noté  $\theta^{a_0a_1}$  et nous avons  $\frac{\pi}{3} < \theta^{a_0a_1} < \frac{\pi}{2}$  donc la trajectoire ne peut plus continuer que continuer dans la direction de  $\alpha_{1,0}$ , et ainsi de suite, le nombre de possibilités de trajectoires de billard diminue donc rapidement.
- $a_0\alpha_{0,2}\beta_{2,1}\alpha_{1,0}b_0$ , et alors l'angle entre  $b_2$  et la trajectoire est noté  $\theta^{a_0b_0}$  et nous avons  $\frac{\pi}{3} < \theta^{a_0b_0} < \frac{2\pi}{3}$  donc la trajectoire ne peut plus continuer que continuer dans la direction de  $\beta_{0,1}\alpha_{1,2}$  ou en direction de  $\beta_{0,2}\alpha_{2,1}$ , et ainsi de suite, le nombre de possibilités de trajectoires de billard diminue donc rapidement.

Nous déduisons de ceci que nous avons bien traité toutes les trajectoires possibles.  $\square$

Nous avons donc prouvé que le ratio systolique de la sphère de Cossarini-Sabourau vaut  $\frac{4\pi}{3}$  et est tel que par chaque point passe au moins 3 systoles. Une question qui se pose naturellement et à laquelle nous n'avons pas encore répondu est la suivante :

*"La métrique de Cossarini-Sabourau est elle un maximum local de la systole de la sphère dans l'espace des métriques finslériennes faible ?"*

On peut raisonnablement penser que la réponse est positive, de par le fait que cette métrique donne lieu à beaucoup de systoles, il semble que les techniques de preuve de [Bal10] et [Sab09] puissent être adaptées à cette situation. Ceci permettrait d'avoir un autre exemple de maximum local, différent de la sphère de Calabi-Croke.

# Conclusion et questions

Au cours de cette thèse, nous avons exploré différentes approches de la géométrie finslérienne ; en particulier les points de vue métrique et convexe qui sont plus synthétiques que l'approche standard de la géométrie différentielle et pour lesquels nous avons tentés d'apporter des éléments de clarification et de fondations. Avec ces outils nous avons pu reformuler les résultats de Busemann-Mayer [May41] et leur démonstration. Nous avons ensuite formulé et démontré des résultats analogue dans le contexte des espace-temps pseudo-riemanniens.

Dans le chapitre 5, nous avons isolé une classe spéciale de géodésiques dans une variété finslérienne faible et donné des conditions permettant de construire une application exponentielle. Un théorème de Hopf-Rinow est également démontré.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons les méthodes développées dans la thèse à l'étude des propriétés systoliques d'une métrique finclérienne faible particulière sur la sphère de dimension 2, basée sur une construction due à Marcos Cossarini et Stéphane Sabourau [Cos20].

En conclusion nous proposons quelques questions qui se posent naturellement dans le contexte du présent travail :

1. Étant donné une variété finslérienne faible de dimension  $n$  strictement convexe et Lipschitz, est ce que les géodésiques sont continûment différentiables ?
2. Étant donné une variété pseudo-finslérienne de dimension 2, est ce que la construction des pseudo-cercles de Busemann-Mayer est possible et peut permettre de démontrer que les géodésiques de telles géométries sont continûment différentiables ? Ce résultat est-il généralisable à la dimension  $n$  ?
3. Si une métrique finslérienne est strictement convexe, est ce que pour tout  $x \in M$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in B_F(x, \varepsilon)$ , il existe une unique géodésique de  $x$  à  $y$ .
4. Est-ce que toutes les géodésiques d'une métrique strictement convexe sont des géodésiques spéciales ?
5. Est-ce que les géodésiques spéciales d'une métrique finslérienne faible sont  $C^1$  ?
6. Est-ce que l'exponentielle spéciale est un homéomorphisme local ?
7. Est-il possible de décrire complètement le flot des géodésiques spéciales de la sphère de Cossarini-Sabourau ?
8. Est-ce que la métrique de Cossarini-Sabourau sur la sphère est un maximum local pour la systole ?



# Index

- bilipschitz, 39
- champ
  - d'ensemble De Valinor, 103
  - d'ouverts, 47, 57
  - d'ouverts
    - étoilés, 48
  - d'ouverts étoilés, 57, 62, 63
  - de convexes, 48
  - de convexes De Valinor, 92
  - de cônes, 88
- convexe De Valinor, 90, 96, 103
- courbe
  - admissible, 40
  - causale, 88
  - Lipschitz, 42, 49
  - maximisante, 90
  - minimisante, 44, 52
  - rectifiable, 42
  - strictement causale, 88
- cône causal, 83, 86
- cône de causalité, 83, 90
- direction limite, 73, 80
- disque de Cossarini-Sabourau, 125
- distance
  - $\ell^1$ , 34, 42
  - de Manhattan, 34, 42
  - de Minkowski, 34–36
  - faible, 32
  - intrinsèque, 41, 42
  - Lipschitz, 49
  - non-dégénérée, 32
  - projective, 34
  - symétrique, 32
- dérivée métrique, 49, 50, 53, 68, 69, 108
- ensemble De Valinor, 99
- espace
  - de longueur, 40
  - de Lorentz, 81
  - de Lorentz-Minkowski, 85
  - de Minkowski, 35, 46
  - métrique faible, 32
- espace-temps métrique, 82
- exponentielle spéciale, 117
- géodésique
  - $\varepsilon$ -, 112
  - différentielle, 51, 52
  - métrique, 35, 52, 69, 72–74
  - pseudo-métrique, 90, 96
  - spéciale, 112, 126
  - spéciales, 113
- indicatrice, 45
- jauge
  - de Lorentz-Minkowski, 91, 103
  - de Minkowski, 38, 39, 56, 62, 63
- longueur, 40
- longueur
  - finslérienne, 45, 65
  - intrinsèque, 104
  - intrinsèque, 42, 65
  - pseudo-finslérienne, 104, 106

- métrique
  - convexifiée, 56, 61, 63
  - de Funk, 48
  - de Hilbert, 49
  - famille quasi-Thalès, 111, 113
  - finslérienne, 44
  - finslérienne
    - fortement convexe, 44, 51
    - non-dégénérée, 44
    - symétrique, 44
  - fortement convexifiée, 111
  - Lipschitz, 65, 74
  - pseudo-finslérienne, 88
- norme
  - $\ell^1$ , 36
  - de Manhattan, 36
  - de Minkowski, 35, 37–39, 58, 112
  - de Minkowski
    - régularité, 38
- point extrême, 59, 60
- pseudo-cercle de Busemann-Mayer, 70
- pseudo-cercles de Busemann-Mayer, 77
- pseudo-distance, 82
- pseudo-distance
  - projective, 86
- pseudo-métrique
  - concavifiée, 99
  - de Funk, 93
- pseudo-norme de Minkowski, 85
- ratio systolique, 123
- relation de causalité, 82, 83
- sphère
  - de Calabi-Croke, 123
  - de Cossarini-Sabourau, 124
- structure de longueur, 40
- systole, 122
- tenseur fondamental, 51, 111
- transformée de Zermelo, 46
- volume de Holmes-Thompson, 47, 125
- équation des géodésiques, 52, 111

# Bibliographie

- [ABB19] A. AGRACHEV, D. BARILARI et U. BOSCAIN : *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2019.
- [Ale67] A. D. ALEXANDROV : A contribution to chronogeometry. *Canadian Journal of Mathematics*, 19:1119–1128, 1967.
- [AT04] Luigi AMBROSIO et Paolo TILLI : *Topics on analysis in metric spaces*, volume 25 de *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [Bal10] Florent BALACHEFF : A local optimal diastolic inequality on the two-sphere. *J. Topol. Anal.*, 2010.
- [BCG95] G. BESSON, G. COURTOIS et S. GALLOT : Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5):731–799, 1995.
- [BCS00] D. BAO, S.-S. CHERN et Z. SHEN : *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Bes51] Abram BESICOVITCH : On two problems of loewner. *Journal of the London mathematical society*, pages 141–144, 1951.
- [Bes12] A.L. BESSE : *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [BP87] Herbert BUSEMANN et B. B. PHADKE : *Spaces with distinguished geodesics*, volume 108 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1987.
- [Bus67] H. BUSEMANN : Timelike spaces. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 53:52, 1967.
- [Car34] Elie CARTAN : *Les Espaces De Finsler*. Hermann, 1934.
- [CCLW17] Gregory R. CHAMBERS, Christopher CROKE, Yevgeny LIOKUMOVICH et Haomin WEN : Area of convex disks, 2017.
- [Cla75] Frank H. CLARKE : Generalized gradients and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1975.
- [Cla90] Frank H. CLARKE : *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.
- [Cos20] Stéphane Saboureau ; Marcos COSSARINI : Minimal area of Finsler disks with minimizing geodesics. *arXiv :2010.00701*, 2020.

- [Cro88] Christopher CROKE : Area and the length of the shortest closed geodesic. *J. Differential Geom.*, 1988.
- [EG15] Lawrence C. EVANS et Ronald F. GARIEPY : *Measure theory and fine properties of functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, revised édition, 2015.
- [Ein16] A. EINSTEIN : Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7): 769–822, janvier 1916.
- [GHL04] Sylvestre GALLOT, Dominique HULIN et Jacques LAFONTAINE : *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 2004.
- [Gro81] Mikhael GROMOV : *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, volume 1 de *Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*. CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Gro82] Michael GROMOV : Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (56):5–99 (1983), 1982.
- [Gro83] Mikhael GROMOV : Filling Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(1):1–147, 1983.
- [Har02] Philip HARTMAN : *Ordinary differential equations*, volume 38 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Corrected reprint of the second (1982) edition [Birkhäuser, Boston, MA ; MR0658490 (83e :34002)], With a foreword by Peter Bates.
- [Iva01] Dmitri Burago ; Yuri Burago ; Sergei IVANOV : *A course in metric geometry*. American Mathematical Society, 2001.
- [Iva08] S. V. IVANOV : Volumes and areas of Lipschitz metrics. *Algebra i Analiz*, 20(3):74–111, 2008.
- [JS20] Miguel Angel JAVALOYES et Miguel SÁNCHEZ : On the definition and examples of cones and Finsler spacetimes. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 114(1):Paper No. 30, 46, 2020.
- [Kat07] Mikhail G. KATZ : *Systolic geometry and topology*, volume 137 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. With an appendix by Jake P. Solomon.
- [KF75] A. N. KOLMOGOROV et S. V. FOMĪN : *Introductory real analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1975. Translated from the second Russian edition and edited by Richard A. Silverman, Corrected reprinting.
- [Kob91] Soshichi KOBAYASHI : Theorem of Busemann Mayer on Finsler metrics. *Hokkaido mathematical journal*, 1991.
- [KS18] Michael KUNZINGER et Clemens SÄMANN : Lorentzian length spaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 54(3):399–447, 2018.
- [LD21] Enrico LE DONNE : Lecture notes on sub-riemannian geometry from the lie group viewpoint, 2021.
- [Mat17] Marc Troyanov ; Vladimir MATVEEV : The Myers-Steenrod theorem for Finsler manifolds of low regularity. *Proc. AMS*, 2017.

- [May41] Herbert Busemann; Walther MAYER : On the foundations of calculus of variations. *AMS*, pages 173–198, 1941.
- [McS44] Edward James MCSHANE : *Integration*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.
- [Min19] Ettore MINGUZZI : Causality theory for closed cone structures with applications. *Rev. Math. Phys.*, 31(5):1930001, 139, 2019.
- [MT12] Vladimir S MATVEEV et Marc TROYANOV : The binet–legendre metric in finsler geometry. *Geometry & Topology*, 16(4):2135–2170, nov 2012.
- [O’N83] Barrett O’NEILL : *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 de *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.
- [Pap09] Marc Troyanov; Athanase PAPADOPOULOS : Weak Finsler structures and the Funk weak metric. *Math. Proc Camb. Phil. Soc.*, 2009.
- [Pap14a] Athanase PAPADOPOULOS : *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics. European Mathematical Society Publishing House, Zuerich, Switzerland, 2014.
- [Pap14b] Marc Troyanov; Athanase PAPADOPOULOS : Weak Minkowski spaces. *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 2014.
- [Pap18a] Athanase PAPADOPOULOS : *Herbert Busemann. Selected Works, vol. I*. Springer Verlag, Cham, 2018, 908 p. 2018.
- [Pap18b] Athanase PAPADOPOULOS : *Herbert Busemann. Selected Works. vol. II*. Herbert Busemann. Selected Works. vol. II, Springer Verlag, Cham, 2018, 860p. 2018.
- [Pog79] Aleksei Vasil evich POGORELOV : *Hilbert’s fourth problem*. Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; John Wiley & Sons, New York-Toronto, Ont.-London, 1979. Translated by Richard A. Silverman.
- [Poi05] Henri POINCARÉ : Sur la dynamique de l’électron, 1905.
- [PT09] Athanase PAPADOPOULOS et Marc TROYANOV : Weak Finsler structures and the Funk weak metric. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 147(2):419–437, 2009.
- [Pu52] P. M. PU : Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 2:55–71, 1952.
- [PY19] Athanase PAPADOPOULOS et Sumio YAMADA : Timelike Hilbert and Funk geometries. *Differential Geom. Appl.*, 67:101554, 42, 2019.
- [RW16] Adam RENNIE et Ben E. WHALE : Generalised time functions and finiteness of the lorentzian distance. *Journal of Geometry and Physics*, 106:108–121, 2016.
- [Sab09] Stéphane SABOUREAU : Local extremality of the calabi-croke sphere for the length of the shortest closed geodesic. *Journal of the London Mathematical Society*, 2009.
- [San04] Luis A. SANTALÓ : *Integral geometry and geometric probability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 2004. With a foreword by Mark Kac.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Sie52] Waclaw SIERPINSKI : *General topology*. Mathematical Expositions, No. 7. University of Toronto Press, Toronto, 1952. Translated by C. Cecilia Krieger.
- [Spi08] Michael SPIVAK : *Calculus*. Publish or Perish, fourth édition, 2008.
- [ToI77] John Ronald Reuel TOLKIEN : *The Silmarillion*. George Allen and Unwin, 1977.
- [Ver99] Patrick VEROVIC : Problème de l'entropie minimale pour les métriques de Finsler. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(6):1637–1654, 1999.
- [Web94] Roger WEBSTER : *Convexity*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.