# SOMMAIRE DU N$^o$ 125

# Éditorial

*Ce numéro de juillet, le premier après le renouvellement du CA de notre société, est l'occasion pour la* Gazette *de saluer et remercier Stéphane Jaffard, président sortant, qui a épaulé sans relâche notre comité de rédaction. Outre son travail considérable à la tête de la SMF, dont le rapport moral rend bien compte, la* Gazette *lui a été redevable, ces dernières années, d'innombrables idées d'articles, en particulier au titre des actualités. Nous l'en remercions chaleureusement et amicalement.*

*L'activité mathématique de ces mois de printemps et d'été est riche d'événements clés, du colloque Clay tenu à l'IHP au Congrès International des mathématiciens. Elle a été marquée également par la disparition de V. Arnold et P. Malliavin, survenue trop tard pour en rendre compte comme il convient dans ce volume. Nous y reviendrons dans les prochains numéros.*

*En vous souhaitant une bonne lecture estivale.*

*— Zindine Djadli, Frédéric Patras*

# SMF

## Mot du Président

Ce n'est pas la première fois que la SMF vient me chercher. Dans une lettre retrouvée il y a peu de temps, Daniel Barsky me demandait en effet au milieu des années 80 de venir apporter ma jeunesse pour secouer la vieille dame SMF. Vingt cinq ans plus tard, ma jeunesse n'est plus mais mon attachement à la SMF reste entier dans sa tâche de service à l'ensemble de la communauté mathématique.

En secondant cette année Stéphane Jaffard au sein du bureau j'ai réalisé toute la diversité des actions de la SMF : publications, contact avec le grand public, développement des relations avec les autres associations œuvrant pour les mathématiques et au-delà vers celles de disciplines voisines, fondation du forum des sociétés savantes... La SMF a aussi su être présente pour relayer les inquiétudes de la communauté mathématique sur les réformes de l'enseignement. Elle est restée un interlocuteur incontournable de la communauté auprès du ministère ou du CNRS (maintenant principalement l'INSMI).

Sur un plan plus technique la SMF poursuit la modernisation de son serveur. Une première étape a été, en utilisant un outil plus performant, de rapatrier les pages institutionnelles de l'ancien site sous une autre architecture. L'ouverture de comptes utilisateurs, prévue pour la rentrée de septembre permettra de modifier facilement les données personnelles et d'adhérer en ligne de façon plus sécurisée. À terme, les utilisateurs pourront commander en ligne à partir d'un nouveau catalogue des publications, suivre l'état de leur commande et avoir une lisibilité sur leurs abonnements. Enfin une dernière étape concernera le contenu scientifique de nos publications. Cette modernisation est coûteuse mais de l'avis de tous indispensable.

La SMF a aussi dû faire face à des événements imprévus à l'IHP et s'est trouvée obligée de rappeler un point fondamental, soudain oublié de beaucoup, que l'IHP ne se limitait pas à l'institut Émile Borel mais que c'était aussi la maison des mathématiciens (ou des mathématiques) et des physiciens théoriciens, où les sociétés savantes trouvaient leur place naturelle au service de tous. On peut espérer que le nouveau CA de l'IHP saura prendre en compte le point de vue que l'IHP doit rester, au-delà du système de gestion déterminé par les tutelles (Ministère de la Recherche, INSMI ou universitaire), un grand instrument de la politique nationale en mathématique et saura en tirer les conséquences sur les conditions d'hébergement des sociétés savantes. La SMF appuiera toute solution de financement des tutelles rendant plus visible cette mission nationale.

Enfin la SMF est attachée au CIRM dont elle assure la gestion avec le CNRS et le soutien du ministère de la Recherche et l'Enseignement Supérieur. Avec P. Foulon comme nouveau directeur du CIRM, que je connais depuis longtemps, je souhaite pouvoir permettre le développement du CIRM, avec une SMF jouant pleinement son rôle de cotutelle aidante et présente et garante de sa mission nationale.

Après cette sorte de rapport moral bis, que dire de plus que mon souhait de poursuivre et consolider ce qui a été entrepris. Dans un climat où tout pousse les universités à devenir concurrentes les unes des autres, je souhaite que la SMF contribue au contraire à promouvoir le développement des actions collectives au service de la communauté mathématique et vers l'extérieur pour expliquer ce que sont les mathématiques.

Comme toute action collective, elle se fait à plusieurs et j'espère que les membres du CA et plus largement nos adhérents participeront à cette action. Je suis confiant que le personnel SMF qui a acquis au cours des années tant de compétence et montré tant de conscience professionnelle poursuivra sous ma responsabilité et avec vous, sa tâche au service de la SMF et, au-delà, de la communauté mathématique.

Au moment de commencer ma tâche, je voudrais saluer tous les nouveaux élus ou réélus du Conseil d'Administration. Je voudrais aussi remercier ceux qui quittent le bureau ou le CA et bien sûr Stéphane Jaffard qui a mené la barque SMF parfois dans les tempêtes. François Germinet quitte aussi le bureau après avoir animé le secteur grand public. J'aimerais présenter le bureau nouveau. À l'exception des deux noms que je viens de nommer, les autres membres du bureau Jean-Marie Barbaroux (pour la SMF à Marseille), Michel Granger (pour la commission enseignement), Emmanuel Russ (pour les colloques et l'international), Micheline Vigué (pour la trésorerie) restent en place avec pour l'essentiel leur mission conservée, voire étendue. Pierre Loidreau a accepté de reprendre le secrétariat du bureau tout en continuant de s'occuper des relations avec les écoles d'ingénieur. Valérie Girardin reste déléguée générale avec cette mission, certes imprécise, mais combien importante d'épauler le président. Olivier Ramaré, qui a accepté de prendre la relève de Jean-Paul Allouche (qui a assuré pendant six années la responsabilité du secteur des publications), rentre dans le bureau comme vice-président. Nous renouons ainsi avec la tradition d'un vice-président chargé des publications, signe clair de l'importance que la SMF accorde à ce secteur. Enfin Nalini Anantharaman devient vice-présidente en charge du domaine grand public.

Michel Demazure a accepté de poursuivre sa mission de conseiller du président et Stéphane Jaffard d'assurer la continuité de certaines actions qu'il a entreprises en particulier dans le secteur grand public et pour le forum des sociétés savantes.

Je salue pour terminer la rédaction de la *Gazette*. La lecture de ce nouveau numéro s'annonce passionnante avec en particulier le compte-rendu du débat entre les principaux acteurs de la rénovation de l'IHP à la fin des années quatre-vingt.

Le 28 juin 2010
*Bernard Helffer*

# Rapport Moral, Période de juin 2009 à juin 2010

## Affaires générales

### Adhérents

Le nombre de nos adhérents est stable autour de 2000. La SMF doit poursuivre son effort pour que ce nombre augmente ; en effet, elle s'exprime souvent au nom de l'ensemble de la communauté mathématique française, il est donc particulièrement important que nous puissions être les plus représentatifs possible de cette communauté. Plusieurs pistes doivent continuer à être poursuivies : accroître la visibilité de la SMF auprès des jeunes mathématiciens, afin que cela soit pour eux une chose normale, voire automatique, de devenir membre. Faire connaître nos différentes actions, notamment auprès de communautés où nous sommes peu représentés, comme celles des enseignants de mathématiques en lycée, par exemple. Le montant de la cotisation SMF est stable, et nous souhaitons qu'il le reste dans l'avenir. La SMF est une association loi 1901 reconnue d'utilité publique et elle peut recevoir des dons déductibles des impôts sur le revenu, à hauteur de 66%.

Nous avons créé cette année une cotisation « Membre bienfaiteur » de 150 euros dont 83 euros sont un don et, à ce titre, 66% de cette dernière somme sont déductibles des impôts sur le revenu. Le montant de la cotisation « Membre bienfaiteur » s'élève, en fait au montant de la cotisation normale plus 28 euros. Cette cotisation rencontre déjà une certain succès auprès de certains de nos membres qui ont à cœur de maintenir l'indépendance financière de la SMF.

### Prises de position et actions de la SMF concernant les réformes

Jusqu'au début de l'année 2010, la communauté mathématique s'est trouvée confrontée à une suite de réformes de grande ampleur concernant l'enseignement et la recherche. Face à cette situation, l'activité de la SMF durant cette période a principalement consisté en une réflexion (en interne, puis avec d'autres sociétés savantes) afin d'analyser les enjeux de ces réformes, tant pour notre communauté qu'à l'extérieur (par exemple pour les élèves ou les étudiants), puis d'établir une critique constructive de ces changements, sous forme de textes (internes à la SMF ou communs) qui sont proposés à nos tutelles, et communiqués aux médias. Durant l'année 2010, la suite des réformes s'est surtout concentrée sur l'enseignement, que ce soit au niveau du lycée (réformes des programmes) ou du supérieur (réforme dite de « masterisation » des concours d'enseignants et qui touche les préparations à l'agrégation, au CAPES et au concours de professeurs des écoles). Nous reviendrons plus loin sur le contenu précis de ces réformes. Signalons cependant ici que la SMF (comme toutes les autres associations) a eu le plus grand mal à se faire entendre sur le dossier de la masterisation. Au printemps 2009, il était possible de mettre cela sur le compte d'un ministre de l'Éducation Nationale peu enclin à faire des concessions sur une réforme qui devait être emblématique de son passage dans ce ministère. Des problèmes plus spécifiques à la nature de cette réforme expliquent aussi ce manque de communication, comme le fait qu'elle était gérée simultanément par deux ministères (MEN[1] et MESR[2]) dont les cahiers des charges n'étaient pas exactement superposables. Cependant, force nous a été de constater que la voix de chaque société savante ou association d'enseignants était peu audible. Cette situation nous a amenés à rédiger deux lettres ouvertes au ministre de l'Éducation Nationale, au printemps 2009. Ces lettres, à l'initiative de la SMF et de la CCL[3], ont été signées chacune par une cinquantaine de sociétés, et ont eu un fort impact. Elles ont ainsi fait la preuve que, unies toutes disciplines confondues, les associations peuvent mener des actions beaucoup plus visibles et efficaces que si chacune agit de son côté, ou par petits groupes disciplinaires.

La communauté académique partage un certain nombre de valeurs fortes, et les Sociétés Savantes, qui s'expriment au nom de cette communauté, s'en sont faites l'écho à de multiples reprises. De par leur représentativité et leurs fonctions, elles ont donc un rôle important à jouer, de représentation de la communauté universitaire et de défense des valeurs académiques auxquelles elles sont attachées. Afin de pouvoir pleinement jouer ce rôle, de façon réfléchie et coordonnée, il est apparu nécessaire que ces sociétés puissent confronter leurs analyses sur les questions auxquelles la communauté académique est confrontée. C'est pourquoi, à l'initiative de la SMF et de la CCL, une première réunion générale des signataires des lettres ouvertes a eu lieu à l'IHP[4], le 17 octobre 2009, au cours de laquelle les sociétés savantes et associations d'enseignants ont passé en revue les sujets qu'il leur semblait pertinent d'examiner ensemble, en vue d'éventuelles actions communes. Durant cette première réunion, les responsables de 56 sociétés se sont constitués en Forum afin de mener une réflexion commune sur le fonctionnement de l'Éducation Nationale, l'avenir de la recherche et des universités. Il a été décidé que le « Forum des Sociétés Savantes » sera un lieu de rencontre, d'échanges, d'information mutuelle, et sera aussi destiné à exprimer les positions communes de la totalité ou d'une partie de ses membres. Il a vocation à être un interlocuteur reconnu de nos tutelles, d'autres organisations et des médias. Compte-tenu de leur expérience pédagogique et de leur représentativité au sein de la communauté universitaire et enseignante dans toutes les disciplines du savoir, et afin de pouvoir défendre les valeurs qu'ils partagent, les associations membres du forum considèrent que celui-ci a vocation à être partie prenante de véritables négociations sur les réformes en cours ou à venir. Des représentants des sociétés savantes ont présenté à plusieurs reprises au MESR et au MEN les textes élaborés par le Forum. Même si la SMF doit garder toute son indépendance, il est important que, chaque fois que cela est pertinent, elle s'exprime en union avec un grand nombre de sociétés de toutes disciplines. Son message n'en aura que plus de force et elle ne sera pas soupçonnée de biais disciplinaire.

Cette nouvelle coordination n'empêche bien sûr pas la SMF d'avoir des collaborations avec certaines associations à d'autres niveaux. Ainsi, depuis un an, nous menons une concertation continue avec les instances de l'APMEP[5] sur les programmes de lycées et la masterisation. Notre collaboration avec l'UPS[6], l'IHP

[1] Ministère de l'Éducation Nationale.
[2] Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche.
[3] Coordination Concours Lettres.
[4] Institut Henri Poincaré.
[5] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.
[6] Union des Professeurs de Spéciales.

et la SFP[7] concernant les conférences pour les classes préparatoires et étudiants de L est une vraie réussite. Nous continuons nos réflexions avec la SFP et la SCF[8] concernant les réformes et l'évolution de la recherche scientifique. L'entrée de la SFdS[9] dans plusieurs instances mathématiques où nous siégeons déjà (EMS[10], CA de l'IHP, CFEM[11]) a permis de multiplier les occasions d'interactions et de collaborations entre les trois sociétés savantes de mathématiques (SFdS-SMAI-SMF). Pour les projets en discussion, citons une nouvelle version de la brochure « L'Explosion des Mathématiques », un projet de page web commune « carte des masters de mathématiques » en concertation avec Campus-France et la fusion de *L'Officiel des Mathématiques* et de *ACM* pour aboutir à un nouveau site des conférences et séminaires de mathématiques géré par les sociétés de mathématiques et qui sont les pages communes de notre site web.

### Place de la SMF au sein de l'IHP

La question de l'augmentation des redevances des associations hébergées à l'IHP est apparue de façon brutale lors du CA de l'IHP de décembre 2009 ; nous renvoyons au « mot du président » de la *Gazette* d'avril, exceptionnellement rédigé par le bureau de la SMF, et qui analysait en détails les enjeux liés aux changements de direction récemment pris par l'IHP. Il est cependant utile de rappeler quelques points qui ont une incidence directe sur la situation de la SMF. Tout d'abord, nous ne comprenons pas pourquoi nous devrions payer une redevance qui de fait, s'apparenterait fortement à un loyer qui ne serait pas versé aux propriétaires des locaux (l'IHP appartient à la chancellerie des universités parisiennes). Ensuite, contrairement à ce qui a pu être affirmé, cette multiplication par un facteur presque 5 de nos redevances aura une incidence notable sur nos finances, nous obligeant à repenser le mode de financement de la SMF. Nous reviendrons sur ce point dans la partie « bilan financier ». Cependant, rappelons que la nouvelle direction de l'IHP a décidé également de diminuer la surface des locaux qui nous sont alloués. Ces changements créent une situation inédite et préjudiciable au sein de l'IHP : leur conséquence directe est de remplacer l'atmosphère de confiance sereine et d'interaction constructive que les associations de mathématiques maintenaient avec l'ancienne direction de l'IHP par un climat de tension. Nous souhaitons que le conseil d'administration de l'IHP, qui sera prochainement largement renouvelé, saura être vigilant afin de recréer une situation apaisée au sein de la « maison des mathématiciens ».

### Correspondants SMF

Sur les deux dernières années, un tiers des correspondants a été renouvelé.

Les résultats sur l'enquête qui a débuté en mars 2009 à propos de la bibliométrie, relayée par les correspondants locaux, ont été mis en ligne dans la partie « Recherche » du site web de la SMF en février 2010. Une réunion des correspondants a eu lieu lors des journées annuelles de juin 2010. Elle a permis de faire le point sur leurs missions actuelles et, éventuellement de les redéfinir afin d'augmenter les

---

7 Société Française de Physique.
8 Société Chimique de France.
9 Société Française de Statistique.
10 European Mathematical Society.
11 Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques.

échanges d'informations entre les instances de la SMF et l'ensemble de la communauté universitaire.

L'enquête sur la masterisation en septembre 2009, elle aussi relayée par les correspondants, a permis de constituer un document préparatoire à la réunion sur la masterisation du 26 septembre 2009 (voir `http://smf.emath.fr/files/text_like_files/resultatenquete.pdf` et `http://smf.emath.fr/files/text_like_files/pointmasterisation2.pdf`).

Nous avons reçu une trentaine de réponses généralement très détaillées en moins de deux semaines. Certains correspondants ont ensuite précisé ou modifié leurs réponses suivant l'évolution de la situation dans leur établissement.

Nous souhaitons que les correspondants de la SMF aient un rôle plus important, car ils sont un intermédiaire indispensable entre les instances de la SMF et l'ensemble de la communauté universitaire.

### Site web

Le projet de rénovation du site web de la SMF a pu être mis en œuvre cette année. L'ancien site était devenu difficile à faire évoluer et ne répondait plus aux besoins de gestion interne. Le choix technologique pour ce nouveau site web de la SMF s'est porté sur une installation du logiciel DRUPAL dit à gestion de contenus. Il a été motivé par ses capacités à gérer, afficher et structurer l'information, au travers d'une interface puissante et permettant une administration partagée.

Pour des raisons techniques évidentes, la migration de l'ancien site vers le nouveau site a été séparée en plusieurs étapes. Cette année, la première étape, sans doute la plus visible de l'extérieur, a pu être réalisée et la deuxième étape bien entamée. La première étape consistait à installer le site DRUPAL, définir une identité visuelle propre pour le site SMF puis restructurer et migrer toutes les pages non dépendantes d'une base de données (essentiellement tout le site excepté les publications). Ainsi, début février le nouveau site web s'est substitué à l'ancien site web, avec exception pour les pages concernant les publications et les adhérents.

La deuxième étape de l'évolution du site web de la SMF consiste en la mise au point de fonctionnalités internes telles que la gestion des adhérents/abonnés, la gestion des paiements, etc. Le travail est bien avancé et devrait pouvoir être opérationnel dans un futur proche.

Nous avons profité de cette mutation pour introduire de nouvelles pages dans notre site web. La page « Pourquoi adhérer ? » recense toutes les raisons pour lesquelles les mathématiciens et mathématiciennes devraient adhérer à la SMF. Elle contient en particulier une suite de réponses à des interrogations venant de mathématiciens appartenant à une communauté particulière.

La page « Agenda » répertorie l'ensemble des activités et réunions auxquelles participent des mathématiciens au nom de la SMF. Elle permet de se faire une idée, au quotidien, des activités de notre société.

La page « Maths et Travaux » est encore en chantier. Elle répertoriera les objets mathématiques, souvent construits à l'occasion de participations à des « Fêtes de la Science », et qui sont disponibles. Cette page a donc pour but de mettre en contact des collègues intéressés par ce type de réalisations en établissant ainsi une sorte de « bourse d'échange ».

## Participation au CNFM

Le CNFM[12] est un organisme qui réunit des représentants de l'Académie, du CNRS, de la SMF et de la SMAI[13] et les représente auprès de l'UMI[14].

L'une des fonctions importantes du CNFM est d'utiliser des crédits venant du MAE[15] pour différentes actions internationales : participation à l'UMI, à l'ICM[16],... Cette année, le rôle du CNFM est particulièrement important en raison du congrès international des mathématiques, qui se tiendra à Hyderabad (Inde) en août. Le CNFM a aussi renouvelé les représentants français à l'assemblée générale de l'UMI. Il est à craindre que le rôle du CNFM s'amenuise, si le MAE confirme qu'il ne souhaite plus subventionner ce type de structure.

## Activités grand public

### Cycle de conférences « Un texte, un mathématicien » à la BnF [17]

Pour la sixième année consécutive, la SMF organise avec *Animath* et la BnF un cycle de quatre conférences annuelles intitulé « Un texte un mathématicien » et qui se déroule dans le grand auditorium de la Bibliothèque nationale de France (site François Mitterrand). De grands mathématiciens d'aujourd'hui viennent évoquer pendant une heure et demi un texte, une lettre, un article d'un mathématicien célèbre, qui les aura marqués voire qui aura joué un rôle important dans leur carrière de chercheur. Martin Andler pilote l'opération, secondé par François Germinet.

Quatre conférences ont eu lieu :

– le 20 janvier 2010 – « Décrire mathématiquement les gaz : le défi de Boltzmann » par Laure Saint-Raymond.
– le 10 février 2010 – « Espaces courbes de Gauss à Perelman, en passant par Einstein » par Jean-Pierre Bourguignon.
– le 17 mars 2010 – « Des lois du mariage à Bourbaki » par Michel Broué.
– 7 avril 2010 – « Les prodigieux théorèmes de Monsieur Nash » par Cédric Villani.

La présentation de ces conférences est disponible sur le notre site : `http://smf.emath.fr/content/un-texte-un-mathematicien-2010`.

À nouveau le succès était au rendez-vous, avec plus de 250 personnes à chaque conférence, remplissant le grand auditorium de la BnF. Comme chaque année la SMF et *Animath*, avec les inspecteurs de mathématiques des trois académies de l'Île-de-France, organisent la venue de nombreuses classes de lycées à ces conférences. La plupart de ces classes bénéficient en outre d'une conférence préparatoire, dans leur établissement, par un enseignant-chercheur volontaire. Les élèves ont également la possibilité d'effectuer juste avant la conférence une visite de la BnF ou bien de l'exposition temporaire en cours. Ainsi environ 400 lycéens ont pu participer à ce cycle de conférences en 2010.

---

12 Comité National Français de Mathématiciens.
13 Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.
14 Union Mathématique Internationale.
15 Ministère des Affaires Étrangères.
16 International Congress of Mathematicians.
17 Bibliothèque nationale de France.

### Cycle de conférences « Une question, un chercheur » à l'IHP

Ce cycle organisé par la SMF et la SFP, en collaboration avec l'IHP et l'UPS, continue avec succès. Le cycle « Une question, un chercheur », qui se déroule à l'IHP, est à destination des élèves du premier cycle du supérieur (université et classes préparatoires). Les conférences se veulent didactiques et mettant en lumière le métier de chercheur. Deux conférences ont eu lieu cette année, la première par le mathématicien Yves Meyer, en novembre 2009 « Pourquoi et comment est-on amené à faire des mathématiques appliquées ? ». Claude Cohen-Tannoudji, physicien, a donné la deuxième intitulée : « L'aventure des atomes manipulés par la lumière » en avril 2010.

La localisation de ces conférences à l'IHP est importante : elle fait connaître à de jeunes lycéens et étudiants en classe préparatoire un lieu prestigieux des mathématiques chargé d'histoire.

### Participation à des salons

La SMF continue d'être présente sur divers salons dont les enjeux sont liés à la connaissance, la recherche et la diffusion de celle-ci. La SMF était notamment présente au salon de l'éducation, en novembre 2009, où les sociétés de mathématiques étaient accueillies sur le stand de l'ONISEP. Ce salon nous permet de renseigner de nombreux étudiants sur les métiers des mathématiques. De plus, il donne une visibilité accrue à nos sociétés auprès du grand public.

Les sociétés savantes de mathématiques ont aussi tenu un stand au salon de l'ADREP les 29-30 janvier 2010. Ce salon permet d'aider les lycéens à faire un choix parmi les études possibles après le bac.

Comme chaque année la SMF a pris part activement au *Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques*, place Saint-Sulpice à Paris, où elle a partagé un stand avec les autres sociétés de mathématiques. Cette année, cette participation a pris un relief tout particulier, puisque le thème a été : *Maths Avenir* et il est donc dans la continuité du colloque presque éponyme. Mentionnons que notre collaboration avec le CIJM[18] ne se restreint pas au Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques : nous sommes en train d'élaborer des posters sur les mathématiciens les plus célèbres. Cette série a pour vocation d'être présente dans les bibliothèques universitaires ; largement illustrés, ces posters permettront ainsi aux étudiants de « mettre un visage » sur des noms de théorèmes qui, souvent, restaient jusqu'à présent pour eux bien abstraits.

## Publications

Nous signalons au préalable que ce texte est un rapport succinct. Il a été décidé en Bureau de faire un bilan plus précis par publication pour le Conseil qui se tiendra au mois de juin. Ce bilan sera disponible sur notre site web.

[18] Comité International des Jeux Mathématiques.

## État des publications

La situation des publications est saine (il subsiste un léger décalage pour la série *Séminaires & Congrès*). La composition en majeure partie externalisée (trois sous-traitants français) est maintenant au point et a permis de réaliser des économies substantielles. L'impératif de qualité et de service aux auteurs reste pour nous une priorité à laquelle s'attellent sans relâche tous les acteurs bénévoles ou non qui sont au service de nos publications. Nous signalons qu'un effort important pour la promotion et la surveillance des abonnements est à prévoir : le recrutement sur un demi-poste supplémentaire nécessaire qui est venu soutenir le service des publications, devrait, entre autres choses, nous y aider.

## Faits à signaler pour 2009

– L'un de nos imprimeurs, compétitif, a malheureusement fait faillite : nous nous sommes donc tournés vers d'autres prestataires (deux autres sociétés car nous ne souhaitons pas être tributaires d'un imprimeur unique). Nous sommes restés fidèles à notre principe « imprimer en France » et n'avons pas prospecté à l'étranger.

– N. Christiaën ayant constaté que le routage effectué par les imprimeurs devenait trop coûteux, C. Munusami, H. Di Mondo et elle ont suggéré de tester la prise en charge du routage par Marseille. Grâce à une collaboration active avec la cellule de diffusion de Marseille, des économies très importantes de routage ont été réalisées.

Le routage est de plus beaucoup mieux suivi et sécurisé : les retours dont le nombre est infime sont gérés immédiatement et ont conduit à une chute des réclamations et donc à un gain de productivité.

– L'édition par la SMF des *Annales scientifiques de l'école normale supérieure* est un succès : le comité de rédaction des Annales nous a notifié son contentement tant sur le plan de la qualité que de la méthode et des délais de production.

– Afin de donner un coup de pouce à la diffusion de la série *Séminaires & Congrès*, nous l'avons rajoutée à l'une de nos options d'abonnements institutionnels : nous proposons trois numéros par an. Le prix de lancement est volontairement compétitif afin de ne pas décourager les bibliothèques qui voient leurs crédits diminuer et afin également de rester fidèle à notre principe de service à la communauté.

– Le *Journal de la Société Française de Statistique* est maintenant mis en ligne sur notre serveur par nos soins : les articles sont accessibles gratuitement. Nous suivons activement l'indexation de ces articles (purement électroniques) par les bases de données Mathematical Reviews (Mathscinet) et Zentralblatt.

Par ailleurs une collaboration pour la numérisation des archives manquantes pour cette revue est en cours avec NUMDAM.

– Nous avons créé une nouvelle série, la *série T* dont le premier volume est paru. Les deux suivants sont en cours l'un de relecture, l'autre de composition. Il s'agit d'une série généraliste, qui publie des ouvrages touchant à l'histoire des mathématiques ou la vulgarisation. Elle est donc susceptible de toucher un lectorat potentiel plus étendu que celui de nos titres existants.

### Perspectives

– La création d'une nouvelle revue déjà évoquée l'année dernière, francophone, dans l'esprit d'*American Mathematical Monthly* est dans sa phase finale.

– Nous allons également passer un contrat pour la mise en ligne de la revue DMTCS, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* sur notre site.

– Nous allons moderniser la base des publications gérée actuellement comme celle des adhérents par le logiciel 4D, devenu trop rigide : une étude est en cours.

– Nous rappelons également que la mise en place du micro-paiement (*pay per view*) reste un objectif. Jusqu'ici rien n'a été mis en place (réticences de tous ordres, y compris sur la question du coût à facturer qui ne devrait pas être aussi indécent que pour les revues commerciales, mais choisi de sorte que le coût d'un volume reste inférieur à celui des articles le composant).

– Après la rénovation du site général de la SMF, celui du site des publications devrait être entrepris bientôt : il est important de noter que chaque acteur devra être autonome dans la gestion de toutes les pages concernant les publications.

### Conclusion

Le secteur des publications est un secteur clé pour les mathématiciens et nous continuons de travailler dans le but de rendre service à la communauté.

Nous rappelons un objectif qui a été engagé depuis six années et qui a reçu l'aval du Bureau, celui de l'autonomie du secteur des publications au sein de la SMF, sans pour autant que celui-ci ne perde son étiquette SMF.

Jean-Paul Allouche dressera un bilan de son action en fin de mandat(s) pour les Bureau et Conseil de juin.

### La Gazette des mathématiciens

La *Gazette* poursuit sa (relative) transformation, conformément au souhait formulé ces dernières années d'en renouveler et mieux adapter les contenus à son lectorat.

Les rédacteurs en chef veulent souligner ici le travail remarquable, l'énergie et l'activité des rédacteurs recrutés très ou assez récemment (V. Colin, F. Planchon, Ch. Rétoré, J. Riou), à l'origine d'une redynamisation des différentes rubriques (mathématiques, mathématiques et informatique, livres...).

De ce point de vue, le fonctionnement actuel est très satisfaisant, même si le Comité de rédaction regrette un peu que les mathématiciens n'aient pas le réflexe de s'adresser à la *Gazette* pour communiquer leurs idées, expériences ou préoccupations avec la communauté (les rubriques « Courrier des lecteurs » et « Tribune libre » ayant vocation à accueillir les débats). En contrepartie, et de façon très positive, nous recevons de plus en plus régulièrement des communiqués institutionnels, dont nous insistons pour qu'ils soient rédigés correctement (et pas de simples annonces en style télégraphique), et qui nous permettent de relayer tout un ensemble d'informations structurantes (CIMPA[19], CIRM[20], Sociétés, Evénements importants...), ce qui est une des vocations de notre journal. Les interactions avec les différents groupes de travail de la SMF permettent par ailleurs de suivre, de

[19] Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées.
[20] Centre International de Rencontres Mathématiques.

façon argumentée, les prises de positions et réflexions de la Société, qui traitent de nombreux enjeux stratégiques pour les mathématiques.

Le comité de rédaction va continuer à s'étoffer, de façon à mieux couvrir l'ensemble des questions et domaines dont il est naturel que la *Gazette* s'occupe. Nous souhaitons en particulier développer un certain nombre de rubriques, faiblement ou pas du tout actives ces derniers temps (des interactions des mathématiques aux jeux mathématiques en passant par une meilleure couverture des différents niveaux et différentes structures d'enseignement, comme les Écoles d'ingénieur...).

Nous profitons enfin de l'occasion du rapport annuel pour inviter tous les membres de la Société à communiquer leurs suggestions – toute remarque visant à améliorer la *Gazette* sera bienvenue (fût-elle critique !). Les courriels peuvent être adressés aux membres du Comité de Rédaction directement, ou au secrétariat de la SMF [21].

## Le pôle de Luminy

### Bilan du CIRM en 2009

Le CIRM est un établissement de la SMF associé au CNRS qui organise et accueille des rencontres mathématiques de haut niveau à Luminy (Marseille). Il bénéficie également du soutien du MESR qui a alloué une subvention de 391 000 euros en 2009 ainsi que des soutiens locaux et régionaux (ville de Marseille, laboratoires de mathématiques de Luminy) et régionales (Conseil régional).

La capacité d'accueil du centre s'est fortement accrue depuis le début des années 2000, avec la mise à disposition de locaux par le CNRS (bâtiment de l'ex-formation permanente du CNRS), la mise en service de l'auditorium en 2006 et le réaménagement de la bibliothèque en 2008. Ces travaux ont bénéficié de subventions spéciales du MESR ainsi que des collectivités locales. En 2009, un réaménagement important de la salle de restaurant et des cuisines a permis de hisser la restauration du CIRM au niveau d'exigence requis pour un centre qui accueille de nombreux chercheurs étrangers. Ces travaux ont pu être financés grâce à un soutien à 50% de la société en charge de la restauration (Eurest). Les 50% restants font l'objet d'un remboursement étalé sur 5 ans.

Cet accroissement de capacité s'est accompagné d'un accroissement de l'activité du centre qui accueille chaque année près de 3000 congressistes. Il a aussi permis de lancer un nouveau programme de « sessions thématiques », qui sont des séries d'activités coordonnées par des visiteurs de longue durée (3 mois) sur un thème déterminé. Ce programme est géré en partenariat avec la FRUMAM[22]. En 2009 la session s'intitulait « Math pour ITER », elle a été organisée conjointement par F. Jenko (Max-Planck Institute Garching), K. Schneider (CMI[23] Marseille) et M. Vittot (CPT[24] Marseille). Le rapport des organisateurs est disponible sur demande.

Dans le secteur immobilier, il faut aussi mentionner que le projet de réhabilitation de la ruine dite « maison du jardinier », lancé en 2009, est sur le point d'aboutir avec une aide de la fondation Total.

[21] `smf@dma.ens.fr`
[22] Fédération de Recherche des Unités de Mathématiques de Marseille.
[23] Centre de Mathématiques et Informatique.
[24] Centre de Physique Théorique.

De même la nouvelle forme de soutien aux rencontres (prise en charge totale de 40 participants par rencontre) qui a été préparée en 2009, est effective depuis 2010 pour ce qui concerne les petits groupes et sera complètement effective en 2011, grâce à l'accroissement de la subvention du CNRS (INSMI).

Les travaux de rénovation et d'entretien qui ont été engagés depuis 2009 grâce à des subventions de 200.000 euros au titre du plan de relance puis de 300.000 euros du MESR sont en cours. Ils s'achèveront en 2011 pour ce qui concerne la réfection des chambres que l'on doit étaler dans le temps en raison de la fréquentation élevée du centre.

Travaux réalisés en 2009 :

– remplacement des volets ;
– remplacement de la chaudière ;
– ravalement de la façade sud ;
– réalisation d'un auvent en fer ;
– réalisation d'un local d'archives ;
– rénovation de la toiture de la Bastide, du restaurant et de la bibliothèque ;
– remplacement de la moquette des couloirs de l'annexe-CIRM ;
– amélioration de l'électricité de la salle des périodiques ;
– aménagement et rénovation du restaurant ;
– mise en place d'un contrôle d'accès à la bibliothèque.

Travaux prévus en 2010 et 2011 :

– rénovation des 30 chambres de la Bastide ;
– construction d'un local technique et aménagement du parking ;
– rénovation de la salle du billard pour en faire un petit local de discussion muni d'un tableau noir ;
– couverture de l'accès entre la bibliothèque et l'auditorium ;
– aménagement des espaces piétonniers.

Depuis début 2009 le CIRM s'est doté, grâce à l'ouverture d'un poste d'I.E.[25] par le CNRS, d'un administrateur qui exerce la fonction de responsable des ressources humaines et de directeur adjoint en charge des questions administratives, de la logistique, du patrimoine et des relations avec les autorités locales.

Enfin une politique de communication a été mise en place, avec la refonte complète du site internet du CIRM, la publication d'articles dans plusieurs revues de mathématiques et la préparation d'une nouvelle plaquette de présentation. Dans le cadre de sa politique de communication, le CIRM a également lancé une collection d'actes des rencontres, qui sont des publications électroniques de petits articles et de cours par le CEDRAM. Il s'agit à ce stade d'une expérimentation qui sera pérennisée si la demande est suffisante de la part des organisateurs de rencontres.

Le CIRM développe une nouvelle interaction avec l'IHP : des cours de mise à niveau sont organisés pour les jeunes chercheurs qui vont participer à un trimestre à l'IHP.

Signalons enfin que, à partir de septembre 2010, le nouveau directeur du CIRM sera Patrick Foulon, professeur à Strasbourg. Nous lui adressons tous nos vœux de succès dans cette importante mission.

---

[25] Ingénieur d'Étude.

### La maison de la SMF

Les missions fondamentales de la cellule de diffusion de Luminy sont la diffusion des ouvrages publiés par la SMF, et l'information et la publicité auprès des congressistes du CIRM sur ces publications.

Deux personnes sont employées à plein temps par la SMF pour effectuer l'ensemble des tâches associées à ces missions : C. Munusami et H. Di Mondo.

La réorganisation de l'activité débutée en 2009 sur le principe général que tout ce qui est directement lié aux missions de la cellule de diffusion doit être assuré par elle commence à porter ses fruits. Le service est meilleur et le taux de réclamation des abonnés institutionnels a considérablement diminué. Pour achever cette réforme du fonctionnement de la cellule de diffusion, il sera nécessaire de modifier en profondeur l'outil de gestion de la base de donnée des abonnements. Ceci pourrait se faire par la mise en place d'un groupe de travail incluant tous les services concernés pour établir un cahier des charges, et nécessiterait probablement de faire appel à des professionnels pour la partie technique. Il s'agit là d'une tâche difficile, mais nécessaire.

### Routage

Le routage de l'ensemble des publications de la SMF vers les abonnés se poursuit normalement. Le bilan à ce jour reste encore un gain important dans la qualité du service, dans les délais de livraison et sur le plan financier.

### Services auprès des congressistes du CIRM

Les congressistes du CIRM sont informés des publications de la SMF par l'intermédiaire de la lettre d'information et du catalogue qui leur sont distribués à leur arrivée. Dans le hall d'accueil et dans la bibliothèque, le contenu des vitrines de la SMF est mis à jour régulièrement avec les récentes publications.

Le stand d'exposition hebdomadaire du mercredi matin, dans le hall de l'auditorium, a fonctionné pendant toutes les semaines d'activité du CIRM. Le choix des ouvrages à exposer serait probablement encore meilleur si nous pouvions convaincre les organisateurs de colloques de compléter la sélection faite à partir d'une recherche sur le site de la SMF utilisant des mots-clefs.

La vente des « goodies » de la SMF (mugs, clefs USB) n'a pour l'instant pas trouvé le succès espéré.

Le service d'information et de ventes d'ouvrages reste assuré pour tous les colloques du CIRM sans exception, toute la semaine, de 14h00 à 15h30.

### Équipement/Travaux

La capacité de stockage des ouvrages de la SMF a augmenté à la maison de la SMF par la mise en place de 196 mètres linéaires de rangements et 25 mètres linéaires de tablettes de couverture.

La mise en place de 144 mètres linéaires de rangements et 31 mètres linéaires de tablettes de couverture supplémentaires est prévue dans le courant de l'année.

Pour une grande part, ces emplacements sont destinés au stockage des ouvrages de la SMF. Une partie est réservée aux archives des différents services de la SMF, actuellement stockées sur le site de l'IHP.

Des infiltrations d'eau persistent sur la partie ouest du bâtiment. Les réparations des abords du bâtiment (escaliers, pigeonniers) restent à faire. Les travaux sur les parties est et sud-est de l'extension du bâtiment seront partiellement pris en charge par la MAIF dans le cadre de la garantie « Dommage Ouvrage », et feront aussi l'objet de recours à l'encontre des entreprises qui étaient intervenues précédemment.

## Rencontres et colloques

### Le colloque MATHS A VENIR 2009

Le colloque MATHS A VENIR 2009 a eu lieu les 1er et 2 décembre 2009 à la Maison de la Mutualité. Des ateliers préparatoires avaient eu lieu les 21 et 22 avril à Rennes (Mathématiques et Société), du 23 au 25 avril à Bures-sur-Yvette (Mathématiques et Industrie), et les 12 et 13 mai à Lille (Mathématiques dans la science contemporaine). Le comité de programme de MATHS A VENIR 2009 comprenait des représentants des sociétés savantes, Société Française de Statistique (SFdS), Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), Société Mathématique de France (SMF) et des représentants de l'association Femmes & Mathématiques (f&m), du Centre National de la Recherche Scientifique (Institut des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions) (INSMI du CNRS), de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS), et de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA). Elles étaient soutenues par le comité de parrainage du colloque, en la personne de son président, Philippe Camus (Président d'Alcatel-Lucent, co-gérant du groupe Lagardère). Ce colloque s'adressait en priorité aux non-mathématiciens (décideurs, élus, responsables de l'enseignement supérieur ou de la recherche, journalistes), et à toute personne concernée par la démarche scientifique (étudiant, ingénieur, enseignant, chercheur ou enseignant-chercheur). Il a rassemblé 700 participants.

Ce colloque a été l'occasion de faire le point sur la situation de l'école mathématique française. Elle reste une école de très haut niveau, mais plusieurs constats alarmants ont été faits. Le potentiel de la recherche française risque de diminuer dans les années qui viennent, du fait de la diminution des effectifs étudiants dans les universités et la baisse prévisible du nombre de postes ouverts dans les concours de recrutement. Les problèmes du dialogue entre la communauté mathématique et d'autres communautés scientifiques et techniques et le monde des entreprises ont été longuement abordés.

La présentation de ce colloque, les contenus des débats et tables rondes et les conclusions sont disponibles à l'adresse suivante :

`http://www.maths-a-venir.org/2009/prsentation`

Un comité de suivi du colloque reste en place jusqu'à l'été. Il a émis une liste de recommandations et gère les reliquats financiers pour soutenir des actions qui rentrent dans le cadre de ces recommandations.

### Journée des lauréats de l'académie des sciences

Cette journée a eu lieu le 6 novembre 2009 à l'ÉNS Paris. Elle réunissait Artur Avila, Jean-Louis Colliot-Thélène, Laurent Fargues, Charles Favre, Raphël Rouquier et Nessim Sibony, qui ont chacun fait un exposé de 30 minutes consacré à leur domaine de recherche, à destination des étudiants de l'ÉNS. Ces exposés avaient été précédés le matin par des présentations introductives de Benjamin Schraen, Olivier Wittenberg et Sébastien Boucksom.

Le lien internet pour cette journée est :
http://smf.emath.fr/Journee-Academie-2009

Nous réfléchissons à une fusion ou à une juxtaposition avec la journée similaire concernant les prix de mathématiques appliquées et d'informatique. Il est souhaitable qu'il y ait au moins une communication commune sur ces deux événements.

### Journée annuelle 2010

La journée annuelle aura lieu les 25 et 26 juin 2010 à l'IHP et sera organisée par Pierre Loidreau. Elle s'intitule « Algèbre et télécommunications ». Les conférenciers sont Daniel Augot, Frédérique Oggier, Joachim Rosenthal et Gilles Zémor. La journée prend à partir de cette année un développement important puisqu'elle s'étend sur deux jours, avec l'ajout de deux tables rondes en parallèle. Les thèmes choisis cette année sont : « Projeter de trouver : la recherche sur projets en question » sous la responsabilité de J.-F. Méla, et « Quels acteurs pour quel enseignement de l'informatique au lycée ? » sous la responsabilité d'Aline Bonami, Brigitte Vallée et Valérie Berthé. Un atelier autour du thème « Jeunes mathématiciens, que peut vous apporter l'ANR ? » aura lieu sous la responsabilité de M. Amara. Le prix d'Alembert sera remis le 25 juin[26].

### Rencontres scientifiques de la SMF

La Société Mathématique de France organise de manière régulière les sessions « État de la Recherche ». Ce sont des sessions nationales de formation dont la vocation est :

– soit de mettre au courant des grandes théories en plein essor les non spécialistes du sujet souhaitant avoir une idée de leur état ;

– soit de rassembler des spécialistes de sous-disciplines différentes utilisant des objets mathématiques analogues.

Ces sessions s'adressent aux mathématiciens, de niveau post-DEA ou plus avancé, non spécialistes du sujet exposé. Elles sont organisées sur 3 jours.

Deux sessions des états de la recherche se sont déroulées en 2009 :

– l'une intitulée « Modèles de dimères et pavages aléatoires » était organisée par C. Boutillier et N. Enriquez et a eu lieu du 5 au 7 octobre à l'IHP[27],

– l'autre intitulée « Les sciences du vivant » était organisée par E. Grenier et P. E. Jabin et a eu lieu du 1er au 3 octobre à l'IHP[28].

Les deux sessions prévues pour 2010 sont :

– Espaces métriques singuliers et théorie des groupes (CIRM, 26-28 mai, organisée par M. Bourdon et B. Rémy[29])

– Modèles numériques pour la fusion contrôlée (CIRM, 19-23 juillet, organisée par N. Crouseilles, H. Guillard, B. Nkonga et E. Sonnendrucker dans le cadre du CEMRACS[30])

---

[26] http://smf.emath.fr/content/journee-annuelle-2010-paris
[27] http://ipht.cea.fr/statcomb2009/dimers/
[28] http://www-math.unice.fr/~jabin/MathBio-smf.html
[29] http://smf.emath.fr/ER-CIRM-05/10
[30] http://smf.emath.fr/ER-CIRM-06/10

Le comité scientifique des états de la recherche sera renouvelé courant 2010. F. Barthe a accepté d'être le nouveau secrétaire.

Le premier colloque franco-tunisien de mathématiques a eu lieu du 16 au 20 mars 2009 à Djerba.

Le Conseil Scientifique a décidé d'accorder son parrainage aux colloques suivants :

– « la Tour de Hanoï, un casse-tête mathématique d'Edouard Lucas (1842-1891) », 6-7 février, IHP, Paris.
– la « 10$^{e}$ rencontre MathIndustrie », 14 mai, École Centrale, Paris ;
– les « 26$^{e}$ journées arithmétiques », 6-10 juillet, Saint-Étienne ;
– les « troisièmes rencontres des jeunes statisticiens », 31 août-4 septembre, Aussois ;
– la « Première rencontre mathématique franco-irakienne », 14 au 18 novembre, Kurdistan ;
– la conférence « Paulette Libermann, héritage et descendance », 7-12 décembre, IHP, Paris ;
– le « Premier colloque franco-uruguayen de mathématiques », 7-11 décembre, Punta del Este, Uruguay ;
– « Équations aux différences et équations différentielles » en l'honneur de M. Loday, 24-25 juin 2010, Angers ;
– « 9th Workshop on stochastic analysis and related fields » en l'honneur de A.S. Üstünel, 14-15 juin 2010, Telecom Paris ;
– séminaire autour de la cryptographie, juin 2009, IHP, Paris ;
– le congrès Franco-Égyptien de Mathématiques, 3-5 mai 2010, Le Caire ;
– « 8th French Combinatorial Conference », 28 juin-2 juillet 2010, Orsay ;
– le colloque « géométrie et dynamique » en l'honneur de M. Chaperon, 11-15 janvier 2010, IHP, Paris.

Une grande partie des colloques SMF se déroule au CIRM et on renvoie donc le lecteur au paragraphe consacré au CIRM.

### Congrès International des Mathématiciens (ICM)

L'ICM a lieu tous les quatre ans. Il se tiendra cette année à Hyderabad en Inde. C'est le congrès le plus prestigieux en mathématiques durant lequel sont annoncés les récipiendaires des médailles Fields, du prix Gauss (récompense la plus prestigieuse dans le domaine des mathématiques appliquées), le prix Rolf Nevanlinna ainsi que la médaille Chern.

La médiatisation autour de l'ICM et des différents prix qui y sont attribués est une occasion unique pour permettre au grand public de percevoir que les mathématiques sont une science en plein développement. Dans cet esprit, nous prévoyons des rencontres avec des journalistes d'ici à l'été pour les aider à préparer leurs interventions et articles.

### Divers

Une journée d'accueil des nouveaux recrutés en mathématiques est organisée tous les deux ans sous l'égide de la SMAI, de la SMF et de la SFdS, avec le soutien du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, du CNRS, de l'INRIA, et de la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris. La prochaine aura lieu en janvier 2011.

## Le Conseil Scientifique de la SMF

Outre les décisions de parrainage mentionnées ci-dessus, le Conseil a pris les décisions suivantes :

– janvier 2010 : avis favorable au remplacement d'E. Giroux par G. Besson au Comité de Rédaction du *Bulletin et des Mémoires* ;

– mars 2010 : avis favorable à la nomination de B. Maury au Comité de Rédaction de la série *Cours spécialisés* ;

– avis favorable au remplacement de G. David et G. Métivier par F. Planchon au Comité de Rédaction d'*Astérisque*.

Le Conseil a aussi été saisi du problème de la parité au sein de nos comité de rédaction : le CA et le CS de la SMF a décidé d'envoyer une recommandation commune aux comités de rédaction afin que la représentation des femmes dans ces comités soit plus conforme à leur place dans la communauté mathématique.

## Enseignement

Deux dossiers ont occupé le devant de la scène durant cette année scolaire : la réforme des lycées et la réforme de la formation des enseignants. Ces questions engagent en effet toutes les deux l'avenir de notre système éducatif. Les positions de la SMF ainsi que de nombreuses autres informations et la composition de sa commission enseignement peuvent être consultées sur le site de la SMF dans les dossiers suivants :

`http://smf.emath.fr/content/enseignement` et

`http://smf.emath.fr/Composition-Commission-Enseignement`

Dans les conclusions du colloque MATHS A VENIR, on relève que malgré l'excellence de l'école mathématique française, l'évolution de leur place est préoccupante à cause d'une image négative dans une portion importante de la population et d'une perception insuffisante des enjeux. Ceci peut aboutir à « une diminution de la place qu'occupe l'enseignement des mathématiques au lycée avec pour conséquence un niveau de compétence trop faible pour tous, et une formation insuffisante pour les scientifiques ». On ne saurait dire plus clairement l'importance des questions d'enseignement pour la SMF.

### Formation des enseignants et concours de recrutements

La réforme des concours de recrutement et de la formation des enseignants du premier et second degré, appelée « mastérisation » a été analysée dans le précédent rapport comme un bouleversement majeur de la formation des enseignants. Rappelons que cette réforme prévoyait à son annonce en juillet 2008 que les certifiés et professeurs des écoles devraient justifier de l'obtention d'un diplôme de master, et que, si le principe de concours nationaux et la distinction CAPES/ Agreg étaient maintenus, les enseignants auraient un service à temps plein dès la première année d'exercice.

La SMF s'est exprimée à de multiples reprises durant l'année 2008-2009 à travers des actions et des prises de positions, sur les dangers de cette réforme pour la formation des enseignants, pour l'attractivité de la filière enseignement et pour l'avenir de tous les masters de Mathématiques. On en trouve une synthèse dans la contribution aux états généraux de la formation de enseignants organisée par la CDIUFM en juin 2009.

La SMF rappelle constamment que la formation mathématique des futurs professeurs ne doit pas être entamée, doit être garantie par un concours national de recrutement aux exigences disciplinaires fortes, et que l'introduction d'une épreuve de connaissance du système éducatif « Agir en fonctionnaire de l'État de manière éthique et responsable » est inappropriée. Elle rappelle que la suppression du stage en responsabilité est la suppression d'une formation professionnelle rémunérée, donc une régression majeure. L'évolution récente confirme la réduction drastique de la formation professionnelle pendant la première année d'exercice.

Après une année 2008-2009 mouvementée, qui a abouti à l'annonce d'un moratoire d'un an, la réforme a été cependant instituée par le décret du 28 juillet 2009 qui fixe les modalités de recrutement à partir de la session 2011 avec des mesures transitoires pour la session 2010 des concours. Ces décrets instituent sans mesures de transition et sans concertation préalable l'obligation d'être titulaires d'un Master pour les candidats à l'agrégation. Les actions de la SMF ont donc continué durant l'année en cours où la parution de ces décrets a accéléré la mise en place de la réforme. En septembre 2009 une réunion de responsables de préparations aux concours et de responsables de masters a débattu à l'IHP des conditions de validation du M1 pour l'année de transition, de la formation professionnelle que ce soit par les stages durant le master ou pendant l'année de fonctionnaire stagiaire, et de la position des épreuves écrites des concours durant le master.

La question de l'agrégation a été un point fort de cette discussion pour plusieurs raisons. Le fait qu'un master complet soit exigé avant de pouvoir s'inscrire au concours fait planer la menace d'une pénurie dramatique de candidats en 2011, et de fermetures massives de préparations. De plus de nombreux candidats potentiels risquent de déserter ce concours si passer simultanément le CAPES par sécurité est rendu impossible. La rupture du lien entre l'agrégation et les études doctorales est une source d'inquiétudes graves et immédiates. La SMF a demandé avec insistance qu'une « commutativité » entre l'agrégation et l'obtention du M2 soit instaurée.

L'action de la SMF s'est poursuivie avec deux réunions du Forum des Sociétés Savantes tenues à l'IHP en octobre 2009 et janvier 2010 et réunissant une cinquantaine de responsables de sociétés savantes et associations de professeurs du secondaire de toutes disciplines. Les titres des textes qui en sont issus, « Réformons la réforme » et « Mastérisation : de mal en pis » donnent le ton. Ils dénoncent l'inclusion de l'épreuve « Agir en fonctionnaire de l'État » dans les épreuves disciplinaires des concours et demandent son report en fin de première année d'exercice. Sur le plan disciplinaire, ils déplorent la difficulté à concevoir des parcours de master soumis à une triple exigence de stage en responsabilité, de préparation à un concours et d'obtention d'un master. Ils dénoncent la réduction drastique de la formation professionnelle après le concours qui aura des conséquences désastreuses pour les nouveaux professeurs et pour leurs élèves. Enfin la commutativité entre l'agrégation et le master 2 et la prise en compte de son articulation avec le doctorat sont réclamées. La SMF a également pris position en novembre 2009 sur les aspects plus spécifiques aux mathématiques et en mai 2010 sur les problèmes soulevés par l'évolution du concours de l'agrégation de mathématiques.

Ainsi des parcours enseignement se mettent en place dans la plupart des universités malgré un large sentiment d'insatisfaction, parce qu'on ne peut pas laisser un vide dans l'offre de formation des futurs candidats aux concours. Il sera indispensable d'exiger une évaluation en profondeur des conséquences de cette réforme.

**La réforme des lycées.**

Il s'agit d'une réforme de l'architecture de l'enseignement au lycée qui a été lancée en novembre 2007. On trouvera sur la page `http://smf.emath.fr/content/textes-ministeriels` les documents ministériels qui montrent la genèse de cette réforme. On trouvera aussi dans : `http://smf.emath.fr/Reforme-Lycee-06/08-05/09` un panorama complet des actions de la SMF pour l'année 2008-2009 et de son analyse de la réforme, avec en toile de fond les questions : quel est le besoin réel de scientifiques en France ? Pourquoi y a-t-il une baisse de l'orientation vers les filières scientifiques universitaires ? Quelle formation doit être dispensée au lycée pour permettre une orientation efficace ?

L'année 2009-2010 a été marquée par la présentation en octobre 2009, par le ministre Luc Chatel de la réforme dans le document intitulé « le nouveau lycée ».

Les réactions de la SMF ont été multiples :

– Dans le document intitulé « une brève analyse des rapports Apparu et Descoings », nous faisons une analyse critique du contenu de ces rapports parus en mai et juin 2009. Nous émettons des réserves sur le fait de mettre les attentes des élèves au centre du système comme gage d'efficacité du système éducatif. Nous remarquons que favoriser l'orientation et la réorientation conduit à privilégier les passerelles au détriment d'une spécialisation suffisamment précoce nécessaire dans le monde actuel. Enfin nous craignons que la remise en cause d'une certaine hiérarchie des filières se fasse exclusivement au détriment des matières scientifiques jugées trop élitistes.

– Dans le communiqué commun avec l'APMEP du 22 novembre 2009, nous nous penchons de façon plus précise sur les grilles horaires. La diminution de l'horaire global de sciences en classe de seconde est contestée ainsi que la suppression de tous les dédoublements. Mais notre critique se concentre plus particulièrement sur la classe de première qui affiche un horaire de seulement 4 heures de mathématiques et 10 heures d'enseignement scientifique en première S, et un abandon prévisible de toute formation scientifique en filière L. Deux conséquences sont à craindre : d'abord il y aura une aggravation du saut pédagogique lors du passage en terminale S propre à décourager les orientations vers des études supérieures scientifiques, et en même temps le rôle de filière d'excellence de la série S pour tous types d'études risque d'en sortir paradoxalement renforcé contrairement aux buts affichés.

– Dans le communiqué du Forum des Sociétés Savantes du 23 janvier 2010, préparé par une réunion de responsables d'associations de spécialistes de physique, mathématiques et langues vivantes tenue à l'IHP à l'initiative de la SMF et de l'APMEP en décembre 2009, il est rappelé comme principe de base, que tout élève du lycée doit avoir accès à une formation humaniste et scientifique de citoyen autonome, responsable et cultivé dans l'ensemble des domaines du savoir :

lettres, sciences, sciences humaines et sociales. Selon les souhaits d'orientation de chaque élève, cette formation doit être plus exigeante dans certains domaines. Les sociétés et associations constituant le Forum insistent sur leur attachement à l'équité géographique de l'offre de formation. Elles désapprouvent la disparition d'enseignements disciplinaires précis contre un volume horaire sans cadrage. Elles dénoncent un déséquilibre accru entre filières et l'irréversibilité de l'orientation. Elles regrettent l'incohérence de la formation en sciences pour les scientifiques et l'incohérence de la formation en langues pour les linguistes. Elles expriment leur inquiétude sur l'avenir des séries technologiques.

Ces trois textes et les observations du haut conseil de l'éducation de décembre 2009 qui prônent un renforcement de l'enseignement des mathématiques dans toutes les filières au lycée se trouvent sur le site de la SMF à la rubrique suivante :
`http://smf.emath.fr/Reforme-Lycee-06/09-05/10`. Une commission organisée par l'inspection générale a été chargée d'élaborer les programmes de la classe de première. Elle a reçu une délégation de la SMF en février 2010. Le cadre très contraint d'horaires trop réduits rendait par avance cet exercice très frustrant. Nous avons malgré tout plaidé pour une vision d'ensemble, qui englobe une réflexion sur la terminale, et pour une conception équilibrée entre les différentes rubriques, et enfin pour des programmes qui aient en vue la préparation aux études supérieures. Nous avons aussi fait part de nos réserves sur une subordination du projet à l'aménagement de passerelles, en fait souvent illusoires et aussi pour des programmes attractifs et spécifiques dans les filières L et ES. La SMF reviendra sur ces sujets par une contribution à la consultation sur le projet de programmes qui se déroule en mai 2010.

### Autres actions.

#### Rencontre avec des associations d'informaticiens sur l'enseignement au lycée.

La SMF souhaite vivement participer aux débats suscités par la place de l'informatique dans l'enseignement au lycée. L'idée d'une rencontre avec des informaticiens qui ont réfléchi à ces questions, s'est donc imposée. Cette réunion qui a eu lieu le 20 novembre 2009 a rassemblé Aline Bonami, Daniel Duverney et Michel Granger pour la SMF, et Jean-Pierre Archambault (EPI), Gilles Dowek (groupe ITIC de l'ASTI) et Laure Petrucci (SPECIF), et a donné lieu à un échange très intéressant dont on trouvera l'écho dans un article de la *Gazette* datée de janvier. L'annonce, postérieure à cette réunion de la création d'une option informatique en classe de terminale S, a montré l'actualité du sujet qui fera l'objet d'une table ronde aux prochaines journées annuelles de la SMF.

#### Participation à des associations .

Le collectif *Action sciences* dont la création remonte à juin 2002 regroupe actuellement 14 sociétés savantes et associations de professeurs dans tous les domaines des sciences et se fixe pour objectif de travailler sur l'enseignement secondaire en sciences au niveau du lycée et sur l'articulation lycée-niveau BAC +1 à +3. La réflexion sur la réforme des lycées s'est poursuivie tout au long de l'année et a donné lieu à un communiqué de presse du 1$^{\text{er}}$ mars 2010 qui a été envoyé à de nombreux responsables politiques.

### CFEM et CIEM

Les représentants de la SMF à la CFEM sont Jacques Wolfmann, et Alain Yger (Vice-Président membre du bureau). Un troisième représentant reste à nommer. La CFEM coordonne en particulier la préparation des congrès internationaux de l'ICME, et mène une réflexion sur l'enseignement de notre discipline.

Un enjeu important concernant l'enseignement des mathématiques va être l'éventuelle évolution de la CFEM. Cette organisation est censée réunir les diffférents organismes qui réfléchissent sur l'enseignement des mathématiques. Certains de ses membres souhaitent que la CFEM se transforme en un organisme qui puisse prendre position au nom de ses membres. La SMF de son côté souhaite que la CFEM garde son rôle d'instance de délibération et de concertation ; certains de ses membres pouvant par ailleurs prendre des positions communes suite à de telles discussions. Des choix importants pourraient être faits, lors de l'assemblée annuelle de juin, où de nouveaux statuts devraient être adoptés.

### Colloque de l'ADIREM.

La SMF a délégué plusieurs membres pour la représenter, et a notamment participé à une table ronde au colloque « Les mathématiciens et l'enseignement de leur discipline en France » organisé par le réseau des IREM à l'occasion du 20$^{\text{e}}$ anniversaire de la revue *Repères*. À l'occasion de cette table ronde qui s'appelait « Quel souci pour l'enseignement des mathématiques en France » nous avons insisté sur les difficultés de la transition entre la terminale et les études supérieures, difficultés de plus en plus sensibles dans les premiers cycles universitaires, et souci que la réforme des lycées en cours n'apaise pas.

### La formation mathématique des ingénieurs

L'enseignement de notre discipline dans les écoles d'ingénieurs est devenu plus difficile en raison d'une moindre maîtrise des concepts de base par beaucoup d'élèves issus des classes préparatoires par suite de l'évolution des mathématiques au lycée. Les réductions d'horaires ont affecté aussi dans les années récentes l'enseignement des mathématiques mais aussi de la physique dans les écoles elles-mêmes. Nos contacts avec la CTI (Commission des Titres d'Ingénieurs) qui remontent à plusieurs années ont abouti à la création d'un groupe de travail commun CTI-sociétés savantes de mathématiques (SMF SMAI et SFdS) dont la fonction est de réfléchir à la place et au rôle des mathématiques dans les écoles d'ingénieurs et d'élaborer des textes destinés à être inclus dans les documents de référence de la CTI. Les représentants de la SMF y sont Guy Chassé, Laurent Decreusefond et Pierre Loidreau.

Pour souligner l'importance que la SMF attache à cette réflexion, le CA a invité en janvier 2010 Jacques Béranger membre du bureau de la CTI, qui en a présenté le fonctionnement et les objectifs et Guy Chassé qui anime ce groupe de travail sur les mathématiques.

# Rapport financier, année 2009

Le résultat de l'année 2009 (hors CIRM) est à l'équilibre (déficit de 700 euros), (celui de l'année précédente était déficitaire de 26 000 euros).

### Grandes masses de l'exécution du budget de la SMF seule

Le volume des produits est de 1045,9 kE en 2009 (pour 973 kE en 2008), dont 562 kE de recettes. Le volume des charges globales est de 1046,6 kE en 2009 (pour 999 kE en 2008), dont 715 kE de dépenses.

### Produits d'exploitation

Ce sont essentiellement les ressources dues aux ventes de produits finis, cotisations, subventions. Les produits financiers représentent la rénumération des fonds placés.

(1) Recettes dues aux revues : 427 kE (contre 431 kE en 2008).

(2) Cotisations, abonnements à la *Gazette* : 110 kE (contre 106 kE en 2008).

(3) Produits financiers : en baisse 7,5 avec kE en 2009, à comparer aux 33 kE en 2008 et aux 28 kE en 2007.

### Charges d'exploitation

Ce sont essentiellement les charges dues au personnel, les achats divers, les impôts et taxes.

(1) Masse salariale

La masse salariale globale, hors charges, du personnel SMF/CIRM est de 295 kE, il faut ajouter 125 kE de charges. Par ailleurs les salaires du personnel CIRM nous sont remboursés (145 kE en 2009).

Les chiffres de la masse salariale des années précédentes sont :

- en 2008 : 288 kE et 116 kE,
- en 2007 : 325 kE et 126 kE,
- en 2006 : 315 kE et 112 kE.

La masse salariale a légèrement augmenté cette année (embauche d'un salarié en CDD à Paris pour la page web, embauche au CIRM). Il faut prévoir que l'embauche en 2010 d'un salarié à mi-temps comme chargé de mission aux Publications, alourdira la masse salariale mais devrait alléger le poste composition.

(2) Frais de fabrication

Les frais de fabrication (hors composition) s'élèvent à 85 kE (90 kE en 2008, 66 kE en 2007, 72 kE en 2006). Les frais de composition sont de 23 kE (33 kE en 2008). Cette baisse apparente est due en partie au fait que la composition des Bulletins 2009 a été enregistrée en 2008.

(3) Honoraires et assurances

Les honoraires (11 kE pour le commissaire aux comptes) et assurances (2 kE) sont stables. On notera les 15 kE dans la rubrique « publicité » qui correspondent aux différentes actions publicitaires en direction de la Communauté Mathématique et du Grand Public.

(4) Frais de maintenance informatique

Les frais de maintenance restent faibles : 6kE (5 kE en 2008). Il a été décidé de refaire le serveur Internet et la page web de la SMF. Les travaux techniques sont terminés, il reste des ajustements à faire.

(5) Affranchissements

Le poste affranchissement, toutes revues confondues, est de 74 kE en 2009, il était de 94 kE en 2008. La diminution est due essentiellement au routage en interne (voir ci-dessous) et à un nouveau contrat avec la Poste pour l'affranchissement de la *Gazette*.

La réorganisation du routage des Publications a été entreprise fin 2008 : la cellule de diffusion de Marseille effectue tous les routages des revues (à l'exception de la *Gazette*) ; ceci était fait auparavant par les imprimeurs. Un bilan, réalisé en octobre 2009, prouve que les coûts sont nettement plus faibles. Cela permet aussi un meilleur suivi des réponses apportées aux réclamations des clients.

### Les revues de la SMF

Les produits dûs aux ventes des revues SMF sont à peu près constants. Les charges sont en baisse pour des revues comme les *Mémoires* ou *Astérisque* puisque certains volumes 2009 n'ont pas pu être terminés avant le 31 décembre. D'autres volumes ont bien été fabriqués en 2009 mais livrés en 2010. La situation a été parfois tendue pour différentes raisons (faillite d'un imprimeur, changement de politique de l'AMS qui commence à payer les abonnements quand elle a reçu tous les numéros de l'année,...). Il a été décidé, comme pour les comptes 2008, de provisionner une partie de la créance AMS.

Il y avait en 2007 un retard inquiétant dans les Publications, retard conjoncturel rattrapé en grande partie en 2008. En 2009, certaines publications ne sont pas parues, ce qui entraine nécessairement une baisse des produits. Nous espérons que la situation va se stabiliser en 2010 et que l'embauche d'un salarié à mi-temps va y contribuer.

En ce qui concerne les tarifs des publications, il a été décidé que le prix des abonnements augmentera de 2% et que le prix au numéro sera stable.

### Budget du CIRM

Le compte de résultat du CIRM présente un excédent de 1,2 kE (+ 91 kE en 2008, + 21 kE en 2007).

La recette due aux rencontres (subventions CNRS et Conseil régional comprises) est de 919 kE (931 kE en 2008, 900 kE en 2007). La redevance à Eurest (société chargée de la restauration et de l'entretien) s'est élevée à 787 kE (758 kE en 2008). Il y a eu, en 2009, une petite baisse du nombre de nuitées qui a entrainé une baisse des recettes d'hôtellerie.

Le soutien au fonctionnement du CIRM provenant du Ministère de la Recherche est constant (391 kE). De plus, les subventions d'investissement ont fortement augmenté : subvention de 200 kE du Ministère de la Recherche dans le cadre du plan de « relance » et subvention de 300 kE, versée en décembre 2009, pour la période 2009-2011 destinées, d'une part à la mise en sécurité des bâtiments et, d'autre part, à couvrir des travaux de rénovation.

Par ailleurs, la subvention accordée aux rencontres par le Conseil Scientifique finance actuellement environ 30% du coût des rencontres. Les centres internationaux de rencontres mathématiques (Oberwolfach, Banff) financent entièrement les séjours. Si on veut augmenter le nombre de colloques organisés au CIRM par des mathématiciens étrangers de prestige, il faudrait les subventionner mieux ; la situation doit s'améliorer en 2010 (subvention à près de 50%), grâce à une subvention supplémentaire de l'INSMI. Le CIRM s'engage maintenant à couvrir les frais de séjour de 40 participants par colloque.

Les subventions sont vitales pour la vie du CIRM.

### Conclusion sur la situation financière de l'ensemble SMF/CIRM

La situation financière est à l'équilibre. Il y a, comme l'an dernier, une très bonne maîtrise des dépenses de fonctionnement. Les salaires sont en augmentation régulière ; la masse salariale est en augmentation suite à l'embauche en CDD de plusieurs personnes à Paris et Marseille.

Les rentrées des placements restent positives malgré la crise mais ont accusé une baisse importante. Nous espérons que la situation sera meilleure en 2010.

Ce résultat équilibré ne doit pas nous masquer des difficultés à prévoir dans les années à venir : des coûts importants vont peser sur les finances de la SMF en 2010 : travaux au CIRM, continuation de la réfection de notre site web, puis viendra le tour de notre base de données. À ces coûts exceptionnels doit s'ajouter l'augmentation de nos redevances à l'IHP. Si celle-ci devait être confirmée, nous devrions trouver une nouvelle source de financement à hauteur du montant de ces nouvelles redevances.

La fragilité du bilan comptable de la SMF oblige celle-ci à réfléchir à ses sources de financement dans le futur, afin de conforter sa situation financière. En particulier, une réflexion devrait être menée afin de déterminer si nous souhaitons solliciter plus de subvention venant des pouvoirs publics, et avoir recours au mécénat, tout en mesurant dans quelle mesure ces démarches risqueraient d'amoindrir notre liberté de parole et d'action.

## Remerciements

Le rapport moral fait le bilan de l'ensemble des activités menées au sein de la SMF depuis un an. Il est le reflet du travail effectué par de très nombreux bénévoles, que nous remercions. Citons en particulier les membres du Bureau, du Conseil d'administration et du conseil scientifique de la SMF, les directeurs et les membres de nos comités de rédaction, et tous ceux que nous sollicitons, ponctuellement ou régulièrement, et qui offrent leur temps et leurs compétences avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par Jean-Paul Allouche, Jean-Marie Barbaroux, Arnaud Beauville, Pascal Chossat, Zindine Djadli, François Germinet, Michel Granger, Stéphane Jaffard, Frédéric Patras, Emmanuel Russ, Micheline Vigué, avec l'aide de Sabine Albin, Nathalie Christiaën, Hervé Di Mondo, Christian Munusami et Claire Ropartz.

# MATHÉMATIQUES

## Une introduction aux modèles de dynamique de populations structurées en âge et aux problèmes de bifurcations

Arnaud Ducrot[1], Pierre Magal[2], Shigui Ruan[3]

### 1. Introduction

Cet article est consacré aux modèles de dynamique de populations structurées en âge. Ces modèles ont été abondamment utilisés pour décrire l'âge chronologique des individus, ou plus généralement l'histoire des individus. C'est par exemple le cas dans les modèles structurés en âge d'infection, dans lesquels l'âge décrit le temps depuis l'infection. Les premiers travaux sur les modèles structurés en âge remontent au début du $20^{ème}$ siècle avec Sharpe et Lotka [56] en 1911, et avec McKendrick [45] en 1926 (voir aussi Lotka [29, 30]). Ces modèles linéaires ont été rigoureusement étudiés par Feller [16], et Bellman et Cooke [6], en utilisant les équations intégrales de Volterra et la transformée de Laplace. Les modèles structurés en âge non linéaires ont été étudiés à partir des années 70 avec les travaux de Gurtin et MacCamy [20]. Nous renvoyons aux livres de Hoppensteadt [24], Webb [65], Metz et Diekmann [44], Iannelli [25], Cushing [11], Anita [5], Thieme [61], Perthame [48], Magal et Ruan [38], pour un bon survol du sujet.

Un modèle linéaire de base pour une population structurée en âge (chronologique) s'écrit sous la forme suivante

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial a} = \underbrace{-\mu(a)u(t,a)}_{\text{mortalités}}, \text{ pour } a \geqslant 0, \\
u(t,0) = \underbrace{\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da}_{\text{naissances}} \\
u(0,.) = u_0 \in L^1_+ \left((0,+\infty), \mathbb{R}\right),
\end{array}
\right.
\tag{1.1}
$$

où $\mu \in L^\infty_+(0,+\infty)$ est le taux de mortalité des individus, et $\beta \in L^\infty_+(0,+\infty)$ est le taux de reproduction.

[1] Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR CNRS 5251 & INRIA sud-ouest Anubis, Université Victor Segalen Bordeaux 2.
[2] Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR CNRS 5251 & INRIA sud-ouest Anubis, Université Victor Segalen Bordeaux 2.
[3] Department of Mathematics, University of Miami.

Dans le contexte des problèmes de dynamique de populations structurées, la fonction $a \to u(t,a)$ est la *densité de population*. Cela signifie que pour chaque $a_1, a_2 \in [0, +\infty]$, avec $a_1 < a_2$ la quantité

$$\int_{a_1}^{a_2} u(t,a)da$$

représente le nombre d'individus dans la population ayant un âge compris entre $a_1$ et $a_2$ (à l'instant $t \geqslant 0$). Donc en particulier

$$U(t) = \int_0^{+\infty} u(t,a)da$$

est le nombre total d'individus à l'instant $t \geqslant 0$. En intégrant l'équation (1.1) le long des caractéristiques on obtient alors

$$u(t,a) = \begin{cases} \exp\left(-\int_{a-t}^{a} \mu(s)ds\right) u_0(a-t), \text{ si } a \geqslant t, \\ \exp\left(-\int_0^a \mu(s)ds\right) B_0(t-a), \text{ si } a \leqslant t. \end{cases} \tag{1.2}$$

où $B_0(t)$ est le flux des naissances. De plus, en observant que

$$B_0(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da = \int_t^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da + \int_0^t \beta(a)u(t,a)da,$$

on déduit que $t \to B_0(t)$ est l'unique fonction continue satisfaisant l'équation intégrale de Volterra (linéaire) :

$$B_0(t) = I(t) + \int_0^t \beta(a) \exp\left(-\int_0^a \mu(s)ds\right) B_0(t-a)da, \tag{1.3}$$

où

$$I(t) := \int_t^{+\infty} \beta(a) \exp\left(-\int_{a-t}^a \mu(s)ds\right) u_0(a-t)da.$$

Dans le contexte de l'écologie, pour prendre en compte certains mécanismes de limitation dans des populations animales ou végétales, on considère des modèles structurés en âges dit *densité dépendant* de la forme suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} = -\left[\mu(a) + \underbrace{\int_0^{+\infty} \kappa(s)u(t,s)ds\chi(a)}_{\text{compétition pour les ressources}}\right] u(t,a), \ a \geqslant 0, \\ u(t,0) = \underbrace{\exp(-\int_0^{+\infty} \sigma(s)u(t,s)ds)}_{\text{limitations des naissances}} \int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da, \\ u(0,.) = u_0 \in L^1_+((0,+\infty), \mathbb{R}). \end{cases} \tag{1.4}$$

où $\kappa, \chi, \sigma \in L^\infty_+(0,+\infty)$.

Dans le modèle (1.4) le terme $\int_0^{+\infty} \kappa(s)u(t,s)ds\chi(a)$ rend compte de limitation par compétition (intra spécifique) des individus pour la nourriture, l'espace, etc. Le terme $\chi(a)$ permet de sélectionner les stades (ou les classes d'âges) pour lesquels cette compétition a lieu. Le terme $\exp(-\int_0^{+\infty} \sigma(s)u(t,s)ds)$ décrit une limitation des naissances. Par exemple, pour des populations de poissons ce terme est introduit pour rendre compte de phénomènes de cannibalisme des larves (ou des oeufs) par les adultes (voir Ricker [52, 53]) alors que pour des populations d'arbres, ce terme correspond à une compétition pour la lumière. Les grands arbres, occultant la lumière pour les plus petits, empêchent leur développement.

Ce terme de limitation des naissances peut aussi être vu comme la limite « singulière » (lorsque $\varepsilon \searrow 0$) du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial a} = \\ -\left( \mu(a) + \int_0^{+\infty} \kappa(s) u(t,s) ds \chi(a) + \underbrace{\varepsilon^{-1} 1_{[0,\varepsilon]}(a) \displaystyle\int_0^{+\infty} \sigma(s) u(t,s) ds}_{\text{limitation des naissances}} \right) u(t,a), \\ u(t,0) = \int_0^{+\infty} \beta(a) u(t,a) da, \\ u(0,.) = u_0 \in L^1_+ \left( (0,+\infty), \mathbb{R} \right) \end{cases}$$

où $1_{[0,\varepsilon]}(a)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,\varepsilon]$.
Le terme de limitation des naissances est donc un processus rapide relativement aux autres processus décrits dans le modèle (1.4).

Dans le cas particulier où

$$\mu(.) \equiv \widehat{\mu} > 0, \ \beta(.) \equiv \widehat{\beta} > 0, \ \ \kappa(.) \equiv \widehat{\kappa} > 0, \ \chi(.) \equiv 1, \ \text{et } \sigma(.) \equiv \widehat{\sigma} \geqslant 0,$$

le nombre total d'individus $U(t)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{dU(t)}{dt} = \left[ \widehat{\beta} \exp\left( -\widehat{\sigma} U(t) \right) - \widehat{\mu} - \widehat{\kappa} U(t) \right] U(t),$$

donc, en particulier, lorsque $\widehat{\sigma} = 0$, on obtient l'équation logistique :

$$\frac{dU(t)}{dt} = \left[ \widehat{\beta} - \widehat{\mu} - \widehat{\kappa} U(t) \right] U(t).$$

Les modèles structurés en âge ont été utilisés dans bien d'autres contextes comme la dynamique de populations cellulaires (voir Arino [4]), l'épidémiologie (voir Hethcote [23]), la démographie (voir Inaba [26]), etc. Plus généralement, ces modèles sont utiles pour décrire des changements au niveau individuel en fonction de l'histoire des individus. Mentionnons aussi des extensions au cas des modèles de dynamiques populations structurées en âge et en espace (voir Langlais [27], Kubo et Langlais [34], Magal et Thieme [42], Walker [64]). Nous renvoyons enfin à Gyllenberg et Webb [18] pour un exemple de modèle structuré en âge et en taille, etc. Cette liste est loin d'être exhaustive.

Concernant l'analyse mathématique du modèle non linéaire (1.4) ou plus généralement des modèles structurés en âge, les résultats classiques concernent l'existence et l'unicité des solutions, la positivité des solutions, et la stabilité des états d'équilibres. Ces problèmes ont été largement étudiés depuis les années 70-80. La première approche consiste à étendre la méthode utilisée pour le modèle linéaire, c'est à dire en utilisant une formulation dite des *équations intégrales de Volterra non linéaires*. Cette méthode a été abondamment étudiée par Webb [65, Chapitre 2] et par Iannelli [25]. Cela permet, en particulier, de montrer l'existence, l'unicité, et la positivité des solutions. En utilisant alors la théorie spectrale des semi-groupes linéaires, on peut également obtenir des résultats de stabilité des états d'équilibre.

Dans son livre, Webb [65, Chapitre 3] applique aussi la théorie des semi-groupes non linéaires à ces problèmes. À notre connaissance, la théorie des semi-groupes non linéaires ne permet pas d'étudier les problèmes de bifurcation, mais permet, en revanche, de donner des résultats de stabilité locale des états d'équilibres (voir Ruess [54] et les références cités dans cet article).

Dans le contexte des modèles structurés en âge, l'existence d'orbites périodiques non triviales induites par bifurcation de Hopf a été étudié dans des cas relativement particuliers (voir Prüss [49], Cushing [10], Swart [57], Kostova et Li [33], ou encore Bertoni [7]). Nous renvoyons aussi à l'article de Diekmann et Van Gils [13] pour une étude de la variété centrale et un résultat de bifurcation pour une classe spécifique d'équations intégrales de Volterra non linéaires.

Récemment, dans Magal et Ruan [39], une théorie de la variété centrale a été développée pour des problèmes de Cauchy abstraits à domaine non dense (en utilisant les semi-groupes intégrés). Cette théorie fournit notamment un résultat d'existence, mais aussi (et surtout) des résultats de régularité de la variété centrale. Ces résultats étendent ceux de Vanderbauwhede [62] pour les équations différentielles ordinaires, et ceux de Vanderbauwhede et Iooss [63] pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires à domaine dense. Notons que la régularité de la variété centrale joue un rôle essentiel dans le cadre de la théorie de la bifurcation. En effet, si on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires du plan, les résultats les plus généraux pour l'existence de bifurcations de Hopf utilisent un second membre de classe $C^3$ (voir Hale et Kocak [21]), ou de classe $C^4$ (voir Hassard, Kazarino et Wan [22]). Nous renvoyons aussi au livre de Françoise [17] pour plus d'informations sur les problèmes de bifurcation et plus généralement sur les oscillations en biologie. Nous renvoyons enfin au livre de Kuznetsov [35] pour un bon exposé sur les problèmes de bifurcation pour les équations différentielles ordinaires.

## 2. Le problème semi-linéaire

L'objet de cette section est de considérer le problème (1.4) par des méthodes de semi-groupe intégré. Pour cet exemple particulier, la plupart des calculs sont explicites mais la théorie générale peut s'appliquer dans des contextes moins explicites. (Voir par exemple [9] pour l'étude d'un problème parabolique avec bord non local où les calculs explicites sont difficiles).

Pour construire une théorie de la bifurcation, la première difficulté est de reformuler le problème comme un problème semi-linéaire classique (c'est à dire à domaine dense). Supposons tout d'abord que $\sigma \equiv 0$ dans le système (1.4). Dans ce cas, le problème peut être reformulé comme un problème de Cauchy semi-linéaire classique. Pour cela, on considère $\widehat{A} : D\left(\widehat{A}\right) \subset L^1(0,+\infty) \to L^1(0,+\infty)$ l'opérateur linéaire défini par

$$\widehat{A}\varphi = -\varphi' - \mu\varphi \text{ pour tout } \varphi \in D\left(\widehat{A}\right)$$

avec

$$D\left(\widehat{A}\right) = \left\{\varphi \in W^{1,1}(0,+\infty) : \varphi(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\varphi(a)da\right\},$$

et $\widehat{F}:L^1(0,+\infty)\to L^1(0,+\infty)$ l'application non linéaire

$$\widehat{F}(\varphi)=-\left(\int_0^{+\infty}\kappa(s)\varphi(s)ds\right)\chi\varphi.$$

Ainsi, lorsque $\sigma\equiv 0$, on peut formuler le système (1.4) comme un problème de Cauchy à domaine dense

$$\frac{du(t)}{dt}=\widehat{A}u(t)+\widehat{F}(u(t))\ \text{ pour } t\geqslant 0,\ u(0)=u_0\in L^1((0,+\infty),\mathbb{R}).$$

On peut alors appliquer les résultats classiques sur les problèmes semi-linéaires (voir Segal [55], Martin [43], Pazy [47], et Cazenave et Haraux [8]).

Pour pouvoir étudier le cas $\sigma\neq 0$, Thieme [58] a introduit une formulation du système (1.4) comme un problème à domaine non dense. Pour prendre en compte la condition de bord non linéaire, on commence par considérer l'espace de Banach

$$X=\mathbb{R}\times L^1(0,+\infty),$$

muni de la norme produit usuelle

$$\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\ \varphi\end{pmatrix}\right\|=|\alpha|+\|\varphi\|_{L^1}.$$

On considère $A:D(A)\subset X\to X$ l'opérateur défini par

$$A\begin{pmatrix}0_{\mathbb{R}}\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\varphi(0)\\ -\varphi'-\mu\varphi\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

avec le domaine

$$D(A)=\{0_{\mathbb{R}}\}\times W^{1,1}(0,+\infty). \tag{2.6}$$

Ainsi, le domaine de $A$ n'est pas dense dans $X$, puisque $\overline{D(A)}=\{0_{\mathbb{R}}\}\times L^1(0,+\infty)\neq X$. On considère $F:\overline{D(A)}\to X$ l'opérateur défini par

$$F\begin{pmatrix}0_{\mathbb{R}}\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\exp(-\int_0^{+\infty}\sigma(a)\varphi(a)da)\int_0^{+\infty}\beta(a)\varphi(a)da\\ -\int_0^{+\infty}\kappa(a)\varphi(a)da\chi\varphi\end{pmatrix}.$$

La première composante de l'application $F$ est à rapprocher de la condition de bord non linéaire et permet ainsi de traiter ce type de condition de bord. Enfin, en identifiant $u(t,.)$ et $v(t)=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{R}}\\ u(t,.)\end{pmatrix}$, on peut réécrire le système (1.4) comme un problème de Cauchy abstrait

$$\frac{dv(t)}{dt}=Av(t)+F(v(t))\text{ pour } t\geqslant 0,\ \text{avec } v(0)=\begin{pmatrix}0\\ u_0\end{pmatrix}\in\overline{D(A)}. \tag{2.7}$$

L'application $F$ étant à valeur dans $X$ (i.e. $F\left(\overline{D(A)}\right)\nsubseteqq\overline{D(A)}$), on ne peut pas utiliser la théorie classique pour les problèmes semi-linéaires. Cependant, comme dans la théorie semi-linéaire classique, on va commencer par étudier le problème de Cauchy non homogène suivant pour un certain $f\in L^1((0,\tau),X)$

$$\frac{dv(t)}{dt}=Av(t)+f(t)\text{ pour } t\geqslant 0,\ \text{avec } v(0)=x\in\overline{D(A)}. \tag{2.8}$$

**Definition 2.1.** On dira que $v \in C([0,\tau], X)$ est une *solution intégrée* du problème de Cauchy (2.8) si

$$\int_0^t v(s)ds \in D(A), \forall t \in [0,\tau],$$

et si

$$v(t) = x + A\int_0^t v(s)ds + \int_0^t f(s)ds, \forall t \in [0,\tau].$$

L'existence de solutions intégrées a été, tout d'abord, étudiée par Da Prato et Sinestrari [12] en utilisant des idées de la théorie des sommes d'opérateurs commutatifs. Cette étude a été menée dans le cas où $A$ est un *opérateur de Hille-Yosida*, c'est à dire qu'il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$, telles que $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$, l'ensemble résolvent de $A$, et

$$\left\|(\lambda I - A)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \forall \lambda > \omega. \tag{2.9}$$

Ici, pour l'opérateur $A$ défini par (2.5)-(2.6), on a $(0, +\infty) \subset \rho(A)$, et pour chaque $\lambda > 0$, on a

$$\begin{array}{l}(\lambda I - A)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow \varphi(a) = e^{-\int_0^a \mu(r)dr}\alpha + \int_0^a e^{-\int_s^a \mu(r)dr}\psi(s)ds.\end{array}$$

Ceci permet de voir que l'opérateur $A$ défini en (2.5)-(2.6) est un opérateur de Hille-Yosida.

Pour étudier (2.8) avec un opérateur $A$ de Hille-Yosida à domaine non dense, on considère tout d'abord $A_0$, la part de $A$ dans $\overline{D(A)}$, c'est à dire l'opérateur défini par

$$A_0x = Ax,\ \forall x \in D(A_0),\ \ D(A_0) = \left\{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\right\}.$$

Cet opérateur se révèle être à domaine dense dans $\overline{D(A)}$ et est le générateur infinitésimal d' un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $\{T_{A_0}(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur $\overline{D(A)}$. Commençons par observer que $t \to T_{A_0}(t)x$ est une solution du problème de Cauchy

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) \text{ pour } t \geqslant 0, \text{ avec } v(0) = x \in \overline{D(A)},$$

c'est à dire (voir Pazy [47]) que

$$\int_0^t T_{A_0}(s)xds \in D(A_0), \forall t \geqslant 0,$$

et

$$T_{A_0}(t)x = x + A\int_0^t T_{A_0}(s)xds, \forall t \geqslant 0.$$

Ici, on a une formule explicite du semi-groupe qui est donnée par

$$T_{A_0}(t)\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \widehat{T}_{A_0}(t)\varphi\end{pmatrix}$$

où

$$\widehat{T}_{A_0}(t)\,(\varphi)\,(a) = \begin{cases} e^{-\int_{a-t}^{a}\mu(s)ds}\varphi(a-t), & \text{si } a-t \geqslant 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $u(t,a) = \widehat{T}_{A_0}(t)\,(u_0)\,(a)$ est la solution intégrée le long des caractéristiques du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u(t,a), \\ u(t,0) = 0, \\ u(0,.) = u_0 \in L^1_+\left((0,+\infty),\mathbb{R}\right). \end{cases}$$

L'opérateur $A$ est alors le générateur infinitésimal (au sens de Thieme [59]) de $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$, un semi-groupe intégré d'opérateurs linéaires bornés sur $X$, et qui est défini par

$$S_A(t) = (\lambda I - A_0)\int_0^t T_{A_0}(s)ds\,(\lambda I - A)^{-1},$$

pour chaque $t \geqslant 0$ et chaque $\lambda > 0$. On peut alors montrer que l'application $t \to S_A(t)x$ est la solution intégrée du problème de Cauchy

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + x \text{ pour } t \geqslant 0, \text{ avec } v(0) = 0 \in \overline{D(A)}.$$

Rappelons ici la définition d'un semi-groupe intégré ansi que celle de son générateur.

**Definition 2.2.** Soit $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur $(X, \|\ \|)$ un espace de Banach. On dira que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un *semi-groupe intégré* si et seulement si

(i) $S(0) = 0$ ;
(ii) Pour chaque $x \in X$, l'application $t \to S(t)x$ est continue sur $[0,\infty)$ ;
(iii) Pour chaque $s,t \geqslant 0$ on a $S(s)S(t) = \int_0^s (S(r+t) - S(r))\,dr$.

On dira que le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est **non dégénéré** si de plus

$$S(t)x = 0,\ \ \forall t \geqslant 0\ \ \Rightarrow x = 0.$$

**Definition 2.3.** Soit $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe intégré non dégénéré sur un espace de Banach $(X, \|\ \|)$. On dira qu'un operateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ est le *générateur* de $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ si et seulement si

$$x \in D(A),\ \ y = Ax \ \ \Leftrightarrow\ \ S(t)x - tx = \int_0^t S(s)yds,\ \ \forall t \geqslant 0.$$

Si on note $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} \in X$ et si on pose

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u(t,.) \end{pmatrix} = S_A(t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix}, \forall t \geqslant 0,$$

alors $u(t,.)$ est la solution intégrée le long des caractéristiques du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u(t,a) + \psi(a), \\ u(t,0) = \alpha, \\ u(0,.) = 0 \in L^1_+\left((0,+\infty),\mathbb{R}\right). \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$S_A(t)\begin{pmatrix}\alpha\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ L(t)\alpha\end{pmatrix}+\int_0^t T_{A_0}(s)\begin{pmatrix}0\\ \psi\end{pmatrix}ds$$

où l'on a posé

$$L(t)\alpha=\begin{cases} e^{-\int_0^a \mu(s)ds}\alpha \text{ si } t-a\geqslant 0\\ 0, \text{ sinon.}\end{cases}$$

Pour obtenir une solution intégrée du problème de Cauchy non-homogène (2.8), on considère l'opérateur de convolution

$$\left(S_A * f\right)(t)=\int_0^t S_A(t-s)f(s)ds$$

pour chaque $t\in[0,\tau]$ et pour chaque $f\in L^1\left((0,\tau),X\right)$. Dans le cas où $A$ est un opérateur de Hille-Yosida, on montre que l'application $t\rightarrow S_A(t)$ est localement Lipschitzienne de $[0,+\infty)$ dans $\mathcal{L}(X)$. En utilisant cette propriété, et le fait que l'opérateur $A$ est fermé, on montre (voir Kellermann et Hieber [31]) que l'application $t\rightarrow\left(S_A*f\right)(t)$ appartient à $C^1\left([0,\tau],X\right)\cap C\left([0,\tau],D(A)\right)$. De plus si on pose $u(t):=\frac{d}{dt}\left(S_A*f\right)(t)$, alors c'est une solution intégrée de (2.8) avec $x=0$, c'est-à-dire

$$u(t)=A\int_0^t u(s)ds+\int_0^t f(s)ds \text{ pour chaque } t\in[0,\tau].$$

Ceci nous permet alors, par superposition, d'étendre la formule de variation de la constante usuelle, en considérant

$$u(t)=T_{A_0}(t)x+\frac{d}{dt}\left(S_A*f\right)(t),\forall t\in[0,\tau],$$

qui est l'unique solution intégrée du problème de Cauchy non homogène (2.8) (voir Thieme [59]). On a enfin l'analogue de l'estimation pour le cas à domaine dense

$$\|u(t)\|\leqslant Me^{\omega t}\|x\|+M\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f(s)\|\,ds,\forall t\in[0,\tau],$$

où les constantes $M$ et $\omega$ sont les constantes introduites dans (2.9).

Nous renvoyons a Arendt [1, 2], Kellermann et Hieber [31], Neubrander [46], Thieme [59] pour plus de résultats sur les semi-groupes intégrés. Nous renvoyons aussi aux livres de Xiao et Liang [66], Arendt et al. [3] pour un bon survol sur ces questions.

Si on ne s'intéresse qu'a l'existence et l'unicité, et la stabilité des états d'équilibres, cette approche ne donne pas plus de résultats que ceux déjà connus par les méthodes antérieures basées sur les équations de Volterra. L'aspect le plus intéressant concernant cette approche est qu'elle fournit une formule de variation de la constante. Cette formulation permet de traiter des équations semi-linéaires, de problèmes de perturbations et de théorie spectrale mais permet également de construire une théorie de la variété centrale (voir Magal et Ruan [40]). Ces résultats s'appliquent, en particulier, aux modèles structurés en âge, et fournissent des résultats de bifurcation de Hopf. Nous renvoyons par exemple à [40, Chapitre 6] pour un exemple de bifurcation de Hopf pour un système d'équations structurées en âge.

Mentionnons enfin que lorsque l'on considère un modèle structuré en âge dans $L^p(0,+\infty)$ avec $p \in (1,+\infty)$, l'opérateur $A$ n'est plus un opérateur de Hille-Yosida. Nous renvoyons pour cela aux résultats de Magal et Ruan [37, 39, 40] et à ceux de Thieme [60] pour une théorie des semi-groupes intégrés qui entre dans ce cadre. Mentionnons de plus que l'utilisation des semi-groupes intégrés ne se limite pas aux équations structurées en âge. Ils trouvent bien d'autres applications, comme par exemple, dans le contexte des problèmes paraboliques (voir Ducrot, Magal et Prevost [14]).

Dans le cas où l'opérateur $A$ est de Hille-Yosida, et en particulier pour les modèles structurés en âge dans $L^1$, la théorie des semi-groupes d'extrapolation s'applique (voir Thieme [59], Engel et Nagel [15]) (voir également Rhandi [50], et Rhandi et Schnaubelt [51] plus de résultats sur le sujet).

## 3. Exemples de bifurcation de Hopf

Nous allons donner ici deux exemples de bifurcation de Hopf. Une première illustration concerne un cas particulier du système (1.4). La seconde illustration provient d'un problème épidémique concernant la propagation de la grippe.

Soient $\mu > 0$ et $\alpha > 0$, deux paramètres. Nous considérons le cas particulier suivant du système (1.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial a} = -\mu u(t,a), \text{ pour } t \geqslant 0,\ a \geqslant 0, \\ u(t,0) = \alpha \exp(-\int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da) \int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da, \\ u(0,.) = u_0 \in L^1_+((0,+\infty),\mathbb{R}) \end{array} \right. \tag{3.10}$$

avec

$$\beta(a) = \left\{ \begin{array}{l} (a-\tau)^n e^{-\sigma a}, \text{ si } a \geqslant \tau, \\ 0, \text{ si } a \leqslant \tau. \end{array} \right.$$

On considère, ici, $\alpha$ (l'intensité des naissances) comme un paramètre de bifurcation du système. Posons

$$\alpha_0 := \left( \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\mu a} da \right)^{-1}.$$

Lorsque $\alpha > \alpha_0$, le système (3.10) admet un unique état d'équilibre positif

$$\overline{u}_\alpha(a) = e^{-\mu a}\overline{B}_\alpha \text{ où } \overline{B}_\alpha = \frac{\ln\left(\alpha \int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\mu a}da\right)}{\int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\mu a}da}.$$

En étudiant les propriétés spectrales de l'équation linéarisée autour de $\overline{u}_\alpha$, ainsi que les conditions de transversalité usuelles aux points de bifurcation on obtient le résultat suivant (voir Magal et Ruan [40, Chapitre 6]) :

**Théorème 3.1. (Bifurcation de Hopf)** *Soit $\tau > 0$. Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un suite croissante $\{\alpha_k\}_{k\geqslant 1} \subset (\alpha_0,+\infty)$, telle que le modèle (3.10) admet une bifurcation de Hopf en $u = \overline{u}_{\alpha_k}$. En particulier, une solution périodique non triviale bifurque de l'équilibre $u = \overline{u}_{\alpha_k}$ lorsque $\alpha = \alpha_k$.*

Numériquement (Cf. Figure 1), lorsque $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, toutes les solutions positives du système (3.10) convergent vers $\overline{u}_\alpha$, et lorsque $\alpha$ passe par $\alpha_1$ des solutions périodiques non amorties apparaissent.

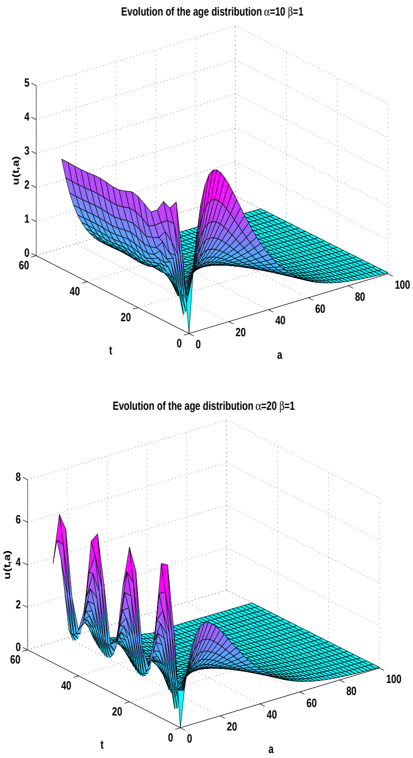



FIG. 1: En modifiant la valeur du paramètre $\alpha$, on passe d'une situation où la solution converge vers une distribution stationnaire, à une situation où la solution converge vers une orbite périodique.

Une seconde illustration est donnée à travers le modèle épidémique suivant (voir [41] pour plus de détails) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial s(t,a)}{\partial a} = -\delta I(t) 1_{[\rho,+\infty)}(a) s(t,a) \text{ pour } t \geqslant 0,\ a \geqslant 0, \\ s(t,0) = \nu I(t), \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \delta I(t) \int_\rho^{+\infty} s(t,a) da - \nu I(t), \\ s(0,.) = s_0 \in L^1_+ ((0,+\infty), \mathbb{R}) \text{ et } I(0) = I_0 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ce modèle permet d'étudier l'influence de la perte d'immunité à un variant de la grippe qui est ici modélisé par le terme $\chi(a)$. L'étude des bifurcations de Hopf pour cette exemple a été développé dans [41]. Ceci permet, en particulier, de caractériser l'apparition d'oscillations non amorties.

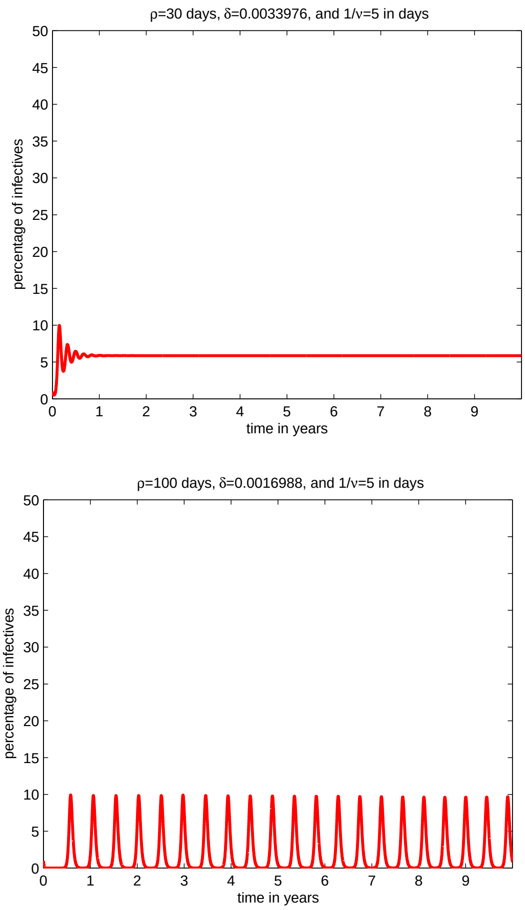



FIG. 2: On modifie les paramètres $\rho$ et $\delta$ et on passe d'un régime convergent avec oscillations amorties vers un régime à oscillations non amorties par bifurcation de Hopf.

## 4. Conclusion

En conclusion de cette note, mentionnons que la théorie des semi-groupes intégrés a de très vastes applications allant des équations différentielles à retard, équations paraboliques avec retard ou encore avec des conditions de bords non linéaires, non locales et eventuellement non bornées, ou encore des équations structurées en âge (avec retard, diffusion,...). Rappelons que, en général, cette théorie n'apporte pas ou peu d'informations supplémentaires concernant l'existence de semiflot ou la stabilité des solutions stationaires. En revanche, elle permet, à travers la formule de variation des constantes, de construire des variétés invariantes par le semiflot. Ceci permet de développer une théorie de la bifurcation. De plus, d'autres outils classiques peuvent être construits, comme par exemple, les formes normales (voir Liu et al. [28]) qui permettent, en particulier, d'étudier la stabilité des solutions bifurquées mais aussi des bifurcations de codimensions supérieures (Bifurcation Bogdanov-Takens par exemple). Ainsi, l'utilisation des semi-groupes intégrés permet d'obtenir des résultats relativement fin sur la dynamique de certaines équations d'évolution qui n'entrent pas dans le cadre de la théorie classique des semi-groupes.

## 5. Références

[1] W. Arendt, Resolvent positive operators, *Proc. London Math. Soc.* **54** (1987), 321-349.
[2] W. Arendt, Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, *Israel J. Math.* **59** (1987), 327-352.
[3] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhauser, Basel, 2001.
[4] O. Arino, A survey of structured cell populations, *Acta Biotheoretica* **43** (1995), 3-25.
[5] S. Anita, *Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
[6] R. Bellman and K. Cooke, *Differential Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.
[7] S. Bertoni, Periodic solutions for non-linear equations of structure populations, *J. Math. Anal. Appl.* **220** (1998), 250-267.
[8] T. Cazenave et A. Haraux, *Introduction aux problème d'évolution semi-linéaires*, SMAI, Paris, 1990.
[9] J. Chu, A. Ducrot, P. Magal and S. Ruan, Hopf bifurcation in a size structured population dynamic model with random growth, *J. Differential Equations* **247** (2009), 956-1000.
[10] J. M. Cushing, Bifurcation of time periodic solutions of the McKendrick equations with applications to population dynamics, *Comput. Math. Appl.* **9** (1983), 459-478.
[11] J. Cushing, *An Introduction to Structured Population Dynamics*, SIAM, Philadelphia, 1998.
[12] G. Da Prato and E. Sinestrari, Differential operators with non-dense domain, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **14** (1987), 285-344.
[13] O. Diekmann and S. A. van Gils, Invariant manifold for Volterra integral equations of convolution type, *J. Differential Equations* **54** (1984), 139-180.
[14] A. Ducrot, P. Magal and K. Prevost, Integrated semigroups and parabolic equations. Part I : Linear perburbation of almost sectorial operators, *J. Evolution Equations* **10** (2010), 263291.
[15] K.-J. Engel and R. Nagel, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
[16] W. Feller, On the integral equation of renewal theory, *Ann. Math. Stat.* **12** (1941), 243-267.
[17] J.-P. Françoise, *Oscillations en Biologie : Analyse Qualitative et Modeles*, Springer, Berlin, 2009.
[18] M. Gyllenberg and G. F. Webb, A nonlinear structured population model of tumor growth with quiescence, *J. Math. Biol.* **28** (1990), 671-694.
[19] M.E. Gurtin, A system of equations for age dependent population diffusion, *J. Theor. Biol.* **40** (1973), 389-392.
[20] M. Gurtin and R. MacCamy, Nonlinear age-dependent population dynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **54** (1974), 281-300.
[21] J. K. Hale and H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
[22] B.D. Hassard, N.D. Kazarino and Y.-H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Birfurcation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
[23] H.W. Hethcote, The mathematics of infectious diseases, *SIAM Review* **42** (2000), 599-653.
[24] F. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics, and Epidemics*, SIAM, Philadelphia, 1975.
[25] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age-structured Population Dynamics*, Giadini Editori e stampatori, Pisa 1994.

[26] H. Inaba, *Mathematical Models for Demography and Epidemics*, University of Tokyo Press, Tokyo, 2002.
[27] M. Langlais, On a linear age-dependent population diffusion model. *Quart. Appl. Math.* **40** (1983), 447-460.
[28] Z. Liu, P. Magal, S. Ruan and J. Wu, Normal forms for non-densely defined Cauchy problems (submitted).
[29] A. Lotka, The stability of the normal age-distribution, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **8** (1922), 339-345.
[30] A. Lotka, On an integral equation in population analysis, *Ann. Math. Stat.* **10** (1939), 1-35.
[31] H. Kellermann and M. Hieber, Integrated semigroups, *J. Funct. Anal.* **84** (1989), 160-180.
[32] W. Kermack and A. McKendrick, Contributions to the mathematical theory of epidemics III. Further studies on the problem of endemicity, *Proc. R. Soc. A* **141** (1943), 94-122.
[33] T. Kostova and J. Li, Oscillations and stability due to juvenile competitive effects on adult fertility, *Comput. Math. Appl.* **32** (1996) (11), 57-70.
[34] K. Kubo and M. Langlais, Periodic solutions for a population dynamics problem with age-dependence and spatial structure, *J. Math. Biol.* **29** (1991), 363-378.
[35] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory,* Springer, New York, 1998.
[36] P. Magal, Compact attractors for time-periodic age structured population models, *Electron. J. Differential Equations* **2001**(2001), 1-35.
[37] P. Magal and S. Ruan, On Integrated semigroups and age structured models in $L^p$ spaces, *Differential Integral Equations* **20** (2007), 197-139.
[38] P. Magal and Ruan (edts), *Structured Population Models in Biology and Epidemiology*, Lecture Notes in Mathematics Vol. **1936**, Springer, Berlin, 2008.
[39] P. Magal and S. Ruan, On semilinear Cauchy problems with non-dense domain, *Adv. Differential Equations* **14** (2009), 1041-1084.
[40] P. Magal and S. Ruan, Center manifolds for semilinear equations with non-dense domain and applications on Hopf bifurcation in age structured models, *Mem. Amer. Math. Soc.* **202** (2009), No. 951.
[41] P. Magal and S. Ruan, Sustained oscillations in an evolutionary epidemiological model of influenza A drift, *Proc. R. Soc. A*, **466** (2010), 965-992.
[42] P. Magal and H. R. Thieme, Eventual compactness for a semiflow generated by an age-structured models, *Comm. Pure Appl. Anal.* **3** (2004), 695-727.
[43] R. H. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
[44] J.A.J. Metz and O. Diekmann, *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, Lect. Notes Biomath. Vol. **68**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[45] A. McKendrick, Applications of mathematics to medical problems, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **44** (1926), 98-130.
[46] F. Neubrander, Integrated semigroups and their application to the abstract Cauchy problem, *Pac. J. Math.* **135** (1988), 111-155.
[47] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
[48] B. Perthame, *Transport Equations in Biology*. Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2007.
[49] J. Prüss, On the qualitative behavior of populations with age-specific interactions, *Comput. Math. Appl.* **9** (1983), 327-339.
[50] A. Rhandi, Positivity and stability for a population equation with diffusion on $L^1$, *Positivity* **2** (1998), 101-113.
[51] A. Rhandi, R. Schnaubelt, Asymptotic behaviour of a non-autonomous population equation with diffusion in $L^1$, *Disc. Cont. Dyn. Sys.* **5** (1999), 663-683.
[52] W.E. Ricker, Stock and recruitment, *J. Fish. Res. Board Can.* **11** (1954), 559-623.
[53] W.E. Ricker, Computation and interpretation of biological statistics of fish populations, *Bull. Fish. Res. Board Can.* **191** (1975), 353-366.
[54] W. M. Ruess, Flow invariance for nonlinear partial differential delay equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 4367-4403.
[55] I. E. Segal, Nonlinear semigroups, *Ann. Math.* **78** (1963), 339-364.

[56] F. Sharpe and A. Lotka, A problem in age-distribution, *Philosophical Magazine* **6** (1911), 435-438.

[57] J. H. Swart, Hopf bifurcation and the stability of non-linear age-dependent population models, *Comput. Math. Appl.* **15** (1988), 555-564.

[58] H. R. Thieme, Semiflows generated by Lipschitz perturbations of non-densely defined operators, *Differential Integral Equations* **3** (1990), 1035-1066.

[59] H. R. Thieme, « Integrated semigroups » and integrated solutions to abstract Cauchy problems, *J. Math. Anal. Appl.* **152** (1990), 416-447.

[60] H. R. Thieme, Differentiability of convolutions, integrated semigroups of bounded semivariation, and the inhomogeneous Cauchy problem, *J. Evolution Equations* **8** (2008), 283-305.

[61] H. R. Thieme, *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

[62] A. Vanderbauwhede, Center manifold, normal forms and elementary bifurcations, *Dynamics Reported*, ed. by U. Kirchgraber and H. O. Walther, Vol. **2**, John Wiley & Sons, 1989, 89-169.

[63] A. Vanderbauwhede and G. Iooss, Center manifold theory in infinite dimensions, *Dynamics Reported* (new series), ed. by C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber and H. O. Walther, Vol. **1**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 125-163.

[64] C. Walker, Positive equilibrium solutions for age and spatially structured population models, *SIAM J. Math. Anal.* **41** (2009), 1366-1387.

[65] G. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, New York, 1985.

[66] T.-J. Xiao and J. Liang, *The Cauchy Problem for Higher Order Abstract Differential Equations*, Lect. Notes Math. Vol. **1701**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

# Topologie, théorie des groupes et problèmes de décision

**célébration d'un article de Max Dehn de 1910**

Pierre de la Harpe[1]

Ce texte est une célébration de Max Dehn et un essai de mise en perspective de quelques-uns de ses résultats publiés au début des années 1910. Il a été rédigé à l'occasion d'une école d'hiver aux Diablerets du 7 au 12 mars 2010 :

*Geometry, topology and computation in groups,*
*100 years since Dehn's Decision Problems.*

## 1. Eléments biographiques

Max Dehn est né à Hambourg en 1878, et mort à Black Mountain (Caroline du Nord, U.S.A.) en 1952. Il fut étudiant de Hilbert à Göttingen en 1899 et acheva en 1900 une thèse sur les fondements de la géométrie.

En 1900 également, il résolut le *troisième problème de Hilbert*, en montrant que deux tétraèdres de même volume dans $\mathbf{R}^3$ ne sont pas nécessairement équidécomposables. Il en résulte que, contrairement à la théorie des aires des polygones dans $\mathbf{R}^2$, la théorie des volumes des polyèdres dans $\mathbf{R}^3$ doit reposer sur la notion de limite, ou sur son ancêtre qui est la méthode d'exhaustion d'Eudoxe (-408 – -355), Euclide ($\sim$ -325 – $\sim$ -265) et Archimède ($\sim$ -287 – -212). [Bien sûr, le sujet n'est pas clos ! [Zeem–02].]

Après un bref séjour comme assistant à Karlsruhe, Dehn fut privat-docent à Münster jusqu'en 1911 ; durant cette période, sous l'influence de Poul Heegaard et Henri Poincaré, il commença à s'intéresser à la topologie et à la théorie des groupes. En 1907, Dehn et Heegaard publièrent le panorama de l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* sur l'Analysis Situs [DeHe–07] ; ce texte contient une définition et une classification des surfaces du point de vue de la topologie combinatoire. Et c'est en 1910 que Dehn publia le premier des articles majeurs où apparaissent les *problèmes de décision*.

Dehn fut ensuite professeur assistant à Kiel (1911–13), professeur ordinaire à Breslau (1913–21), avec une interruption due au service armé (1915–18), et successeur de Bieberbach à Francfort (1922–35). Le séminaire d'histoire des mathématiques qu'il y dirigea semble avoir été un grand moment pour tous les participants [Sieg–64]. Il fut patron de thèse de

- Hugo Gieseking (1912), qui construisit une variété hyperbolique de dimension 3, non orientable, dont Thurston nota que le revêtement orientable est isométrique au complément d'un nœud de huit, avec sa structure de variété hyperbolique (re ?)découverte en 1975 par Robert Riley (voir par exemple [Miln–82]) ;
- Jakob Nielsen (1913), l'un des fondateurs de la théorie combinatoire des groupes, dont les travaux sur les difféomorphismes de surfaces sont de grande importance [Thur–76] ;

[1] Section de mathématiques, Université de Genève.

- Ott-Heinrich Keller (1929), dont la thèse sur les pavages de $\mathbf{R}^n$ par des cubes contient une conjecture aux nombreuses ramifications, autant que je sache toujours ouverte lorsque $n = 7$ (voir le chapitre 7 de [Zong–05]) ; Keller formula aussi la « conjecture du jacobien », chère à Abhyankar ;

- Wilhelm Magnus (1931), qui démontra dans sa thèse le « Freiheitssatz » formulé par Dehn, sur les groupes à un relateur, et qui s'illustra plus tard dans de multiples domaines [Magn–94] ;

- Ruth Moufang (1931), dont la thèse portait sur la géométrie projective et à qui on doit des contributions majeures sur les structures algébriques non associatives. Pour illustration : dans sa construction du « monstre » (le plus grand groupe fini simple sporadique), Conway a utilisé une « Moufang loop » construite par Parker ;

liste à laquelle le « Mathematics Genealogy Project » ajoute Herbert Fuss (1913), Wilhelm Schwan (1923), Max Frommer (1928), et Joseph Engel (1949).

En été 1935, Dehn fut démis de son poste pour raison d'ascendance juive. Il continua à (sur)vivre en Allemagne jusqu'en 1939, avant de s'échapper vers les Etats-Unis via Copenhague, Trondheim, la Finlande, le Transsibérien et le Japon. Après divers postes de courtes durées, il termina sa carrière au petit collège de Black Mountain, dans l'est des Etats-Unis (1945–52).

Il y fut l'unique professeur de mathématiques ; il y enseigna aussi la philosophie, le latin et le grec. Ce collège, fondé en 1933, avait des objectifs pédagogiques originaux et ambitieux[2] qui plurent à Dehn. Son salaire mensuel initial était de 40 \$, plus logé, nourri, blanchi. (C'était mieux que l'offre initiale, qui était de 20 \$ ; mais Siegel raconte qu'il y eut des périodes pendant lesquelles l'argent de poche, en complément du gîte et du couvert, était limité à 5 \$ par mois.) Le collège avait des problèmes financiers et ferma en 1956. Dehn y avait eu de longues conversations avec un collègue architecte, aujourd'hui célèbre pour ses constructions utilisant des polyèdres réguliers : Richard Buckminster Fuller [BuFu]. Dehn était aussi naturaliste amateur et randonneur enthousiaste [Sher–94].

Pour en lire davantage sur la vie et la production mathématique de Dehn, voir [Magn–78], [Stil–99] et [Daws–02].

## 2. Les trois problèmes de décision de Dehn

Dans trois articles publiés de 1910 à 1912, Max Dehn a formulé et étudié les trois *problèmes de décision* suivants qui sont fondamentaux en théorie combinatoire des groupes.

(WP) **Le problème du mot** : pour un groupe $G$ engendré par des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$, *trouver une méthode qui permette de décider en un nombre fini de pas si deux produits des opérations $s_i$ de $G$ sont égaux, en particulier si un tel produit d'opérations est égal à l'identité.*

(CP) **Le problème de conjugaison** : pour $G$ et les $s_i$ comme ci-dessus, *trouver une méthode qui permette de décider en un nombre fini de pas, étant donné deux substitutions $S$ et $T$ de $G$, s'il existe une troisième substitution $U$ de $G$ telle que $S = UTU^{-1}$, c'est-à-dire si $S$ est un conjugué de $T$.*

[2] « The college sought to educate the whole student – head, heart and hand – through studies, the experience of living in a small community and manual work. » Ceci est bien plus sur le site `http://www.bmcproject.org/index.htm`

Ces deux problèmes sont formulés dans [Dehn–10], ici traduits de la version anglaise, page 95 de [DeSt–87]. La formulation de [Dehn–11] est légèrement différente.

(IsP) **Le problème d'isomorphisme** : *étant donné deux groupes, décider s'ils sont isomorphes ou non (et de plus si une correspondance donnée entre les générateurs d'un groupe et les éléments de l'autre est ou n'est pas un isomorphisme).*

Problème formulé dans [Dehn–11], page 134 de [DeSt–87].

Dans une formulation concise, reprise de [Mill–92] :

- $\mathrm{WP}(G) = (?w \in G)(w =_G 1)$,
- $\mathrm{CP}(G) = (?u, v \in G)(\exists x \in G)(x^{-1}ux =_G v)$,
- $\mathrm{IsP} = (?\pi_1, \pi_2$ présentations finies$)(gp(\pi_1) \approx gp(\pi_2))$.

Ici, « ?... » est une espèce de quantificateur, signifiant par exemple pour $WP(G)$, « le problème de décider, pour un $w \in G$ arbitraire, si oui ou non $w =_G 1$ ». Les deux premiers problèmes de décision de Dehn ont des formulations topologiques, et le troisième est également lié à une question topologique :

($\mathrm{WP}_{\mathrm{top}}$) dans un espace topologique de groupe fondamental $G$, est-ce qu'un lacet « donné » est contractile sur un point ?

($\mathrm{CP}_{\mathrm{top}}$) est-ce que deux lacets « donnés » sont librement homotopes ?

($\mathrm{IsP}_{\mathrm{top}}$) est-ce que deux espaces « donnés » sont homotopiquement équivalents ?

(les guillemets parce que nous n'allons pas essayer de préciser ce que « donné » veut dire).

Quelques premières remarques :

(i) A priori, la réponse au problème du mot dépend de la présentation considérée du groupe. Toutefois, si $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$ et $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ sont deux présentations finies d'un même groupe $G$, un argument simple montre *qu'il existe* « une méthode qui permette de décider ... » pour une présentation si et seulement s'il en existe une pour l'autre. Il peut néanmoins être plus délicat *d'exhiber* une méthode pour $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ à partir d'une méthode pour $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$.

Considérons par exemple un groupe fini $G$, et sa table de multiplication vue comme une présentation $\langle G \mid R_{\mathrm{mult}} \rangle$, où $R_{\mathrm{mult}}$ désigne l'ensemble des relations $abc^{-1} = 1$, avec $a, b \in G$ et $c$ le produit $ab$ ; il est tout à fait banal d'écrire un algorithme résolvant le problème du mot pour cette présentation. Cela l'est en revanche beaucoup moins pour une présentation arbitraire du même groupe fini $G$. L'une des méthodes utilisables remonte à un article de Todd et Coxeter [ToCo–36] ; voir aussi [John–80], [Cann–02] et [HoEO–05].

Des remarques analogues valent pour le problème de conjugaison.

(ii) Si le problème de conjugaison est résoluble pour un groupe $G$, alors le problème du mot l'est aussi, puisqu'un élément de $G$ est égal à l'identité si et seulement s'il est conjugué à l'identité. La réciproque n'est pas vraie.

(iii) Voici un exemple à propos du problème d'isomorphisme : le groupe donné par la présentation

$$\langle s, t \mid s^3t, t^3, s^4 \rangle$$

est le groupe à un élément. Ce n'est peut-être pas tout à fait évident, mais c'est vrai : $s = ss^3t = s^4t = t$ et $1 = s^3tt^{-3} = s = t$.

(iv) Les articles de Dehn sont bien antérieurs aux définitions précises de mots comme « algorithmes » ou « procédés » ou « méthodes » ; en fait, c'est un des grands succès de la logique mathématique que d'avoir donné un sens précis aux problèmes de Dehn (Post, Church, Turing, Gödel, ... dans les années 1930).

Ce n'est que dans les années 1950 qu'il fut démontré que ces problèmes sont insolubles pour certains groupes de présentation finie : Piotr Sergueïevitch Novikov[3] démontra que le problème de conjugaison est insoluble (1954), Boone et Novikov que le problème du mot est insoluble (1955), et Adjan et Rabin que le problème d'isomorphisme est insoluble (1958). Fridman montra que le problème du mot peut être résoluble et le problème de conjugaison insoluble pour le même groupe (1960) ; Miller (1971) a montré que c'est même le cas pour un groupe qui s'insère dans une suite exacte courte à noyau et quotient libres (théorème 4.8 de [Mill–92]). Pour en savoir plus, voir [Mill–71], [Mill–92] et [Stil–82].

(v) Les problèmes de décision furent formulés par Dehn dans le contexte de la *topologie de dimension* 3 et de la *théorie des nœuds*[4]. Il faut garder en tête que la topologie algébrique était de création récente : on peut la dater de 1895, année de parution de l'*Analysis situs* [Poin–95][5].

L'intérêt de Dehn pour la topologie avait peut-être été éveillé (entre autres) par sa résolution d'un « exercice » que lui avait donné Hilbert, c'est-à-dire par sa démonstration du théorème de Jordan pour les polygones plans. Ce travail de Dehn ne fut pas publié [Gugg–77].

Dehn avait espéré résoudre la *conjecture de Poincaré*, concernant les variétés closes de dimension 3 à groupe fondamental trivial. Plus précisément, le 12 février 1908, Dehn avait envoyé à Hilbert un article contenant un « résultat » sur $\mathbf{R}^3$ équivalent à la conjecture de Poincaré, article soumis pour publication dans les « Göttinger Nachrichten ». Mais Tietze signala une erreur dans l'argument de Dehn, qui retira son article par une lettre du 16 avril de la même année. (D'après la page 388 de [Eppl–95].) Ainsi Dehn fut-il « la première victime de la conjecture de Poincaré » (selon une formule de K. Volkert, 1996).

[3] À ne pas confondre avec son fils Sergueï Petrovitch Novikov, lauréat de la médaille Fields en 1970, pour des travaux portant entre autres sur le cobordisme, les feuilletages, et l'invariance topologique des classes de Pontrjagin d'une variété différentiable.

[4] Dès 1867, le physicien écossais Peter Guthrie Tait avait commencé à dresser des tables de nœuds ; mais il n'y a pas de topologie dans les travaux de Tait, et a fortiori pas de groupes de nœuds. La théorie des nœuds intervient aussi dans l'étude des singularités isolées des fonctions de deux variables complexes, comme cela est apparu vers 1905 dans les recherches de Wirtinger ; celles-ci n'eurent qu'une diffusion limitée à l'époque. Ce n'est que bien plus tard que la théorie des nœuds devint « respectable » pour cette raison, lorsque les recherches de Wirtinger furent reprises par Brauner (dans son habilitation de 1928 sous la supervision de Wirtinger), Kähler, Zariski et Burau ; voir [Eppl–95], déjà cité, ou les pages 318-320 de [Eppl–99a]. Ce lien entre nœuds et singularités ne semble pas avoir joué de rôle dans les motivations de Dehn.

[5] Plus une *Note* préliminaire de 1892 et les cinq *compléments* publiés entre 1899 et 1904 [Poin–04], notamment suite à la thèse de Heegaard (1898) qui mettait en évidence une erreur de Poincaré (oubli de la partie de torsion des groupes d'homologie). On peut souligner la rapidité d'une certaine évolution : les motivations explicites de Poincaré étaient liées à l'analyse : courbes définies par des équations différentielles, problème des trois corps, fonctions multi-valuées à deux variables, périodes des intégrales multiples, calculs de perturbation, ... ; mais la topologie est très vite devenue une discipline autonome de l'analyse, c'est flagrant dans les articles de Dehn.

(vi) Les lecteurs au courant des articles de l'époque notent que le problème d'isomorphisme avait déjà été formulé par Tietze en 1908, mais sans que Tietze lui donne l'importance que Dehn donna à ses formulations.

Bien que Tietze et Dehn comptent tout deux parmi les fondateurs de la topologie, et en particulier de la théorie des nœuds qui donna à Dehn l'occasion de formuler ses problèmes de décision, les influences qu'ils eurent chacun sur l'autre à cette époque semblent avoir été limitées (nonobstant ce qui est rapporté plus haut). Tietze, étudiant à Vienne de 1898 jusqu'à son habilitation en 1908 (avec une année à Munich), était sous l'influence de Wirtinger, et par lui dans le sillage de Klein, alors que Dehn, étudiant à Göttingen, était marqué par l'influence directe et bien différente de Hilbert. Voir [Eppl–95], en particulier la page 395.

(vii) En théorie des groupes, la formulation des problèmes de décision, due à Dehn, fut un moment clé. Mais ce ne sont pas les seuls problèmes de décision qui puissent être formulés ! Ne mentionnons ici que le dixième problème de Hilbert : *De la possibilité de résoudre une équation diophantienne. On donne une équation de Diophante à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : on demande de trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels.* La réponse, négative, résulte des travaux de Martin Davis, Yuri Matiyasevich, Hilary Putnam et Julia Robinson ; le coup de grâce fut donné par Matiyasevich en 1970.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Toujours est-il que, peu avant 1910, Dehn maîtrisait aussi bien que quiconque à l'époque des sujets que nous énumérons comme suit ; ceci dans le vocabulaire d'aujourd'hui, donc en termes parfaitement anachroniques.

(♠) La notion de *présentation d'un groupe*

$$G = \langle S \mid R \rangle = \langle s_1, \ldots \mid r_1, \ldots \rangle$$

donné comme quotient $G = F/R$ d'un groupe libre $F$ de base $S = \{s_1, \ldots\}$ par le sous-groupe normal engendré par les « relations » $R = \{r_1, \ldots\}$. La notion fut précisée par Walther von Dyck (1882), suite à des travaux sur les groupes discontinus apparaissant en théorie des fonctions de variables complexes, dont ceux de son maître Felix Klein.

(♡) Le *groupe fondamental* d'un espace topologique, qui fut introduit par Poincaré en 1895 dans son *Analysis situs*[6]. En particulier, le groupe fondamental d'une variété compacte est un groupe de présentation finie, comme cela apparaît clairement dans l'habilitation de Tietze (1908) ; il en est de même pour le groupe fondamental d'un complexe simplicial fini (et même d'un CW-complexe fini).

[6] Chez Poincaré, la première définition *explicite* du groupe fondamental est en termes de revêtements [Note de 1892], et la seconde en termes de classes d'homotopie de lacets [Poin–95] ; de plus, on peut voir le groupe fondamental entre les lignes de [Poin–83], au sujet de l'uniformisation des surfaces de Riemann (merci à Etienne Ghys pour cette observation). Quelques détails de plus aux pages 374-376 de [Eppl–95]. Pour lire Dehn, il faut adopter le point de vue des classes de lacets.

($\diamondsuit$) En particulier, un *nœud, c'est-à-dire une courbe fermée simple $K$ dans l'espace usuel,* détermine un groupe $G_K$, le groupe fondamental du complémentaire du nœud.

On peut facilement écrire une présentation finie de $G_K$ en termes d'un diagramme plan $\mathcal{D}$ de $K$. On connaît ainsi la *présentation de Dehn*[7], dont les générateurs sont en bijection avec les composantes connexes bornées du complémentaire de $\mathcal{D}$ dans le plan et les relations en bijection avec les points doubles de $\mathcal{D}$ (voir par exemple l'appendice de [Kauf–83]), et la *présentation de Wirtinger*, qui remonte à un exposé de Wirtinger de 1905, et qu'on trouve dans presque tous les exposés de théorie des nœuds (par exemple au § 5 de [Rham–69] ou au chapitre 3 de [BuZi–85]). Même si l'exposé de Wirtinger est bien antérieur à l'article de Dehn, « apparemment, Dehn n'était pas conscient du résultat de Wirtinger » (citation de [Magn–78]).

À propos du problème d'isomorphisme, noter que deux diagrammes $D$, $D'$ d'un même nœud $K$ donnent en général lieu à des présentations distinctes $\pi_D$, $\pi_{D'}$ du même groupe $G_K$, et il peut être non banal d'écrire un argument combinatoire montrant qu'on peut transformer une présentation en l'autre. Plus généralement, il peut être bien difficile de distinguer « à l'oeil nu » si deux diagrammes $D$, $D'$ définissent ou non le même nœud, ou si les présentations correspondantes définissent ou non des groupes isomorphes. Par exemple, Tietze s'est amusé à dessiner deux diagrammes de nœuds $D$ et $D'$ à 48 (sauf erreur) croisements chacun, qui ont l'air identiques (ils se distinguent en un seul croisement), mais $D$ représente le nœud de trèfle et $D'$ le nœud trivial [Tiet–42]. J'imagine qu'il ne serait pas immédiat de décider par force brutale que les présentations correspondantes, à 48 générateurs et 48 relations, définissent deux groupes non isomorphes.

($\clubsuit$) Vers 1909-1910, Dehn avait donné et rédigé au moins deux chapitres de cours (non publiés de son vivant mais récemment parus en traduction anglaise dans [DeSt–87]), sur la théorie des groupes [Dehn–a] et la topologie des surfaces [Dehn–b]. Il en ressort entre autres que Dehn, comme d'ailleurs beaucoup de ses contemporains, était tout à fait à l'aise avec la *géométrie hyperbolique* (plane). En particulier, l'étude des « groupes fuchsiens » conduit à des pavages du plan hyperbolique par des polygones fondamentaux, pavages dont les graphes duaux sont précisément des « Dehn's Gruppenbilder » (ou « graphes de Cayley », voir ci-dessous le chapitre 4). Dans ce sens, les « Dehn's Gruppenbilder » doivent beaucoup plus à Dyck, Klein et Fricke qu'à Cayley. Voir les figures de [KlFr–90] et [FrKl–97] ; voir aussi les figures des chapitres XVIII et XIX de [Burn–11].

* * * * * * * * * * * * *

Le premier des articles majeurs de Dehn qui nous intéressent ici [Dehn–10] parut dans le premier cahier du volume 69 des *Mathematische Annalen*, « Ausgegeben am 23. Juni 1910 ». On y trouve les nouveautés suivantes ; dans la liste ci-dessous, (n) se réfère au chapitre n du présent texte, dont les chapitres n$^{bis}$ sont consacrés à certains développements plus récents.

(2) L'énoncé du problème du mot et du problème de conjugaison ;

[7] Si j'en crois ce qu'affirment les lecteurs plus perspicaces que moi, cette *présentation de Dehn* est expliquée au § 3 du chapitre II de [Dehn–10].

(3) le lemme de Dehn, et le critère de trivialité qui en découle pour les nœuds ;
(4) un diagramme de Cayley (ou plutôt de Dehn !) du groupe du nœud de trèfle ;
(5) une construction de 3-sphères d'homologie, dont l'une a un groupe fondamental fini non réduit à un élément ;
(7) tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un 2-complexe (et aussi d'une 4-variété close, voir le chapitre III de [Dehn–11]) ;

excusez du peu. À peine plus tard, Dehn publiera

(6) des algorithmes pour résoudre le problème du mot et le problème de conjugaison dans les groupes fondamentaux des surfaces orientables ; groupes sur lesquels Dehn considère la *métrique des mots* et note qu'elle peut remplacer avantageusement la métrique hyperbolique ;
(-) une démonstration du fait que les nœuds de trèfle gauche et droit ne sont pas isotopes (exposition de cette démonstration au début du chapitre 7 dans [Stil–93]) ;

voir [Dehn–11], [Dehn–12] et [Dehn–14]. De plus, ces articles contiennent plusieurs observations aujourd'hui « évidentes », mais importantes et à l'époque originales. Citons-en une, de l'introduction de [Dehn–11] : un groupe de présentation finie peut avoir des sous-groupes qui ne sont pas de type fini. L'exemple de Dehn, celui d'un groupe libre à deux générateurs $s_1, s_2$ et du sous-groupe normal engendré par $s_1$, est « évident » si on pense en termes de revêtements. Selon [Magn–78] (page 138), Dehn fut le premier à consigner cette observation.

Le mélange des genres ci-dessus est révélateur : le développement historique de la théorie combinatoire des groupes est inséparable de celui de la topologie des variétés de basse dimension, ce qui veut dire au sens large de dimension au plus 4, et très souvent, strictement, de dimension 3. Plus précisément, et comme l'écrit Stallings au tout début de [Stal–71] :

« The study of three-dimensional manifolds has often interacted with a certain stream of group theory, which is concerned with free groups, free products, finite presentations of groups, and similar combinatorial matters.

Thus Kneser's fundamental paper had latent implications toward Grushko's Theorem. »

Stallings fait allusion au théorème de Kneser sur la décomposition en somme connexe d'une 3-variété [Knes–29] et au théorème de Grushko sur les décompositions en produits libres des groupes de type fini (1940). Voir aussi ci-dessous l'énoncé (*), au chapitre 7.

## 3. De l'étude des nœuds aux problèmes de décision Le lemme de Dehn

Soit $K$ un *nœud*, c'est-à-dire une courbe fermée simple différentiable (ou PL) dans la sphère $\mathbf{S}^3$. Notons $V(K)$ un *voisinage tubulaire de $K$*, c'est-à-dire un tore solide $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ plongé dans $\mathbf{S}^3$ de telle sorte que l'image de $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ coïncide avec $K$, et $E(K) = \mathbf{S}^3 \smallsetminus \mathrm{Int}(V(K))$ *l'extérieur de $K$*, qui est une variété compacte dont le bord est le tore $\partial E(K) = \partial V(K)$. Le *groupe du nœud $K$*, noté $G_K$, est le groupe fondamental de $E(K)$. [On distingue l'extérieur du *complément* $\mathbf{S}^3 \smallsetminus K$, qui est une variété ouverte sans bord ; l'inclusion de l'extérieur dans le complément est une équivalence d'homotopie.]

Un *méridien de K* est une courbe fermée simple $m$ du tore $\partial E(K)$ qui borde un disque dans $V(K)$. On vérifie qu'une telle courbe est unique à isotopie près dans le tore, et qu'on peut choisir une courbe fermée simple $q$ dans ce tore de telle sorte que, après choix d'orientations, les classes de $m$ et $q$ constituent une base de $\pi_1(\partial E(K)) \approx H_1((\partial E(K)) \approx \mathbf{Z}^2$ ; il y a un choix meilleur que d'autres, qui fait l'objet de la définition suivante.

Notons $G_K^{ab}$ l'abélianisé de $G_K$ (ci-dessous noté additivement). C'est un groupe cyclique infini, comme on le voit sur une présentation (de Wirtinger ou de Dehn) de $G_K$, ou aussi comme cela résulte[8] de la dualité de Poincaré

$$G_K^{ab} \approx H_1(E(K)) \approx H_1(\mathbf{S}^3 \smallsetminus K) \overset{\text{dualité}}{\approx} H^1(K) \approx \mathbf{Z}.$$

Il en résulte d'une part que le groupe des commutateurs de $G_K$ est le noyau du morphisme d'abélianisation $G_K \longrightarrow G_K^{ab} \approx \mathbf{Z}$, et d'autre part que (comme noté dans [Dehn–10], page 115 de [DeSt–87])

(3.1) $G_K$ est abélien si et seulement si $G_K \approx \mathbf{Z}$.

De plus, $G_K^{ab}$ est engendré par la classe $[m]^{ab}$ de $m$. Soit $q$ comme ci-dessus ; soit $x \in \mathbf{Z}$ l'entier tel que $[q]^{ab} = x[m]^{ab}$ ; notons $p$ une courbe fermée simple dont la classe coïncide avec $[q]^{ab} - x[m]^{ab} = 0$. On vérifie qu'une telle courbe est unique à isotopie près dans le tore ; c'est par définition le *parallèle*[9] de $K$. Ainsi les courbes $(m, p)$ définissent (une fois orientées) une base de $\pi_1(\partial E(K)) \approx \mathbf{Z}^2$, unique à isotopie près, donc canonique. [« Unique » à ceci près qu'on peut toujours changer les orientations de $m$ et de $p$. Toutefois, si on souhaite que le coefficient d'enlacement de $m$ et $p$ soit $+1$, un choix d'orientation pour l'un de $m$ et $p$ impose un choix d'orientation pour l'autre.] Notons encore que, comme la classe de $p$ dans $H_1(E(K))$ est nulle, la classe de $p$ dans $G_K$ est un produit de commutateurs ; par suite :

(3.2) si $G_K$ est abélien, alors $p = 1$ dans $G_K$.

(La réciproque résulte du lemme de Dehn, voir plus bas.)

Un nœud $K \subset \mathbf{S}^3$ est *trivial* s'il borde un disque plongé dans $\mathbf{S}^3$. Le groupe d'un nœud trivial est cyclique infini engendré par $[m]$, et le parallèle définit l'élément neutre de ce groupe.

**Question naturelle.** *Soit $K$ un nœud de groupe $G_K \approx \mathbf{Z}$ ; le nœud $K$ est-il trivial ?*

Soient $M$ une 3-variété et $S$ une surface plongée dans $M$. Un *disque de compression* pour $S$ est un disque $D$ plongé dans $M$ tel que (i) $D \cap S = \partial D$ et (ii) $\partial D$ ne borde aucun disque dans $S$. [Nous utilisons la notation $D$ pour *un* disque plongé quelque part, et $\mathbf{D}^2$ pour *le* disque unité du plan euclidien.]

---

8 Le cas particulier $\pi_1^{ab} \approx H_1$ de l'isomorphisme de Hurewicz était connu de Poincaré [Poin–95].

9 Dans la littérature, on trouve souvent le mot « longitude » ; c'est un non-sens terminologique, puisque, chez les géographes, une longitude est précisément la coordonnée d'un méridien ! (le *méridien de Greenwich* est celui de longitude 0, la longitude des Diablerets est proche de 7°). Par ailleurs, notons qu'on peut aussi définir $p$ comme l'intersection $S \cap \partial E(K)$ pour une surface de Seifert $S$ de $K$, intersection qu'on montre être indépendante à isotopie près du choix de $S$.

**Lemme facile.** *Soient $K$ un nœud et $E(K)$, $G_K$ comme plus haut. S'il existe un disque de compression $D$ pour le bord $\partial E(K)$ de $E(K)$, alors le nœud $K$ est trivial.*

*Démonstration.* On se réfère à un méridien $m$ et un parallèle $p$ de $K$, orientés, dont les classes constituent une base de $H_1(\partial E(K))$. A priori, le bord de $D$ (orienté !) définit deux classes d'homologie

$$\begin{aligned} [\partial D]_{\partial E(K)} &= x\,[m]_{\partial E(K)} + y\,[p]_{\partial E(K)} \in H_1(\partial E(K)), \\ [\partial D]_{E(K)} &= x\,[m]_{E(K)} \in H_1(E(K)) \end{aligned}$$

avec $x, y \in \mathbf{Z}$. Or $x = 0$ car $\partial D$ est un bord dans $E(K)$, et $y = \pm 1$ car[10] $\partial D$ est une courbe fermée simple dans $\partial E(K)$.

En recollant convenablement à $D$ un anneau de bord $\partial D \cup K$, on obtient un disque plongé légèrement plus grand que $D$, de bord $K$. Par suite, $K$ est trivial. □

Revenons à la « question naturelle » ci-dessus, pour un nœud $K$ de groupe $G_K \approx \mathbf{Z}$. On a donc $[p] = 0 \in \mathbf{Z}$, de sorte qu'il existe une homotopie $\varphi : \mathbf{D}^2 \longrightarrow E(K)$ telle que $\varphi(\partial \mathbf{D}^2) = p$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varphi$ est un plongement dans un petit voisinage de $p$, et que l'*ensemble singulier*

$$\mathrm{Sing}(\varphi) \;=\; \overline{\{x \in \mathbf{D}^2 \mid |\varphi^{-1}(\varphi(x))| \geq 2\}}$$

est contenu dans l'intérieur de $\mathbf{D}^2$. Une telle application s'appelle un *disque de Dehn*.

Si l'application $\varphi$ était un plongement, le nœud $K$ serait trivial, vu le « lemme facile ». Voilà donc de quoi suggérer la formulation du lemme suivant (pour la formulation originale, voir [Dehn–10], page 147, et [DeSt–87], page 102).

**Lemme de Dehn.** *Soient $M$ une* 3*-variété et $\varphi : \mathbf{D}^2 \longrightarrow M$ un disque de Dehn.*

*Alors il existe un plongement $\psi : \mathbf{D}^2 \longrightarrow M$ tel que les restrictions de $\varphi$ et $\psi$ à $\partial \mathbf{D}^2$ coïncident.*

*Remarques.* (i) Noter que l'image du bord $\varphi(\partial \mathbf{D}^2)$ est une courbe fermée *simple* dans $M$. Noter aussi que le lemme *ne dit pas* que $\psi$ est une petite déformation de $\varphi$.

(ii) Le cas particulier du lemme qui permet de répondre à la « question naturelle » formulée plus haut est celui où la courbe $\varphi(\partial \mathbf{D}^2)$ est contenue dans le bord d'une variété compacte orientable avec bord.

(iii) Il n'est pas nécessaire de supposer $M$ compacte et orientable. La réduction du cas non orientable au cas orientable est due à Johansson (1938).

(iv) Si on sait chercher aussi bien que Gordon, on trouve le lemme de Dehn chez Poincaré déjà, dans [Poin–04] ; voir la page 475 de [Gord–99].

(v) Comme le note Dehn, l'énoncé a un analogue immédiat en une dimension de moins : *dans une surface (connexe), deux points (qui peuvent être connectés par une courbe) peuvent être connectés par une courbe simple.*

[10] Rappel : sur un 2-tore $T^2$, une courbe fermée de classe d'homologie $x[m] + y[p] \in H_1(T)$ est isotope à une courbe fermée *simple* si et seulement si ou bien $x = y = 0$ ou bien $x, y \in \mathbf{Z}$ sont premiers entre eux. Voir la section 2.C de [Rolf–76].

Une vingtaine d'années plus tard, plusieurs lecteurs ont décelé une insuffisance sérieuse dans la démonstration du « lemme de Dehn » : Hellmuth Kneser[11], dans une lettre à Dehn datée du 22 avril 1929, ainsi que van Kampen, Frankl et Pontryagin (voir [Eppl–99b], page 279). Une démonstration fut finalement obtenue par Papakyriakopoulos, connu sous le diminutif de « Papa » [Papa–57b] ; voir aussi [Stal–01].

**Conséquence pour les nœuds.** *Soient $K$ un nœud, $G_K$ son groupe, $\iota : \pi_1(\partial E(K)) \longrightarrow G_K$ l'homomorphisme induit par l'inclusion de $\partial E(K)$ dans $E(K)$, et $p$ un parallèle de $K$, vu ici comme élément de $\pi_1(\partial E(K))$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le nœud $K$ est trivial ;*
(ii) *le groupe $G_K$ est abélien ; ou encore, voir (3.1),*
*le groupe $G_K$ est cyclique infini ;*
(iii) $\iota(p) = 1$ *;*
(iv) *l'homomorphisme $\iota$ n'est pas injectif.*

*Démonstration.* Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) sont immédiates. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la définition de $p$, selon laquelle l'image de $p$ dans l'abélianisé de $G_K$ est l'élément neutre.

Les implications non banales sont (iii) $\Rightarrow$ (i), qui résulte du lemme de Dehn, et (iv) $\Rightarrow$ (i), qui résulte du théorème du lacet (voir ci-dessous) et du lemme de Dehn. $\square$

L'équivalence de (i) et (iii) montre bien que, si on sait décider entre $\iota(p) = 1 \in G_K$ et $\iota(p) \neq 1$, on sait décider de la trivialité ou non de $K$.

## $3^{bis}$. Quelques « suites » du lemme de Dehn

Le « lemme de Dehn » énoncé plus haut fut démontré dans [Papa–57b]. Indépendamment et juste avant, le même auteur avait aussi montré [Papa–57a] :

**Théorème du lacet.** *Si l'homomorphisme $\iota : \pi_1(\partial M) \longrightarrow \pi_1(M)$ induit par l'inclusion n'est pas injectif, il existe un élément non trivial du noyau représenté par une courbe fermée* simple.

En combinant ces deux énoncés, on obtient le théorème du disque, parfois nommé « Loop + Dehn Theorem » ; Stallings en fournit une nouvelle démonstration, ainsi que des généralisations, dans [Stal–60] (voir aussi dans [Gord–05] un commentaire sur cet énoncé et sur l'article de Kneser [Knes–29]). Un disque $D$ plongé dans $M$ est *proprement plongé* si $D \cap \partial M = \partial D$.

**Cas particulier du théorème du disque de Stallings.** *Si l'homomorphisme $\iota : \pi_1(\partial M) \longrightarrow \pi_1(M)$ induit par l'inclusion n'est pas injectif, alors il existe un élément*

[11] Cette critique de la « démonstration » de Dehn apparaît également dans la note ajoutée aux épreuves de [Knes–29] ; voir aussi [Gord–05]. Outre ses contributions fondamentales sur les variétés de dimension trois, Hellmuth Kneser (1898-1973) a des résultats importants dans un très grand nombre de domaines mathématiques [Knes–05]. Ne pas le confondre avec son père Adolf Kneser (1862-1930), qui s'illustra dans des travaux d'équations différentielles et de calcul des variations, ni avec son fils Martin Kneser (1928–2004), connu notamment en combinatoire, formes quadratiques et groupes algébriques.

*non trivial du noyau représenté par une courbe fermée simple bordant un disque proprement plongé dans $M$.*

Dans la foulée, les topologues des années 1950 et 1960 ont montré les résultats suivants (qui ne sont pas énoncés ici de la manière la plus générale possible). En voici le canevas : soient $M$ une 3-variété, $F$ une surface et $\varphi : F \longrightarrow M$ une application continue qui est « essentielle », c'est-à-dire « non triviale homotopiquement » (à définir de cas en cas, selon $F$) ; alors il existe un plongement essentiel de $F$ dans $M$ (assertion à prendre parfois *cum grano salis*, voir ci-dessous la « conséquence du théorème du tore »). Ces résultats montrent que les propriétés significatives de $\pi_1(M)$ reflètent des propriétés géométriques de $M$.

**Théorème de la sphère** ([Papa–57b], J.H.C. Whitehead, 1958). *Si une* 3*-variété orientable $M$ est telle que $\pi_2(M) \not\approx 0$, il existe un plongement de $\mathbf{S}^2$ dans $M$ représentant un élément non nul de $\pi_2(M)$.*

Comme toute 2-sphère plongée dans un extérieur de nœud $E(K)$ borde une 3-boule (un résultat d'Alexander), il en résulte que le revêtement universel de $E(K)$ est une 3-variété *contractile*.

Notons $\mathbf{A}$ l'*anneau* $\mathbf{S}^1 \times [0,1]$ et $\alpha$ un arc proprement plongé dans $\mathbf{A}$ connectant les deux composantes $\partial_0\mathbf{A}$ et $\partial_1\mathbf{A}$ de son bord $\partial\mathbf{A}$.

Une application $\varphi : (\mathbf{A}, \partial\mathbf{A}) \longrightarrow (M, \partial M)$ est *essentielle* si l'homomorphisme induit $\mathbf{Z} \approx \pi_1(\mathbf{A}) \longrightarrow \pi_1(M)$ est injectif et si $\varphi(\alpha)$ n'est pas homotope relativement à ses extrémités à un arc dans $\partial M$.

**Théorème de l'anneau** (Waldhausen [Wald–69], [CaFe–76]). *Soit $M$ une* 3*-variété compacte orientable et soit $\varphi : (\mathbf{A}, \partial\mathbf{A}) \longrightarrow (M, \partial M)$ une application essentielle.*

*Alors il existe un plongement $\psi : \mathbf{A} \longrightarrow M$ tel que, pour $j = 0$ et $j = 1$, les images $\varphi(\partial_j\mathbf{A})$ et $\psi(\partial_j\mathbf{A})$ soient dans la même composante connexe de $\partial M$.*

Ce théorème permet par exemple d'analyser la situation où deux lacets dans $\partial M$ définissent des éléments conjugués dans $\pi_1(M)$.

Il existe aussi un « théorème du tore » pour les applications d'un 2-tore dans une variété de dimension 3, dont nous ne citons que la conséquence suivante (théorème 7 de [Feus–76]).

**Conséquence du théorème du tore** ([CaFe–76]). *Soit $K$ un nœud tel que*[12] *$\pi_1(E(K))$ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^2$ qui n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe périphérique $\pi_1(\partial E(K))$. Alors :*

*- ou bien $K$ est un nœud du tore,*

*- ou bien il existe un plongement $\psi$ du* 2*-tore $\mathbf{T}^2$ dans $E(K)$ tel que $\psi_*\left(\pi_1(\mathbf{T}^2)\right)$ n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe périphérique $\pi_1(\partial E(K))$, de sorte que $K$ est un satellite (par exemple une somme connexe de deux nœuds non triviaux).*

[12] Autrement dit : soient $K$ un nœud tel qu'il existe une application « essentielle » $\varphi : \mathbf{T}^2 \longrightarrow E(K)$.

Rappelons qu'un *nœud du tore* est un nœud isotope à une courbe fermée simple contenue dans le tore standard de $\mathbf{S}^3$, et non trivial. Un tel nœud est caractérisé (à l'orientation près) par deux entiers $a, b \geq 2$ premiers entre eux ; son groupe admet alors la présentation $\langle s, t \mid s^a = t^b \rangle$, et son centre est cyclique infini, engendré par $s^a$. Pour une description du sous-groupe périphérique, voir par exemple la proposition 3.28 de [BuZi–85].

## $3^{ter}$. Quelques exemples de « problèmes (ir)résolubles »

Décrivons au moins un « processus de décision » montrant qu'il existe des groupes à problème du mot résoluble. Considérons un entier $n \geq 1$ et le *groupe libre* $F_n$ de rang $n$, avec sa présentation $\langle s_1, \dots, s_n \mid \rangle$. (Il serait bien sûr possible, mais un peu plus compliqué, de considérer une présentation finie *arbitraire* de $F_n$.)

Ce processus s'applique à un mot $w$ de longueur $|w|$ en les $s_i$ et leurs inverses, et fonctionne en trois pas.

(i) Si $|w| \leq 1$, aller en (iii). Si $|w| \geq 2$, aller en (ii).

(ii) S'il existe dans $w$ deux lettres consécutives $s_i s_i^{-1}$ ou $s_i^{-1} s_i$, les supprimer et retourner en (i) avec le mot ainsi obtenu, de longueur $|w| - 2$. Sinon, aller en (iii).

(iii) Si le mot obtenu est vide, écrire $w =_G 1$ et s'arrêter. Sinon, écrire $w \neq_G 1$ et s'arrêter.

(Il y a une étroite analogie avec l'*algorithme de Dehn* pour les groupes hyperboliques, décrit au chapitre 6.)

Pour la description d'un exemple moins immédiat mais néanmoins accessible au non-spécialiste, qui est une solution du problème du mot pour un *groupe résiduellement fini de présentation finie,* nous renvoyons le lecteur au théorème 2.2.5 de [Robi–96].

La démonstration de l'existence de groupes de présentation finie à problème du mot non résoluble comprend deux étapes.

(SG) *Il existe un semi-groupe de présentation finie à problème du mot non résoluble.* C'est un résultat obtenu indépendamment par A.A. Markov[13] et Emil Post (1947) ; sa démonstration utilise l'existence dans $\mathbf{N}$ d'un sous-ensemble « récursivement énumérable mais non énumérable », existence qu'on montre en utilisant entre autres la théorie des *machines de Turing* et une variante de l'argument diagonal de Cantor (celui qui montre que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable).

(G) *Réduction du cas des groupes au cas des semi-groupes.* Il s'agit de montrer qu'il existe un groupe $G$ tel que, si son problème du mot était résoluble, alors le problème du mot serait aussi résoluble pour un semi-groupe à la Markov-Post, ce qui n'est pas vrai par (SG). Cette étape, due (autant que je sache indépendamment) à P.S. Novikov, W.W. Boone et J.L. Britton, date de la fin des années 1950. Elle a été notoirement simplifiée depuis, notamment grâce à un usage important de la notion d'extension HNN (notion datant d'un article de 1949 par Graham Higman, Bernhard Hermann Neumann et Hanna Neumann).

[13] Il s'agit de Andrei Andreyevich Markov (1903–1979), fils de Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), dont le directeur de thèse (1884) était Pafnuty Lvovich Chebyshev. Les « chaînes de Markov » portent le nom du père.

Citons un résultat marquant, qui est une caractérisation algébrique de la solubilité du problème des mots.

**Théorème de Boone-Higman** (1974). *Un groupe de type fini a un problème du mot résoluble si et seulement s'il est isomorphe à un sous-groupe d'un sous-groupe simple d'un groupe de présentation finie.*

Pour une exposition de ce qui précède, voir le chapitre 12 de [Rotm–95].

* * * * * * * * * * * * *

Au début des années 1930, Magnus a montré que le problème du mot est résoluble pour les *groupes à un relateur* ; c'est une conséquence du « Freiheitssatz » (voir le chapitre II.5 de [ChMa–82]).

Le problème du mot pour les *groupes de nœud* est résoluble : c'est un (cas particulier d'un) résultat de Waldhausen [Wald–68] ; en fait, depuis les travaux de Perelman établissant la conjecture de géométrisation de Thurston (voir par exemple [BBBMP]), on sait que cela vaut pour tous les *groupes fondamentaux de* 3-*variétés* (voir le chapitre 12 de [Ep+5–92] et la discussion autour du théorème 3.3.1 de [Brid–02]). Mieux, la croissance de la fonction de Dehn d'un tel groupe est au plus exponentielle [Brid–93]. Le problème de conjugaison pour les groupes fondamentaux de 3-variétés est résoluble : voir [Prea–06] et [Prea].

Le problème du mot pour les *groupes linéaires de type fini* est résoluble. Le problème de conjugaison pour les groupes linéaires de présentation finie est résoluble. Voir les théorèmes 5.1 et 5.3 de [Mill–92]. Pour un *groupe de type fini résiduellement fini*, le problème du mot est résoluble dans le cas de présentation finie (comme nous y avons déjà fait allusion un peu plus haut), mais pas en général [Mesk–74]. Notons que, depuis les succès de Perelman, on sait que tout groupe fondamental de 3-variété compacte est résiduellement fini [Hemp–87] ; mais on ne sait toujours pas si un tel groupe est linéaire (voir néanmoins [AsFr]).

Pour les *groupes hyperboliques au sens de Gromov*, le problème du mot et le problème de conjugaison sont résolubles [Grom–87] ; voir aussi [BrHa–99], pages 448 et suivantes, ainsi que la fin du chapitre 6 ci-dessous. Le problème d'isomorphisme pour les groupes hyperboliques est aussi résoluble ; voir [Sela–95], avec hypothèses supplémentaires, et [DaGu], pour le cas général.

Il y a de bonnes raisons d'étudier le problème du mot pour certains groupes qui ne sont pas de type fini ; noter qu'un mot en un système (infini) $S$ de générateurs d'un groupe $G$ est toujours dans un sous-groupe de type fini de $G$. Par exemple, Lyndon a montré que le problème du mot est résoluble dans « son » groupe $F^{\mathbf{Z}[x]}$, qui est un groupe tel que ses sous-groupes de type fini sont exactement les « groupes limites » de Sela [Lynd–60].

## 4. Diagrammes et graphes de Cayley, Dehn's Gruppenbilder

Soit $G = \langle S \rangle$ un groupe donné avec un ensemble fini de générateurs $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Le *diagramme de Cayley* ou « *Dehn Gruppenbild* » associé est le graphe orienté $\mathcal{C}(G, S)$ ayant $G$ pour ensemble de sommets, et dans lequel il y a une arête orientée de $g$ à $h$ et étiquetée $s$ lorsque $g^{-1}h = s \in S \cup S^{-1}$. Relevons les points suivants.

- Dans $\mathcal{C}(G,S)$, avec toute arête de $g$ vers $h$ étiquetée $s$, on trouve une arête de $h$ vers $g$ étiquetée $s^{-1}$. Toutefois, dans les dessins, on ne représente souvent qu'une des deux arêtes d'une même paire, celle dont l'étiquette $s$ est dans $S$ ; de plus, dans le cas spécial où $s^2 = 1$ dans $G$ (ce qu'on écrit $s^2 =_G 1$), on omet souvent d'indiquer l'orientation.

- Il peut exister plusieurs arêtes de $g$ vers $h$, d'étiquettes différentes. En effet, il faut comprendre que $S$ n'est pas dans $G$, mais est une base d'un groupe libre $F$ donné avec une surjection $\pi : F \longrightarrow G$, et la restriction de $\pi$ à $S$ n'est pas nécessairement injective. De même, s'il existe $s \in S$ tel que $\pi(s) = 1$, il y a des boucles aux sommets de $\mathcal{C}(G,S)$.

- Exemple d'une présentation dont le diagramme de Cayley contient des arêtes multiples et des boucles :

$$\mathbf{Z} \,=\, \langle s,t,u \mid s=t,\ u=1\rangle.$$

- Le groupe $G$ opère sur $\mathcal{C}(G,S)$ par automorphismes de graphe dirigé étiqueté ; $x \in G$ applique l'arête de $g$ à $gs$ sur l'arête de $xg$ à $xgs$. Cette action est simplement transitive.

Dans ce texte, nous conviendrons d'appeler *graphe de Cayley* le graphe géométrique associé au diagramme de Cayley, c'est-à-dire le graphe obtenu en oubliant les orientations et les étiquettes, et en remplaçant chaque couple $\big((g,gs),(gs,(gs)s^{-1})\big)$ d'arêtes orientées par une seule arête $\{g,gs\}$.

Autres points de vue : le graphe de Cayley est un espace métrique dénombrable qui est connexe par pas de longueur 1, c'est aussi le 1-squelette d'un 2-complexe convenable (voir plus bas au chapitre 7).

## 4.1. Un diagramme de Cayley d'un groupe d'isométries propres du plan hyperbolique

Le premier exemple donnant lieu à une figure dans [Dehn–10] est celui associé à la présentation

$$\langle s_1,s_2 \mid (s_1)^3,(s_2)^5,(s_1s_2)^2\rangle$$

du groupe alterné $A_5$ d'ordre 60. Les notes [Dehn–a] contiennent d'autres exemples, dans l'ordre : les groupes symétriques $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$, les groupes alternés $A_4, A_5$, le groupe $A_5 \times \{1,-1\}$ des isométries laissant invariant un icosaèdre régulier, et le groupe symétrique

$$\Sigma_5 \,=\, \left\langle s_1,s_2,s_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^5 = (s_1s_2)^2 = 1 \\ s_3^2 = 1,\ \ s_3^{-1}s_1s_3 = s_1,\ \ s_3^{-1}s_2s_3 = s_2 \end{array} \right\rangle.$$

Dehn remarque que $s_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 3)$ et $s_3 = (1\ 2)$ suffisent à engendrer $\Sigma_5$, et que celui-ci est un quotient du groupe

$$(P_{5,4}) \qquad G \,=\, \langle s_2,s_3 \mid (s_2)^5,(s_3)^2,(s_3s_2)^4\rangle.$$

Par un argument géométrique, il montre que $G$ est un groupe infini, et il en décrit le graphe de Cayley relativement à $\{s_2,s_3\}$ ; nous comprenons l'argument de Dehn en le reformulant comme suit.

Considérons dans $\mathcal{H}^2$ un triangle isocèle $T$ ayant un sommet $A$ d'angle $2\pi/5$ et deux sommets $B, C$ d'angle $2\pi/8$. Soient $s_2$ une rotation de centre $A$ et d'angle

$2\pi/5$, et $s_3$ un demi-tour centré au milieu du segment $BC$. Il résulte d'un théorème de Poincaré sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens que le groupe d'isométries de $\mathcal{H}^2$ engendré par $s_2$ et $s_3$ d'une part a $T$ pour domaine fondamental et d'autre part a la présentation $(P_{5,4})$. (Pour le théorème de Poincaré, que Dehn n'invoque pas explicitement, voir [Poin–82], ou l'exposition de [Iver–92].) Le graphe de Cayley correspondant est le graphe dual du pavage $(gT)_{g\in G}$ de $\mathcal{H}^2$ ; autrement dit :

*le graphe de Cayley associé à la présentation $(P_{5,4})$ est un graphe trivalent, qui est le 1-squelette d'un pavage de $\mathcal{H}^2$ par des pentagones réguliers (centrés aux points de la forme $gA$) et des octogones réguliers (centrés aux points de la forme $gB$ et $gC$), avec un pentagone et deux octogones incidents à chaque sommet.*

Toujours dans [Dehn–a], Dehn ajoute que $G$ s'insère dans la famille

$$(P_{\alpha,\beta}) \qquad G_{\alpha,\beta} = \langle s_1, s_2 \mid (s_1)^\alpha, (s_2)^2, (s_2 s_1)^\beta \rangle,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux entiers. Le groupe $G_{\alpha,\beta}$ est infini si

$$\frac{\alpha-2}{\alpha}\,\pi + 2\,\frac{2\beta-2}{2\beta}\,\pi \;\geq\; 2\pi,$$

et les tuiles du pavage correspondant de $\mathcal{H}^2$ sont alors des $\alpha$-gones réguliers et des $2\beta$-gones réguliers.

Ajoutons encore une remarque. Soient $s_3'$ une symétrie de $\mathcal{H}^2$ d'axe prolongeant le côté $BC$, et $G'$ le groupe d'isométries de $\mathcal{H}^2$ engendré par $s_2$ et $s_3'$. Le théorème de Poincaré fournit la présentation

$$(P'_{5,4}) \qquad G' = \langle s_2, s_3' \mid (s_2)^5, (s_3')^2, (s_3' s_2{}^{-1} s_3' s_2)^2 \rangle.$$

Comme $T$ est également domaine fondamental pour l'action de $G'$ sur $\mathcal{H}^2$, le graphe de Cayley de $(P'_{5,4})$ est isométrique à celui de $(P_{5,4})$. Notons que le groupe $G'$, dont la présentation $(P'_{5,4})$ montre immédiatement que son abélianisé est cyclique d'ordre 10, n'est pas isomorphe au groupe $G$, dont l'abélianisé est d'ordre 2.

## 4.2. Généralités sur les diagrammes de Cayley

Il est naturel de chercher des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un diagramme (graphe orienté et étiqueté) soit le diagramme de Cayley associé à une présentation de groupe. Avant de formuler un énoncé, rappelons ceci.

Considérons un *diagramme régulier*[14], c'est à dire un graphe orienté, étiqueté par un ensemble de la forme $\{s_1, s_1^{-1}, \ldots, s_n, s_n^{-1}\}$, chaque sommet étant incident à exactement une arête entrante étiquetée $s_i^{-1}$ et une arête sortante étiquetée $s_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, et chaque arête étiquetée $s_i$ d'un sommet $x$ vers un sommet $y$ étant appariée à une arête étiquetée $s_i^{-1}$ du sommet $y$ vers le sommet $x$. (À ceci près que, si $s_i^2 =_G 1$, chaque arête étiquetée $s_i$ de $x$ vers $y$ est appariée à une arête étiquetée $s_i$ de $y$ vers $x$.) Etant donné un tel diagramme, on associe naturellement à tout chemin dans ce graphe un mot en les $s_i$ et leurs inverses. Le diagramme est

[14] Attention : ce n'est pas l'usage du mot « régulier » à la page 62 de [MaKS–66], qui me semble propice aux confusions avec la signification du mot pour les graphes. Nous préférons suivre [Cann–02] et traduire le « regular » de Magnus-Karras-Solitar par « homogène ».

alors *homogène* si, pour tout couple de chemins d'origines différentes et de même mot associé, les chemins sont en même temps fermés ou non.

*Exemples de diagrammes réguliers non homogènes.* (i) Soit $D$ un diagramme à trois sommets $x, y, z$ avec une boucle étiquetée $s_1$ en $x$, une arête étiquetée $s_2$ de $x$ vers $y$ et une autre de $y$ vers $x$, une arête étiquetée $s_1$ de $y$ vers $z$ et une autre de $z$ vers $y$, et une boucle étiquetée $s_2$ en $z$ (figure 4, page 62 de [MaKS–66]). Alors $D$ est régulier, mais non homogène car le chemin d'étiquette $s_1$ issu de $x$ est fermé et celui de même étiquette issu de $y$ ne l'est pas.

(ii) Soit $P$ le graphe de Petersen, qu'on peut définir comme le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, avec une arête entre $\{i, j\}$ et $\{k, \ell\}$ lorsque $i, j, k, \ell$ sont tous distincts. C'est un graphe régulier de degré trois, à dix sommets, de groupe de symétrie isomorphe au groupe symétrique $\Sigma_5$. Si $P$ était le graphe sous-jacent à un diagramme de Cayley $\mathcal{C}(G, S)$, l'ensemble générateur $S$ contiendrait au moins un élément d'ordre 2 (pour obtenir un graphe de degré impair) ; mais ceci est impossible car tout élément d'ordre 2 du groupe de symétrie $\Sigma_5$ de $P$ possède des sommets fixes.

**Proposition.** *Soit $\mathcal{C}$ un diagramme connexe régulier, étiqueté par un ensemble de la forme $S = \{s_1, s_1^{-1}, \dots, s_n, s_n^{-1}\}$, et soit $G$ son groupe d'automorphismes (en tant que graphe dirigé étiqueté).*

*Alors $\mathcal{C}$ est un diagramme de Cayley si et seulement s'il est homogène.*

*Lorsque c'est le cas, c'est le diagramme de Cayley du groupe $G$ relativement au système de générateurs $S$. En particulier, l'action de $G$ sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{C}$ est simplement transitive.*

*Références pour la démonstration.* Voir le théorème 1.6, page 63, ainsi que l'exercice 15, page 69, de [MaKS–66].

On trouve aussi une bonne discussion sur les graphes de Cayley dans l'article de Cannon [Cann–02]. □

Réciproquement, soit $G$ un groupe donné par une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$ et soit $\mathcal{C}$ un diagramme connexe régulier, étiqueté par $S \cup S^{-1}$, homogène, et dans lequel tout chemin étiqueté par une relation de $R$ est fermé. Alors $\mathcal{C}$ est le diagramme de Cayley *d'un quotient* de $G$ mais, en général, pas de $G$ lui-même. L'exemple le plus simple est sans doute celui d'un circuit de longueur $n$ convenablement orienté et étiqueté, qui est le diagramme de Cayley d'un quotient fini $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \langle s \mid s^n \rangle$ du groupe cyclique infini $\mathbf{Z} = \langle s \mid \rangle$.

Pour pouvoir décider si $\mathcal{C}$ est vraiment le diagramme $\mathcal{C}(G, S)$, il faut par exemple connaître une forme normale des éléments de $G$ écrits en termes des générateurs de $S$, ou encore avoir résolu le problème du mot pour $G$. Autrement dit :

*dessiner des parties arbitrairement grandes*
*du « Dehn Gruppenbild » de $G = \langle S \mid R \rangle$*
*équivaut à résoudre le problème du mot pour $G$.*

Davantage sur cette équivalence dans [Cann–02].

### 4.3. Quelques diagrammes pour les groupes cycliques et certains de leurs produits libres

Ce numéro est un « exercice d'échauffement » en vue du numéro 4.5.

Considérons le groupe $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels, engendré par $\{1, k\}$, avec $k \geq 2$, et le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(\mathbf{Z}, \{1, k\})$ correspondant.

Si $k = 2$, ce diagramme est une échelle infinie, avec les entiers pairs sur un montant infini aux altitudes $\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$, les entiers impairs sur l'autre montant infini aux altitudes $\dots, -3, -1, 1, 3, \dots$, tous les segments de ces montants dirigés vers le haut et étiquetés par 2, et des échelons obliques liant $n$ à $n+1$ étiquetés par 1. Le dessin obtenu est la figure 11 de [Dehn–10].

Si $k = 3$, le diagramme peut être décrit comme un prisme triangulaire, avec trois montants infinis contenant les sommets qui correspondent aux entiers congrus à $0, 1, 2$ respectivement, et une spirale montante linéaire par morceaux, chaque morceau connectant un entier $n$ sur l'un des montants à l'entier $n + 1$ sur le prochain montant.

De même, pour tout $k \geq 3$, le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(\mathbf{Z}, \{1, k\})$ peut être vu comme un prisme infini sur un $k$-gone régulier avec une spirale linéaire par morceaux.

Considérons ensuite deux entiers $k, \ell \geq 2$, un groupe cyclique $C_k$ d'ordre $k$ engendré par un générateur $\mu$, un groupe cyclique $C_\ell$ d'ordre $\ell$ engendré par un générateur $\nu$, et leur produit libre $C_k * C_\ell$ engendré par $\{\mu, \nu\}$.

Le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ peut être dessiné comme suit, par couches : la première couche est un $k$-gone régulier, dont les sommets correspondent aux éléments $\mu^m, m = 0, 1, \dots, k-1$, du groupe $C_k * C_\ell$ ; la seconde couche est une couronne de $\ell$-gones réguliers, au nombre de $k$, chacun ayant exactement un sommet commun avec le $k$-gone de la couche précédente ; la couche suivante est une couronne de $k$-gones réguliers, au nombre de $k(\ell - 1)$, chacun ayant exatement un sommet commun avec un $\ell$-gone de la couche précédente ; etc. (On convient qu'un 2-gone régulier est un segment.)

« Vu d'assez loin », $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ se rapproche d'un arbre biparti ayant alternativement des sommets de degré $k$ et des sommets de degré $\ell$. En termes plus techniques, $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ est quasi-isométrique à un tel arbre.

### 4.4. Le diagramme de [Dehn–10] pour le groupe du nœud de trèfle

Soient $K$ un nœud de trèfle et $G$ son groupe. L'un des diagrammes usuels représentant $K$ fournit la présentation de Dehn

$$(P_1) \qquad G = \langle a, b, c, d \mid ad^{-1}b = bd^{-1}c = cd^{-1}a = 1 \rangle,$$

apparaissant au § 5 du chapitre II de [Dehn–10]. La présentation $(P_1)$ de $G$ ayant 4 générateurs dont aucun n'est d'ordre 2 dans $G$, le graphe de Cayley $\mathcal{C}(G, \{a, b, c, d\})$ est régulier de degré 8 ; décrivons-le.

Soit d'abord $L$ l'échelle obtenue à partir du graphe $\mathcal{C}(\mathbf{Z}, \{1, 2\})$ du numéro précédent en étiquetant toutes les arêtes verticales des deux montants infinis par $d$ et les arêtes obliques montantes du zig-zag médian par une suite périodique $\dots, c, b, a, c, b, a, \dots$ (la lettre $L$ se réfère à « Leiter = échelle »). Soit par ailleurs $B$ l'arbre trivalent régulier (la lettre $B$ se réfère à « Baum = arbre »). Alors *le diagramme $\mathcal{C}(G, \{a, b, c, d\})$ de la présentation $(P_1)$ est la réunion d'une famille $(L_e)_{e\in E(B)}$ de copies de $L$ indexée par l'ensemble $E(B)$ des arêtes géométriques de $B$, chaque copie de $L$ étant recollée à deux autres copies sur chacun des montants verticaux (donc à quatre autres copies en tout), de telle sorte que chaque sommet du graphe résultant soit incident à quatre arêtes entrantes, d'étiquettes $a, b, c, d$, et quatre arêtes sortantes, d'étiquettes $a, b, c, d$.*

Comme déjà dit, il convient de ne pas dessiner les arêtes étiquetées par l'une des lettres $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}$.

Le diagramme ainsi décrit est a priori le diagramme de Cayley d'un quotient (sic !) de $G$. Pour s'assurer que c'est vraiment le diagramme de Cayley de $G$, il faut se convaincre que tout chemin fermé dans ce graphe peut être homotopé à un chemin constant via des « homotopies élémentaires », chacune correspondant à un triangle associé à l'une des relations de la présentation $(P_1)$ ; le fait que le diagramme « se projette » sur l'arbre $B$ joue un rôle important dans l'argument ..... Voir [Dehn–10], page 117 de [DeSt–87], complété par [Dehn–11], pages 173-174 de [DeSt–87].

## 4.5. Des diagrammes de Cayley pour les groupes des nœuds toriques

Nous allons décrire une autre présentation de $G$ et son diagramme de Cayley. La présentation $(P_1)$ peut s'écrire

$$(P_1') \qquad G = \langle a, b, c, d \mid ba = cb = ac = d\rangle,$$

de sorte qu'on a aussi

$$(P_2) \qquad G = \langle a, b, c \mid ba = cb = ac\rangle,$$

qui est d'ailleurs une présentation de Wirtinger de $G$, et encore

$$(P_3) \qquad G = \langle a, b \mid bab = aba\rangle,$$

montrant que $G$ est isomorphe au « groupe d'Artin des tresses à trois brins ». En posant $v = bab$, on trouve $G = \langle d, v \mid d^3 = v^2\rangle$, ou encore

$$(P_4) \qquad G = \langle t, u, v \mid t = u^3 = v^2\rangle.$$

Cette dernière présentation montre que $G$ s'insère dans une suite exacte de la forme

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z} = \langle t\rangle \longrightarrow G = \langle t, u, v\rangle \xrightarrow{\pi} C_3 * C_2 \longrightarrow 1,$$

où $\mathbf{Z} = \langle t\rangle$ désigne le centre de $G$, engendré par $t$, et où $C_3 * C_2$ désigne comme plus haut le produit libre d'un groupe cyclique d'ordre 3, engendré par la classe de $u$ modulo le centre de $G$, et d'un groupe cyclique d'ordre 2, engendré par celle de $v$.

Les éléments de $C_3 * C_2 = \langle \mu, \nu \mid \mu^3 = \nu^2 = 1\rangle$ sont en bijection avec les mots de la forme

$$\mu^{\varepsilon_0}\nu\mu^{\varepsilon_1}\nu\mu^{\varepsilon_2}\cdots\nu\mu^{\varepsilon_n}$$

où $n \geq 0$, $\varepsilon_0, \varepsilon_n \in \{0, 1, 2\}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{1, 2\}$. Il en résulte que les éléments de $G$ sont en bijection avec les mots de la forme

$$(\mathrm{N}) \qquad t^k u^{\varepsilon_0} v u^{\varepsilon_1} v u^{\varepsilon_2} \cdots v u^{\varepsilon_n}$$

où $k \in \mathbf{Z}$ et $n, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ comme ci-dessus. Le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(G, \{t, u, v\})$, de degré 6, se projette donc naturellement sur le diagramme $\mathcal{C}(C_3 * C_2, \{\mu, \nu\})$, de degré 3, décrit selon ses couches au numéro 4.3.

On peut d'ailleurs généraliser sans peine au cas de deux entiers $k, \ell \geq 2$ et du groupe

$$(P_{k,\ell}) \qquad G_{k,\ell} \;=\; \langle t, u, v \mid t = u^k = v^\ell \rangle;$$

lorsque de plus $k$ et $\ell$ sont premiers entre eux, $G_{k,\ell}$ est le groupe d'un *nœud du tore*. Le diagramme $\mathcal{C}(G_{k,\ell}, \{t, u, v\})$ peut être décrit comme suit : au-dessus de la première couche du diagramme de $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ décrit en seconde partie du numéro 4.3, un prisme infini sur un $k$-gone régulier comme en première partie du numéro 4.3 ; au-dessus de la seconde couche de $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$, on colle le long de chaque arête du premier prisme un prisme infini sur un $\ell$-gone régulier ; etc.

Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que le diagramme ainsi obtenu est quasi-isométrique au produit de l'arbre biparti de degrés $k, \ell$ mentionné en fin de 4.3 et d'une droite. De plus, tous ces diagrammes (à la seule exception de celui correspondant à $k = \ell = 2$) sont quasi-isométriques entre eux.

### $4^{bis}$. Invariants géométriques de Hopf à Gromov

L'avantage de représenter un groupe $G$ par un diagramme de Cayley ou un graphe de Cayley, c'est-à-dire par un objet géométrique, est de pouvoir définir pour $G$ des *invariants géométriques*. Ainsi, on peut voir le *nombre de bouts* du graphe de Cayley d'un groupe de type fini comme un invariant géométrique du groupe lui-même (travaux de Hopf, et de ses étudiants Freudenthal et Specker dans les années 1940).

Ces invariants géométriques jouent un rôle prépondérant en théorie des groupes depuis les travaux de Gromov, dont les très influents [Grom–87] et [Grom–93].

## 5. Sphères d'homologie

Soit $K$ un nœud, orienté, donné par un diagramme $\mathcal{D}$ dans le plan orienté. Les points de croisement divisent la projection de $K$ en un certain nombre d'arcs, chacun héritant de l'orientation de $K$. Notons $\sigma_1$ l'un d'entre eux (arbitraire), et $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les suivants dans l'ordre imposé par l'orientation ; notons $s_1, \ldots, s_n$ les générateurs de Wirtinger correspondants de $G_K$. Choisissons $s_1$ comme méridien de $\partial E(K)$. Nous allons décrire une recette fournissant le parallèle correspondant.

En parcourant $D$ à partir du milieu de $\sigma_1$, on passe par $n$ points de croisement où le nœud passe en-dessous d'un arc. Notons, dans l'ordre, $P_1, \ldots, P_n$ ces points ; notons $\sigma_{i_j}$ l'arc qui passe par dessus en $P_j$ ; posons $\varepsilon_j = 1$ [respectivement $\varepsilon_j = -1$] si $\sigma_{i_j}$ passe par dessus de gauche à droite [resp. de droite à gauche]. Alors le parallèle cherché s'écrit

$$p \;=\; s_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_{i_n}} (s_1)^k$$

où $k$ est tel que $p$ soit homologiquement trivial dans $H_1(E(K))$, c'est-à-dire tel que $\varepsilon_{i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_n} + k = 0$.

Pour une projection convenable du nœud de trèfle $K$, on trouve

$$(P_2') \qquad G_K \;=\; \langle a, b, c \mid ab = bc = ca \rangle$$

et

$$m = a, \qquad p = c^{-1}a^{-1}b^{-1}a^3.$$

Si $d = ab = bc = ca$ comme[15] plus haut, notons que $b = a^{-1}d$, $c = da^{-1}$, et $ada = abca = d^2$, de sorte que

$$(P_5) \qquad G_K = \langle a, d \mid ada = d^2 \rangle$$

et

$$\begin{aligned} p &= c^{-1}a^{-1}b^{-1}a^3 = \left(ad^{-1}\right)a^{-1}\left(d^{-1}a\right)a^3 \\ &= ad^{-1}(ada)^{-1}a^5 = ad^{-3}a^5 = d^{-3}a^6 \end{aligned}$$

(car $d^3$ est central dans $G_K$).

Soit $T'$ un tore solide. Choisissons un méridien $m'$ et un parallèle $p'$ sur $\partial T'$ ; notons que $m' = 1 \in \pi_1(T')$ et que $p'$ engendre $\pi_1(T')$. Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, soit $h_k : \partial T' \longrightarrow \partial V(K)$ un homéomorphisme tel que $h_k(m') = ap^{-k}$ $[= mp^{-k}]$ et $h_k(p') = p$ (un tel homéomorphisme est bien défini à isotopie près). Notons

$$M_k = E(K) \cup_{h_k} T'$$

le résultat du recollement de $E(K)$ et $T'$ selon $h_k$ ; c'est une 3-variété compacte connexe orientable.

Comme $d^3$ est central, $ap^{-k}$ s'écrit aussi $d^{3k}a^{1-6k}$. Le théorème de Seifert – van Kampen[16] montre que le groupe fondamental de $M_k$ est isomorphe au produit libre de $G_K$ et $\pi_1(T') = \langle p' \rangle$ avec amalgamation donnée par $h_k$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \pi_1(M_k) &= \langle a, d, p' \mid ada = d^2,\ ap^{-k} = 1,\ p = p' \rangle \\ &= \langle a, d \mid ada = d^2,\ d^{3k} = a^{6k-1} \rangle. \end{aligned}$$

Notons que ce groupe est parfait ; en effet, si $\equiv$ désigne une égalité dans $\pi_1(M_k)$ modulo les commutateurs, nous avons d'abord

$$d = d^2d^{-1} = adad^{-1} = a^2(a^{-1}dad^{-1}) \equiv a^2,$$

donc $d^{3k} \equiv a^{6k} = d^{3k}a$ et $a \equiv 1$, et ensuite $d \equiv ada = d^2$, donc $d \equiv 1$.

On obtient le résultat suivant. Voir [Dehn–10], pages 117–121 de [DeSt–87], et les pages 67–74 de [Rham–69] ; voir aussi le numéro 8.4 de [Stil–93].

**Théorème sur les sphères d'homologie.** *Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, la variété $M_k$ est une sphère d'homologie. De plus*

*- pour $k = 0$, c'est la sphère usuelle ;*

*- pour $k = 1$, le groupe $\pi_1(M_1)$ est le groupe binaire de l'icosaèdre, qui est un groupe parfait à 120 éléments ;*

*- pour $k \neq 0, 1$, le groupe $\pi_1(M_k)$ est infini ;*

*- pour $k$ et $k'$ distincts dans $\mathbf{Z}$, les groupes $\pi_1(M_k)$ et $\pi_1(M_{k'})$ sont non isomorphes.*

---

15 À l'échange près de $a$ et $b$.

16 L'article de Seifert date de 1931 et celui de van Kampen de 1933. Ce dernier était une commande de Zariski, qui voulait une méthode simple pour analyser le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe algébrique dans le plan projectif complexe. Pour la détermination de groupes fondamentaux avant ce théorème « de Seifert – van Kampen », et notamment chez Poincaré, voir le chapitre 3 de [Gord–99] et le n° 4.1 de [Stil–93].

Déjà dans une courte note [Dehn–07] précédant [Dehn–10], Dehn avait construit des sphères d'homologie, par une méthode différente. Etant donné deux nœuds $K$ et $K'$ dans $\mathbf{S}^3$, soit $M$ la variété obtenue à partir des extérieurs $E(K)$ et $E(K')$ en recollant leurs bords, avec un méridien $m$ de $\partial E(K)$ identifié à un parallèle $p'$ de $\partial E(K')$, et de même $p$ identifié à $m'$. Alors $M$ est une sphère d'homologie ; de plus, si $K$ et $K'$ sont non triviaux, $\mathbf{Z}^2$ s'injecte dans le produit amalgamé $\pi_1(M) = \pi_1(K) *_{\pi_1(\mathbf{T}^2)} \pi_1(K')$, qui est donc un groupe infini.

Le type de construction consistant à ôter certains parties toriques d'une variété pour les recoller différemment est la première apparition de *chirurgies* en topologie. Citons deux expositions récentes sur l'usage de chirurgies pour l'études des nœuds et des variétés de dimension trois : [Boye–02] et [Gord–09].

Dans l'étude des variétés de grandes dimensions, la chirurgie est un processus de transformation contrôlée des variétés, selon le schéma

$$M_1 = M_0 \cup_{\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^q} (\mathbf{S}^p \times \mathbf{D}^{q+1}) \implies M_2 = M_0 \cup_{\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^q} (\mathbf{D}^{p+1} \times \mathbf{S}^q)$$

(avec $p + q + 1 = \dim M_0$). C'est un ingrédient essentiel dans les travaux des années 1960 et suivantes sur les variétés de grandes dimensions (Kervaire, Milnor, Browder, Novikov, Sullivan, Wall, ...). Dans le cas particulier où $p = q = 1$, on retrouve certaines[17] chirurgies de Dehn

$$\mathbf{S}^3 = E(K) \cup_{\mathbf{T}^2} (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2) \implies E(K) \cup_{\mathbf{T}^2} (\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1).$$

Mais le sujet des chirurgies de Dehn, propre à la dimension trois, est bien différent de celui des chirurgies utilisés dans l'étude des variétés de grandes dimensions, et le premier sujet ne semble guère avoir servi d'inspiration au second.

## $5^{bis}$. À propos de sphères d'homologie

Les sphères d'homologie jouent un rôle important en topologie ; voir [Save–02]. évoquons quelques points de l'histoire postérieure à Dehn, comme suit.

Toute 3-variété orientée $M$ est le bord d'une 4-variété $Q$, comme l'ont noté indépendamment Thom [Thom–51] et Rochlin [Roch–51] ; on peut supposer de plus que $Q$ est simplement connexe et possède une structure spin. Le groupe $H_2(Q, \mathbf{Z})$ est sans torsion (parce que $\pi_1(Q) = 1$) ; la forme d'intersection

$$H_2(Q, \mathbf{Z}) \times H_2(Q, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

est unimodulaire (parce que $M$ est une sphère d'homologie) et paire (parce que $Q$ a une structure spin). Cette forme a une signature qui est un multiple de 8 (c'est une propriété arithmétique des formes unimodulaires paires), dont la classe modulo 16 ne dépend que de $M$ et pas du choix de $Q$ (c'est un résultat topologique profond de Rochlin). On obtient donc un *invariant de Rochlin* $\mu(M) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *des sphères d'homologie entière* (qui n'est qu'une toute petite partie d'une histoire aux multiples facettes dévoilée par Rochlin, voir [GuMa–86]).

[17] Si $(p, m)$ est un couple (parallèle, méridien) sur $\partial E(K) \approx \partial(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2)$ et $(m', p')$ un couple (méridien, parallèle) sur le bord d'un tore solide $T' = \mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$, ce sont les chirurgies de Dehn associées à un homéomorphisme $h : \partial E(K) \longrightarrow \partial T'$ tel que $h(pm^k) = m'$ et $h(m) = p'$, pour un entier $k \in \mathbf{Z}$. La donnée du nœud $K$ et de l'entier $k$ correspond à celle d'un *nœud enrubanné* (= framed knot).

Cet invariant s'est révélé plus tard être la réduction modulo 2 d'un *invariant de Casson*, à valeurs dans $\mathbf{Z}$.

Si un groupe $G$ est le groupe fondamental d'une $n$-sphère d'homologie, avec $n \geq 3$, alors $G$ est de présentation finie, parfait, et $H_2(G; \mathbf{Z}) = 0$. Lorsque $n \geq 5$, réciproquement, tout groupe ayant ces trois propriétés est groupe fondamental d'une $n$-sphère d'homologie [Kerv–69]. Lorsque $n = 4$ ou $n = 3$, on ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes.

Citons encore un autre résultat de Kervaire :

*le seul groupe fini non trivial qui est groupe fondamental d'une* 3*-sphère d'homologie est le groupe binaire de l'icosaèdre, à* 120 *éléments ;*

ainsi qu'une conséquence des travaux de Perelman :

*une* 3*-sphère d'homologie à groupe fondamental fini non trivial est difféomorphe au quotient de $SU(2)$ par le groupe binaire de l'icosaèdre.*

## 6. Algorithme(s) de Dehn

Soit $\langle S \mid R \rangle$ une présentation finie d'un groupe $G$. Notons $R_*$ l'ensemble des relations obtenues à partir de celles de $R$ par permutations cycliques et inversion. Soit $w$ un mot en les lettres de $S \cup S^{-1}$ ; notons $|w|$ la *longueur* de $w$, c'est-à-dire le nombre de ses lettres.

Une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$ d'un groupe $G$ est une *présentation de Dehn* si elle satisfait la condition suivante : toute relation $r = 1$ dans $R_*$ peut s'écrire sous la forme $r \equiv u_r v_r^{-1}$, c'est-à-dire $u_r = v_r$, où $u_r$ et $v_r$ sont des mots en les $s_j$ et leurs inverses tels que $|v_r| < |u_r|$.

C'est par exemple le cas de la présentation usuelle du groupe fondamental d'une surface close orientable de genre 2

$$\pi_1(\Sigma_2) \ = \ \langle s_1, \ldots, s_4 \mid s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} s_3 s_4 s_3^{-1} s_4^{-1} = 1 \rangle.$$

Pour cette présentation, $|R| = 1$ et $|R_*| = 16$. À titre d'exemple, $s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} s_3 s_4 = s_1^{-1} s_4 s_3$ est l'une des 16 relations de $R_*$, écrite sous la forme $u_r = v_r$.

Pour une présentation de Dehn, *l'algorithme de Dehn* pour le problème du mot fonctionne comme suit : étant donné un mot $w$ en les $s_j$, s'il contient une paire de lettres consécutives de la forme $ss^{-1}$, on la supprime, et s'il contient un $u_r$, on obtient un nouveau mot plus court en remplaçant $u_r$ par $v_r$ ; on répète l'opération tant qu'elle est possible (en choisissant arbitrairement la paire $ss^{-1}$ à supprimer ou le $u_r$ à remplacer s'il y a plusieurs possibilités) ; le mot $w$ représente 1 ou non selon que le procédé s'arête avec le mot vide ou avec un mot non vide.

Dehn a montré que les présentations usuelles des groupes fondamentaux de surfaces sont des « présentations de Dehn » de sorte que le problème du mot est résoluble pour ces groupes. De plus, dans un tel groupe, chaque élément donné comme produit des générateurs peut être algorithmiquement transformé en une « forme normale », de sorte que le problème de conjugaison est aussi résoluble. Dans un premier article [Dehn–11], Dehn établit ces résultats en utilisant les propriétés géométriques (courbure négative) du plan hyperbolique, qui est le revêtement universel d'une surface de genre $g \geq 2$ ; dans un second article [Dehn–12], il utilise de manière essentielle la combinatoire des chemins fermés dans le diagramme de

Cayley. Dehn insiste sur la signification géométrique de ses résultats ; voir ($\mathrm{WP}_{\mathrm{top}}$) et ($\mathrm{CP}_{\mathrm{top}}$), ci-dessus au chapitre 2.

Ces articles ont marqué toute la suite du sujet, dont les méthodes diagrammatiques de van Kampen (1933), passées inaperçues à l'époque mais redécouvertes par Lyndon (1966), et par là toute la théorie de la petite simplification. La terminologie « algorithme de Dehn », due à Magnus, apparaît dans la thèse de son étudiant Martin Greendlinger (1960), où il est montré que l'algorithme fonctionne pour des présentations satisfaisant à des conditions convenables de petite simplification (selon la page 21 de [ChMa–82]).

Gromov a montré qu'un groupe possède une présentation de Dehn si et seulement s'il est hyperbolique, au sens de [Grom–87] ; voir par exemple [BrHa–99], théorème III.$\Gamma$.2.6, page 450 (où il conviendrait d'introduire $R_*$).

### $6^{bis}$. Fonctions de Dehn

Soit $\langle S \mid R \rangle$ une présentation finie d'un groupe $G$. Soit $w$ un mot en les lettres de $S \cup S^{-1}$ qui représente l'élément neutre de $G$, ce qu'on écrit $w =_G 1$ ; il existe donc des relations $r_i \in R_*$ et des mots $v_i$, tels que $w = \prod_{i=1}^{N} v_i r_i v_i^{-1}$. Par définition, *l'aire* de $w$ est le minimum $A(w)$ des entiers $N$ pour lesquels une telle écriture est possible. La *fonction de Dehn* $\delta : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ est définie par

$$\delta(n) \;=\; \max\left\{A(w) \;\middle|\; w =_G 1 \;\text{ et }\; |w| \leq n\right\}.$$

A priori, $\delta$ dépend de la présentation donnée ; toutefois, on montre facilement que, si deux présentations finies d'un même groupe donnent lieu à des fonctions $\delta_1$ et $\delta_2$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\delta_i(n) \;\leq\; C\delta_j(Cn + C) + Cn + C \qquad \text{pour tout } \; n \geq 0$$

($\{i,j\} = \{1,2\}$). Dans ce sens, la fonction de Dehn ne dépend à équivalence près que du groupe de présentation finie $G$, et pas de la présentation finie choisie. Les fonctions de Dehn permettent de quantifier le degré de solubilité du problème du mot pour un groupe de présentation finie :

- un groupe a un problème du mot résoluble si et seulement si sa fonction de Dehn est récursive ;
- un groupe a une fonction de Dehn linéaire si et seulement s'il est hyperbolique au sens de Gromov [Grom–87] ;
- si *IP* désigne l'ensemble des nombre réels $\rho \geq 1$ tels qu'il existe un groupe de présentation finie dont la fonction de Dehn est équivalente à $n \longmapsto n^\rho$ (avec « IP » pour « Isoperimetric Spectrum »), alors l'adhérence de *IP* est égale à $\{1\} \cup [2, \infty[$ ;
- il existe un groupe à un relateur, donc à problème du mot résoluble (c'est un résultat de Magnus), dont la fonction de Dehn est donnée à équivalence près par $\delta(n) = \varepsilon_n(n)$, où les fonctions $\varepsilon_n$ sont définies récursivement par

$$\varepsilon_0(k) = k, \quad \varepsilon_1(k) = 2^k, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n(k) = 2^{\varepsilon_{n-1}(k)}, \quad \ldots,$$

de sorte que $\delta$ croît plus vite que toute exponentielle itérée ;

pour tous ces résultats, voir l'exposition de [Brid–02]. On comprend aussi presque quelles sont les fonctions $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ qui sont (à équivalence près) des fonctions de Dehn : voir [SaBR–02] et [BORS–02].

## 7. Groupes de présentation finie, 2-complexes, 3- et 4-variétés

Dehn a vu que

(*) *tout groupe de présentation finie est groupe fondamental d'un 2-complexe, et aussi d'une variété compacte orientable de dimension quatre ;*

voir le § 2 du chapitre I de [Dehn–10] et le début du chapitre III de [Dehn–11]. Voici, en termes d'*aujourd'hui*, les pas d'une démonstration de (*) inspirée des articles de Dehn.

(i) À une présentation finie d'un groupe $G$, on associe un CW-complexe fini $C$, qui a une seule 0-cellule, des 1-cellules en bijection avec les générateurs de la présentation, et des 2-cellules en bijection avec les relations, attachées au 1-squelette conformément aux relations ; il en résulte que $\pi_1(C) = G$. Le revêtement universel de $C$ est le *complexe de Cayley* de la présentation donnée, et son 1-squelette s'identifie au graphe de Cayley de la présentation. Une subdivision ad hoc permet de considérer $C$ comme un complexe simplicial fini.

(ii) Un 2-complexe simplicial fini se plonge dans $\mathbf{R}^5$, ce dont on s'assure facilement par un argument de position générale : en dimension 5, deux plans affines peuvent toujours être rendus disjoints par un déplacement arbitrairement petit de l'un d'eux.

(iii) $C$ possède un *voisinage ouvert régulier* $V$ dans $\mathbf{R}^5$, dont $C$ est un rétracte par déformation, de sorte que $\pi_1(C) \approx \pi_1(V) \approx \pi_1(\overline{V})$. Comme on peut munir $\mathbf{R}^5$ d'une structure de complexe simplicial dont $C$ soit un sous-complexe, ceci est un cas particulier du résultat général élémentaire suivant : si $L$ est un sous-complexe d'un complexe simplicial $K$, et si $V(L)$ désigne la réunion des intérieurs des simplexes de $K$ contenant un sommet de $L$ dans une subdivision barycentrique de $L$, alors $V(L)$ est un voisinage de $K$ qui se rétracte par déformation sur $L$ ; voir le n° 9 du chapitre II dans [EiSt–52].

(iv) D'une part, comme $C$ est de codimension trois dans $\overline{V}$, nous avons par position générale un isomorphisme $\pi_1(\overline{V}) \approx \pi_1(\overline{V} \smallsetminus C)$. D'autre part, $\overline{V} \smallsetminus C$ se rétracte par déformation sur le bord $\partial\overline{V}$ de $\overline{V}$, qui est une sous-variété close de codimension 1 dans $\mathbf{R}^5$, en particulier une variété orientable de dimension 4. On a donc en fin de compte

$$G \approx \pi_1(C) \approx \pi_1(\partial V).$$

### 7.1. Variante

À la place du fait invoqué au point (ii) ci-dessus, on peut utiliser le fait suivant, cas particulier d'un énoncé du début de [Stal–65] : tout 2-complexe fini dont le 1-squelette est planaire, en particulier tout 2-complexe fini ayant une seule 0-cellule se plonge dans $\mathbf{R}^4$. En adaptant (iii) et (iv), on obtient un voisinage ouvert régulier $V'$ dans $\mathbf{R}^4$ tel que le groupe fondamental $\pi_1(\partial V')$ se surjecte naturellement sur $\pi_1(V') \approx \pi_1(C)$. Notons $W = V' \sqcup_{\partial V'} V'$ le double de $V'$, c'est-à-dire la variété close de dimension 4 obtenue en recollant deux copies de $V'$ sur leur bord commun ;

le théorème de Seifert – van Kampen implique que $\pi_1(W)$ est isomorphe à la somme amalgamée $\pi_1(V') *_{\pi_1(\partial V')} \pi_1(V')$, c'est-à-dire à $\pi_1(V') \approx \pi_1(C) \approx G$. Je remercie Martin Bridson pour m'avoir signalé [Stal–65].

## 7.2. Digression

Considérons l'exemple du groupe cyclique d'ordre 7 donné par la présentation

$$\langle a, b, c \mid a^2b^{-1} = bac^{-1} = cac = c^{-1}ab = b^2c = 1\rangle$$

(dont on déduit facilement $b = a^2$, $c = a^3$, de sorte que ce groupe, qui a aussi la présentation $\langle a \mid a^7 = 1\rangle$, est bien cyclique d'ordre 7). Le complexe $C$ correspondant se plonge comme ci-dessus dans $\mathbf{R}^4$. On peut vérifier que son revêtement universel $\widetilde{C}$ est le 2-squelette du 6-simplexe, qui est l'un des exemples standards d'un 2-complexe *qui ne se plonge pas* dans $\mathbf{R}^4$ (ce qui est connu depuis les travaux de van Kampen et Flores des années 1930, voir [FrKT–94]). Nous avons ainsi obtenu un exemple de 2-sous-complexe fini de $\mathbf{R}^4$ dont le revêtement universel ne se plonge pas dans $\mathbf{R}^4$, ce qui (à tort ou à raison) surprend l'auteur.

## 7.3. Autre argument pour (*)

Soit $M$ la somme connexe de $n$ copies de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^3$ ; son groupe fondamental est libre sur $n$ générateurs $s_1, \dots, s_n$. Etant donné $m$ relations $r_1, \dots, r_m$ en les $s_j$, on représente chaque $r_i$ par un lacet dans $M$, ayant un voisinage tubulaire $C_i$ homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^3$ ; noter que le bord de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^3$ est homéomorphe au bord de la variété simplement connexe et $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^2$. On modifie alors $M$ « par chirurgie », en remplaçant chaque $C_i$ par une copie de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^2$. Le groupe fondamental de la variété ainsi obtenue est isomorphe au groupe de présentation $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m\rangle$. Voir la page 187 de [SeTh–80].

## 7.4. Dimensions $\leq 3$ et $\geq 4$

Dehn ayant montré que tout groupe de présentation finie est groupe fondamental d'une 4-variété close, on peut se demander pourquoi la théorie combinatoire des groupes, qui est inséparable dès ses premiers débuts de la topologie de dimension trois, a pendant longtemps bien moins interagi avec l'étude des variétés de dimension $\geq 4$ (exemples : les surfaces complexes !). Faute de pouvoir discuter sérieusement la question, notons que ce n'est que dans les années 1920 que parut le livre de Lefschetz sur *l'analysis situs et la géométrie algébrique* [Lefs–24]. Lefschetz qui écrira plus tard que ce fut « son lot de planter le harpon de la topologie algébrique dans le corps de la baleine de la géométrie algébrique » (page 854 de [Lefs–68]).

## 8. Allusion à d'autres contributions

Nous avons déjà fait allusion à

(i) la solution de Dehn du 3e problème de Hilbert (au chapitre 1) ;

(ii) sa démonstration du fait qu'il n'existe pas de déformation continue de $\mathbf{R}^3$ transformant un nœud de trèfle gauche en un nœud de trèfle droit, en d'autres termes du fait que le nœud de trèfle est « chiral » (au chapitre 2).

Sans entrer dans aucun détail, mentionnons tout de même encore :

(iii) le théorème de Dehn-Nielsen concernant une surface close $S$, selon lequel tout automorphisme extérieur de $\pi_1(S)$ est induit par un homéomorphisme de $S$ (vers 1921) ;

(iv) le rôle des « twists de Dehn » dans l'étude [Dehn–38] des groupes de difféomorphismes et des groupes modulaires de surfaces (= mapping class groups) ;

(v) et les équations de Dehn-Sommerville, portant sur les nombres des faces de dimensions $0, 1, \dots d$ d'une triangulation de la sphère de dimension $d$, équations conjecturées par Dehn (1905) et démontrées par Sommerville (1927).

## 9. Quelques souvenirs et commentaires

De Carl Ludwig Siegel [Sieg–64]

« J'appris (...) quelle rare chance c'est que d'avoir des collègues académiques qui travaillent solidairement, sans égoïsme et sans l'idée d'une ambition personnelle, plutôt que d'émettre des directives venant de leurs positions hautaines. »

« Il avait un esprit philosophique au sens de Schiller et, comme il était épris de contradiction, une conversation avec lui devenait souvent une discussion fructueuse. Il s'intéressait beaucoup à l'histoire, ancienne et moderne (...). »

À propos du *Freiheitssatz*, proposé par Dehn comme sujet de thèse à Magnus, Siegel écrit aussi : « qu'il en découvrit une démonstration, et à l'occasion disait à ses amis comment elle allait ».[18]

Du cinéaste Arthur Penn [Penn]

Penn était à Black Mountain en 1948.

« But then world events occurred, of a certain extraordinary character, which was that in Germany there was the rise of Hitler, and the creation of an enormous group of refugees who were some of the most remarkably talented people in all of Europe who were suddenly persona non grata, and forced out. And, although the United States had something of a welcoming policy, it was a peculiar period of, yeah we'll let you come into the United States, but we won't accept any of your credentials from Europe, because somehow that was just not the American way, so an awful lot of doctors for instance came in and had to take their medical exams over again. Psychoanalysts of world wide reputation had to go and sit for another medical exam. And we at Black Mountain were very fortunate in that people like Gropius and Albers, and Max Dehn who was a marvelous physicist and mathematician, came. So that a large part of our faculty population was made up

[18] Elle était géométrique, contrairement à celle de Magnus, dont le caractère algébrique valut à Magnus que Dehn lui serve le commentaire suivant : « Da sind Sie also blind gegangen », ou « Ainsi avez-vous procédé à l'aveugle » ([Magn–78], page 139).

of these absolutely extraordinary people who were able to make it to America, but couldn't get a job at an American university. Although they'd been pillars of the Bauhaus in Germany, which was a remarkable place. »

Dernier alinéa de la préface du livre [MaKS–66]

« This book is dedicated to the memory of Max Dehn. We believe this to be more than an acknowledgment of a personal indebtedness by one of the authors who was Dehn's student. The stimulating effect of Dehn's ideas on presentation theory was propagated not only through his publications, but also through talks and personal contacts ; it has been much greater than can be documented by his papers. Dehn pointed out the importance of fully invariant subgroups in 1923 in a talk (which was mimeographed and widely circulated but never published). His insistence on the importance of the word problem, which he formulated more than fifty years ago, has by now been vindicated beyond all expectations. »

De Wilhelm Magnus [Magn–78]

« We can also say that being a mathematician was an essential part of his personality and that it influenced also his very well founded and deep interests in the humanities, in art, and in nature. »

De John Stillwell [DeSt–87], page 253

Extrait de l'introduction à la traduction de [Dehn–38], article déjà mentionné au chapitre 8, qui reprenait et développait un exposé de 1922 sur les groupes modulaires de surfaces.

« Perhaps because of its very demanding proof, the result went unnoticed until it was rediscovered independently by Lickorish (1962). »

« Dehn had another idea which also went unnoticed, even when it was rediscovered in the unpublished[19], but famous, Thurston [Thur–76]. This was the idea of studying the mapping class group by its action on the space of simple curve systems. »

D'André Weil [Weil–91], pages 52–53

« J'ai rencontré deux hommes dans ma vie dont le souvenir me fait penser à Socrate ; ce sont Max Dehn et Brice Parain[20]. Ils avaient de Socrate, tel que nous l'imaginons d'après le témoignage de ses disciples, le rayonnement qui fait qu'on s'incline naturellement devant leur mémoire ; c'est là une qualité à la fois intellectuelle et morale que le mot de <<sagesse>> est peut-être le mieux fait pour exprimer, car la sainteté est autre chose. À côté du sage, le saint n'est peut-être qu'un spécialiste – un spécialiste de la sainteté ; le sage n'a pas de spécialité. Ceci n'est pas à dire, loin de là, que Dehn n'ait pas été un mathématicien de grand talent ; il a laissé une œuvre de haute qualité. Mais pour un tel homme la vérité est une, et la mathématique n'est que l'un des miroirs où elle se reflète, avec

[19] Publié une année après la parution de [DeSt–87].

[20] Philosophe et essayiste français, 1897–1971 ; ami d'Albert Camus ; apparaît dans « Vivre sa vie » de Jean-Luc Godard [Goda–62]. Puissent deux des phrases qu'il y prononce s'appliquer au présent texte : « Le mensonge c'est un des moyens de la recherche » et « Il faut passer par l'erreur pour arriver à la vérité ».

plus de pureté peut-être que dans d'autres. Esprit universel, il avait une profonde connaissance de la philosophie et de la mathématique grecques. »

## 10. Autour de 1910 – florilège

1907 : *Les Demoiselles d'Avignon,* de Picasso ; titre original : El Burdel de Aviñón.

1907-1909 et 1916 : Cours à Genève par Ferdinand de Saussure (1857-1913) et publication par ses élèves du *Cours de linguistique générale.*

30 juin 1908 : Chute d'une météorite géante à Toungouska, en Sibérie.

1908 : Quatrième congrès international des mathématiciens, Rome. Dehn et sa femme y participent.

1908-1914 : André Gide créateur et premier directeur de la *Nouvelle Revue française.*

1909 : Publication par Walter Ritz (1878-1909) de travaux de physique mathématique, dans lesquels il met au point une méthode de calcul, rapidement reprise en Russie par Galerkin, qui deviendra célèbre sous le nom de « méthode de Ritz-Galerkin », et qui est à la base de 50 % de tous les calculs scientifiques d'aujourd'hui [GaWa].

1909 : En juillet, un décret du cardinal Respighi, vicaire de Rome, interdit aux ecclésiastiques de la ville sainte la fréquentation du cinématographe, sous peine de suspension *a divinis*. (1913 : Ouverture au Vatican du cinéma pontifical réservé aux membres du clergé.)

1909 : Première traversée de la Manche en avion, le 25 juillet, par Louis Blériot.

Vers 1910 : Travaux de Luitzen Egbertus Jan Brouwer en topologie, dont : *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl,* Math. Ann. **70** (1911), 161–165 ; *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten,* Math. Ann. **71** (1912), 97–115 (degré de Brouwer, théorème du point fixe).

8 mars 1910 : Création à Copenhague d'une « Journée de la femme » par une confédération internationale de femmes socialistes, en vue de faire admettre le vote des femmes. Vote acquis en 1893 en Nouvelle-Zélande, en 1918 en Allemagne, en 1944-45 en France, et en[21] 1971 en Suisse (ce n'est même pas un record).

1910 : *Premier quatuor à cordes* en la mineur de Béla Bartok, créé le 19 mars à Budapest.

1910 : *Khodynka*, dernier écrit littéraire de Léon Tolstoï, mort le 7 novembre.

1910 : *Aquarelle abstraite* de Vassily Kandinsky.

1910 : Thèses de Erich Hecke et Richard Courant. 64 étudiants de Hilbert obtinrent leurs thèses entre 1898 et 1915, dont Dehn en 1900 ; et 10 autres après l'interruption de la guerre (d'après le « Mathematics Genealogy Project »). Pour comparaison : Selim Krein, 81 étudiants de thèse ; Andrei Kolmogorov, 79 étudiants ; Charles Ehresmann, 76 étudiants ; Wilhelm Magnus, 73 étudiants ; Beno Eckmann, 62 étudiants ; Heinz Hopf, 49 étudiants ; Henri Cartan, 14 étudiants ; etc, voir `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/extrema.php`

[21] Mais en 1957 dans la commune d'Unterbäch, en 1959 dans le canton de Vaud, et en 1990 dans le demi-canton d'Appenzell Rohdes-Intérieures, par décision du Tribunal fédéral.

1910-1913 : Créations parisiennes d'Igor Stravinski pour les ballets de Diaghilev : *L'oiseau de feu* le 25 juin 1910, *Petrouchka* le 13 juin 1911 et le *Sacre du Printemps* le 29 mai 1913.

1910-1913 : *Principia Mathematica,* de Alfred North Whitehead et Bertrand Russel (trois volumes).

1910 : Fondation de la Société Mathématique suisse, après celles des London Mathematical Society (1865), Société Mathématique de France (1872), New York Mathematical Society (1888) devenue l'American Mathematical Society (1894), Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1890), et Österreichische Mathematische Gesellschaft (1903), et avant celles des Unione Mathematica Italiana (1922) et European Mathematical Society (1990).

1911 : Frictions franco-allemandes au Maroc, le « coup d'Agadir » le 1er juillet.

1911 : Roald Amundsen atteint le pôle Sud, le 14 décembre, un mois avant Robert Falcon Scott (qui mourra dans une tempête au retour).

1912 : Création le 16 octobre du *Pierrot lunaire*, Op. 18 d'Arnold Schönberg (œuvre atonale, annonçant le dodécaphonisme).

1912 : Naufrage du Titanic le 14 avril.

1912 : Franz Kafka commence à rédiger *la Métamorphose*.

1912 : Cinquième congrès international des mathématiciens, Cambridge (G.B.).

1913 : Publication de *Du côté de chez Swann* de Marcel Proust, première partie de *à la recherche du temps perdu.*

1913 : Dernière course de la diligence Aigle Les Diablerets, le 22 décembre et mise en exploitation du chemin de fer électrique.

1913 : On compte 1370 automobiles à Genève.

1913 : *Die Idee der Riemannschen Fläche,* de Hermann Weyl.

1914 : Création du personnage de Charlot dans *Charlot vagabond*.

1914 : *Les gens de Dublin* de James Joyce.

1914 : *Grundzüge der Mengenlehre,* de Felix Hausdorff.

## Quelques empereurs, rois et présidents autour de 1910

GUILLAUME II, dernier empereur allemand et dernier roi de Prusse de 1888 à 1918.

EDOUARD VII, roi d'Angleterre de 1901 à 1910 ; GEORGES V de 1910 à 1936.

AIXINJUELUO PUYI, douzième et dernier empereur de la dynastie Qing de 1908 à 1912 ; SUN YAT-SEN, président de la République de Chine en 1912.

Theodore ROOSEVELT, président républicain des Etats-Unis de 1901 à 1909 ; William Howard TAFT, idem de 1909 à 1913 ; Thomas Woodrow WILSON, président démocrate de 1913 à 1921.

Armand FALLIÈRE, président de la Troisième République Française de 1906 à 1913, Raymond POINCARÉ. (Raymond, 1860-1934, cousin du mathématicien prénommé Henri, 1854-1912.)

VICTOR-EMMANUEL III, roi d'Italie de 1900 à 1944.

NICOLAS II, dernier tsar de toutes les Russies de 1894 à 1917.

Robert COMTESSE, président de la confédération suisse en 1904 et 1910.

Dates de quelques mathématiciens mentionnés dans l'article

Arthur CAYLEY, 1821–1895 ; fils[22] de Hopkins.
Peter Guthrie TAIT, 1831-1901.
Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR, 1845-1918 ;
fils de Kummer et Weierstrass.
Felix KLEIN, 1849-1925 ; fils de Plücker et Lipschitz.
Henri POINCARÉ, 1854-1912 ; fils de Hermite.
Walther VON DYCK, 1856-1934 ; fils de Klein.
Karl Emmanuel Robert FRICKE, 1861-1930 ; fils de Klein.
David HILBERT, 1862-1943 ; fils de Lindemann.
Wilhelm WIRTINGER, 1865-1945 ; fils de Weyr et von Escherich.
Poul HEEGAARD, 1871-1948 ; thèse[23] en 1898.
Walter RITZ, 1878-1909 ; influencé par Hilbert ;
thèse avec Woldemar Voigt (physicien).
⇒ MAX DEHN, 1878-1952 ; fils de Hilbert.
Heinrich Franz Friedrich TIETZE, 1880-1964 ; fils de von Escherich.
Solomon LEFSCHETZ, 1884-1972 ; fils de Story.
Ludwig BIEBERBACH, 1886-1982 ; fils de Klein.
James Waddell ALEXANDER II, 1888-1971 ; fils de Veblen.
Jakob NIELSEN, 1890-1959 ; fils de Landsbert et Dehn.
Heinz HOPF, 1894-1971 ; fils de Erhard Schmidt et Bieberbach.
Carl Ludwig SIEGEL, 1896-1981 ; fils de Landau.
Emil Leon POST, 1897-1954 ; fils de Keyser.
Hellmuth KNESER, 1898-1973 ; fils de Hilbert.
Oscar Ascher ZARISKI, 1899-1986 ; fils de Castelnuovo.
Pyotr Sergeyevich NOVIKOV, 1901-1975 ; fils de Luzin.
Andrei Andreyevich MARKOV, junior[24], 1903–1979.
Georges DE RHAM, 1903-1990 ; fils de Lebesgue.
Alonzo CHURCH, 1903-1995 ; fils de Veblen.
Hans FREUDENTHAL, 1905-1990 ; fils de Heinz Hopf.
Ruth MOUFANG, 1905-1977 ; fille de Dehn.
Kurt GÖDEL, 1906-1978 ; fils de Hahn.
Werner BURAU, 1906-1994 ; fils de Reidemeister.
Ott-Heinrich KELLER, 1906-1990 ; fils de Dehn.
André WEIL, 1906-1998 ; fils de Hadamard et Picard.
Erich KÄHLER, 1906-2000 ; fils de Lichtenstein.
Wilhelm MAGNUS, 1907-1990 ; fils de Dehn.
Karl Johannes Herbert SEIFERT, 1907-1996 ;
fils de Threlfall et van der Waerden.
Egbert Rudolf VAN KAMPEN, 1908-1942 ; fils de van der Woude.

[22] Au sens du « Mathematics Genealogy Project ». Presque toutes nos dates sont tirées du site correspondant : `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/`

[23] Remarquablement sans patron de thèse, bien que Heegaard ait été influencé par ses contacts directs avec KLEIN et Julius PETERSEN en 1998, et qu'il ait lu (et corrigé !) l'Analsis situs de POINCARÉ.

[24] Fils biologique de Andrei Andreyevich Markov, 1856-1922 ; ce dernier fils mathématique de Chebychev.

Alan TURING, 1912-1954 ; fils de Church.
Christos PAPAKYRIAKOPOULOS, 1914-1976.
Roger Conant LYNDON, 1917-1988 ; fils de Mac Lane.
Vladimir ROCHLIN, 1919-1984 ; fils de Kolmogorov et Pontryagin.
Graham HIGMAN, 1917-2008 ; fils de J.H.C. Whitehead.
William Werner BOONE, 1920-1983 ; fils de Church.
Ernst Paul SPECKER, 1920 ; fils de Heinz Hopf et Beno Eckmann.
René THOM, 1923-2002 ; fils de Henri Cartan.
John Leslie BRITTON, 1927-1994 ; fils de Bernhard H. Neumann.
Michel KERVAIRE, 1927-2007 ; fils de Heinz Hopf.
Sergei Ivanovich ADIAN, 1931 ; fils de Novikov.
Michael Oser RABIN, 1931 ; fils de Church.
John Robert STALLINGS, 1935-2008 ; fils de Fox.
Sergei Petrovich NOVIKOV, 1938 ; fils de Postnikov.
Friedhelm WALDHAUSEN, 1938 ; fils de Hirzebruch.
Andrew CASSON, 1943 ; fils de C.T.C. Wall.
Mikhael Leonidovich GROMOV, 1943 ; fils de Rochlin.
Gregori PERELMAN, 1966 ; fils d'Alexandrov et Burago.

## 11. Références


[AsFr] Matthias ASCHENBRENNER and Stefan FRIEDL, 3-*manifold groups are virtually residually p*, arXiv :1004.3619, 21 Apr 2010.

[BBBMP] Laurent BESSIÈRES, Gérard BESSON, Michel BOILEAU, Sylvain MAILLOT and Jean PORTI, *Geometrisation of* 3-*manifolds*, livre à paraître.

[BORS–02] Jean-Camille BIRGET, Alexander Yu. OL'SHANSKII, Eliyahu RIPS and Mark V. SAPIR, *Isoperimetric functions of groups and computational complexity of the word problem*, Annals of Math. **156** (2002), 467–518.

[Boye–02] Steven BOYER, *Dehn surgery on knots*, Chapter 4, pages 165–218, in *Handbook of geometric topology*, R.J. Daverman and R.B. Sher Editors, Elsevier, 2002.

[BrHa–99] Martin BRIDSON and André HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer, 1999.

[Brid–93] Martin BRIDSON, *Combings of semidirect products and* 3-*manifold groups*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **3** (1993), 263–278.

[Brid–02] Martin BRIDSON, *The geometry of the word problem*, in « Invitation to geometry and topology », Martin R. Bridson and Simon M. Salamon, Editors, Oxford Univ. Press (2002), 29–91.

[BuFu] Voir par exemple l'article *Geodesic dome*, dans Wikipedia :
`http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesic\_dome`

[Burn–11] William BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, second edition, Cambridge Univ. Press, 1911.

[BuZi–85] Gerhard BURDE and Heiner ZIESCHANG, *Knots*, de Gruyter, 1985.

[CaFe–76] James W. CANNON and Charles D. FEUSTEL, *Essential embeddings of annuli and Möbius bands in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 219–239.

[Cann–02] James W. CANNON, *Geometric group theory*, Chapter 6, pages 261–305, in *Handbook of geometric topology*, R.J. Daverman and R.B. Sher Editors, Elsevier, 2002.

[ChMa–82] Bruce CHANDLER and Wilhelm MAGNUS, *The history of combinatorial group theory : a case study in the history of ideas*, Springer, 1982.

[DaGu] François DAHMANI and Vincent GUIRARDEL, *The isomorphism problem for all hyperbolic groups*, arXiv :1002.25901v1, 12 Feb 2010.

[Daws–02] John W. DAWSON JR., *Max Dehn, Kurt Gödel, and the Trans-Siberian escape route*, Notices of the Amer. Math. Soc. **49**$^{9}$ (October 2002), 1068–1075.

[DeHe–07] Max Dehn & Poul Heegaard, *Analysis situs*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 1907–1910, vol. III.1.1, pages 153–220.

[Dehn–07] Max Dehn, *Berichtigender Zusatz zu III A B 3 Analysis situs*, Jahrbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **16** (1907), 573.

[Il s'agit d'une correction aux pages 186 et suivantes de [DeHe–07] ; « III A B 3 » décrit la place de l'article de Dehn et Heegaard dans l'*Enzyklopädie*. Compte-rendu récent de [Dehn–07] : voir [Stil–79].]

[Dehn–a] Max Dehn, *Lectures on group theory*, chapitre d'un cours de Dehn, non publié, rédaction vraisemblablement de 1909 ou 1910, article 1 de [DeSt–87].

[Dehn–b] Max Dehn, *Lectures on surface topology*, autre chapitre du même cours, article 2 de [DeSt–87].

[Dehn–10] Max Dehn, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, Math. Ann. **69** (1910), 137–168, voir aussi *On the topology of three-dimensional space*, Paper 3 in [DeSt–87].

[Dehn–11] Max Dehn, *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Math. Ann. **71** (1912), 116–144, voir aussi *On infinite discontinuous groups*, Paper 4 in [DeSt–87].
Le volume **71** des Mathematische Annalen est daté de 1912. Mais le fascicule 1 (pages 1–144) est daté du 25 juillet 1911, le fascicule 2 du 19 septembre 1911, je n'ai pas vu le fascicule 3, et le fascicule 4 est daté du 23 janvier 1912. C'est pour cela que nous adoptons [Dehn–11] pour cette référence, souvent citée comme datant de 1912.

[Dehn–12] Max Dehn, *Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen*, Math. Ann. **72** (1912), 413–421, voir aussi *Transformation of curves on two-sided surfaces*, Paper 5 in [DeSt–87].

[Dehn–14] Max Dehn, *Die beiden Kleeblattschlingen*, Math. Ann. **75** (1914), 402–413, voir aussi *The two trefoil knots*, Paper 6 in [DeSt–87].

[Dehn–38] Max Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Math. Ann. **69** (1938), 145–206, voir aussi *The group of mapping classes*, Paper 8 in [DeSt–87].

[DeSt–87] Max Dehn, *Papers on group theory and topology, translated and introduced by John Stillwell*, Springer, 1987.

[EiSt–52] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, 1952 (Second printing 1957).

[Eppl–95] Moritz Epple, *Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory*, Hist. Math. **22** (1995), 371–401.

[Eppl–99a] Moritz Epple, *Geometric aspects in the development of knot theory*, Chapter 11, pages 301–357 in [Hist–99].

[Eppl–99b] Moritz Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie*, Vieweg, 1999.

[Ep+5–92] David B.A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V.F. Levy, Michael S. Paterson and William P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.

[Feus–76] Charles D. Feustel, *On the torus theorem and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **217** (1976), 1–43.

[FrKl–97] Robert Fricke & Felix Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* (2 volumes), Teubner, 1897 et 1912. [Je ne connais que la 2e édition, de 1912. Voir notamment les figures des pages 82, 230–233, 555–564, 621 du volume 1, et 280, 567 du volume 2.]

[FrKT–94] Michael H. Freedman, Vyacheslav S. Krushkal and Peter Teichner, *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for* 2*-complexes in* $\mathbf{R}^4$, Mathematical Research Letters **1** (1994), 167–176.

[GaWa] Martin J. Gander and Gerhard Wanner, *From Euler, Ritz and Galerkin to modern computing*, prépublication, avril 2010,
`http://www.unige.ch/~gander/preprints.php`

[Goda–62] Jean-Luc Godard, *Vivre sa vie*, 1962. Conversation entre Nana et Brice Parain :
`http://www.youtube.com/watch?v=tVC8IDVZZuI`

[Gord–99] Cameron Gordon, 3*-dimensional topology up to 1960*, Chapter 15, pages 449–489 in [Hist–99].

[Gord–05] Cameron GORDON, *Kneser's work on* 3*-manifolds*, pages 808–821 in [Knes–05].

[Gord–09] Cameron GORDON, *Dehn surgery and* 3*-manifolds*, in « Low dimensional topology », T.S. Mrowka and P.S. Ozsváth Editors, IAS/Park City Math. Ser. **15**, Amer. Math. Soc. (2009), 21–71.

[Grom–87] Misha GROMOV, *Hyperbolic groups*, in « Essays in Group Theory », S.M. Gersten Editor, M.S.R.I. Publ. **8**, Springer (1987), 75–263.

[Grom–93] Misha GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Volume 2 of « Geometry group theory, Sussex 1991 », G.A. Niblo and M.A. Roller, Editors, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Gugg–77] H. GUGGENHEIMER, *The Jordan curve theorem and an unpublished manuscript by Max Dehn*, Arch. Hist. Exact Sci. **17** (1977), 193–200.

[GuMa–86] Lucien GUILLOU et Alexis MARIN, *A la recherche de la topologie perdue. I Du côté de chez Rohlin. II Du côté de Casson*, Birkhäuser, 1986.

[Hemp–76] John HEMPEL, 3*–manifolds*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1976.

[Hemp–87] John HEMPEL, *Residual finiteness for* 3*-manifolds*, in "Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984)", Ann. of Math. Stud. **111**, Princeton Univ. Press (1987), 379–396.

[Hist–99] Ioan Mackenzie JAMES (Editor), *History of topology*, Elsevier, 1999.

[HoEO–05] Derek F. HOLT, Bettina EICK, and Eamonn A. O'BRIEN, *Handbook of computational group theory*, Champman & Hall/CRC, 2005.

[Iver–92] Birger IVERSEN, *Hyperbolic geometry*, LMS Student Texts **25**, Cambridge Univ. Press, 1992.

[John–80] David Lawrence JOHNSON, *Topics in the theory of group presentations*, Cambridge University Press, 1980.

[Kauf–83] Louis H. KAUFFMAN, *Formal knot theory*, Princeton University Press, 1983.

[Kerv–69] Michel KERVAIRE, *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 67–72.

[KlFr–90] Felix KLEIN & Robert FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, (2 volumes), Teubner, 1890 et 1892. [Voir notamment les figures des pages 370 et 464 du volume 1.]

[Knes–29] Hellmuth KNESER, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **38** (1929), 248–260, [Knes–05], 147–159.

[Knes–05] Hellmuth KNESER, Gesammelte Abhandlungen – Collected papers, W. de Gruyter, 2005.

[Lefs–24] Solomon LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, 1924.

[Lefs–68] Solomon LEFSCHETZ, *A page of mathematical autobiography*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 854–879.

[Lynd–60] Roger C. LYNDON, *Groups with parametric exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 518–533.

[Magn–78] Wilhelm MAGNUS, *Max Dehn*, Math. Intelligencer $\mathbf{1}^3$ (1978), 132–143.

[Magn–94] *The mathematical legacy of Wilhelm Magnus, Groups, geometry and special functions*, Conference on the legacy of Wilhelm Magnus, May 1-3, 1992, William Abikoff, Joan S. Birman, and Kathryn Kuiken, Editors, Contemporary Mathematics **169** (1994).

[MaKS–66] Wilhelm MAGNUS, Abraham KARRASS and Donald SOLITAR, *Combinatorial group theory : Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience, 1966.

[Mesk–74] Stephen MESKIN, *A finitely generated residually finite group with an unsolvable word problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **43** (1974), 8-10.

[Mill–71] Charles F. MILLER III, *Group-theoretic decision problems and their classification*, Annals of Math. Studies **68**, 1971.

[Mill–92] Charles F. MILLER III, *Decision problems for groups – survey and reflections*, in « Algorithms and classification in combinatorial group theory », G. Baumslag and C.F. Miller III, Editors, M.S.R.I. Publ. **23** (1992), 1–59.

[Miln–82] John Milnor, *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 9–24.

[Papa–57a] Christos Dimitriou Papakyriakopoulos, *On solid tori*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 281–299.

[Papa–57b] Christos Dimitriou Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Annals of Math. **66** (1957), 1–26.

[Penn] *Interview with Film Director Artur Penn*, `http://www.thirteen.org/bucky/penn.html`

[Poin–82] Henri Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens*, Acta Math. **1** (1882), 1–62 (= Oeuvres, tome II, 108–168).

[Poin–83] Henri Poincaré, *Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions*, Bull. Soc. Math. France **11** (1883), 112–125 (= Oeuvres, tome IV, 57–69).

[Poin–95] Henri Poincaré, *Analysis situs*, J. de l'école Polytechnique **1** (1895), 1–123 (= Oeuvres, tome VI, 193–288).

[Poin–04] Henri Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Math. Palermo **18** (1904), 45–110 (= Oeuvres, tome VI, 435–498).

[Prea–06] Jean-Philippe Préaux, *Conjugacy problem in groups of oriented geometrizable* 3-*manifolds*, Topology **45** (2006), 171–208.

[Prea] Jean-Philippe Préaux, *Conjugacy problem in groups of non-oriented geometrizable* 3-*manifolds*, arXiv :math/0512484v1, 21 Dec 2005.

[Rham–69] Georges de Rham, *Lectures on introduction to algebraic topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969.

[Robi–96] Derek J.S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Second Edition, Springer, 1996.

[Roch–51] Vladimir Abramovich Rochlin, *A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one*, Doklady Akad. Nauk SSSR **81** (1951), 355–357.

[Rolf–76] Dale Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976 [reprinted with corrections, AMS Chelsea Publishing, 2003].

[Rotm–95] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Fourth Edition, Springer, 1995

[Save–02] Nikolai Saveliev, *Invariants for homology* 3-*spheres*, Encyclopaedia of mathematical sciences, Springer, 2002.

[SaBR–02] Mark V. Sapir, Jean-Camille Birget and Eliyahu Rips, *Isoperimetric and isodiametric functions of groups*, Annals of Math. **156** (2002), 345–466.

[Sela–95] Zlil Sela, *The isomorphism problem for hyperbolic groups, I*, Annals of Math. **141** (1995), 217–283.

[SeTh–80] Herbert Seifert and William Threlfall, *A textbook of topology*, Academic Press, 1980. (Traduction du « Lehrburh der Topologie » de 1934).

[Sher–94] R.B. Sher, *Max Dehn and Black Mountain College*, Math. Intelligencer $\mathbf{16}^1$ (1994), 54–55.

[Sieg–64] Carl Ludwig Siegel, *Zur Geschichte der Frankfurter Mathematischen Seminars*, Frankfurter Universitätsreden **36** (1964) = Gesammelte Abhandlungen III, 462–474. Traduction anglaise : *On the history of the Frankfurt mathematics seminar*, Math. Intelligencer $\mathbf{1}^4$ (1979), 223–232.

[Stal–60] John Stallings, *On the loop theorem*, Annals of Math. **72** (1960), 12–19.

[Stal–65] John Stallings, *Embedding homotopy types into manifolds*, Unpublished paper (1965), `http://math.berkeley.edu/~stall/embkloz.pdf`

[Stal–71] John Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale Mathematical Monographs **4**, 1971.

[Stal–01] John Stallings, *The power of the works of Papakyriakopoulos in* 3-*manifolds*, Preprint (March 15, 2001), `http://math.berkeley.edu/~stall/papapaper.pdf`

[Stil–79] John Stillwell, *Letter to the Editors*, Math. Intelligencer $\mathbf{1}^4$ (1979), 192.

[Stil–82] John Stillwell, *The word problem and the isomorphism problem for groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 33–56.

[Stil–93] John STILLWELL, *Classical topology and combinatorial group theory*, second edition, Springer, 1993.

[Stil–99] John STILLWELL, *Max Dehn*, Chapter 36, pages 965–978 in [Hist–99].

[Thom–51] René THOM, *Quelques propriétés des variétés bords*, Coll. Top. Strasbourg, 1951, no V, 10 pages.

[Thur–76] William P. THURSTON, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms or surfaces*, circulated preprint, 1976 ; Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.

[Tiet–42] Heinrich TIETZE, *Ein Kapitel Topologie. Zur Einführung in die Lehre von den verknoteten Linien*, Teubner, 1942.

[ToCo–36] John Arthur TODD and Harold Scott MacDonald COXETER, *A practical method for enumerating cosets of a finite abstract group*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. 5, (1936), 26–34.

[Wald–68] Friedhelm WALDHAUSEN, *The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible* 3*-manifolds*, Annals of Math. **88** (1968), 272–280.

[Wald–69] Friedhelm WALDHAUSEN, *On the determination of some bounded 3-manifolds by their fundamental groups alone*, Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications (Herceg-Novi, Yugoslavia, 1968), Beograd (1969), pp. 331–332.

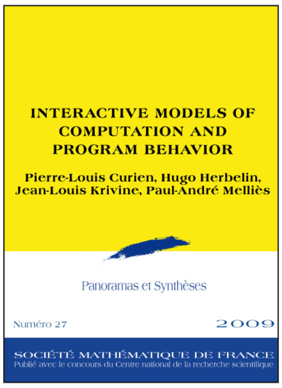
[Weil–91] André WEIL, *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, 1991.

[Zeem–02] Erik Christopher ZEEMAN, *On Hilbert's third problem*, Mathematical Gazette **86** (2002), 241–247.

[Zism–99] Michel ZISMAN, *Fibre bundles, fibre maps*, Chapter 22, pages 605–629 in [Hist–99].

[Zong–05] Chuanming ZONG, *What is known about unit cubes*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 181–211.

L'auteur a très largement profité de nombreuses conversations avec Claude Weber, au siècle passé pour son éducation topologique en général, et plus récemment pour la rédaction de ce texte en particulier. Pour plusieurs remarques utiles sur des versions préliminaires du texte et des encouragements à divers stades du travail, je remercie aussi Michel Boileau, Martin Bridson, Etienne Ghys, Cameron Gordon, Tatiana Nagnibeda, Mark Powell, Jean-Philippe Préaux et Thierry Vust.




Panoramas et Synthèses 27

## Interactive Models of Computation and program behavior

P.-L. Curien, H. Herbelin, J.-L. Krivine, P.-A. Melliès

Ce volume rassemble trois contributions portant sur le domaine logique et calcul et qui reflètent un courant actuel d'explicitation du contenu interactif des preuves et des programmes. Les trois chapitres peuvent être lus indépendamment et utilisent ou introduisent des outils fondamentaux du domaine: catégories, réalisabilité, machines abstraites. Un thème unificateur à travers l'ensemble du volume est celui des jeux et stratégies, qui transforme la correspondance entre preuves et programmes (connue sous le nom d'isomorphisme de Curry-Howard) en un triangle dont le troisième sommet met en valeur l'interaction et la dualité entre un programme et son contexte d'exécution, entre une preuve et des contre-preuves. L'introduction au volume place les contributions en perspective et offre une initiation rapide au lambda-calcul qui est et demeure l'épine dorsale de tout ce domaine de recherche.

*This volume contains three contributions in the field of logic and computation, that reflect current trends towards an interactive account of the meaning of proofs and programmes. The contributions can be read independently and use or introduce fundamental tools in the field: categories, realizability, abstract machines. Throughout the volume, a unifying theme is that of games and strategies, that turns the correspondance between proofs and programmes (the so-called Curry-Howard isomorphism) into a triangle whose third corner emphasizes interaction and duality between a program and its environment or between a proof and counter-proofs. The introduction to the volume places the contributions in perspective and provides a gentle beginner's introduction to the lambda-calculus, which is and remains the backbone of the whole field.*

prix public* : 48 € - prix membre* : 34 €
* frais de port non compris

**Société Mathématique de France**

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

**http://smf.emath.fr**

## Prise de position de la Société Mathématique de France sur l'évolution du concours de l'agrégation

**(mai 2010)**

La SMF a déjà pris position à plusieurs reprises cette année sur les conséquences de la réforme dite de masterisation des concours d'enseignants, soit directement en novembre 2009, cf. « Masterisation, quelques aspects plus spécifiques aux mathématiques » soit à travers le Forum des Sociétés Savantes en novembre 2009, cf. « Réformons la Réforme » et en février 2010, cf. « Masterisation : de mal en pis ». Les inquiétudes exprimées dans ces textes ont été confirmées récemment, et conduisent le conseil d'administration de la SMF à prendre de nouveau position sur le sujet spécifique du concours de l'agrégation, et à exprimer son désaccord et ses plus vives inquiétudes en ce qui concerne trois points particulièrement graves de cette réforme : la nouvelle épreuve non disciplinaire, l'absence de mesures transitoires pour l'an prochain et l'impossibilité de commuter l'année de M2 et la préparation à l'agrégation. On soulignera également les conséquences négatives de l'évolution actuelle pour la formation des enseignants de l'enseignement supérieur.

L'arrêté du 28 décembre 2009 sur les modalités d'organisation du concours de l'agrégation introduit une nouvelle épreuve « agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable » dont le référentiel est défini dans le point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006. Les exemples de sujets mis en ligne sur le site du Ministère de l'Éducation Nationale et les « pistes de réponses attendues » font apparaître des référentiels juridiques et administratifs considérables. Le corpus de connaissances associé aux questions suggérées est vague et généraliste, les dérives possibles vers une épreuve doctrinaire n'étant pas exclues.

Cette épreuve sera amalgamée à l'une des épreuves orales disciplinaires usuelles, amenant des modifications arbitraires et non concertées des différents coefficients des épreuves. En mathématiques, les trois épreuves orales, algèbre-géométrie, analyse-probabilités, modélisation, étaient toutes affectées d'un coefficient 1. Les deux épreuves analyse-probabilités, modélisation et leurs coefficients sont inchangés, mais le texte remplace l'épreuve algèbre-géométrie par une épreuve « algèbre-géométrie et compétence "Agir en fonctionnaire de l'État"» à coefficient 2, avec un quart des points pour la compétence « Agir en fonctionnaire de l'État ». Ce nouveau coefficient a été introduit arbitrairement dans le seul but de donner un poids à cette compétence non disciplinaire. Son introduction n'est justifiée par aucune réflexion disciplinaire, et sera préjudiciable aux équilibres actés de longue date dans la discipline. Pour cette nouvelle épreuve double, le candidat se verra remettre simultanément un sujet de mathématiques et un texte portant sur la compétence « Agir en fonctionnaire de l'État ». Sa durée sera portée à 3h30 de préparation et presque 1h30 d'interrogation. À la suite de l'interrogation de mathématiques, le candidat devra s'exprimer et sera questionné sur le texte portant sur « Agir en fonctionnaire de l'État ». Les conditions pour qu'un candidat puisse sereinement présenter le meilleur de sa démarche seront probablement loin d'être remplies.

Même si l'interrogation est conduite uniquement et dans sa totalité par des experts disciplinaires, il sera difficile d'en faire une évaluation cohérente à partir d'attendus aussi disparates. De nombreux membres de jurys, gênés par la nature non disciplinaire, voire potentiellement idéologique de cette épreuve, risquent de ne plus être volontaires pour y participer.

Qui plus est, une étude globale menée par la Société des Agrégés montre que le poids de la compétence « Agir en fonctionnaire de l'État » varie en pourcentage de la note finale du concours de l'agrégation de 2,47% en lettres modernes à 8,33% en mathématiques. Cette variation considérable est un comble pour une compétence non disciplinaire !

La SMF rappelle qu'une éventuelle évaluation faisant appel à des connaissances administratives trouverait beaucoup plus naturellement sa place à l'issue de l'année de fonctionnaire stagiaire pour la titularisation.

Les professeurs agrégés sont destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire mais aussi à l'enseignement supérieur (Universités, IUT, Grandes Écoles, Classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs). Les textes parus récemment sont susceptibles de modifier en profondeur la typologie du recrutement des futurs agrégés et les missions qui leur seront confiées.

L'article 3 du décret 2009-914 du 28 juillet 2009 stipule que *« peuvent se présenter au concours externe les candidats justifiant de la détention d'un master ou d'un titre ou diplôme reconnu équivalent par le Ministre chargé de l'Éducation »* ; il entre en vigueur dès la session 2011. Ne pourront s'inscrire en juin 2010 pour la session 2011 que les candidats titulaires d'un master ou équivalent, ce qui représente une population très réduite par rapport au flux usuel de candidats (voir les statistiques en annexe, transposées à la session 2009 ; notons en particulier que, rapporté au nombre de présents, le taux de réussite au concours des candidats titulaires du master est inférieur au taux de réussite globale). Les titulaires d'un master 1 (étudiants ou normaliens) et la grande majorité des admissibles/non-admis de la session 2010 ne pourront pas s'inscrire. La situation fait craindre la fermeture, au moins temporaire, de nombreuses préparations, dont celles des ÉNS.

Si une formation disciplinaire en six ans est a priori un gage de qualité, le positionnement de la préparation de l'agrégation après le master crée une rupture du cycle habituel des études scientifiques. S'ils souhaitent préparer l'agrégation, de nombreux étudiants devront surseoir à leur entrée dans les études doctorales et peut-être ainsi perdre de précieuses occasions de financement pour mener à bien un programme de recherche. Sans une préparation intensive et complète d'une année, les statistiques montrent que les chances de succès aux concours sont faibles, ce qui rend probablement inefficace et sûrement dommageable la poursuite conjointe d'une formation doctorale et de la préparation au concours.

Les études doctorales, comme la seconde année de master à finalité recherche, sont des études scientifiques très spécialisées. L'année de préparation à l'agrégation est, au contraire, une année généraliste qui vise à donner aux étudiants une culture scientifique de haut niveau couvrant tout le champ de la discipline. Dans le cas où cette année de préparation s'intercale entre l'année de master 2 et les études doctorales, elle constitue une rupture dans le cursus des étudiants et l'on peut craindre que les meilleurs renoncent à se présenter à l'agrégation ou inversement se détournent de la recherche. Il serait dommageable que les futurs jeunes chercheurs, souvent très spécialisés, soient dans l'impossibilité de bénéficier de l'année de consolidation généraliste que constitue la préparation à l'agrégation (tant en mathématiques que dans d'autres disciplines).

On peut ainsi s'attendre à ce que les futurs agrégés soient beaucoup plus orientés vers l'enseignement secondaire et que leurs contacts avec la recherche deviennent très ténus. Tout laisse à penser que les reports de stage pour études seront de moins en moins facilement accordés. Déjà, il apparaît dans la note au recteurs parue au *Bulletin officiel* du 29 avril 2010 que les reçus à l'agrégation à la session 2010 non normaliens ne pourront pas demander de report pour suivre la seconde année de master. Dans la pratique, les agrégés-docteurs risquent de disparaître, l'agrégation n'étant plus alors qu'un diplôme de recrutement pour les professeurs de lycée. Nous arriverions à une situation paradoxale pour les professeurs de classes préparatoires en contradiction avec la volonté de l'Inspection Générale de mathématiques de recruter, à ce niveau, des professeurs agrégés-docteurs, ce qui est le cas actuellement. Un retour en arrière, avec des professeurs de CPGE non docteurs, serait, de l'avis de tous, extrêmement dommageable, et contraire aux conclusions du « Rapport Philip » sur le rapprochement entre Grandes Écoles et universités. Les Sociétés Savantes (cf. les textes communs SMF-SFP-SFC) se sont aussi exprimées à plusieurs reprises en ce sens, demandant une plus grande hybridation des deux systèmes (CPGE-Université).

La SMF s'inquiète donc de l'évolution du concours de l'agrégation de mathématiques et demande qu'une large réflexion soit engagée à ce propos dans les plus brefs délais.

Les textes cités sont disponibles sur le site de la SMF `http://smf.emath.fr`

## Annexe

| | Session 2009 | Session 2009 |
|---|---|---|
| | Tous candidats | Candidats de niveau M2 ou équivalent |
| Inscrits | 2351 | 543 |
| Présents | 1384 | 263 |
| Admissibles | 553 | 87 |
| Admis | 252 | 21 |

TAB. 1: Éléments statistiques comparatifs portant sur l'agrégation de mathématiques

*Ndlr : Depuis le vote de cette position, différents textes ministériels sont parus, notamment le décret du 28 mai 2010 affirme l'obligation de justifier du certificat de* *compétences en langues CLES2 et du certificat de compétences en informatique et internet pour enseignant C2i2e QUI S'EFFECTUE DEVANT LES ÉLÈVES, ajoutant à la confusion générale. Le décret du 29 juillet 2009 stipule que* peuvent se présenter au concours externe les candidats justifiant de la détention d'un master ou d'un titre ou diplôme reconnu équivalent. *Le décret du 28 mai 2010 précise que la validité du diplôme s'apprécie à la date d'admissibilité au concours. Le texte du CA de la SMF a été repris et mis à jour dans le communiqué du Forum des Sociétés savantes du 26 juin (cf. notre site web). Suite à ce communiqué, un rendez-vous a été demandé avec des responsables du MEN afin d'éclaircir les modalités actuelles d'organisation et d'inscription aux concours. Enfin, une réunion des responsables de masters et de préparations aux concours d'enseignants en mathématiques a eu lieu lors des journées annuelles de la SMF, le 26 juin, à l'IHP. Les informations concernant ces réunions seront disponibles sur notre site.*

## Position de la SMF pour la consultation sur les programmes du cycle terminal du lycée

**(mai 2010)**

Le projet de programme des classes de première générale avec orientation pour les classes de terminale a été mis en ligne le 3 mai 2010 pour consultation jusqu'au 28 mai 2010[1].

Les inquiétudes exprimées par la SMF après la présentation de la réforme en octobre 2009, dans un communiqué joint avec l'APMEP en novembre 2009, puis au sein du Forum des Sociétés Savantes en janvier 2010, ne sont pas apaisées par ces projets, ce qui nous amène à apporter une contribution à la consultation proposée par le Ministère de l'Éducation Nationale.

Nous regrettons que ces programmes, qui ne seront mis en œuvre qu'en septembre 2011, ne fassent pas l'objet d'une concertation plus longue, et que le programme provisoire de 2010-2011 ne consiste qu'en la mise entre parenthèses d'un certain nombre de notions dans le programme pré-existant.

Bien qu'il soit regrettable de ne pas avoir une vision cohérente de l'ensemble du cycle terminal, les détails des programmes de terminale n'étant pas donnés, un certain nombre de problèmes sont déjà visibles. Nous serons très vigilants sur ces programmes de terminale et particulièrement sur ceux de la spécialité mathématiques et de la nouvelle spécialité « informatique et sciences du numérique ».

[1] http://media.eduscol.education.fr/file/consultation/93/6/premiere_projet_prog_2010_ES-L_Math_143936.pdf
http://media.eduscol.education.fr/file/consultation/93/2/premiere_projet_prog_2010_S_Math_143932.pdf

## Des intentions affichées en inadéquation avec les exigences formulées

Les ambitions et consignes sont identiques dans toutes les séries, alors que les exigences devraient clairement être différentes. Notons que la seule différence notable est la disparition regrettable du mot « démonstration » en ES-L. L'objectif général affiché en première est ambitieux : rechercher de façon autonome, mener des raisonnements, développer le sens critique et communiquer. Le projet de programmes permet difficilement de tenir ces objectifs, l'accent étant plus mis sur les automatismes que sur la réflexion.

Commençons par le projet de première ES-L, dont le titre de « mathématiques appliquées » prévu dans le projet de novembre 2009 n'apparaît plus. Le programme de 1ES, assez peu modifié, est maintenant aussi celui de l'option proposée en 1L. L'option de mathématiques pré-existante en L, qui apportait pourtant aux littéraires une approche plus historique (avec par exemple différents systèmes de numération) et plus pratique (étude des perspectives dans l'espace), avait déjà disparu de la plupart des lycées. L'uniformisation va accentuer cette tendance, ce qui fermera davantage de voies d'orientation de l'enseignement supérieur pour les élèves de L. Nous avons déjà dénoncé cette aberration qui est en contradiction avec la première phrase du préambule du projet présenté : *« L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études. »* .

Rentrons maintenant dans le détail du programme de première S :

– Les études de fonctions sont très formatées (dérivation/étude de signe...), les études de suites qui posent généralement bien des problèmes aux élèves sont seulement abordées et la notion de limite n'apparaît qu'intuitivement en lien avec le nombre dérivé. En particulier l'étude des asymptotes a disparu du programme (comme d'ailleurs de celui de 1ES).

– La géométrie, thème propice à la prise d'initiative, à l'encouragement d'une démarche personnelle et à la formation au raisonnement, se réduit comme peau de chagrin (plus de barycentres, plus de transformations), ce que nous avions déjà dénoncé dans le programme de seconde. La part de géométrie analytique pour laquelle l'élève a moins besoin de réfléchir que d'appliquer des méthodes connues, est prépondérante. La géométrie dans l'espace, dont l'importance au vu de ses applications dans d'autres champs des mathématiques et de la physique est notée dans le programme de seconde, disparaît du programme de première pour réapparaître peut-être dans celui de terminale.

– La difficulté de l'introduction des probabilités tient en la mise en place du modèle théorique (univers et choix de la probabilité). Ceci étant présumé acquis en classe de seconde et aucune incitation à l'approfondir n'étant donnée, cela revient à privilégier en première en probabilités ce qui relève uniquement d'une bonne lecture de l'énoncé et de l'application directe des formules du cours. L'introduction de la loi binomiale en première paraît pour le moins prématurée et surprenante : définir les coefficients binomiaux comme nombre de chemins d'un arbre et ne pas pouvoir les utiliser pour des problèmes de dénombrements est une hérésie mathématique. Tous les paramètres de la loi sont admis, alors que leur calcul serait très abordable en terminale. De même, bien que les tests d'hypothèses s'appuient sur des résultats très subtils de théorie des probabilités (théorème de la limite centrale, convergence en loi et en probabilité...), on utilise un ordinateur pour expérimenter et les constatations deviennent théorème, sans démonstration. Enfin, l'introduction annoncée de la loi normale en terminale S et ES sans explication supplémentaire laisse perplexe. Si le but est juste de lire la table de la loi normale centrée réduite, alors on peut s'interroger sur l'intérêt. Si la finalité en est l'utilisation pour les tests d'hypothèses, alors la mise en œuvre nécessitera un temps important et non disponible.

## Une mise au ban du calcul numérique et algébrique au profit de l'utilisation de logiciels

Les lacunes et difficultés croissantes des élèves à l'entrée en seconde en calcul, aussi bien numérique qu'algébrique, sont bien connues des professeurs. Cet état de fait alarmant est entériné par le projet de programme sous le prétexte fallacieux de gain de temps :

– En première ES-L *« On évite toute technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. »*

– En première S, *« En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements », « Le calcul de dérivées dans des cas simples est un attendu du programme ; dans les cas de situations plus complexes, on sollicite les logiciels de calcul formel »* .

Pour comprendre les outils mathématiques, il est pourtant indispensable de les manipuler et de s'entraîner au calcul (étape incontournable de tout raisonnement mathématique), quitte parfois à se heurter à des difficultés techniques et à les surmonter. Il est illusoire d'ignorer cet apprentissage basique. Le remplacer par l'utilisation systématique d'un logiciel de calcul numérique ou formel renforcera l'élève dans ses convictions erronées que le calcul à la fois ne sert à rien (et donc les mathématiques par extension) puisque n'importe quel ordinateur est capable de l'effectuer, et est extrêmement complexe puisqu'on ne peut pas imaginer le faire soi-même. Rappelons que l'usage de la calculatrice est interdit dans la plupart des épreuves de mathématiques de l'enseignement supérieur et des concours. Plus généralement, les meilleurs logiciels ont leurs limites et leur usage nécessite une bonne connaissance du calcul pour maîtriser les problèmes d'arrondis dans les calculs numériques ou de simplification des expressions en calcul formel.

## Un saut conceptuel encore plus grand de la première à la terminale S

Toutes les notions difficiles à appréhender sont repoussées à la terminale S. Au lieu de les assimiler progressivement sur deux ans (ancien programme de 1S : variations des fonctions composées, calculs de limites et premières formes indéterminées, asymptotes, études des fonctions trigonométriques...) voire trois ans (ancien programme de seconde : orthogonalité dans l'espace), les élèves n'auront d'autre choix que de tout comprendre en une seule année.

Ceci est la conséquence directe, déjà dénoncée par la SMF, de l'horaire réduit à 4 heures en première et d'une volonté d'harmonisation maximale des programmes de 1S et 1ES/1L. Les élèves qui croiront avoir un niveau correct en 1S risquent de se retrouver en grande difficulté en TS. À long terme, cela entraînera une désaffection de la voie scientifique au lycée et de la poursuite d'études supérieures scientifiques. Paradoxalement, la voie S n'en restera pas moins dans l'esprit du public la filière d'excellence puisque deux signaux concordants seront envoyés :

– Le programme ES est très largement inclus dans le programme de S en vue d'une hypothétique passerelle en fin de première à laquelle nous avons du mal à croire en pratique.

– Aucune différentiation de programme de mathématiques n'est proposée en L, et l'option de mathématiques y est mise en concurrence directe avec des matières littéraires essentielles en voie littéraire. Rappelons que nous avons, avec l'APMEP, puis au sein du Forum des Sociétés Savantes, demandé la présence de deux options en série L.

# Les besoins de formation en mathématiques des professeurs des écoles

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire est un enjeu pour l'enseignement des mathématiques parce qu'il est important de concevoir dès le départ les mathématiques comme un moyen d'interroger le monde qui nous entoure et de le comprendre et non comme une suite de règles à apprendre et à appliquer. De plus, les savoirs mathématiques sont cumulatifs et à l'école primaire se construisent déjà les bases sur lesquelles vont s'accrocher les savoirs scientifiques du collège : les nombres, les mesures, les premiers concepts géométriques en lien avec l'usage des instruments de tracé. Il est essentiel que ces bases soient bien construites, avec du sens, pour qu'elles puissent se développer de manière sûre. Je voudrais ici insister sur le fait que la construction du sens et celle des algorithmes et automatismes ne s'opposent pas, au contraire. Les automatismes de calcul sont indispensables pour libérer de la place en mémoire dans la résolution de problèmes mais ils doivent fonctionner avec du sens d'une part pour avoir un contrôle sur les erreurs, d'autre part pour pouvoir étendre leur domaine de validité, par exemple dans le passage des entiers aux décimaux.

La formation en mathématiques des professeurs des écoles est un point crucial pour la formation en mathématiques des élèves (par exemple, il est dommageable pour le rapport aux mathématiques d'un élève qu'un professeur puisse lui dire que ce qu'il fait est faux alors que c'est seulement inattendu et incomplet ou mal exprimé, simplement parce qu'il ne comprend pas la démarche de l'élève) et il est essentiel que les mathématiciens s'y intéressent mais les besoins en mathématiques des professeurs des écoles ne sont pas faciles à identifier de l'extérieur car c'est au cœur de l'enseignement des mathématiques à l'école que se manifestent les besoins du professeur des écoles en mathématiques pour enseigner, tant les décisions pédagogiques sont liées aux choix qui mettent en jeu le contenu enseigné lui-même. En effet, parmi les connaissances nécessaires pour enseigner, outre les connaissances purement institutionnelles sur le fonctionnement de l'école, les connaissances purement disciplinaires, les connaissances transversales ou purement pédagogiques indépendantes du contenu (connaissances sur le développement de l'enfant, gestion de groupes...), il y a des connaissances que j'appellerai didactiques qui sont à l'interface entre le disciplinaire et le pédagogique et touchent tant les choix d'activités pour les élèves que l'organisation de leur travail. C'est à la formation disciplinaire, y compris didactique que je m'intéresserai dans la suite, en donnant quelques exemples de tels savoirs.

La formation en mathématiques des professeurs des écoles est une question délicate et complexe parce qu'elle doit répondre à un certain nombre de contraintes difficiles à concilier et incontournables, dont les principales sont :

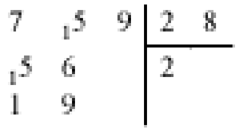
– la polyvalence, incontournable si l'on ne veut pas multiplier les intervenants auprès des jeunes enfants qui ont besoin de repères stables ; de plus un enseignant unique peut plus facilement coordonner les différents aspects de la formation et éviter ainsi la séparation précoce des disciplines. Elle a évidemment une incidence sur l'horaire de formation dans chaque discipline.

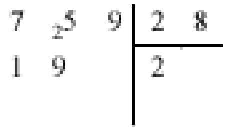
– l'hétérogénéité du public en formation initiale ; cette hétérogénéité est nécessaire et même souhaitable, en lien avec la polyvalence ; les enseignants en formation apprennent aussi les uns des autres et la diversité des formations initiales est une richesse pour nourrir la polyvalence et la coopération entre les futurs enseignants.

– le fait que les mathématiques du lycée (disons jusqu'en seconde, avant le partage en filières) ne constituent pas un cadre théorique adapté pour penser les mathématiques de l'enseignement primaire. Ce fait est difficilement contournable dans une société moderne qui demande aux citoyens des savoirs de plus en plus variés et pointus.

Par ailleurs, tout le monde s'accorde pour dire que la formation doit comporter un volet théorique et un volet pratique appuyé sur des stages encadrés mais quels sont les incontournables du volet théorique et comment articuler la théorie et la pratique, c'est-à-dire faire en sorte que les savoirs théoriques soient mis en œuvre pour gouverner la pratique dans un sens d'efficacité de cette pratique en termes d'apprentissages pour les élèves ? La formation mise au point depuis une vingtaine d'années dans les IUFM, elle-même héritière de l'expérience des écoles normales enrichie par de nombreuses recherches en éducation a apporté des solutions à ces questions, solutions toujours perfectibles et qui sont à revoir dans le nouveau cadre mais dont il ne faudrait pas perdre les savoirs et savoir-faire efficaces qu'elles ont permis de construire.

Le volet théorique disciplinaire concerne des savoirs qui peuvent être enseignés hors de la présence des élèves, des savoirs purement mathématiques et des savoirs didactiques. Bien sûr le professeur doit lui-même maîtriser les savoirs qu'il a à enseigner ; il doit de plus les maîtriser non comme le ferait un élève ou quelqu'un qui les utilise pour résoudre un problème pour lui-même, en situation non scolaire, mais il doit les maîtriser pour les faire acquérir à quelqu'un d'autre, ce qui suppose une vue d'ensemble, des connexions avec d'autres savoirs et la maîtrise de différentes organisations possibles pour pouvoir s'adapter aux élèves. Prenons un exemple pour fixer les idées : la technique opératoire de la division. Il existe deux techniques actuellement enseignées : celle où on pose les soustractions et celle où on multiplie et soustrait chiffre à chiffre. Elles ne se comprennent et ne se justifient pas du tout de la même façon.





Dans le premier cas, on cherche à encadrer 759 entre des multiples de 28, en se servant de la numération : on cherche combien de fois on peut mettre 28 dizaines dans 75 dizaines en cherchant le multiple de 28 qui s'approche le plus par défaut de 75 et on retranche ce multiple etc. À chaque étape on fait une multiplication puis une soustraction. Dans le deuxième cas, on a bien la même justification théorique mais la technique utilise un raccourci : on fait une combinaison de la multiplication et de la soustraction : on retire directement le produit du chiffre des unités par le quotient, 16 dizaines qu'on retire de 25 en ajoutant deux centaines qu'il faudra rendre, ce qui fait une retenue de multiplication (qui peut aller jusqu'à 9, ici c'est 2) alors que dans le premier cas les retenues sont des retenues d'addition qui ne peuvent pas excéder 1 ; ensuite on retranche 2 fois 2 dizaines auxquelles s'ajoutent les deux dizaines de la retenue. La première technique est maintenant la plus fréquemment utilisée à la fois parce qu'elle peut être justifiée auprès des élèves, ce qui n'est pas le cas de la deuxième, et que de plus c'est celle qui se généralise aux polynômes. Mais si l'on demande aux élèves, sous prétexte qu'ils sont grands, au moment d'entrer au collège, de ne plus poser les soustractions (pratique courante au CM2 ou en 6$^{e}$ il y a une vingtaine d'années), ils passeront difficilement à l'autre technique mais essaieront de faire de tête la multiplication de 28 par 2 puis la soustraction, ce qui les mettra en difficulté. Pour faire des choix pédagogiques, le professeur a besoin de comprendre les techniques et ce qui les justifie sur le plan des mathématiques, mais aussi d'anticiper les difficultés que peuvent rencontrer les élèves suivant le choix fait, de juger de l'efficacité des techniques aussi bien que de leur coût d'apprentissage.

Certes le professeur n'a pas à prendre toutes ces décisions seul : il dispose de diverses ressources, à commencer par les commentaires des programmes et aussi de nombreux manuels dont certains sont accompagnés de livres du maître qui sont de véritables outils de formation. Cependant, ces livres du maître sont peu utilisés car leur lecture demande du temps et du travail et il faut une formation qui permette aux enseignants de les utiliser de façon pertinente et cohérente. Par exemple, certains choix peuvent être incompatibles dans un premier temps, comme pour l'introduction des fractions : celles-ci peuvent apparaître principalement comme un partage de l'unité, dans une situation de commensuration ou comme division. Ce n'est pas le même discours qui fait sens dans chaque cas : pour un partage de l'unité, $1/n$ est une grandeur (une longueur ou une aire en général) qui, en la reportant $n$ fois, donne la grandeur unité (il en faut $n$ pour faire 1) et $p/n$ est $p$ fois $1/n$ ; pour une commensuration, $p/n$ est la mesure avec l'unité $u$ d'une grandeur $v$ telle que $pu = nv$ (il faut $p$ fois $u$ pour faire $n$ fois $v$) ou $nx(p/n) = p$ ; pour une division, j'ai $p$ unités à partager en $n$, je cherche déjà les entiers et je partage le reste ou $p/n$ est le nombre qui, multiplié par $n$, donne $p$. La première conception donne d'abord un sens aux fractions inférieures à 1 et rend difficile la conception de fractions supérieures à 1 ; les autres introduisent directement les fractions supérieures à l'unité mais avec différents discours possibles suivant le contexte. Le contexte d'introduction induit une conception qui ne se transfère pas spontanément dans un contexte qui relève d'une autre conception. J'ai été témoin moi-même de l'incompréhension provoquée chez les élèves par une introduction dans un contexte division (par exemple 18 biscuits à partager entre 4 personnes) suivie d'une décontextualisation en termes de partage de l'unité ($18/4 = 18x1/4$, le nombre du bas dit en combien on partage, celui du haut combien de parts on prend). Or on donne 4 morceaux à chacun et on ne partage que deux biscuits. La question de la cohérence de la suite des situations mises en place est d'autant plus importante de nos jours que se développe la pratique de piochage de leçons toutes faites sur internet qui peut mener à une juxtaposition d'activités pour les élèves sans progression et mise en cohérence des savoirs.

Une des difficultés en primaire est en effet pour l'enseignant de dénaturaliser pour lui-même des savoirs fortement automatisés pour penser les questions que peuvent se poser des élèves qui ne disposent pas encore de ces savoirs, si évidents pour nous mais que l'humanité a parfois mis des millénaires à construire (par exemple les décimaux). Une autre difficulté est l'articulation à faire entre le langage (en général ordinaire) utilisé pour décrire les actions sur les objets matériels dans une situation concrète, que ce soit en numération ou en géométrie et le langage mathématique décontextualisé qui va traduire ces actions, par là même changer le statut des objets manipulés (qui deviennent génériques), et être lui, réutilisable dans un autre contexte. Par exemple, si on utilise le pliage pour vérifier une symétrie, il faut très précisément dire quel bord (ou sommet) on fait coïncider avec quel autre bord (ou sommet) pour déterminer le pli puis vérifier si le reste coïncide, faire apparaître des points, pour retrouver leur image, relier l'axe au pli... Dans les classes, on observe souvent des manipulations sur le matériel sans précision du langage puis l'introduction d'un vocabulaire mathématique qui n'est pas relié de façon précise aux actions sur le matériel.

En conclusion, pour la formation théorique des professeurs des écoles, celle qui peut être délivrée dans les masters, il faut des bases solides dont certaines manquent, même aux licenciés de mathématiques, par exemple sur les systèmes de numération, les rationnels ou les développements décimaux, d'autres sont inadaptées, par exemple en géométrie (ce n'est pas tant la rigueur dans la rédaction des démonstrations qui compte que la compréhension des relations entre les concepts). Il faut aussi comprendre les diverses organisations possibles des notions et avoir le temps de penser comment les notions mathématiques s'incarnent dans des situations concrètes : cela ne peut pas s'apprendre sur le tas dans l'urgence de la pratique si cela n'a pas été pensé d'abord à travers l'analyse de situations diverses. Il faut aussi avoir des modules qui permettent d'articuler les éléments théoriques avec une pratique encadrée. Dans les IUFM, il existe des modules de formation équivalents à ce qui s'appelle ADPP (Ateliers de Développement de Pratiques Pédagogiques) à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais. Ce sont des modules disciplinaires encadrés par un professeur de la discipline et des maîtres formateurs : avec l'aide du formateur disciplinaire, les étudiants (ou stagiaires) préparent une séquence d'enseignement de 3 ou 4 séances sur un thème donné. Répartis en petits groupes, ils les mettent en œuvre dans les classes des maîtres formateurs (l'un d'eux prend la classe, les autres observent), ajustent et analysent à chaud avec eux, puis reprennent l'analyse, échangent leurs expériences et comparent ce qui s'est passé dans les différentes classes avec le formateur disciplinaire. C'est une formidable occasion de montrer comment les savoirs disciplinaires du professeur servent dans la pratique : préparation de la leçon mais aussi analyse à chaud de ce qui se passe pour la gérer en direct et pour ajuster la leçon suivante. C'est souvent un manque d'anticipation des possibles au niveau du problème proposé aux élèves qui entraîne des difficultés dans la gestion de la classe et c'est à cette occasion aussi que le besoin de formation mathématique se fait sentir.

# ACTUALITÉ

## Débat sur l'Institut Henri Poincaré

**(29 mars 2010)**

Martin Andler[1]

**Martin Andler**. La raison de ce débat est la décision par le conseil d'administration de l'IHP, en décembre dernier, d'augmenter les loyers des sociétés savantes par un facteur cinq dans un délai de deux ou trois ans ; ceci a été perçu comme une volonté de réduire considérablement la place des sociétés savantes. Il en résulte un conflit qui se focalise surtout entre la SMF et la direction de l'IHP. Cette situation nuit à l'unité des mathématiciens par rapport à des enjeux plus essentiels.

Stéphane Jaffard, m'a demandé de réunir autour d'une table les personnes qui ont joué un rôle crucial dans la refondation de l'IHP dans les années 1980, afin de mettre en perspective les péripéties actuelles à la lueur des intentions et des projets des vingt ou trente dernières années. Outre les personnes autour de la table, j'avais demandé à Jean-Pierre Bourguignon et Jean-Pierre Aubin de participer, mais ils n'ont pas pu se libérer. Jean-Pierre Aubin nous a communiqué un texte qui figure en annexe. Il est le premier à avoir agi, dans les années 1980, pour la renaissance de l'IHP, et ensuite Bernard Teissier et Nicole El Karoui ont pris le relais. Jean-François Méla, Michel Demazure et Jean-Pierre Bourguignon ont présidé la SMF pendant l'époque décisive où les décisions de rénovation de l'IHP ont été préparées et prises.

Commençons par la préhistoire – en l'occurrence les années 50 et 60, pour que les lecteurs de cet entretien aient une idée du rôle de la place que jouait alors l'IHP. Vous avez connu cette époque, où l'IHP était le cœur des mathématiques.

### L'IHP des années 1950 et 1960

**Bernard Teissier**. Jusqu'à la création de Jussieu, l'endroit où l'on venait pour des mathématiques au niveau doctoral, que ce soit pour aller assister à des séminaires ou pour assister à des cours de troisième cycle, c'était l'IHP.

**Nicole El Karoui**. Tout l'enseignement de troisième cycle en mathématiques était là ; c'était en quelque sorte le lieu du troisième cycle, et au delà, de la recherche, de la faculté des sciences de Paris.

**Jean-François Méla**. À ceci près qu'on ne disposait pas d'un bureau quand on était chercheur.

[1] Université de Versailles Saint-Quentin.

**Michel Demazure**. Après la licence, que j'ai passée en 1955, on devait suivre des diplômes d'études supérieures pour pouvoir passer l'agrégation, et ils étaient à l'IHP. Il y avait les cours de topologie de Choquet, d'algèbre de Dubreil...

**Jean-François Méla**. ... le thé des mathématiciens...

**Nicole El Karoui**. ... et surtout deux choses importantes : le séminaire Bourbaki, qui était l'unique réunion nationale régulière, et le « secrétariat mathématique » qui diffusait un certain nombre de séminaires. En dehors de quelques professeurs bien installés de la faculté des sciences, il y avait très peu de bureaux. Mais il y avait une salle pour les probabilistes, à cause de la mission initiale de l'IHP de développer les probabilités et la physique théorique. C'était un peu des questions de rapports de force, et de l'histoire : les gens qui étaient installés ne bougeaient pas. Et dans l'ensemble, de toute façon, les mathématiciens n'avaient pas de bureaux, donc avaient peu d'activités de recherche dans des lieux collectifs.

**Michel Demazure**. Il y avait aussi des spécialistes de relativité.

**Nicole El Karoui**. En effet : il y avait une place de relativité pour les probabilités et la physique théorique.

**Jean-François Méla**. J'étais jeune attaché de recherche, et nous étions censés être là. Sauf que nous n'avions pas de bureau, et donc mes camarades m'avaient délégué pour voir Cartan et lui demander si on pouvait avoir un bureau. Et j'avais été reçu... on ne peut pas dire mal ! Mais il m'avait dit « vous en avez un culot ! » Mais, quand même, on avait fini par avoir un petit bureau près de l'entrée.

**Bernard Teissier**. Mais alors est-ce que la SMF était hébergée à l'IHP ?

**Martin Andler**. Pendant très longtemps, Paul Belgodère a été secrétaire de la SMF. Il était ingénieur de recherche au CNRS, agrégé de mathématiques, normalien de la promotion de 1940 ; il dirigeait la bibliothèque de l'IHP et donc il était de facto directeur administratif de l'IHP pendant toute cette période-là. Il y avait à l'IHP un « secrétariat mathématique » ; tous les grands polycopiés classiques : séminaires et cours de 3^e^ cycle, étaient édités par ce secrétariat mathématique. Il y avait donc unité de personne : Belgodère était à la fois la SMF et l'IHP !

**Bernard Teissier**. Il travaillait avec Denise Lardeux, qui occupait un poste de secrétaire.

**Martin Andler**. Arrivent successivement la nouvelle faculté des sciences à Orsay, au début des années 1960, avec le départ vers Orsay de quelques-uns des piliers de l'IHP, puis la construction du campus de Jussieu ; dans le courant de l'année 69-70 les mathématiciens des deux universités en train de se constituer, P6[2] et P7[3], y déménagent. Tout se transfère vers Jussieu. Et on entre dans la période des années 1970-80, où l'enseignement, y compris l'enseignement de troisième cycle, et les activités de recherche (on ne peut pas vraiment parler de laboratoires) sont à Jussieu.

## Les années 1970 et 1980

**Bernard Teissier**. Mais ce qui s'est passé en 69-70, c'est que certains des mathématiciens qui ont participé à la création de P6 ont choisi de garder un bureau à l'IHP. Ce qui a induit une espèce de statut entièrement nouveau de

[2] Paris 6.
[3] Paris 7.

l'IHP : les gens qui avaient décidé de garder un bureau en ont fait une sorte de club.
**Nicole El Karoui**. Là il faut parler du statut juridique de l'IHP. Au départ, l'IHP avait été un legs de la fondation Rockefeller à la faculté des sciences, vers 1925... Avec la création des universités c'était resté en indivision entre les 13 universités et a été géré par le rectorat de Paris, avec une mention spéciale à P6, qui n'avait pas de droit particulier sur l'IHP, sauf que c'était l'université de rattachement administratif, celle qui touchait les fonds, et prenait en charge l'entretien, etc.
**Michel Demazure**. On s'est retrouvé à la fin des années 1980 avec des équipes hébergées à l'IHP bien que partiellement ou totalement étrangères aux mathématiques. Par exemple l'ISMEA (Institut de sciences mathématiques et économiques appliquées) et un centre d'études japonaises.
**Nicole El Karoui**. C'était donc en indivision et géré par le rectorat, puisque ce ne sont pas les universités qui ont installé ces équipes. Mais ça a été aussi un effet de la désaffection des mathématiciens pour l'IHP. Il n'y avait pratiquement plus de cours de troisième cycle puisqu'ils se tenaient ailleurs ; face au vide, le rectorat a largement utilisé l'IHP pour régler des problèmes de locaux, sans d'ailleurs en rendre compte à P6.
**Martin Andler**. Reprenons donc cette période intermédiaire. Il y a ce bâtiment, qui héberge toujours la bibliothèque de l'IHP, où Belgodère continue à être en fonction pendant à peu près toute la période, avec Denise Lardeux comme assistante. Il s'y tient le séminaire Bourbaki, cela ça n'a jamais changé, et quelques séminaires ; et il y a quelques mathématiciens de P6 qui y ont leur bureau... Et il y a aussi l'équipe de physique théorique de Jean-Pierre Vigier. Et qui d'autre ?
**Bernard Teissier**. Comme on l'a dit, les économètres et les japonisants de l'EHESS.

## Décennie 1980 : l'époque des projets

**Martin Andler**. Donc au début des années 80, ou même à la fin des années 1970, ce bâtiment est une bâtisse poussiéreuse, avec une bibliothèque extrêmement peu fréquentée. Certes, Dieudonné y vient régulièrement. Donc un fonctionnement un petit peu étrange ; alors un certain nombre de gens ont dit : « on a un outil formidable, au cœur du Quartier latin, il faut en faire quelque chose... »
**Nicole El Karoui**. C'est là que commence la période Aubin.
**Martin Andler**. Aubin a bien créé une association ?
**Bernard Teissier**. Parmi les multiples choses qu'il a faites pour rendre l'IHP aux mathématiciens, une des premières, je crois, a été de créer cette Association des Amis de l'IHP. Je crois qu'elle n'a pas changé de nom depuis l'origine. Mais à un moment, peut-être le CNRS a-t-il pensé que ça ne faisait pas assez bouger les choses[4] ?
**Nicole El Karoui**. Bernard Teissier et moi avons commencé à travailler sur ce dossier ensemble ; j'ai été nommée responsable de la bibliothèque de l'IHP par le CNRS vers 1986. Il y avait le problème urgent posé par le départ à la retraite de Belgodère.
**Michel Demazure**. Une question que je me pose : pendant cette période, qui finançait la bibliothèque de l'IHP ?
**Nicole El Karoui**. Le CNRS était l'unique source de financement.

[4] Voir ce qu'en dit J.-P. Aubin en annexe de ce texte.

**Jean-François Méla**. P6 n'est apparue dans le paysage que plus tard.
**Bernard Teissier**. Avec Nicole et moi, il y avait aussi le physicien Bernard Julia. Nicole a absolument raison de dire qu'il y avait le problème du départ à la retraite de Belgodère et que ça avait agité suffisamment les gens pour qu'il y ait un projet de faire disparaître complètement la bibliothèque de l'IHP. Puisque ça paraissait très compliqué dans l'état de, comment dire, d'imprécision, de chaos dans lequel se trouvait l'IHP du point de vue statutaire, très compliqué de trouver un poste. Donc le projet qui était apparemment assez bien lancé, était de répartir les bouquins de la bibliothèque entre diverses bibliothèques françaises ; je me souviens qu'il y avait Grenoble, et puis aussi Bordeaux, Tours, au moins ? pour renforcer les bibliothèques provinciales.
**Martin Andler**. À une époque où les bibliothèques avaient des problèmes de financement extrêmement graves.
**Bernard Teissier**. Je me rappelle que j'ai reçu chez moi un coup de fil de Bourguignon qui était alors président de la commission du CNRS ; il m'a raconté la situation, et m'a dit que la bibliothèque était menacée d'être complètement détruite, de disparaître, d'être dispersée. Et il a ajouté que la commission du CNRS pensait qu'il fallait faire quelque chose pour préserver l'IHP et sa bibliothèque. Il m'a parlé de Nicole à ce moment, je crois. Il m'a demandé si j'étais d'accord pour participer avec elle à une entreprise comme ça. Alors pourquoi on n'a pas demandé à Aubin de le faire, je n'en sais rien... La première chose que nous ayons faite, c'est une pétition pour sauver la bibliothèque. Elle a été signée par beaucoup de gens très bien, y compris aux États-Unis, André Weil, etc., ce qui nous a valu une engueulade monumentale de la part de Bernard Decomps, qui était au ministère.
**Martin Andler**. Nicole et Bernard, vous avez succédé à Aubin dans l'association des amis de l'IHP ?
**Nicole El Karoui**. Oui, il fallait bien avoir un cadre qui nous permette de nous exprimer. Côté bibliothèque, c'était le moment du départ à la retraite de Belgodère, qu'il a prise fin 1986. Denise Lardeux est restée à temps plein bien au-delà de la retraite, dans une situation statutaire fort ambiguë, puisque légalement elle n'avait pas le droit d'être là. Il y a avait fort à faire à la bibliothèque, à la cave qui était une réserve de la bibliothèque contenant entre autre les donations : mes enfants sont venus trier les caves de l'IHP ! Et puis nous avons surtout cherché quelqu'un qui pourrait remplacer Belgodère ; c'est ainsi qu'on a trouvé Hélène Nocton[5]. Mais il est devenu rapidement très clair qu'on ne sauverait pas la bibliothèque si on ne redonnait pas de la vie à l'IHP ; nous avons alors beaucoup travaillé sur les schémas de l'IHP, en étant plus ou moins mandatés par la SMF...
**Bernard Teissier**. Surtout par le CNRS.
**Jean-François Méla**. Reconnaissons-le, la SMF ne s'en est pas occupée directement à ce moment-là. Mais la SMF bénissait. Nous disions « oui, nous soutenons ce que vous faites », mais avec une petite rivalité d'institution : que venait faire cette association des amis de l'IHP ? Surtout que l'association prétendait être membre du GIP (groupement d'intérêt public) dont la constitution était envisagée. Autant

[5] Madame Nocton avait été la secrétaire de Bourbaki pendant de longues années, jusqu'en 1979. Elle a ensuite été secrétaire générale de la SMF de 1979 à 1986, puis a pris la succession de Belgodère à l'IHP. Voir M. Andler, « Entretien avec madame Nocton », *Gazette des mathématiciens* 79 (1999).

nous étions absolument ravis du rôle de l'association, autant nous étions plus dubitatifs sur sa place institutionnelle. Mais à partir de cette époque la SMF s'est occupée de plus en plus de cette affaire...
**Martin Andler**. Pourquoi la SMF était-elle peu impliquée au tout début ?
**Nicole El Karoui**. Il faut expliquer que la SMF avait peu d'intérêt pour l'IHP, parce qu'elle avait un autre projet qu'elle avait déjà du mal à défendre : le CIRM.
**Jean-François Méla**. La SMF était maître du CIRM, mais sans le sou. C'est le CNRS qui donnait de l'argent, mais la question était de savoir si la SMF allait continuer à gérer le CIRM.
**Martin Andler**. Quelle est la date de création du CIRM ?
**Jean-François Méla**. La signature du bail emphytéotique attribuant la bastide à la SMF date de 1979. Les premiers colloques ont eu lieu en 1982. Pendant les années 1980, la SMF était très mobilisée pour obtenir les fonds nécessaires à la bibliothèque (dont la construction a commencé en 1989), de la maison de la SMF[6] etc.
**Martin Andler**. Avant de discuter du projet qui a finalement émergé et des questions statutaires, quels étaient les autres enjeux ?
**Jean-François Méla**. En 1986, il y avait aussi la question de la localisation du magistère de mathématiques de l'ÉNS et des universités franciliennes ; le recteur était très préoccupé par l'objectif de le caser. Ça a compliqué les réflexions sur le statut futur de l'IHP ; j'imagine qu'on en reparlera.

## Le projet de Maison des mathématiques

**Martin Andler**. Il est temps de parler du projet scientifique. Comment est-ce que l'IHP est devenu ce qu'on appelle parfois, dans le jargon européen, une « infrastructure de recherche ».
**Nicole El Karoui**. Il a très vite été question d'un institut à thèmes annuels, et donc de rénovation du bâtiment dans cette optique. Car on nous a dit qu'on ne pouvait pas discuter d'un projet scientifique si on n'avait pas une idée de la manière dont on pourrait réaménager les locaux.
**Bernard Teissier**. 1987, c'est l'époque où je suis arrivé à l'ÉNS ; j'ai travaillé avec l'architecte qui était en train de rénover les locaux du département de mathématiques de l'ÉNS. On s'entendait bien, et c'est pour ça qu'on lui a demandé de réfléchir au projet architectural de l'IHP.
**Martin Andler**. Mais vous ne pouviez pas aller très loin sans avoir quelques idées sur le financement, le statut etc. ?
**Bernard Teissier**. De notre côté, nous avons demandé la bénédiction de P6 pour avancer dans le projet : « s'il faut payer un jour, est ce que vous serez d'accord ? »
**Nicole El Karoui**. Nous avons passé énormément de temps à informer très tôt le président de P6 et son bras droit de toutes les initiatives et de tout ce qu'on faisait, dont notamment le fait de solliciter un prêt pour l'étude de l'architecte que nous ne pouvions pas financer puisque l'IHP n'avait aucun budget propre. P6 avait accepté de prendre en charge s'il le fallait.
**Jean-François Méla**. Le recteur considérait qu'il était le patron. C'est lui qui a organisé des réunions avec vous deux sur le thème de la création d'un GIP

[6] Voir Michel Zisman, « À la rencontre du CIRM et de ceux qui ont contribué à sa création », *Gazette des mathématiciens*, Édition spéciale, SMF (2006).

(groupement d'intérêt public). Au début l'association avait proposé de faire les statuts du GIP. J'en ai même vu le projet (sur lequel la SMF n'était pas tout à fait d'accord, mais peu importe). Mais à un moment donné, vous avez été écartés au profit de P6. Le recteur leur a demandé d'élaborer les statuts du GIP. Il y a eu des négociations byzantines. Garnier, qui était alors le président de P6, avait préparé un statut, qui précisait des activités fédératrices : il y avait le magistère, la bibliothèque, les sociétés savantes. Et c'était un GIP des universités parisiennes qui précisait les droits des partenaires. P6, P7, P11, la chancellerie, les sociétés savantes avaient chacun 12%, P9, P13 : 6%, P1, P5, P12 : 3% et il y avait même un projet de budget de fonctionnement. Le conseil de la SMF avait donné son accord sur la place accordée aux sociétés savantes : 6% pour la SMF et 6% pour la SMAI. Mais tout ceci n'était qu'en projet et n'avançait guère. Et là il y a eu changement de gouvernement en 1988, le projet de l'IHP est relancé et Demazure y joue un rôle central.

**Martin Andler**. Michel, en juin 1988, tu avais succédé à Méla comme président de la SMF...

**Michel Demazure**. Je suis arrivé là-dedans de façon assez inopinée. Jospin, qui était ministre de l'Éducation nationale m'a commandé un rapport sur la recherche en mathématiques, sur la recommandation de son conseiller spécial Claude Allègre, que j'avais connu au Conseil scientifique du CNRS. Je n'ai malheureusement pas gardé de copie complète de ce rapport, je n'ai que la partie sur l'IHP. J'avais suivi de près la tentative d'Aubin, un peu moins celle de Bernard et Nicole, et j'ai profité de l'occasion pour prendre l'IHP comme symbole du développement à construire de la recherche en mathématiques. Je me souviens qu'à chaque version du rapport, la somme prévue pour l'IHP augmentait. Je suis parti de 5 millions de francs et en ai obtenu en définitive une vingtaine.

**Bernard Teissier**. Au total, je crois que c'était 22.

**Michel Demazure**. En fait, le point-clé n'était pas l'argent, mais d'obtenir le départ des « squatters » et donc leur relogement. Cela a demandé beaucoup d'obstination du ministère. Il fallait pouvoir en justifier la nécessité. La bibliothèque et le futur centre de recherche, c'était trop juste. Le point qui m'a permis d'emporter le morceau était l'idée que, certes il y avait les universités, mais qu'il n'y avait pas de lieu central où quelqu'un qui pose une question mathématique – qu'il soit industriel, journaliste ou autre – puisse venir la poser. Et c'est pourquoi l'IHP n'est pas la « maison des mathématiciens », mais la « maison des mathématiques », basée sur un triptyque : sauvegarder et développer la bibliothèque, créer le Centre Émile Borel que vous, Nicole et Bernard, aviez imaginé et créer un lieu d'ouverture des mathématiques sur le public. Ce dernier volet n'a jamais été totalement rempli. Mais c'est dans ce cadre-là que les sociétés savantes ont été abritées, comme l'un des éléments d'une ouverture des mathématiques sur le monde extérieur.

## La question du statut

**Michel Demazure**. Ensuite il s'est agi de faire des statuts. La juriste du ministère a beaucoup travaillé. Elle a pondu toute une série de statuts qui ont été retoqués ; quelqu'un du Conseil d'état a aussi travaillé là-dessus, et nous sommes arrivés à un projet de statut où il y avait une structure collective, je ne me souviens pas exactement laquelle. Ça a été présenté au CNESER par le ministre, mais le projet a été encore retoqué, cette fois par les syndicats. Et à ce moment-là (je ne sais pas ce qui s'est passé dans la coulisse), le ministère a conclu que la seule méthode pour sauver la chose, c'était de rattacher l'IHP à une université. Et c'est donc à ce moment-là qu'on a commencé à bâtir un mécanisme « article 33 » ; c'était la seule disposition de la loi qui permette de faire dans les universités quelque chose d'un peu autonome. Toutes les dérogations que nous avons demandées à l'article 33 ont été retoquées. Et donc ça s'est terminé comme cela.

**Jean-François Méla**. En fin de compte, c'est le décret du 28 février 90 qui crée la Maison des mathématiques au sein de l'université Paris 6, comme une école interne. Dans ce décret, rien n'est dit sur la propriété des locaux.

**Michel Demazure**. Une remarque très importante : le décret ne parle pas de mathématiques et physique théorique, mais dit « pour les mathématiques et corrélativement pour la physique théorique ». En ce qui concerne la propriété, il y a, je pense, une différence entre un bâtiment et une structure qui l'occupe. L'université P6 n'est pas propriétaire de ses locaux, n'empêche qu'elle y est. Au départ, il y a le legs de la fondation Rockefeller.

**Nicole El Karoui**. Le legs est à la faculté des sciences.

**Jean-François Méla**. Lorsque j'étais président d'université en 1996, je participais au conseil d'administration de la chancellerie des universités de Paris. C'était un peu compliqué parce qu'il y avait un noyau – les universités de Paris intra-muros – et puis on invitait sur un strapontin les universités périphériques qui avaient résulté de l'explosion de la Sorbonne. Nous, présidents d'universités périphériques, avions le droit de discuter en particulier des biens indivis. Et j'ai retrouvé une liste des biens immobiliers de l'indivision, des treize universités, donc daté de décembre 96, dans lequel figure à la rubrique « biens inaliénables du fait de l'utilisation actuelle : IHP ». Néanmoins « biens inaliénables du fait de l'occupation actuelle », ça veut dire, qu'en 1996 d'un point de vue juridique, l'IHP est un bien indivis des universités parisiennes ; il le demeure donc. Il y avait la mention « seule une cession gratuite aux utilisateurs pourrait être envisagée », sans préciser les utilisateurs.

**Bernard Teissier**. C'est particulièrement important au vu de la LRU, car, comme vous le savez tous, P6 essaye d'obtenir la dévolution de ses locaux...

**Jean-François Méla**. Ils ne peuvent pas l'obtenir sans accord des propriétaires parce qu'il s'agit des biens indivis propres. Il ne s'agit pas de biens de l'État.

**Nicole El Karoui**. C'est une vraie donation, une propriété de la faculté des sciences. C'est pour ça que le recteur est fondé à intervenir.

**Martin Andler**. La propriété du terrain est une question différente, non ?

**Michel Demazure**. Le terrain, c'est compliqué. Il me semble que, quand on avait travaillé sur les plans de l'IHP, il y avait un problème : quelque chose traversait une frontière de parcelle, je ne me souviens pas bien.

**Jean-François Méla**. En tous cas, l'État n'a pas le droit, sauf expropriation, de faire la dévolution de ce bâtiment.

**Michel Demazure**. Peut-on arriver à modifier une structure juridique de ce type ?

**Jean-François Méla**. Oui on pourrait ; c'est un problème de stratégie et de tactique. On peut relancer la question de savoir qui doit être gestionnaire d'un institut national... Le CIRM pourrait être géré par l'université de Marseille. Mais il est géré par la SMF conjointement avec le CNRS.

## Le projet scientifique

**Martin Andler**. On reviendra tout à l'heure à la question du statut national de l'IHP. Mais je voudrais qu'on revienne sur le projet scientifique, le projet intellectuel. Michel Demazure a parlé de trois objectifs : sauver la bibliothèque, créer l'institut Émile Borel et avoir une structure ouverte sur le public. Peut-être pourrait-on poser à Nicole et Bernard une question sur les réflexions menées par Jean-Pierre Aubin et vous deux entre 1981 et 1988.
**Bernard Teissier**. Dans notre projet, figurait certainement l'idée d'utiliser le centre Émile Borel pour développer en France des domaines qui ne se développaient pas assez vite, en faisant venir pendant des semestres, des conférenciers de haut niveau étrangers. Donc c'était en fait un mélange de chaire d'excellence, pour employer le langage moderne, et de cours doctoraux avancés.
**Nicole El Karoui**. L'idée des cours doctoraux avancés, nous l'avions mise très en avant, comme étant un élément du plus que pourrait apporter l'IHP. Des gens viendraient séjourner, donneraient un cours de niveau DEA (comme on disait à l'époque) ou plus...
**Bernard Teissier**. L'aspect ouverture était présent, certainement hérité en partie du projet d'Aubin. L'idée que ça serait le lieu, comme le disait Michel tout à l'heure, où un industriel qui voulait rencontrer des mathématiciens pourrait venir tout naturellement, ou même un mathématicien étranger qui arrivait à Paris avec sa petite valise à la main, comme me l'avait raconté Istvan Fary, qui avait fait exactement cela dans les années 50.
**Nicole El Karoui**. Un des intermédiaires pour ça, c'était que les sociétés savantes soient présentes, et d'autres associations autour des mathématiques qui servent un peu d'interface. Parce qu'on manquait d'interlocuteurs pour assurer ce volet-là.
**Bernard Teissier**. Autant sur le plan strictement scientifique, ça a très bien fonctionné, en revanche l'ouverture sur le monde industriel a été bien plus compliquée. Je pense que c'est difficile de toute façon en France. Il y a des difficultés intrinsèques, mais Nicole connaît ça beaucoup mieux que moi.
**Nicole El Karoui**. C'est lié au fonctionnement de la communauté mathématique, au moins autant qu'à l'extérieur...
**Bernard Teissier**. Je me souviens que Nicole avait organisé il y a très longtemps une journée IHP avec des banquiers sur les mathématiques financières.
**Nicole El Karoui**. Dès que ça a ouvert, en effet. Notre séminaire de mathématiques financières qui existe encore, date de cette époque.
**Martin Andler**. Voilà une idée importante : on crée une maison des mathématiques et c'est son ouverture sur le monde extérieur qui exige la présence de toute une série d'acteurs associatifs, pas simplement des universitaires.

## La communication

**Michel Demazure**. Il y a un point qui me semble important à débattre : est-ce que l'idée, à laquelle je tenais beaucoup, mais qu'on ne voit pas bien s'organiser, d'une espèce de point central d'interface des mathématiques françaises, a vraiment un sens aujourd'hui. Les opérateurs sont localisés et on voit chaque groupe local de mathématiciens, que ce soit à Caen, Orléans ou Grenoble ou ailleurs, gérer sa communication dans des cadres universitaires. Il est vrai que dans le temps, on voyait débarquer à l'IHP des journalistes qui avaient des questions à poser. Maintenant ce n'est plus comme ça qu'ils font. Cela a-t-il encore un sens d'essayer de maintenir cela ? Pour le moment on en maintient l'idée ou le désir mais on ne le fait pas.

**Jean-François Méla**. Cela a un sens mais...

**Michel Demazure**. Est-ce que ça existe les mathématiques au plan national ? Est ce qu'on a quelque chose à dire de spécifique au grand public ? Aux industriels ? Quand quelqu'un se pose une question sur les maths, un journaliste ou autre, il ne va pas se rendre dans un lieu. Il a un téléphone, il a internet etc. Est ce que vraiment, vingt ans après, ça a encore un sens ?

**Jean-François Méla**. Au delà du bureau d'accueil des journalistes, je pense que ça renvoie une question délicate. C'est l'importance des associations professionnelles scientifiques. C'est une grande faiblesse de la France, qui ne date pas d'aujourd'hui, et une grande force des pays anglo-saxons, d'avoir des associations scientifiques puissantes qui sont des interlocuteurs de beaucoup de gens. Nous, on a essayé, on essaie toujours. Je ne sais pas si c'est le caractère paysan de la France, mais ça ne marche pas bien ; mais ça ne veut pas dire qu'il faut laisser tomber.

**Michel Demazure**. Il me semble quand même que la communauté mathématique, pour des raisons historiques et aussi idéologiques, a une solidité et une cohésion nationales qu'on voit moins dans les autres disciplines, plus fracturées en sous-disciplines.

**Martin Andler**. La question de la communication des mathématiques est importante, et elle se pose quotidiennement. Qui parle pour les mathématiques ? Exemple : on a cet été le Congrès international. Les mathématiques françaises y sont très reconnues, indépendamment de ce qui peut se passer pour les médailles Fields : deux conférenciers pléniers, plus de vingt conférenciers invités. Qui va dire que c'est un succès remarquable des mathématiques françaises ? Il y en a clairement besoin ; d'ailleurs il y a des discussions pour savoir qui doit s'en occuper. Il y a plusieurs candidats : le CNRS, naturellement, mais il n'y a pas que le CNRS, il pourrait y avoir l'INRIA, pourquoi pas ? Et puis il y a les sociétés savantes. La bonne solution, ce serait que tout le monde travaille ensemble, pour mener cette action. Évidemment, que ça se passe au niveau national !

**Nicole El Karoui**. Je voudrais souligner autre chose maintenant, à savoir la rigidité d'un certain nombre d'institutions dans le cadre du nouveau statut des universités. Certaines vont faire en sorte que leurs chercheurs soient limités dans leurs collaborations, dans la recherche de financements. Résultat : le danger est extrêmement fort de faire éclater une notion de mathématiques nationales ! Chacun représentera un petit bout. On est dans une période dont les conséquences vont être très importantes pour la communauté. Elle va éclater autour de pôles qui sont capables, ou pas, de se concerter. Avant que le paysage ne retrouve un équilibre opérationnel collectif, à mon avis il y a vraiment un souci important. L'IHP peut être un des lieux où naturellement tous les gens peuvent venir faire quelque chose ensemble.

**Bernard Teissier**. Je constate avec plaisir que Nicole et moi, n'avons pas perdu l'habitude d'être d'accord. Je m'apprêtais à dire exactement la même chose. On a la Fondation des sciences mathématiques de Paris, on a l'IHÉS et on aura tous les autres centres qui vont vouloir faire la communication quand ils auront un ou deux invités à des congrès, etc., on risque d'avoir pour résultat une cacophonie.

Et les journalistes, quand ils veulent avoir des informations sur les mathématiques, ils vont voir à la FSM[7] ou à l'IHÉS. Ce sont des gens que nous aimons beaucoup, mais néanmoins il y a un danger, qui est celui que souligne Nicole : chacun a tendance volontairement ou non à donner l'information qu'il a au plus près de lui. S'il s'est passé quelque chose d'extrêmement important à Grenoble, à Bordeaux, ou à Marseille, ou s'il y a une rencontre au CIRM qui fera date pendant les dix prochaines années dans un domaine donné, il n'est pas obligatoire que cela leur vienne à l'esprit, donc l'idée...

**Nicole El Karoui**. Pour moi c'est encore plus sérieux que ça : il y a des endroits où on a des intérêts, on doit défendre son institution...

**Bernard Teissier**. Tout ça pour dire que je pense, comme Martin, qu'il y a aussi un problème de communication mathématique nationale. Le seul problème que je vois, c'est que nous n'avons pas les moyens d'avoir un chargé de communication, comme par exemple la FSM en a un.

**Jean-François Méla**. Il y a aussi un problème de constante de temps ; c'est vrai que nous sommes dans un paysage complètement émietté, on construit des structures... mais peut-être que dans vingt ans ces structures n'existeront plus. On ne parlera peut-être plus de la Fondation, alors que les mathématiques ont une stabilité, une durée de vie, une homogénéité bien plus considérable. Il y a beaucoup plus grand que toutes ces structures bureaucratiques qu'on nous balance et qui tendent à faire éclater pas seulement le paysage mathématique, mais aussi le paysage universitaire et il faut qu'il existe quelque chose de plus permanent et dont la définition soit moins liée à l'air du temps.

**Martin Andler**. Pour revenir sur le point de la communication, on voit bien, en physique par exemple, qu'il y a de très gros laboratoires, des instituts, des organismes, qui ont tous des équipes de communication considérables. Le synchrotron Soleil a quatre chargés de communication dont deux s'occupent, et c'est ce qui m'intéresse pour Animath, d'organiser des visites de scolaires. Eux, ils ont toute une structure qui est capable de mener des actions en direction des scolaires. Nous pour l'instant on travaille ...

**Jean-François Méla**. Avec des petits bouts de ficelle (rires).

**Martin Andler**. Alors que l'institut mathématique de Jussieu est peut-être le plus gros laboratoire mathématique du monde, il ne peut pas consacrer véritablement un budget à la communication, et personnellement j'aimerais bien que le CNRS se rende compte de cela.

**Nicole El Karoui**. Mais l'IMJ le veut-il ?

**Martin Andler**. C'est une bonne question. Ce n'est en tout cas pas leur priorité.

**Michel Demazure**. Je ne crois pas beaucoup à cette idée qu'on n'aurait pas les moyens. Ce n'est pas vrai. Les laboratoires de mathématiques sont plus riches qu'ils n'ont été dans le passé ; mais ils ne considèrent pas que c'est fondamental pour eux. Il y a actuellement énormément de mathématiques qui se produisent en dehors du milieu des mathématiques universitaires. Les mathématiciens, au sens restreint qui est le nôtre, ne s'en rendent pas compte et s'ils ne font pas attention, ce sont ces gens-là qui seront la référence des mathématiques et plus nous. Je pense que les laboratoires sont parfaitement capables de mettre de l'argent en commun pour embaucher des gens. Ils n'ont pas de problème de ce point de vue. Simplement,

[7] Fondation des sciences mathématiques.

cela demande de prendre conscience et de croire, comme je le crois (j'ai peut-être tort), qu'il est essentiel pour la discipline de sortir de ses théorèmes.

**Nicole El Karoui**. Je suis complètement d'accord avec toi. Je pense que les mathématiciens ne mesurent pas sur beaucoup d'aspects combien ils sont marginalisés dans leur image. Et le dernier colloque « Maths à venir » était un exemple spectaculaire. Il y a un vrai problème de communication, de représentation des mathématiciens et aussi de leur capacité à recevoir, écouter, entendre...

**Bernard Teissier**. Une autre idée venant du MSRI et dont j'ai oublié de parler tout à l'heure, c'est le journaliste résident. Je ne sais pas si ça pourrait se faire en France, mais ça pourrait se faire en Europe. Mon expérience c'est que les journalistes scientifiques français ne sont pas top, comparé par exemple aux journalistes en Espagne. Le MSRI invite, pour des durées très variables, des journalistes pour y faire un stage. Ils sont là, ils ont un bureau, ils discutent avec les gens, ils déjeunent avec eux, ils vont en séminaires.

**Nicole El Karoui**. C'est un peu ce que l'IHÉS a fait avec son photographe.

**Jean-François Méla**. On peut proposer à nos amis de l'école de journalisme de Science Po. La plupart de ces jeunes n'ont pas de boulot à la sortie...

**Bernard Teissier**. Je ne sais pas si l'IHP pourrait les payer, mais avoir des stagiaires journalistes, ne serait pas une mauvaise idée.

**Martin Andler**. On reparle de ce rôle important que l'IHP devrait jouer, d'être un pivot, dans la communication sur les mathématiques.

**Bernard Teissier**. Oui parce que comme le disait Nicole, sans vouloir s'opposer à la Fondation, si nous ne le faisons pas, c'est la Fondation qui s'en chargera.

**Nicole El Karoui**. Elle le fait déjà, elle vient de recruter quelqu'un pour la communication, l'IHP n'a pas de chargé de communication.

**Martin Andler**. Dans le colloque Maths à venir, que j'ai suivi de l'extérieur, une des difficultés, est qu'il y avait les services de communication de P6, de P7, de la Fondation, de l'IHÉS, et puis c'est tout. Les autres, notamment les sociétés savantes, n'avaient aucune capacité en la matière. En ce moment se prépare une action de communication commune des mathématiciens autour de l'ICM, et il faut tout construire à partir de zéro. Pour que la communication ne soit pas monopolisée par l'IHÉS, ou la Fondation, ou Paris 6, ou Orsay. Car au-delà de ce que chaque institution veut et doit faire, il y a une nécessité de communication nationale d'ensemble sur les mathématiques.

**Nicole El Karoui**. À la table ronde du colloque Maths à venir où j'étais, il y avait l'ancien maire de Florence, qui est un mathématicien. Il avait été invité pour ça ; il disait qu'il faudrait faire un peu plus de marketing pour les mathématiques. Alors un mathématicien s'est levé dans la salle en disant : « Du marketing pour les mathématiques, je meurs. » L'orateur était italien, il avait essayé de trouver le mot qui essayait de traduire ce qu'il avait en tête. Cette anecdote montre bien que l'idée de communiquer n'est pas naturelle pour les mathématiciens. Or nous allons de plus en plus devoir justifier les moyens que l'on met à notre disposition et lever des fonds pour vivre. Les universités les premières. Chacun pour soi, mais aussi, c'est indispensable, de manière collective pour les mathématiques.

**Martin Andler**. Tant qu'on y est, puisque nous avons évoqué ces autres missions de l'IHP, est-ce qu'on a des éléments de référence internationaux ? Quand on compare avec le MSRI ?

**Bernard Teissier**. Oui la grosse différence c'est que dans la plupart des instituts, que ce soit le MSRI ou Newton, les gens ne font pas de cours doctoraux. Et une des bonnes surprises qu'on a eues avec l'IHP moderne, c'est que les gens qu'on invitait à venir pour les semestres étaient ravis de donner des cours. Alors non seulement c'étaient des gens qui faisaient des cours intéressants devant des gens intéressés, mais en plus pour eux, ils considéraient que ce n'était pas une contrainte. On t'invite pendant ton année sabbatique, tout ce qu'on te demande, c'est de faire deux heures de cours par semaine sur ton sujet. C'est un bon deal. Donc je pense qu'il n'y a pas vraiment d'équivalent exact de l'IHP pour cette raison-là, sauf peut-être le CRM à Barcelone, qui organise des activités qui ont un aspect enseignement. Ni le MSRI, ni le RIMS...

**Michel Demazure**. Il n'y a pas de pays où il y a une densité de mathématiques et un jacobinisme aussi fort qu'en France. Le sentiment national est peut-être beaucoup moins fort dans d'autres pays ; avec des mathématiques plus dispersées.

## Le problème des loyers

**Martin Andler**. Venons-en à la question d'actualité : l'augmentation des loyers. Il est assez difficile de faire la part de la tactique : est-ce surtout un moyen de pression pour inciter les sociétés savantes à réfléchir différemment à l'utilisation des locaux ?

**Jean-François Méla**. L'augmentation des loyers semble avoir comme fonction de pousser les gens à partir. Il faut en tout cas distinguer deux choses : les loyers et la question des locaux, de la surface occupée. Il me semble qu'il est normal qu'il y ait une pression du directeur pour limiter la surface des locaux qui ne sont pas consacrés aux activités scientifiques, mais c'est matière à négociation. Sur les loyers, ça me paraît très franchement une manœuvre déloyale de l'université P6 : s'ils veulent garder la gestion de ce bâtiment, ils ne peuvent pas se comporter en propriétaire vis-à-vis des locataires.

**Bernard Teissier**. La question que tu soulèves est intéressante. Parce que quand on fait payer un loyer, il y a deux raisons. La première c'est qu'on est propriétaire des murs, et la seconde c'est qu'on fournit des services, le chauffage, l'électricité, etc. Or, le propriétaire des murs, c'est une indivision. Il faudrait savoir à quel titre P6 réclame un loyer.

**Jean-François Méla**. Je voudrais dire que cette question des loyers n'est pas totalement indépendante de la question du statut. Une université reçoit des crédits qui doivent notamment couvrir la logistique des locaux qu'elle gère. Naguère les crédits de logistique immobilière étaient d'ailleurs calculés au mètre carré. Aujourd'hui c'est différent puisqu'il y a globalisation des crédits, mais le principe reste le même : la dotation de l'État est censée couvrir la logistique. Donc si l'IHP est affecté à P6, l'université P6 ne peut pas se conduire comme simple propriétaire qui louerait des locaux. Lorsqu'elle a accepté d'être gestionnaire de l'IHP, c'était sur la base d'un projet où il y avait à la fois la fonction d'institut à thèmes et la fonction de maison des mathématiques. On ne peut donc pas considérer que les sociétés de mathématiques sont des simples squatters qui ont un loyer à payer.

**Martin Andler**. Ils touchent donc deux fois les charges !

**Jean-François Méla**. Ils ne devraient pas avoir un comportement différent vis-à-vis des sociétés savantes et du centre Émile Borel. On sait très bien que, du temps où l'État payait les établissements au mètre carré, il donnait des crédits insuffisants par rapport aux dépenses. Et que les universités étaient à ce moment-là obligées d'en payer une partie sur les crédits recherche. On peut considérer normal qu'une contribution soit demandée aux occupants, mais pas jusqu'à couvrir l'ensemble des frais engagés par l'université gestionnaire.

**Bernard Teissier**. A-t-on une idée du rapport entre le loyer demandé par P6 et les frais occasionnés ?

**Martin Andler**. C'est vraiment difficile à calculer. Même si les universités sont en train de passer en coûts consolidés, avec prise en compte de la totalité des dépenses au niveau de l'établissement, ça n'est pas répercuté au niveau des instituts comme l'IHP. Comment prendre en compte le salaire de Mme Bonny, des appariteurs, etc. ?

**Jean-François Méla**. Ce qui n'est pas acceptable c'est de considérer que les sociétés savantes et les associations scientifiques sont des occupants externes. Que ce sont des gens auxquels on loue des locaux de P6. Ça n'est pas défendable, compte tenu du décret de 90.

**Martin Andler**. Comme le soulignait Jean-François tout à l'heure, nos grands aînés à la fin du XIX^e siècle ne se sont pas donné les moyens pour faire vivre les sociétés savantes que se sont donnés les sociétés comparables en Europe : avoir une dotation en capital, acheter des immeubles... Elles sont en permanence dans une situation de dépendance par rapport à des formes d'aides publiques, n'étant pas complètement autonomes sur le plan financier. D'un autre côté, elles jouent un rôle scientifique considérable ! Très souvent, quand on parle de la SMF, on dit qu'elle ne fait pas grand chose, en laissant de côté les revues, le CIRM ! Du coup, en effet, il ne reste pas grand chose ; et encore, ça n'est même pas vrai : les sociétés savantes ne remplissent pas si mal que ça leur rôle de défense des mathématiques ! Mais si on inclut les revues, alors l'apport scientifique de la SMF, et aussi de la SMAI et des autres sociétés savantes, est considérable, par le fait qu'elle assure la gestion de toutes ces revues, qui, sinon, seraient à des tarifs largement supérieurs.

## Édition mathématique

**Bernard Teissier**. Parlons des revues. Je pense que l'avenir est dans le développement des revues académiques, de manière à ce que leur rôle vis-à-vis des revues commerciales augmente. Ce n'est pas une chose qu'on peut faire du jour au lendemain, mais c'est une tendance qu'il faut encourager. En Europe, la SMF est un des grands acteurs de la publication académique en mathématiques. Donc il faudrait que toutes les personnes concernées se rendent compte qu'il faudrait pousser à augmenter la capacité de publication de la SMF. Pour le moment tout, ou au moins une bonne partie, se fait ici, et une partie se fait à Marseille. Si on pense au rôle de l'IHP, il est important d'intégrer le rôle d'éditeur de la SMF, qui ne doit pas diminuer ; surtout si nous voulons conserver une maison d'édition, je ne dirais pas en langue française, mais je dirais d'esprit français. Je ne me bats pas pour la langue, je me bats pour un certain style de mathématiques qui nous appartient. Dans l'équation de toutes les choses qu'il y a à faire dans l'IHP, il y a ça. C'est pour ça que je pense qu'il serait raisonnable que la SMF augmente ses activités pour l'édition, mais pas forcément ici. Qu'elle essaie de trouver un équilibre, en ayant ici un petit bureau, et des activités plus importantes au CIRM, par exemple.

**Jean-François Méla**. C'est déjà le cas.
**Bernard Teissier**. Quand je vais au CIRM, je n'ai pas l'impression d'une ruche bourdonnante du côté de la SMF ; mais je me trompe peut-être.
**Martin Andler**. Toute la diffusion est au CIRM, et toute la partie éditoriale est ici. Ça me paraît difficile de faire ce travail éditorial ailleurs qu'à Paris.
**Jean-François Méla**. C'est une garantie du caractère vivant d'avoir ce petit noyau éditorial au centre névralgique, c'est-à-dire à l'IHP.
**Bernard Teissier**. C'est bien ce que je dis. Il faut absolument que la SMF garde une activité ici.
**Martin Andler**. Et pas seulement la SMF. Même si la SMAI n'a pas fait le même choix d'édition, en faisant éditer ses revues par EDP Sciences, qui est une filiale de la SFP. Car on reste quand même dans le secteur académique. Par rapport au rôle de l'IHP, c'est important parce que ce que ça veut dire aussi que les comités de rédaction se réunissent avec les secrétaires de rédaction ici, à l'IHP ; de même que les auditions du CNRS se passent ici, les sessions du CNU se passent ici ; tout cela permet aux collègues de combiner plusieurs choses lors de leur passage à l'IHP. Bref, si on veut que l'IHP remplisse ces diverses missions, il n'est pas facile de diminuer la place que les sociétés y occupent !

## Le tournant

**Nicole El Karoui**. Cela fait 20 ans que l'IHP existe ; au bout de 20 ans d'une institution, ses locaux sont toujours trop petits. Il faut se poser des questions sur la manière dont cela va évoluer.
**Bernard Teissier**. Ce que je suggère, c'est de réfléchir de nouveau aux équilibres entre les diverses activités de l'IHP.
**Martin Andler**. Peut-être avec la possibilité que l'IHP gagne des $m^2$ dans des redistributions à l'intérieur du campus Curie. Mais il y a une compétition avec l'institut Curie.
**Nicole El Karoui**. En tout cas, le message, plus que jamais, est qu'on a besoin d'un lieu de coordination nationale et de visibilité nationale par rapport à l'extérieur. Dans les cinq ans qui viennent, on va avoir une difficulté de ce côté-là, et il faut garder cette dimension ; c'est ce qui avait permis de l'emporter dans la négociation qui avait conduit à la création de l'IHP, et cela doit rester très fort. Parce que c'est le seul lieu autour duquel il y a une sorte de consensus des mathématiciens sur le fait que cela doive se passer là, quand chacun doit chercher de son côté comment financer ses activités.
**Martin Andler**. Il est sûr qu'individuellement, les mathématiciens dans les universités autonomes sont souvent démunis, dans les arbitrages internes, parce que ce dont ils sont porteurs n'est pas très « sexy », ne rapporte pas beaucoup de contrats industriels, sauf dans quelques sous-domaines des mathématiques. Si on n'arrive pas à exister nationalement, on perd de la force.
**Bernard Teissier**. La LRU est incroyablement dangereuse pour des sujets comme le nôtre. C'est clair.
**Martin Andler**. C'est un tournant très dangereux. Dans d'autres pays, ils ont des universités autonomes et ils arrivent à s'en sortir à peu près. Mais nous n'avons pas les mêmes traditions.
**Jean-François Méla**. Il faudra des années pour retrouver un nouvel équilibre.

**Nicole El Karoui**. Au moins dix ans.

**Bernard Teissier**. En tout cas, une période très difficile s'annonce. Je suis absolument d'accord avec Nicole. Il est très important de garder tous les lieux de cohérence que l'on peut.

**Nicole El Karoui**. Mais la question du financement de l'IHP va vite se poser. Parce que le CNRS a moins de moyens ; les tutelles ne vont plus affecter d'argent comme ça.

**Jean-François Méla**. Oui le CNRS a moins de moyens, mais à terme il les concentrera sur des activités collectives. L'INSMI a vocation à soutenir des projets collectifs. Les laboratoires à titre individuel aujourd'hui se financent largement par l'ANR ; en gros maintenant un laboratoire de maths a au moins la moitié de ses crédits qui viennent de l'ANR.

**Bernard Teissier**. On l'a déjà vu ici à l'IHP. Nous avons eu cette réflexion quand j'étais encore au conseil d'administration : les crédits des laboratoires diminuent, les crédits du centre Émile Borel en tant que laboratoire CNRS diminuent à cause de l'ANR, et l'IHP n'a pas un sou de l'ANR parce qu'il n'y a pas d'équipe permanente. J'avais proposé de demander à tous les porteurs de projets ANR de prévoir dans leurs budgets une ligne de location de salle à l'IHP, qui leur permettrait de reverser une partie de leur budget ANR à l'IHP, pour compenser cette perte. Tout le monde avait l'air plus ou moins d'accord sur le principe. Mais il faut que les gens le fassent, et il faut que l'ANR joue le jeu.

**Martin Andler**. Nous parlons de financement de l'IHP, question très importante. Mais il y a un problème plus central : celui du statut. Depuis sa refondation, l'IHP est une école interne « article 33 » de l'université P6. Jusqu'à la LRU, par cet article, les crédits ministériels étaient attribués directement, l'université n'ayant pas voix au chapitre. La LRU change complètement la donne.

**Michel Demazure**. Ce qu'il est important de discuter, c'est de savoir si on considère que la définition de l'IHP comme école art. 33. est une espèce d'artefact juridique historique auquel on veut mettre fin ou bien est-ce qu'on considère que c'est un fait, et qu'il serait idiot de se battre contre.

**Jean-François Méla**. Un article du code de l'éducation, qui n'a pas été aboli par la LRU, prévoit que les ministres compétents peuvent affecter directement des crédits et des emplois à une école article 33.

**Bernard Teissier**. Est-ce que le statut de l'IHP que nous connaissons aujourd'hui est immuable ? Est ce qu'il peut vraiment survivre à la LRU ? L'IHP peut-il continuer à concilier son rôle national et son statut d'école article 33 ? Le risque principal est que l'on mette l'IHP devant le choix suivant : soit vous rentrez dans le giron de P6, et on vous finance bien ; soit vous voulez rester indépendant et jouer un rôle national et on vous finance... moins.

**Martin Andler**. Aujourd'hui un président doit justifier ses choix budgétaires devant son conseil d'administration. Et il y a des priorités. Est-ce que l'IHP est une priorité par rapport aux grosses forces de physiciens, de chimistes, de biologistes, de médecins, etc. de P6 ? Clairement pas. Et même par rapport aux mathématiciens de P6 ! Pour faire vivre les mathématiques à P6, qui sont considérables, et vivantes, il faut aussi trouver de l'argent. Il faudra choisir : on bien vous maintenez l'abonnement à la revue N, ou bien vous mettez 10 000 € sur l'IHP.

**Nicole El Karoui**. Parce qu'en filigrane, il y a aussi la question de la levée de fonds. Toutes les institutions, vont y travailler, en particulier les universités et la FSM. Mais ça sera bien plus difficile pour une structure nationale comme l'IHP, qui va se trouver coincé entre 3 ou 4 pôles en Ile de France.

**Jean-François Méla**. Tu penses qu'il pourrait y avoir une concurrence de fait entre Fondation et IHP ?

**Nicole El Karoui**. Oui, je le pense. La FSM essaie de prendre un peu plus de place, parce que structurellement c'est son rôle. Je pense qu'une partie de cette place sera occupée au détriment de l'IHP.

**Martin Andler**. C'est le cas pour l'IHÉS aussi...

**Nicole El Karoui**. L'IHÉS a l'avantage d'être un peu loin, et d'avoir un statut un peu différent.

**Jean-François Méla**. Si on regardait la situation en faisant abstraction du passé et qu'on se demandait quel statut donner à l'IHP, on en verrait deux. Le premier serait un institut du CNRS financé par l'INSMI, avec éventuellement comme au CIRM une délégation de gestion. L'autre une fondation, comme l'IHÉS, qui reçoit l'essentiel de son argent de l'État, mais qui en reçoit d'ailleurs, et qui a un statut privé. Alors on ne penserait pas en faire une école interne de P6. C'est l'histoire qui a mené à cette situation. Faut-il engager la bataille sur le statut, c'est encore une autre affaire. Mais il faut avoir à l'idée que ce statut n'est pas satisfaisant. On a en France des modèles dont on pourrait s'inspirer, toute une série d'institutions dans des disciplines différentes. Par exemple les maisons des sciences de l'homme. Celle de Paris Nord est une « unité de service et de recherche » (USR) du CNRS. Cela permet d'affecter des crédits. C'est l'université P13 qui reçoit l'argent de la logistique. Mais P13 n'est pas propriétaire.

**Bernard Teissier**. Le problème pour la deuxième solution est qu'il y a déjà une fondation à Paris.

**Martin Andler**. Là, le problème est que la fondation rassemble les universités de Paris intra muros. Les universités franciliennes ont été explicitement exclues, Orsay et toutes les universités de la périphérie. Donc elle ne peut être perçue comme l'expression des mathématiques françaises.

**Bernard Teissier**. Cela étant, la Fondation a bien un rôle national ; sa doctrine est de financer les séjours à Paris des jeunes qui viennent pour les activités de l'IHP, et cela avec une somme tout à fait substantielle. Pour le moment, à ma connaissance, c'est la seule activité de la Fondation qui soit tournée vers la France hors Paris.

**Martin Andler**. Je n'ai rien contre la Fondation, mais quand elle obtient des crédits, par exemple pour faire venir des étudiants de master étrangers en France, c'est pour être inscrits dans une des universités de la Fondation. C'est logique ; mais du coup, les autres universités ne s'y retrouvent pas.

**Bernard Teissier**. Cela étant je pense que la fondation pourrait le cas échéant financer le séjour à d'un étranger à l'IHP si on le lui demandait. Ça n'est pas du tout hors du champ de ses activités. Mais pour revenir à l'IHP, ne faut-il pas revoir le projet pour tenir compte de la nouvelle donne : LRU, Fondation, nécessité d'ouverture dont nous avons parlé ?

**Nicole El Karoui**. Je suis complètement d'accord avec Bernard, il faut bien repenser les finalités de l'IHP.

**Bernard Teissier**. Normalement, c'est le rôle du conseil d'administration. Donc il faut profiter des élections qui vont venir, il faut que les membres du CA se sentent responsables de la définition et de la défense du projet de l'IHP.

**Martin Andler**. Est-ce que le nouveau conseil d'administration pourrait avoir comme première mission de désigner une commission de sages chargée de réfléchir sur les missions et l'accrochage institutionnel de l'IHP ?

**Nicole El Karoui**. ... dans le nouveau contexte LRU. Ça n'est pas une proposition polémique.

**Bernard Teissier**. Ce serait raisonnable. Le rôle des sociétés savantes doit être intégré dans cette réflexion et du coup, on pourrait réfléchir raisonnablement sur l'ensemble du sujet.

**Martin Andler**. Ça permettrait de sortir de l'impasse actuelle.

**Nicole El Karoui**. Je pense que cette querelle est un révélateur – c'est ce qu'on a vu aujourd'hui – des transformations dans lesquelles on se trouve. Ça marque l'ambiguïté de la place de l'IHP dans ce nouveau paysage. Il faut le prendre comme un avertissement qui nous dit : « Essayez de vous y atteler avant qu'il ne soit, de fait, trop tard. »

**Michel Demazure**. Exactement.

**Bernard Teissier**. Le conseil d'administration de l'IHP, qui est statutairement l'interlocuteur de P6, devrait lancer la discussion.

**Nicole El Karoui**. On a quand même beaucoup travaillé avec les présidents de P6 ; ils veulent toujours un certain « retour sur investissement ». Il faudrait travailler avec P6 et la Fondation pour voir comment on mène des projets en commun : qu'est-ce qui apparaît comme clairement national, qu'est ce que la Fondation se réapproprie. Parce que, franchement P6, a fait des tas de choses super. Par exemple le cycle de conférences grand public « Sciences à cœur ». Et d'autres choses de qualité dans la valorisation ; ils ne la ramènent pas, les filles sont super, ils se bougent ! On va se retrouver face à la super-université scientifique, et qui sait qu'il faut travailler là-dessus. Il faut surtout trouver un modus vivendi où chacun définit bien sa place, où quand on fait quelque chose, on n'hésite pas à dire qu'une partie a été financée par la Fondation. C'est très important de renvoyer aux uns et aux autres la visibilité de leur participation. Et maintenant, comme personne n'a encore mis complètement en route son système, on n'est pas tout à fait coincé. Ça n'est pas une situation radicalement différente de ce qui s'est passé au moment de l'éclatement des universités après 1968. Chacun va s'approprier un petit bout de ce qui était auparavant très collectif.

**Jean-François Méla**. Face à une situation aussi compliquée, il faudrait créer ou recréer l'association des amis de l'IHP. Je ne vais pas vous solliciter, parce que vous avez déjà assez donné, mais...

**Nicole El Karoui**. Il faut voir la génération en dessous.

**Jean-François Méla**. Quelques plus jeunes pourraient peut être s'y coller. Parler de l'association n'est pas complètement gratuit. On a hérité d'une situation profondément ambiguë. Dans laquelle aujourd'hui la tendance naturelle pour P6 serait, petit à petit, de phagocyter l'IHP. Il ne le fera pas s'il y a en face...

**Nicole El Karoui**. du lobbying...

**Jean-François Méla**. ... la volonté de la communauté. Pas seulement défendre tel ou tel bureau.

**Nicole El Karoui**. Mais défendre un projet.

**Jean-François Méla**. Donc sous une forme ou une autre, relancer l'association des amis de l'IHP.

**Bernard Teissier**. Mais, comme disait Nicole, avec la génération suivante.

**Nicole El Karoui**. Sinon, ça ferait un peu poussiéreux. Et puis l'IHP fait partie du paysage scientifique des plus jeunes. Faire un séminaire à l'IHP, venir à l'IHP pour travailler quelque chose, venir à la cafétéria parce qu'on a besoin de se retrouver... Ce capital-là, il y a beaucoup de gens qui l'apprécient et sur lequel on peut aussi mobiliser des amis de l'IHP.

**Bernard Teissier**. Et il ne faut pas oublier que l'image de l'IHP en province a beaucoup progressé depuis le début. Il y a quand même suffisamment de mathématiciens provinciaux qui sont venus animer des semestres ici. Les gens ont arrêté de penser que l'IHP est un truc de parisiens (enfin je n'ai plus aussi souvent la réflexion).

**Martin Andler**. À cet égard, il y a encore des choses à faire. Par exemple l'IHP n'a pas mis en place un dispositif finançant des visiteurs étrangers pour faire des séminaires en province. Le MSRI à Berkeley le fait.

**Bernard Teissier**. C'est quelque chose qui est prévu.

**Martin Andler**. Il me semble que nous avons fait le tour des différentes questions posées. Peut-être voulez-vous chacun faire une conclusion ?

**Nicole El Karoui**. Il y a toujours un intérêt à retracer une forme d'historique, comme nous venons de le faire. Comprendre la rupture qu'a été la création des 13 universités parisiennes en 1968, pour comprendre ce qui se passe, maintenant que les universités deviennent plus autonomes. C'est là l'enjeu.

**Martin Andler**. On voit qu'il a fallu quand même vingt ans pour qu'on prenne la mesure de l'éclatement de l'université de Paris, pour arriver à un nouveau projet pour l'IHP. Il faudrait éviter qu'il faille vingt ans pour prendre la mesure des conséquences des évolutions actuelles.

**Nicole El Karoui**. À l'époque, 1968, les nouvelles structures qui avaient été créées avaient donné des moyens matériels exceptionnels aux mathématiciens : pour la première fois, ils avaient des bureaux, ils pouvaient se rencontrer, etc. Et donc dans les années 1970 la nécessité de l'IHP était moins grande. Et puis après s'est retrouvé le problème de s'associer au mouvement mondial de création de ces instituts à thème s'est imposé. C'était un mode de travail intéressant en maths, et donc nous avons fait un nouveau projet.

**Bernard Teissier**. J'avais suggéré au directeur de l'IHP d'inviter tous les directeurs d'écoles doctorales de France à l'IHP justement pour leur demander ce qu'ils voulaient, ce qu'ils souhaitaient de la part de l'IHP. On a parfois dit, pour utiliser la métaphore des infrastructures de recherche, que l'IHP devrait être un « accélérateur de doctorants ». On pourrait faire la même chose pour les activités non doctorales du Centre Émile Borel, les activités de recherche. Cette fois avec les directeurs d'unités.

**Michel Demazure**. Je dirais simplement, comme le plus ancien autour de cette table, qu'en fin de compte on a conservé une image de l'IHP d'avant 68, d'avant les universités ; on a essayé de la garder, de la modifier, de la transmettre. Je pense qu'il est peut être temps pour une génération nettement plus jeune, et provinciale, de se poser la question de ce qu'elle veut. Ce qu'elle voudrait de l'IHP et ce qu'elle veut faire. Peut être essayons-nous de conserver un modèle auquel nous tenons, au milieu, comme disait Nicole, d'une perturbation fondamentale et je ne suis pas

sûr que nous ayons les bonnes solutions. Je me demande si on ne devrait pas d'une manière ou d'une autre, prendre les plus jeunes directeurs d'unités, en leur demandant : « l'IHP, que voulez vous en faire collectivement ? »
**Nicole El Karoui**. Je suis d'accord. Il faut que la réflexion soit vraiment : « Qu'est-ce qu'on en fait ? » Et qu'elle soit menée au plan national, pas seulement parisien.
**Bernard Teissier**. Clairement il faut associer Villani à cette réflexion le plus vite possible.

## Annexe : Message de Jean-Pierre Aubin

Michel Demazure m'avait demandé de rechercher des souvenirs de la période 1981-1985 durant laquelle je m'étais occupé avec d'autres de l'IHP, ayant confié à Nicole et Bernard toutes les archives en 1984 ou 1985. Je n'ai rien gardé après mon départ de Dauphine.

Hubert Curien m'avait chargé de contribuer au VII$^{e}$ plan (mais si, c'est de la préhistoire, il y avait un plan, et ça marchait plutôt bien !) au titre des mathématiques, et c'est ce qui m'a conduit à l'idée de redonner une mission à l'IHP, déserté par la grande majorité des mathématiciens qui avaient migré en masse à Jussieu et balkanisé une dizaine de centres, qui avaient perdu de fait le rôle de département de maths et physique théorique de l'époque pré-Jussieu. Il fallait trouver quelque chose de nouveau en plus du CIRM, qui était la préoccupation exclusive de la SMF de l'époque. C'est alors que j'ai pensé à la rénovation de l'IHP, comme complément au CIRM (à l'un, les séminaires, à l'autre les colloques). La SMF a été en permanence informée, mais ne s'est pas impliquée pendant cette période.

Une première idée était de faire de l'IHP la « maison des mathématiciens », abritant les services communs, dont les sociétés savantes, indépendante des universités (la Suisse du monde mathématique). Une seconde idée était de diviser les mathématiques en 10 domaines, d'allouer une demi-journée à chaque domaine, pendant laquelle tous les spécialistes de France (province et Île de France) utilisaient l'ensemble des moyens (groupes de travail, séminaire, colloquiums, thés, etc.), afin de développer les synergies. Un troisième objectif était de développer et rénover la bibliothèque, dans le cadre national. Il y a eu un travail de concertation qui a débouché sur une réunion de toutes les bibliothèques à Grenoble. Cela a aussi été un prétexte pour reprendre en main les *Annales de l'IHP*, créer la série d'analyse non linéaire et réunir les éditeurs de mathématiques de l'époque, qui n'avaient pas encore disparu. Naturellement, l'effort principal a été de convaincre les collègues de jouer un jeu coopératif en installant séminaires et colloquiums dans un même lieu. Il y eut plusieurs réunions assez vives et une campagne de lettres.

Quand l'IHP a été libéré, c'était trop tard, chaque centre de recherche ayant son propre séminaire local, la dynamique coopérative était brisée.

Une fois le rapport effectué, nous étions trois à avoir pris à bras le corps le problème du retour de l'IHP dans le giron des mathématiciens, Jean-Pierre Bourguignon, Jean-Marie Schwartz et moi, dans le cadre du comité national du CNRS.

L'association IHP (loi 1901) s'est occupée du lobbying, des revues, des bibliothèques, sur le plan national, pour préfigurer ce rôle collectif, et qui ne demandaient pas de moyens financiers. Elle servait de support à ces activités bénévoles.

La bibliothèque était une unité de service du CNRS dont j'étais responsable.

Les obstacles étaient les suivants :

(1) Le recteur. C'est lui qui avait le pouvoir d'affectation des locaux. Le recteur de l'époque, Hélène Ahrweiler, ex-présidente de Paris I, n'a rien voulu entendre, ne voulant pas reloger les différents squatteurs (ISMEA, Japon, États-Unis, etc.) que le rectorat avait installés.

(2) « Paris 6 ». Je mets les guillemets, car les mathématiciens de Paris VII et une des deux UFR de mathématiques de Paris 6 appuyaient ce projet. Paris 6 désigne Belgodère, et le club de ceux qui ne voulaient pas quitter l'IHP, qui se considéraient comme les propriétaires légitimes de l'édifice. Il y avait un consortium solide des occupants qui ne voulaient pas entendre parler de ce projet.

Le CNRS, le ministère et même la présidence de Paris 6, la SMF (la SMAI allait naître à la fin de mon implication grâce à Neveu et Temam) appuyaient le projet. Bernard Decomps, directeur des enseignements supérieurs à l'époque, y était très favorable mais semblait impuissant à convaincre le recteur. Ce projet n'était pas sa priorité. Il fallait aussi prendre en compte l'inertie due à l'indifférence d'une grande partie de la communauté.

La situation avec le recteur était bloquée, alors que « Paris 6 » évoluait doucement (avec l'aide de P. Lelong). J'ai alors eu l'idée de passer la main à Nicole El Karoui (pour la bibliothèque, dans le cadre d'une unité adéquate du CNRS) et à Bernard Teissier dans l'espoir que de nouvelles personnes pouvaient repartir de zéro avec de nouveaux arguments pour convaincre le rectorat.

# INFORMATIONS

## Le Comité pour les Pays en Développement

Tsou Sheung Tsun, Paul Vaderlind, Michel Waldschmidt

Chers Collègues,

Le Comité pour les Pays en Développement CDC[1] est un des 11 comités de la Société Mathématique Européenne.

Lors de nos actions dans les pays en développement, aussi bien en Afrique, en Asie qu'en Amérique Latine, nous rencontrons bon nombre de jeunes étudiants talentueux et prometteurs. Ils obtiennent leur diplôme de Master, quelquefois dans les programmes dont nous nous occupons, et ils sont disposés à poursuivre leurs études en vue d'un Doctorat. Avec le CDC nous recherchons des formations doctorales qui pourraient les accueillir et, si possible, les aider à trouver des financements pour leurs études.

Parallèlement, de jeunes étudiants brillants plus avancés obtiennent leur thèse dans leur établissement universitaire d'origine. En dépit de leur enthousiasme et de leurs ambitions, la plupart du temps ils ne sont pas encore mûrs pour encadrer des thèses. Ils devraient d'abord compléter leur initiation à la recherche, acquérir plus d'expérience, élargir leur spectre. Cela nous conduit au second appel que nous adressons à la communauté mathématique : offrir des bourses postdoctorales pour des jeunes mathématiciens et mathématiciennes des pays en développement.

Si votre institution peut aider au moins un de ces jeunes mathématiciens débutants, merci de contacter Tsou Sheung Tsun (University of Oxford) tsou@maths.ox.ac.uk, Michel Waldschmidt (Université Pierre et Marie Curie) miw@math.jussieu.fr, Paul Vaderlind (Stockholm University) paul@math.su.se ou tout autre membre du CDC.

Nous profitons de l'occasion pour vous présenter succintement ce CDC. Vous trouverez plus d'information sur le site `http://www.euro-math-soc.eu/comm-develop.html`

Le comité comporte une dizaine de membres. La plupart d'entre eux a des activités dans le monde en développement à divers titres, par exemple en liaison avec leurs responsabilités dans des organismes comme le CIMPA[2], ICTP [3], ISP[4],

[1] Committee for the Developing Countries.
[2] Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées, Nice, France.
[3] The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italie.
[4] International Science Program, Uppsala, Suède.

IWR[5], IMU DCSG[6], ICIAM[7], CDC CEMAT[8], LMS[9] et de nombreuses sociétés mathématiques nationales ainsi que des académies.

Le rôle essentiel du CDC est d'aider les pays en développement sur les points suivants.

– Mise au point des programmes pour les enseignements de mathématiques dans les universités.

– Coopération avec les universitaires en place pour la mise en œuvre des programmes de Master et Doctorat ; contribution à l'organisation de cours dans les domaines des mathématiques pour lesquels il n'y a pas d'expert local.

– Aide à la création de bibliothèques, grâce notamment aux dons de collègues de pays développés ; fourniture de littérature mathématique sur demande des institutions ou des chercheurs individuels de pays en développement ; négociations avec les éditeurs pour obtenir des tarifs préférentiels pour les centres de documentation des pays en développement.

– Identification de centres ou de réseaux régionaux d'excellence ; ce sont des centres directement liés à des universités, ou au moins ayant des liens avec des établissements universitaires, dont le niveau d'expertise en mathématique peut rayonner vers les établissements universitaires de la région.

– Fournir aux étudiants des pays en développement ayant un Master les informations dont ils ont besoin afin de poursuivre leurs études en doctorat ; les informer sur les bourses existantes. En même temps, pour éviter autant que possible de contribuer à la fuite des cerveaux, le CDC encouragera la création de formations doctorales dans les pays en développement, à un niveau compatible avec les exigences internationales ; les centres régionaux d'excellence seront là pour y contribuer.

– Fournir aux jeunes docteurs des pays en développement les informations nécessaires pour qu'ils bénéficient de stages post-doctoraux ; encourager la création de tels stages et leur financement.

– Recueillir des fonds pour permettre aux mathématiciens et mathématiciennes, jeunes ou confirmés, de participer à des conférences ou à des écoles de recherche dans des pays en développement ; contribuer, à la fois sur le plan académique et sur celui du financement, à l'organisation de telles conférences et écoles de recherches dans les pays en développement.

P.S. Profitons-en pour rappeler aux lecteurs de la *Gazette* l'existence d'une base de données sur le site de la SMF `http://smf4.emath.fr/International/Projet-CIMPA-SMAI-SMF/` concernant les mathématiques dans le monde. Il s'agit d'un outil interactif, mis en place par le CIMPA, la SMAI et la SMF. Chacun peut non seulement y trouver des renseignements, mais aussi en mettre. C'est un moyen de diffuser les informations sur ce qui se fait comme coopération internationale, notamment avec les pays en développement.

[5] Interdisciplinary Center for Scientific Computing, Heidelberg, Allemagne.
[6] International Mathematical Union, Developing Countries Strategy Group.
[7] International Council for Industrial and Applied Mathematics.
[8] Commission on Development and Cooperation, Comité Español de Matemáticas.
[9] The London Mathematical Society.

# Comment l'AERES évalue les laboratoires de mathématiques

Christine Graffigne, Christian Le Merdy, Gilbert Levitt

Ce texte est écrit par les trois mathématiciens qui, depuis l'été 2009, sont délégués scientifiques à l'AERES. Son but est de présenter l'évaluation des laboratoires de mathématiques telle qu'elle a été effectuée par l'AERES lors de la campagne 2009-2010 (vague A, c'est-à-dire académies de Bordeaux, Toulouse, Montpellier, Lyon, Grenoble). Les modalités décrites ci-dessous devraient s'appliquer à la vague B (qui sera évaluée entre octobre 2010 et mars 2011) sans changements majeurs.

Les laboratoires (UMR et équipes d'accueil) sont évalués tous les quatre ans. Parallèlement, l'AERES évalue les formations (licences, masters, écoles doctorales) et les établissements, mais nous n'aborderons pas ces aspects ici. Les rapports de l'AERES, ainsi que les règles concernant les évaluations, sont publics et disponibles sur son site internet ( `http://www.aeres-evaluation.fr`).

L'évaluation repose sur le dossier fourni par le laboratoire. Celui-ci comporte un bilan et un projet, chacun comprenant des formulaires (listes de membres, thèses soutenues, publications, ressources financières, partenariats...) et un texte scientifique. Par ailleurs chaque membre du laboratoire remplit une fiche individuelle d'activité.

L'évaluation est effectuée par un comité d'experts, entre 4 et 10 selon la taille du laboratoire et sa diversité thématique. Ce comité est composé par le délégué scientifique AERES chargé d'organiser l'évaluation. Sauf cas particulier (unité INRA par exemple), l'un des experts est proposé par le CNU (25 ou 26 selon la dominante du labo). Pour les UMR CNRS, le Comité National du CNRS désigne également un membre. Le laboratoire n'est pas consulté sur le choix des experts. Certains d'entre eux peuvent être étrangers (c'est même très souhaitable), mais nous nous assurons qu'au minimum ils lisent le français. Enfin l'un des experts peut être un personnel ITA-IATOS, mais ce n'est pas systématique.

Ces principes s'appliquent également aux laboratoires pluridisciplinaires et concernent donc les lieux où les mathématiques ne représentent qu'une partie d'un laboratoire. Dans ce cas l'« Équipe de mathématiques » sera évaluée par le comité pluridisciplinaire de son laboratoire, qui comptera des mathématiciens dans ses rangs. Il est à noter que pour les laboratoires pluridisciplinaires, le CNU et le Comité National du CNRS (s'il s'agit d'une UMR) ne désignent qu'un seul expert chacun (et non pas un par discipline concernée).

Le comité d'experts effectue une visite dans le laboratoire qui dure entre 1 et 3 jours. Il est accompagné du délégué scientifique en charge de l'évaluation mais celui-ci n'intervient pas directement dans l'évaluation scientifique. C'est le président du comité qui mène les discussions. Le programme peut varier légèrement selon les particularités du labo, mais en général il comprend : une présentation du labo et de son projet par son directeur (et éventuellement le porteur de projet), des exposés scientifiques, des rencontres avec les équipes (ou thèmes, ou axes, selon l'organisation du labo), avec les doctorants, avec les personnels ITA-IATOS, avec le conseil du laboratoire (en présence ou non du directeur), avec les tutelles (université(s) et, pour les UMR, le CNRS). La présentation et les exposés sont publics, les rencontres sont réservées aux personnels concernés. Dans la mesure du possible, nous essayons que l'ensemble du comité voie toutes les équipes, de sorte que le rapport soit aussi collectif que possible. Dans le cas d'un gros laboratoire, le comité peut se scinder en deux parties mais pas au-delà.

À la fin de la visite, le comité se réunit pendant environ deux heures pour s'accorder sur les grandes lignes de son rapport. Il ne fait pas de compte-rendu au laboratoire, qui ne recevra aucune information avant le rapport écrit. Ce rapport est préparé par le comité sous la direction de son président, en principe dans les deux semaines qui suivent la visite. Après relecture et mise en forme par l'AERES il est communiqué à l'université qui le transmet au laboratoire. Cette phase peut durer plusieurs semaines.

La structure du rapport est imposée par une maquette (disponible sur le site de l'AERES). Il comporte un certain nombre d'informations sur le labo, puis un avis global, une liste des points forts, des points faibles, et des recommandations. Viennent ensuite des appréciations plus détaillées organisées en quatre rubriques :

(1) qualité scientifique et production ;
(2) rayonnement et attractivité, intégration dans l'environnement ;
(3) stratégie, gouvernance et vie du laboratoire ;
(4) appréciation du projet.

Après cette évaluation globale du laboratoire, le rapport passe en revue chacune des équipes.

Le rapport contient un certain nombre de données chiffrées : nombre d'enseignants-chercheurs, de chercheurs, d'ITA-IATOS, de doctorants, nombre de thèses et HDR soutenues, ainsi que le nombre de produisants. Cette notion repose, pour les mathématiques, sur la règle suivante. L'AERES considère comme produisant un enseignant-chercheur ou chercheur qui, dans les 4 années couvertes par l'évaluation, a publié au moins deux articles dans des revues internationales (ou a réalisé deux productions scientifiques – logiciels par exemple – de valeurs comparables). Une activité d'encadrement ou une forte activité administrative liée à la recherche peut compenser un déficit de publications (par contre l'investissement dans l'enseignement n'est pas pris en compte). De plus, nous comptons généralement comme produisants les nouveaux recrutés qui viennent de soutenir leur thèse.

Ces règles laissent un peu de place à l'interprétation et nous essayons de les appliquer avec discernement. Nous nous fondons essentiellement sur les fiches individuelles d'activité présentes dans le dossier (qu'il convient donc de remplir aussi complètement que possible), et sur les informations fournies par le directeur du laboratoire. Précisons que l'AERES ne fait que calculer un nombre de produisants, il n'y a ni implicitement ni explicitement de liste des produisants. Rappelons que l'AERES n'effectue aucune évaluation individuelle. Le taux de produisants, qui figure dans les rapports, n'a pas été considéré par les experts de la vague A comme un élément significatif d'appréciation de la qualité. Nous partageons ce point de vue.

À la fin de la procédure d'évaluation, chaque laboratoire reçoit 5 notes : une note pour chacune des 4 rubriques mentionnées ci-dessus, et une note globale.

Chacune de ces notes peut être : A+, A, B, C. Il n'y a en général pas de notation par équipes à l'intérieur des laboratoires de mathématiques. Par contre, lorsque les mathématiques représentent une partie d'un laboratoire pluridisciplinaire, elles sont notées en tant qu'« Équipe de mathématiques ».

Les notes sont attribuées lors d'une réunion à laquelle participe un représentant du comité de chaque entité évaluée : le président s'il s'agit d'un laboratoire de mathématiques, un des experts mathématiciens s'il s'agit d'une « Équipe de mathématiques » à l'intérieur d'un laboratoire pluridisciplinaire. Le point de départ de la réunion est une proposition des 4 premières notes pour chaque entité évaluée, émanant des délégués scientifiques. Cette proposition se fonde sur l'ensemble des rapports écrits et des visites. Ensuite, les décisions (y compris l'attribution de la note globale) sont prises par cette « assemblée des présidents ». Ces décisions sont collégiales et tous les présidents (ou experts) présents sont consultés sur l'ensemble des notes. La note globale n'est en aucune façon une moyenne des 4 autres notes, ou de certaines d'entre elles. Par ailleurs, l'AERES ne fixe aucun quota et laisse toute liberté de jugement à cette assemblée.

Nous terminons par quelques points qui sont ressortis de l'évaluation de la vague A.

– Les regroupements et restructurations effectués pendant la décennie qui s'achève sont globalement des succès. De plus de nombreux laboratoires sont partie prenante de fédérations qui contribuent à cette structuration.

– La plupart des laboratoires ont connu lors du dernier quadriennal un fort renouvellement de leurs membres permanents (pouvant aller jusqu'à 40%). Les prochaines années seront probablement différentes.

– Les contrats ANR sont devenus une source de financement importante des laboratoires. Cependant leur gestion induit une surcharge de travail pour les personnels administratifs. Certains rapports préconisent que ces contrats ANR contribuent au budget global du laboratoire ou au financement de la bibliothèque.

– L'INRIA joue un rôle de plus en plus important dans le développement de certains laboratoires de mathématiques à travers l'implantation d'équipes-projets (EPI). L'effet bénéfique en termes de moyens humains et financiers est spectaculaire. Cependant le risque de cloisonnement à moyen terme de ces EPI est à prendre en considération.

– La disparition des PPF pose à beaucoup d'endroits le problème du financement de la bibliothèque. Il s'agit d'une inquiétude forte de l'ensemble de la communauté.

# Nouvelles du CNRS, section 01

Virginie Bonnaillie-Noël, Yann Brenier

Les informations relatives au comité national sont régulièrement mises en ligne sur le site `http://cn.math.cnrs.fr`

## Concours 2010

### Résultats d'admissibilité

Les résultats que nous mentionnons ici sont des listes d'admissibilité et non d'admission. Les jurys d'admission se déroulent fin juin. Les résultats définitifs du concours ne sont pas connus au moment du bouclage de la *Gazette* mais seront disponibles sur le site du CNRS.

Concours 01/01 : 1 DR1
1. Bahouri Hajer

Concours 01/02 : 9 DR2
1 ex aequo. Funar Louis, Lafforgue Vincent, Urban Éric, Wang Wei Min, 5. Jaligot Éric, 6. Rivoal Tanguy, 7. Favre Charles, 8. Fayad Bassam, 9. Schiffmann Olivier ; 10. Cantat Serge

Concours 01/03 : 2 CR1
1 ex aequo. Helfgott Harald Andres, Oancea Alexandru

Concours 01/04 : 1 CR2 affecté dans un laboratoire relevant de la section 02 « Théories physiques : méthodes, modèles et applications »
1. Nechita Ion ; 2. Schenck Emmanuel, 3. Raymond Nicolas

Concours 01/05 : 1 CR2 affecté dans un laboratoire relevant de la section 07 « Sciences et technologies de l'information »
1. Mérigot Quentin ; 2. Yu Guoshen, 3. Chapuy Guillaume

Concours 01/06 : 1 CR2 affecté dans un laboratoire relevant de la section 10 « Milieux fluides et réactifs : transports, transferts, procédés de transformation »
1. Larat Adam ; 2. Goudenège Ludovic

Concours 01/07 : 12 CR2 dont au moins 4 sur des thématiques d'interactions des mathématiques
1 ex aequo. De La Salle Mikaël, Grivaux Julien, Ivanovici Danela Oana, Lacoin Hubert, Matheus Silva Santos Carlos, Miot Évelyne, Pilloni Vincent, Py Pierre, 9. Véber Amandine, 10. Kassel Fanny, 11. Goudenège Ludovic, 12. Schraen Benjamin ; 13. Théret Marie, 14. Rivière Gabriel, 15. Neuvial Pierre, 16. Burguet David, 17. Lepoutre Thomas, 18. Amiot Claire, 19. Cazanave Christophe, 20. Jouve Guillaume

Les critères pris en compte pour le recrutement ont été définis par la section en début de mandat et sont disponibles à l'adresse suivante :
`http://www.cnrs.fr/comitenational/sections/critere/section01.htm`
Nous les rappelons ici en fonction du grade pour lequel le candidat postule :

CR2 : Qualité du travail de recherche
Originalité
Autonomie

CR1 : Régularité, qualité et originalité de la production scientifique
Participation à la vie scientifique du laboratoire

DR2 : Qualité et originalité de la production scientifique
Rayonnement national et international
Capacité à la direction de recherches
Intérêt du programme de recherche dans le cadre du développement du laboratoire d'accueil
Ouverture thématique
Qualités d'animation et de valorisation
Prise de responsabilités
Mobilité

DR1 : Qualité et originalité de la production scientifique
Rayonnement national et international
Direction de recherches
Intérêt du programme de recherches
Ouverture thématique
Qualités d'animation et de valorisation
Prise de responsabilités
Mobilité

Le jury d'admissibilité rappelle aux candidats à un poste de chargé de recherche qu'ils ont la possibilité de joindre leurs rapports de thèse dans leur dossier de candidature. Nous rappelons qu'aucun candidat à un poste de chargé de recherche en section 01 ne peut s'attendre à être affecté dans le laboratoire où il a effectué sa thèse. Nous avons constaté cette année peu de variétés et d'originalité dans les propositions d'affectation. Nous encourageons donc les candidats, aussi bien pour les postes de chargés de recherche que de directeurs de recherche, à proposer deux vœux d'affectation dont l'un au moins en province afin de faciliter la répartition géographique des chercheurs CNRS. Peu de candidats à un poste de directeur de recherche ont proposé une mobilité, ce qui est regrettable, même si les candidats ont une dynamique importante dans leur laboratoire actuel. La mobilité est l'affaire de toute la communauté et chacun, à son niveau, est responsable de sa mise en œuvre.
Le programme de recherche est un élément important lors de l'évaluation du dossier. Il permet de déterminer le recul du candidat par rapport à son thème de recherche mais aussi d'apprécier la vision globale du candidat et son insertion dans le laboratoire. Pour les concours de chargé de recherche affecté dans des laboratoires ne relevant pas de la section 01, le programme de recherche permet en outre d'estimer la possibilité d'intégration dans le laboratoire proposé par le candidat. Beaucoup de candidatures sur ces postes n'ont pas été suffisamment préparées :

nous rappelons que pour les postes de chargé de recherche affecté dans un laboratoire relevant d'une autre section que la section 1, les vœux d'affectation doivent être des laboratoires relevant de ladite section. Le projet de recherche doit être construit en conséquence.
Il n'y a pas d'audition pour les postes de directeur de recherche. Pour le concours chargé de recherche, les auditions ont duré 7 minutes pour chaque candidat : 2 minutes de présentation (sans support) et 5 minutes d'entretien avec le jury.

### Parité

La proportion de femmes dans l'enseignement-supérieur et la recherche en mathématiques était de $20,4\%$ en 2005. Au CNRS et pour les mathématiques, elle était de $16\%$ en 2007 et de $14\%$ de 2009. Nous avons recueilli le nombre de candidatures hommes/femmes pour le concours 2010 dans le tableau suivant.

| Concours | 01/01 | 01/02 | 01/03 | 01/04 | 01/05 | 01/06 | 01/07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nb postes | 1 | 9 | 2 | 1 | 1 | 1 | 12 |
| Nb hommes admis à concourir | 10 | 77 | 38 | 50 | 52 | 14 | 156 |
| Nb femmes admises à concourir | 3 | 13 | 6 | 3 | 10 | 3 | 37 |
| Proportion de femmes | 23% | 14,4% | 13,6% | 5,6% | 16,1% | 17,6% | 19,2% |
| Nb hommes classés[1] | 0/0 | 8/1 | 2/0 | 1/2 | 1/2 | 1/1 | 8/6 |
| Nb femmes classées[1] | 1/0 | 1/0 | 0/0 | 0/0 | 0/0 | 0/0 | 4/2 |

Lors de la réunion des Présidents de sections et de CID du Comité National, le 19 janvier 2010, un projet d'étude sur l'égalité des chances hommes/femmes au CNRS a été présenté. La Direction générale du CNRS, en accord avec le Président de la Conférence des Présidents de Sections, a souhaité que tous les membres de toutes les sections du Comité National participent à l'enquête « L'égalité des chances hommes/femmes au CNRS ». Cette étude se déroulera du 26 avril au 18 juin 2010 en partenariat avec la Mission pour la Place des Femmes au CNRS et l'équipe « Comportement & Contexte » (UMR 6146).

## Délégations

Rappelons tout d'abord que l'attribution des délégations relève de la direction et pas du comité national auquel cette prérogative a été retirée depuis quelques années. Comme l'an dernier, quelques membres de la section ont participé à l'étude des dossiers avec la direction.

Contrairement à ce qu'on pouvait craindre l'an passé (notamment avec la création des chaires), il devrait y avoir en 2010-2011 une très forte augmentation du nombre d'années de délégations (une centaine contre 61 années l'an dernier). Cette augmentation, probablement liée à la création de l'INSMI, va permettre de satisfaire beaucoup de demandes, d'accorder des délégations d'une année entière et quelques renouvellements.

Les informations précisées dans les demandes sont souvent très hétérogènes. En particulier, certains dossiers ne mentionnent ni les services effectués les dernières années, ni les décharges obtenues, ni le motif de la demande.

La direction de l'INSMI fera un bilan des délégations qui circulera par la voie des directeurs d'unité.

[1] (liste principale / complémentaire).

## Primes d'Excellence Scientifique

L'INSMI a attribué 15 PES en 2009 (1 CR1, 3 DR2, 7 DR1 et 4 DRCE). Ces primes ont été attribuées aux titulaires de médailles du CNRS ou de certains prix. Lors de la session d'automne 2009, le comité national avait dénoncé cette méthode d'attribution en votant une motion à ce propos (cf. `http://cn.math.cnrs.fr/Motions/S01_A09_motionPES.pdf`) et avait décidé d'ajourner la proposition de noms pour les médailles. Récemment, le président du CNRS a confirmé au président de la CPCN[2] que les médailles de bronze 2010 ne donneront pas lieu à l'attribution d'une prime. Le comité national a donc transmis au directeur de l'INSMI une proposition pour la médaille de bronze. En revanche, il n'a pas transmis de proposition pour la médaille d'argent.
La direction de l'INSMI a dû proposer pour le 13 mai un mode de désignation de la commission ad hoc pour la sélection des récipiendaires de la PES, année 2010. À cette date, la section s'était réunie pour la session de printemps. Elle a donc adhéré aux motions votées à la CPCN du 20 avril 2010 :

**Motion 1.**
La CPCN rappelle son hostilité à la logique des PES. Elle préconise que l'impact négatif de cette mesure soit limité par un taux qui permette son attribution au plus grand nombre de chercheurs dont l'activité a été jugée favorablement par leur section. À défaut, elle propose d'attribuer cette prime aux lauréats des concours de recrutement à l'occasion de leur titularisation.
Unanimité : 21 voix.

**Motion 2.**
La CPCN a pris connaissance des modalités d'attribution de la PES prévues par le CNRS pour 2010. Elle s'oppose à la constitution de comités ad hoc et de toute instance d'évaluation parallèle au Comité national. Elle recommande aux membres des sections du Comité national de ne pas participer à ceux qui pourraient être constitués cette année.
Elle refuse que cette attribution soit faite sur la base de prix scientifiques obtenus par ailleurs et demande qu'elle s'appuie exclusivement sur les évaluations individuelles établies par les sections du Comité national.
19 oui, 1 abstention, 1 contre.

## Conseil scientifique de l'INSMI

Les conseils scientifiques d'institut ont été créés en 2009. Ils ont pour mission de conseiller et d'assister par leurs avis et leurs recommandations le directeur de l'institut de manière prospective sur la pertinence et l'opportunité des projets et activités de l'institut. Chaque conseil scientifique d'institut est composé de douze membres élus et de douze membres nommés par le président après avis du conseil scientifique du centre, comprenant des personnalités étrangères. Les douze membres représentants du personnel de chaque institut seront élus en 2010. Ils se répartissent comme suit :

– 3 membres élus par les personnels relevant du collège A1 (A CNRS)

[2] Conférence des Présidents du Comité National.

– 2 membres élus par les personnels relevant du collège A2 (A autres)
– 2 membres élus par les personnels relevant du collège B1 (B CNRS)
– 2 membres élus par les personnels relevant du collège B2 (B autres)
– 3 membres élus par les personnels relevant du collège C

Les candidatures sont consultables sur le site du CNRS :
http://www.sg.cnrs.fr/elections/csi/liste_candidats/default.htm
En parallèle, le conseil scientifique du CNRS renouvelle en 2010 ses 11 représentants du personnel. Les deux élections auront lieu en simultané. Le matériel de vote sera expédié à partir du 10 juin 2010, la date limite de réception des votes est fixée au 8 juillet à 9h30 et le dépouillement commencera à cette date.

# CARNET

## Kodaira dimension and vanishing, a hommage to Eckart Viehweg

**(1948 - 2010)**

Yujiro Kawamata[1]

The purpose of this note is to introduce some of the early works of a great mathematician, Eckart Viehweg.

### Subadditivity of the Kodaira dimension

There is a beautiful classification theory of algebraic and complex analytic surfaces due to Enriques and Kodaira. An arbitrary smooth projective variety or a compact complex manifold of dimension 2 has a birational morphism to its *minimal model*, and the latter is classified according to certain invariants. In the 1970's people wanted to generalize such a theory to higher dimensional algebraic varieties. But it was clear from examples that there did not in general exist any birational morphism to a reasonably defined minimal model. Therefore people developed a theory which has a purely birational nature in the sense that one can freely change the birational models throughout the argument.

Let $X$ be a smooth projective variety. We denote by $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ the canonical sheaf or the dualizing sheaf, the determinant sheaf of the cotangent bundle, corresponding to the *canonical divisor* $K_X$. Then the vector space $H^0(X, mK_X)$ of pluricanonical forms is independent of the choice of a birational model of $X$ for any positive integer $m$. Shigeru Iitaka extracted an important invariant $\kappa(X)$ called the *Kodaira dimension*, defined as the growth order of the plurigenera $P_m(X) = \dim H^0(X, mK_X)$ when $m$ goes to infinity. This is a birational invariant which reflects the basic geometry of the variety. For example, if $\dim X = 1$, then $\kappa(X)$ is respectively $-\infty, 0, 1$ if the genus $g(X)$ is $0, 1, \geq 2$.

Litaka observed the following subadditivity property of the Kodaira dimension in the case $\dim X = 2$, by looking at the classification of surfaces, and conjectured that it holds in general: let $f : X \to Y$ be a surjective morphism between smooth projective varieties with connected geometric fibers (such setting is called an *algebraic fiber space*), then the inequality $\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(F)$ holds, where $F$ is a general fiber. This conjecture became a central problem in higher dimensional algebraic geometry. For example, in the case $\dim X = 2$ and $\dim Y = 1$, if

[1] Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo

$g(Y) \geq 2$ and $g(F) \geq 2$, then $\kappa(X) = 2$, and if $g(Y) \geq 2$ and $g(F) = 1$, then $\kappa(X) = 1$. We note that if $g(Y) = 0, 1$ and $g(F) = 1$, then $\kappa(X)$ can take arbitrary values $\leq 1$, so we can expect only an inequality involving the Kodaira dimensions.

Let $K_{X/Y} = K_X - f^*K_Y$ be the relative canonical divisor corresponding to the relative canonical sheaf $\omega_{X/Y} = \omega_X \otimes \omega_Y^{-1} = \mathcal{O}_X(K_{X/Y})$. The assertion of the conjecture follows from the existence of a lot of global sections of the direct image sheaf $f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y})$ for sufficiently large integers $m$. Indeed the multiplication map

$$H^0(X, mK_{X/Y}) \otimes H^0(Y, mK_Y) \to H^0(X, mK_X)$$

then yields a lot of global sections of $mK_X$ out of those of $mK_Y$.

The work of Eckart Viehweg [1] was the first successful result on this conjecture in the higher dimensional case. He proved the Iitaka conjecture in the case where $\dim X = \dim Y + 1$. The idea of the proof was to look at automorphic forms. If $f : X \to Y$ is a very nice family of algebraic curves of genus $g$, then the automorphic forms of weight $m$ on the compactified moduli space $\bar{M}_g$ of curves of genus $g$ yield global sections of the sheaf $f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y})$ through the pull-back by the moduli morphism $Y \to \bar{M}_g$. Of course the morphism $f : X \to Y$ is not necessarily very nice, e.g., there can be bad degenerate fibers. So one needs a good analysis of the phenomena appearing when changing the base space $Y$, in order to use the existence of automorphic forms. There was an earlier work of Kenji Ueno who found a proof of the theorem in the case $\dim X = 2$ without using the classification of surfaces, as well as some special cases in higher dimensions. The paper [1] used the structure of the moduli space of curves more systematically, and was really a ground-breaking result in the higher dimensional birational geometry. His argument using the higher dimensional machinery such as the Grothendieck duality theorem and the semistable reduction theorem gives a good control of degenerating fibers. The local calculations using the Weierstrass points and the Wronskian determinants are explicit.

It is also worthwhile to note that the importance of moduli spaces is already clear in this early work. This idea was developed much further in later works. It became gradually clear that the conjecture was about positivity properties of some sheaves on the moduli space of algebraic varieties which appear as fibers of the considered algebraic fiber spaces. This observation opened a new field of research on positivity. One also notices that computations in the spirit of Arakelov geometry were already present in this paper.

Then he proceeded to the much harder case where the fiber dimension is 2 in [2]. The paper is written in German because it is his Habilitationsschrift. The main result is the birational classification of algebraic varieties of dimension 3.

For example, he proved that any 3-dimensional algebraic variety with vanishing Kodaira dimension $\kappa(X) = 0$ is birationally equivalent via its Albanese map to an étale fiber bundle over an abelian variety. Indeed such a result was the original motivation for the subadditivity conjecture.

In order to prove such a result, he strengthened the Iitaka conjecture giving it a more precise form (Iitaka-Viehweg conjecture). He defined an invariant $\mathrm{Var}(f)$ called the *variation* of the family $f : X \to Y$ as the number of moduli of birational classes of the fibers of $f$. Then the conjecture states that $\kappa(K_{X/Y}) \geq \max\{\kappa(F), \mathrm{Var}(f)\}$ if $\kappa(F) \geq 0$. This conjecture is definitely stronger than the original Iitaka conjecture, and is necessary in order to obtain such a result as the existence of an étale fiber bundle structure. Now the problem is stated in a relative setting, so that the base change techniques can be naturally applied. The relationship with the moduli problem became clear in this new formulation.

When the fibers are 2-dimensional, he could not use the argument involving automorphic forms, because the compactification of the moduli space of surfaces was not known at that time. Instead he proved the existence of sufficiently many global sections of the direct image sheaves $f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y})$ by using a theorem of Gieseker on the stability of Hilbert points corresponding to the images of the pluricanonical embeddings of surfaces appearing as fibers of the considered algebraic fiber space, as well as a positivity result of Takao Fujita.

Meanwhile the author of this note proved a semipositivity theorem for the direct image sheaf $f_*\mathcal{O}_X(K_{X/Y})$, i.e., the case of $m = 1$, by extending Fujita's result, under the assumption that the algebraic fiber space $f : X \to Y$ is already well prepared by birational morphisms and base change in "Characterization of abelian varieties", Compositio Math. 43 (1981). The purpose of this paper was also to prove the Iitaka conjecture in a certain special case and thereby obtain a birational characterization of abelian varieties. We note that the proof works only over a field of characteristic zero.

Eckart Viehweg then found the concept of *weak positivity* for coherent sheaves, which is more suitable for birational geometry. For example, an invertible sheaf is semipositive if and only if it is nef, while it is weakly positive if and only if it is pseudo-effective. Thus semipositivity is a biregular property which depends on the birational model, while weak positivity is a birational property which does not depend on the choice of a birational model. By devising an ingenious covering trick, he proved that the direct image sheaf $f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y})$ is always weakly positive for any positive integer $m$ ([3]). The subadditivity conjecture follows as a corollary when the base space $Y$ is a variety of general type.

There is a subtle relationship between biregular geometry and birational geometry. At that time, the extension of the minimal model theory from surfaces to dimension 3 or higher looked hopeless. But it is always important to make a bridge between a precise analysis of biregular geometry, such as the semipositivity theorem as a consequence of Hodge theory, and a more essential statement of birational geometry, such as the weak positivity theorem.

His weak positivity theorem became a fundamental theorem for algebraic fiber spaces ([5]). It provides a basic tool for the study of the Iitaka-Viehweg conjecture, which is not yet proved in full generality. But more important, it gave rise to a new method for the later investigation of the moduli spaces of algebraic varieties ([6]).

## A generalization of the Kodaira vanishing theorem

The covering technique was already a standard and popular method in algebraic geometry at that time. Presumably as a byproduct of the covering trick used for the investigation of the Iitaka conjecture, Eckart Viehweg proved a generalization of the Kodaira vanishing theorem ([4]), which was simultaneously and independently proved by the author in "A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem", Math. Ann. 261 (1982). It is an application of a precise ramification formula for a covering as explained below.

Let us first review the original Kodaira vanishing theorem. Let $X$ be a smooth projective algebraic variety defined over a field of characteristic zero, and let $M$ be a divisor. Assume that $N = M - K_X$ is an ample divisor. Then all the higher cohomology groups of $M$ vanish: $H^p(X, M) = 0$ for all $p > 0$.

By Nakai's criterion for ampleness, $N$ is ample if and only if the intersection numbers $(N^d \cdot Y)$ are positive for all positive integers $d$ and all subvarieties $Y \subset X$ of dimension $d$. Thus all the intermediate dimensional subvarieties should be considered. A problem which arises naturally is to make the theorem more general, by formulating relaxed and more natural conditions on $N$, under which the conclusion still holds. For example, Mumford obtained a version saying that the vanishing above holds if some multiple of $N$ is base point free and gives a birational morphism.

Now we state the theorem. Let $X$ and $M$ as before. Moreover let $B$ be a $\mathbf{Q}$-divisor, a divisor with coefficients in $\mathbf{Q}$, whose coefficients belong to the open interval $(0, 1)$ and which is supported on a normal crossing divisor. Then all the higher cohomology groups vanish, $H^p(X, M) = 0$ for all $p > 0$, provided that $N = M - (K_X + B)$ is nef and big, i.e., the intersection numbers $(N \cdot C)$ are nonnegative for all curves (1-dimensional subvarieties) $C$ on $X$, and that the highest self intersection number $N^{\dim X}$ is positive.

The proof relies on the following ramification formula. Let $X$ be a smooth projective algebraic variety and $L$ a divisor. Assume that there exists a non-zero global section $s$ of a multiple $\mathcal{O}_X(mL)$ for a positive integer $m$. By using Hironaka's theorem on the resolution of singularities, we prepare the situation so that the zero locus $D = \mathrm{div}(s)$ is supported by a normal crossing divisor. By attaching an $m$-th root $s^{1/m}$ to the function field $k(X)$ of $X$ and taking the normalization in this field, we obtain a finite Galois covering morphism $\pi : Y' \to X$. Let $\mu : Y \to Y'$ be a resolution of singularities, and let $f = \pi\mu$. Then we have a formula

$$f_*\mathcal{O}_Y(K_Y) = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_X(K_X + iL - \ulcorner iD/m \urcorner)$$

where $\ulcorner\urcorner$ denotes the round up of a $\mathbf{Q}$-divisor.

The initial purpose of the generalization was to make the conditions numerical. But it turned out that the **Q**-divisor version is a natural formulation. Though the theorem is rather easily deduced from the Kodaira vanishing theorem, it became a far-reaching fundamental tool for the higher dimensional algebraic geometry, especially for the minimal model theory.

*I thank Olivier Debarre for his careful reading.*

## References

[1] E. Viehweg. *Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one*, Compositio Math. 35 (1977), n° 2, 197-223.

[2] E. Viehweg. *Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei*, (German) Compositio Math. 41 (1980), n° 3, 361-400.

[3] E. Viehweg. *Die Additivität der Kodaira Dimension für projektive Faserräume über Varietäten des allgemeinen Typs*, (German) [The additivity of the Kodaira dimension for projective fiber spaces over varieties of general type] J. Reine Angew. Math. 330 (1982), 132-142.

[4] E. Viehweg. *Vanishing theorems*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), 1-8.

[5] E. Viehweg. *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces*, Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981), 329-353, Adv. Stud. Pure Math., 1, North-Holland, Amsterdam, 1983; *II. The local Torelli map*. Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982), 567-589, Progr. Math., 39, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[6] E. Viehweg. *Weak positivity and the stability of certain Hilbert points*, Invent. Math. 96 (1989), n° 3, 639-667; II. Invent. Math. 101 (1990), n° 1, 191-223; III. Invent. Math. 101 (1990), n° 3, 521-543.

# Inégalités d'Arakelov et hyperbolicité des espaces de modules ; travaux récents d'Eckart Viehweg

Claire Voisin[1]

*En hommage à Eckart Viehweg*

Je décris dans ce texte qui fait suite à celui de Yujiro Kawamata un autre aspect des propriétés de positivité des espaces de modules de variétés projectives, lié à la notion d'hyperbolicité, et étudié au cours des dix dernières années par Eckart Viehweg, en collaboration avec Bedulev, Möller et Zuo.

## Introduction : inégalités d'Arakelov géométriques et conjecture de Shafarevich

Donnons-nous une base $B$ qui sera ici une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$, et un sous-ensemble fini $S \subset B$. Fixons par ailleurs une classe de déformations $\mathcal{M}$ de variétés projectives lisses de dimension $n$ (par exemple les courbes lisses de genre $g$, ou les variétés abéliennes de dimension $n$ et munies d'une polarisation de type numérique fixé). Les inégalités de type Arakelov, formulées dans le contexte géométrique, visent à établir la finitude de l'ensemble des composantes irréductibles de l'espace paramétrant les paires $(Y, \varphi)$, où $Y$ est lisse quasi-projective et $\varphi : Y \to B \setminus S$ est un morphisme projectif non localement isotrivial dont les fibres sont dans la classe $\mathcal{M}$. Ce type d'énoncé généralise une partie de la conjecture de Shafarevich, qui concerne le cas où les fibres sont des courbes de genre $\geqslant 2$, où l'on obtient de plus, grâce à des énoncés de rigidité garantissant que chaque composante est réduite à un point, la finitude de l'ensemble de ces morphismes. Dans la réalité, on doit souvent imposer une condition supplémentaire dite de « semi-stabilité », qui peut se réaliser après un changement de base $B' \to B$ ramifié le long de $S$ et des transformations biméromorphes centrées au-dessus de $S$, demandant que le morphisme $\varphi : Y \to B \setminus S$ s'étende en un morphisme projectif $\overline{\varphi} : \overline{Y} \to B$, où $\overline{Y}$ est lisse et dont les fibres au-dessus des points de $S$ sont des diviseurs réduits à croisements normaux. Passant au langage analytique, ceci signifie que pour tout point $s \in S$ et tout point $y \in \overline{\varphi}^{-1}(s)$, on peut trouver des coordonnées holomorphes locales $z_1, \ldots, z_{n+1}$ sur $\overline{Y}$ centrées en $y$, telles que pour un entier $r \leqslant n+1$, on ait $f^*z = z_1 \cdot \ldots \cdot z_r$, où $z$ est une coordonnée holomorphe sur $B$ centrée en $z$. Cette condition est importante car elle entraîne l'unipotence de la monodromie locale, alors que dans le cas général, on n'a que la quasi-unipotence.

Lorsque $\mathcal{M}$ est un espace de modules fin, c'est-à-dire paramètre lui-même une famille universelle $Y_{\text{univ}} \to \mathcal{M}$, la question est équivalente à la suivante : montrer que la famille des morphismes rationnels $f : B \dashrightarrow \mathcal{M}$ non constants tels que $f$ est défini sur $B \setminus S$, est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini de familles algébriques paramétrant à isomorphisme près tous les morphismes satisfaisant ces

[1] CNRS et Institut de Mathématiques de Jussieu.

conditions. Dans l'article [2], Bedulev et Viehweg montrent un tel énoncé pour les espaces de modules $\mathcal{M}$ de surfaces de type général.

On peut étudier des variantes de ce type de propriété, où on autorise également la paire $(B, S)$ à se déformer. Le fait qu'on obtienne des familles bornées est alors une forme faible d'hyperbolicité de $\mathcal{M}$ qui a été introduite et étudiée par Bogomolov dans le cas des surfaces.

Dans le cadre géométrique, et lorsqu'on dispose d'un espace de modules quasiprojectif $\mathcal{M}$ muni d'un fibré en droites ample $\mathcal{L}$, les énoncés de finitude ci-dessus se déduisent, grâce à la finitude des schémas de Hilbert de $\mathcal{M}$ ou des variétés de Chow paramétrant les sous-ensembles algébriques de $\mathcal{M}$ de degré borné relativement à $\mathcal{L}$, de l'existence de bornes sur le degré du fibré en droites $f^*\mathcal{L}$ sur $B$, ne faisant intervenir que le genre de $B$ et le cardinal de $S$. Le fibré $\mathcal{L}$ est en général obtenu à l'aide de théorèmes de positivité des images directes évoqués dans l'article de Kawamata (cf. [6], [7], [12]). Le cas le plus simple est celui des variétés de Calabi-Yau de dimension $n$, pour lesquelles on dispose grâce à la théorie de Hodge (cf. [5]) d'un fibré en droites à forme de Chern positive, le fibré de Hodge $\mathcal{H}^{n,0}$, sur le champ de modules.

## Fibrés de Higgs, systèmes locaux et inégalités d'Arakelov

Soient $B$ et $S$ comme ci-dessus, $\overline{Y}$ une variété projective lisse de dimension $n+1$ et $\overline{\varphi} : \overline{Y} \to B$ un morphisme projectif, lisse au-dessus de $B \setminus S$. On suppose que les fibres singulières de $\overline{\varphi}$ sont réduites et à croisements normaux. Le fibré dualisant relatif $\omega_{\overline{Y}/B}$ de $\varphi$ est le fibré inversible $\omega_{\overline{Y}} \otimes \omega_B^{-1}$ sur $\overline{Y}$, où $\omega_Z := \det \Omega_Z$ pour toute variété lisse $Z$. Pour tout $\nu \geqslant 0$, le fibré $\overline{\varphi}_* \omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes \nu}$ est sans torsion. On suppose que les fibres ne sont pas de dimension de Kodaira $-\infty$, c'est-à-dire que $\overline{\varphi}_* \omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes \nu}$ est non nul pour un $\nu > 0$. Pour un tel $\nu$, notons $r_\nu$ son rang et définissons son degré comme le degré du fibré en droites $\det(\overline{\varphi}_* \omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes \nu})$. Voici un exemple d'inégalité de type Arakelov montrée dans [8], [11].

**Théorème 1.** *Pour tout $\nu \geqslant 1$ tel que $\overline{\varphi}_* \omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes \nu} \neq 0$, on a*

$$\frac{\deg(\overline{\varphi}_* \omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes \nu})}{r_\nu} \leqslant \frac{n\nu}{2} \deg \Omega_B(S). \tag{1}$$

Ici le nombre $\deg \Omega_B(S)$ est un invariant numérique (c'est-à-dire invariant par déformation) de la paire $(B, S)$, égal à $\deg \Omega_B + |S| = 2g(B) - 2 + |S|$. Le terme de droite ne dépend donc que du genre de $B$, du cardinal de $S$ et de la dimension des fibres. Dans le terme de gauche, le dénominateur $r_\nu$ ne dépend que de la classe de déformation des fibres lisses (invariance par déformation des plurigenres). Ainsi

(1) fournit une borne supérieure pour deg $(\overline{\varphi}_*\omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes\nu})$ ne faisant intervenir que des caractéristiques numériques de la fibre et de la base. Ceci est une inégalité de type Arakelov. L'inégalité (1) permet par exemple de retrouver le fait classique que toute famille non iso-triviale de courbes de genre $\geqslant 1$ paramétrée par $\mathbb{P}^1$ possède au moins trois fibres singulières, en tenant compte du fait que dans ce cas, le terme de gauche de l'inégalité (1) doit être strictement positif pour $\nu \geqslant 1$. Dans des travaux ultérieurs, Möller-Viehweg et Viehweg-Zuo analysent les cas où la borne est atteinte pour $\nu = 1$, à la fois dans le cadre des variations « abstraites » de structures de Hodge et dans le cadre géométrique présenté ci-dessus.

Le terme de gauche dans la formule (1) est ce qu'on appelle la pente du fibré $\overline{\varphi}_*\omega_{\overline{Y}/B}^{\otimes\nu}$. L'inégalité (1) est donc une borne pour la pente de ce fibré. Cette inégalité est obtenue dans *loc. cit.* par un argument de stabilité de fibrés de Higgs. Expliquons ceci dans le cas simplifié où $\nu = 1$ et $S = \varnothing$. Dans ce cas on dispose d'un système local $\mathbb{V} := R^n\overline{\varphi}_*\mathbb{C}$, ce qui fournit un fibré holomorphe $\mathcal{V} := \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_B$ muni de la connexion de Gauss-Manin $\nabla$. Le fibré $\mathcal{V}$ est muni de la filtration de Hodge décroissante $F^p\mathcal{V}$, $n \geqslant p \geqslant 0$, telle que

$$\overline{\varphi}_*\omega_{\overline{Y}/B} = F^n\mathcal{V} \text{ et } \mathcal{V}^{p,n-p} := Gr_F^p\mathcal{V} = R^{n-p}\overline{\varphi}_*\Omega^p_{\overline{Y}/B}$$

pour tout $p$. Ici le fibré $\Omega_{\overline{Y}/B}$ est le fibré des différentielles holomorphes relatives $\Omega_{\overline{Y}}/\overline{\varphi}^*\Omega_B$ et $\Omega^p_{\overline{Y}/B}$ sa $p$-ième puissance extérieure. Cette filtration est induite par la filtration naïve sur le complexe de de Rham holomorphe relatif $(\Omega^*_{\overline{Y}/B}, d_{\mathrm{vert}})$, qui a la propriété que $\mathcal{V} = R^n\overline{\varphi}_*(\Omega^*_{\overline{Y}/B}, d_{\mathrm{vert}})$. De plus on a la propriété de transversalité de Griffiths

$$\nabla(F^p\mathcal{V}) \subset F^{p-1}\mathcal{V} \otimes \Omega_B$$

qui permet de construire par passage au quotient à partir de $\nabla$ des applications $\mathcal{O}_B$-linéaires $\theta_p : \mathcal{V}^{p,n-p} \to \mathcal{V}^{p-1,n-p+1} \otimes \Omega_B$. Soit

$$\mathcal{H} := \oplus_p\mathcal{V}^{p,q},\ \theta := \sum \theta_p : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega_B.$$

On a $\theta^2 = 0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega_B^2$, ce qui est évident dans notre cas car $\dim B = 1$, mais est toujours satisfait comme conséquence de $\nabla^2 = 0$. La donnée de $(\mathcal{H}, \theta)$ tels que $\theta^2 = 0$ est un fibré de Higgs. Dans notre cas, le système local $\mathbb{V}$ correspond d'après Deligne à une représentation semi-simple de $\pi_1(B)$ et $(\mathcal{F}, \theta)$ est le fibré de Higgs associé à $\mathbb{V}$ par Hitchin et Simpson [9]. En particulier, $(\mathcal{F}, \theta)$ est semi-stable de degré 0, c'est-à-dire que tout sous-fibré de Higgs $(\mathcal{G}, \theta_{\mathcal{G}})$ de $(\mathcal{F}, \theta)$ satisfait

$$\deg \mathcal{G} \leqslant 0. \tag{2}$$

L'inégalité (1) résulte alors de (2) appliqué au sous-fibré de Higgs de $(\mathcal{F}, \theta)$ engendré par $\mathcal{V}^{n,0}$.

## Hyperbolicité

Les inégalités de type Arakelov permettent d'établir une forme d'hyperbolicité algébrique pour certains espaces de modules fins, puisqu'elles fournissent une borne pour le degré des courbes dans ces espaces de modules, mesuré par rapport à un fibré de Hodge, en fonction de leur genre et de leur intersection avec le *diviseur à l'infini* paramétrant les fibres singulières. Il existe d'autres formes d'hyperbolicité pour une variété complexe, d'un caractère plus analytique, à savoir l'hyperbolicité au sens de Kobayashi et l'hyperbolicité au sens de Brody (voir [4]). Le lemme de Brody dit que ces deux notions sont équivalentes lorsque la variété considérée est compacte.

**Définition 2.** *Une variété complexe $U$ est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas d'application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to U$.*

Dans [10], Viehweg et Zuo montrent le résultat suivant : soit $U$ une variété algébrique quasi-projective, paramétrant une famille algébrique $Y \to U$ de variétés à fibré canonique ample. On suppose que la famille $Y \to U$ est à variation maximale, c'est-à-dire que l'application classifiante de $U$ dans l'espace de modules des fibres, qui à $t \in U$ associe la classe d'isomorphisme de la fibre $Y_t$, est quasi-finie sur son image.

**Théorème 3.** *Une telle variété $U$ est hyperbolique au sens de Brody.*

Notons que si l'on considère les applications holomorphes $f : \mathbb{C} \to U$ dont l'image est une courbe algébrique $B \setminus S \subset U$, la théorie de l'uniformisation montre qu'on a $2g(B) - 2 + |S| \leqslant 0$. La non existence de telles courbes résulte alors facilement du théorème 1, combiné avec l'inégalité $\deg(\overline{\varphi}_* \omega^{\otimes\nu}_{\overline{Y_{B\setminus S}}/B}) > 0$ pour un $\nu$ adéquat, sous les hypothèses du théorème 3. Ici $Y_{B\setminus S} \to B \setminus S$ est déduite de la famille $Y \to U$ en prenant son image inverse par l'inclusion de $B \setminus S$ dans $U$, et on peut supposer qu'elle admet une extension semi-stable $\overline{Y_{B\setminus S}} \to B$ quitte à passer à un revêtement de $B$ ramifié seulement le long de $S$.

Lorsque l'on dispose d'un théorème de Torelli infinitésimal pour les formes holomorphes sur les fibres de $Y \to U$, c'est-à-dire que l'application des périodes pour les formes holomorphes d'un certain degré est immersive, il est montré par Zuo que le fibré $\Omega_{\overline{U}}(\log D)$ (où $D$ est le bord à croisements normaux d'une compactification adéquate $\overline{U}$ de $U$), a de bonnes propriétés de positivité sur $U$. Ceci apparaît déjà localement dans les calculs de courbure du domaine des périodes dans les directions horizontales (cf. [5]). Il est conjecturé que ces propriétés de positivité, qui sont une autre forme d'hyperbolicité, sont vraies sous les hypothèses plus générales faites ci-dessus. Le théorème 3 apporte une évidence pour cette conjecture.

*Je remercie Olivier Debarre et Christophe Mourougane pour leur lecture attentive et leurs commentaires.*

## Références

[1] A. Arakelov. *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, Math. USSR Izv. 5 (1971) 1277-1302.

[2] E. Bedulev, E. Viehweg. *On the Shafarevich conjecture for surfaces of general type over function fields*, Invent. Math. 139 (2000) 603-615.

[3] P. Deligne. *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. IHES 40, 5-57 (1971).

[4] J.-P. Demailly. *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics volume 62.2, 1997*, 285-360.

[5] Ph. Griffiths et al. *Topics in transcendental algebraic geometry*, Ed. Ph. Griffiths, Annals of math. studies, study 106, Princeton University Press 1984.

[6] Y. Kawamata. *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces*. J. Reine Angew. Math. 363 (1985), 1-46.
[7] J. Kollár. *Higher direct images of dualizing sheaves*, Ann. of Math. 123 (1986) 11-42.
[8] M. Möller, E. Viehweg, K. Zuo. *Special families of curves, of Abelian varieties, and of certain minimal manifolds over curves*, dans *Global Aspects of Complex Geometry*, Springer Verlag 2006, 417-450.
[9] C. Simpson. *Higgs bundles and local systems*, Publ. Math. IHES 75 (1992) 5-95.
[10] E. Viehweg, K. Zuo. *On the Brody hyperbolicity of moduli spaces for canonically polarized manifolds*,
[11] E. Viehweg, K. Zuo. *On the isotriviality of families of projective manifolds over curves*, J. Alg. Geom. 10 (2001) 781-799.
[12] E. Viehweg. *Weak positivity and the stability of certain Hilbert points*, Invent. Math. 96 (1989), n° 3, 639-667 ; II. Invent. Math. 101 (1990), n° 1, 191-223 ; III. Invent. Math. 101 (1990), n° 3, 521-543.

# COURRIER DES LECTEURS

## Ces lettres emplies de fureur font mal...

« L'appel de la chaire » publié dans la Tribune libre du précédent numéro de la *Gazette des Mathématiciens* est le dernier avatar d'une liste de lettres du même acabit, qui, toutes, visent à dénigrer/attaquer/certain(s) petit(s) groupe(s) de mathématicien(ne)s, et en particulier de probabilistes.

Étonné à chaque fois par le ton agressif de ces lettres, j'ai demandé conseil à des collègues, qui m'ont toujours répondu : « c'est trop gros, il ne faut pas répondre... ». Cependant, les auteurs de ces lettres font foi à l'adage : « calomniez, calomniez, ... », et il me semble maintenant nécessaire de répondre non pas en mon nom personnel, mais en me référant à une certaine courtoisie qui jusqu'alors, semblait prévaloir entre mathématiciens, quitte à faire leur la maxime anglaise : « let's agree to differ... ».

### Pourquoi j'ai refusé de cosigner « l'appel de la chaire »

Pendant l'été 2008 j'ai été contacté par de jeunes collègues qui m'ont demandé d'entrer dans leur cercle (ANR, Excellence, que sais-je...). Ma réaction a été : cela ne serait pas raisonnable, nous sommes habitués à fonctionner avec des instances nationales, certes un peu lourdes, mais finalement équitables...

J'ai fait circuler une lettre informelle dans le Laboratoire de Probabilités qui développait cet argument. Il eut donc été assez logique que, lorsque l'on me présente l'appel de la chaire, je le signe. Toutefois, une lecture rapide m'en a empêché :

– texte incompréhensible (qu'est-ce que cette entreprise W... etc ?) ; je signalais cela aux auteurs, qui ont rédigé à nouveau, et amélioré ce point ;

– surtout, agressivité tout au long... On y parle de champagne, de poids lourds, et y figure un couplet (inévitable ?) sur le désastre des mathématiques financières...

En termes clairs, champagne = dépenses disproportionnées de certains, dont les poids lourds, pourquoi pas les poids morts, dont je fais certainement partie ; « le désastre » = la crise financière est due aux mathématiques financières.

Je voudrais répondre sur ces deux points dans les deux paragraphes qui suivent.

### D'où venons-nous ?

Un certain nombre de poids lourds d'aujourd'hui sont des baby-boomers, c'est-à-dire qu'ils sont nés à la fin des années 40. Ils avaient 20 ans vers mai 68, et, pour ce qui nous concerne, ces (maintenant) papy et mamy-boomers, en faisant le choix des mathématiques, recherchaient une sorte de « pureté », ou tout au moins d'évasion de cadres sociaux pesants, bien pensants, etc... Un corollaire en a été : développement des mathématiques pour elles-mêmes, refus de toute relation avec l'industrie, etc. Les « deux mondes » coexistaient et se développaient séparément. Néanmoins, il me semble que, malgré une grande pénurie de postes (années 70-80), et beaucoup de candidats, il y avait un grand respect des uns et des autres. La situation s'est débloquée à partir de 81, avec le slogan (et sa mise en application...) des 80% d'une classe d'âge à l'université.

Pour preuve de ce respect, de grands professeurs faisaient les petits cours à l'X, par exemple, et nul n'y trouvait beaucoup à redire. Le CNRS (en mathématiques tout au moins) servait de vivier de professeurs d'université. Il y avait donc, déjà !, un appel de la chaire... (dans des conditions différentes, certes...).

En ce qui concerne le « champagne », il n'y avait pas de frais de déplacement pour assister à une conférence, suivant la logique implacable d'un directeur de laboratoire d'alors : « si vous êtes bon, vous êtes invité ; si vous êtes mauvais, pourquoi vous déplacer ? » (J'ai été, en ces temps-là, assez brièvement, secrétaire de section au SNCS à Jussieu). Peu à peu, et au compte-gouttes, ces frais de déplacement/mission ont été acceptés.

Nous sommes à la fois assez loin, et assez proches, de cette situation. Deux exemples d'eau(x) : récemment, demandant à l'Académie des Sciences, la mise en place de bouteilles d'eau sur les pupitres, il m'a été répondu que ce n'était pas l'habitude de la maison...

De même (toujours de l'eau !), l'installation de bonbonnes d'eau purifiée à tous les étages ( !) du laboratoire après plus de 6 mois, et beaucoup de salive !

Bref, M. Courteline n'est pas mort, et ce ne sont pas les laboratoires de mathématiques qui vont provoquer l'ire de la Cour des Comptes...

## Où allons-nous ?

De plus en plus, la distance entre l'élaboration d'une théorie mathématique et ses applications diminue bien, aussi temporellement que spatialement. C'est ainsi que, à partir du krach boursier de 1987, les banques ont cherché – et sont parvenues – à se doter de l'outil probabiliste. Celui-ci n'est pas, malgré les affirmations de certains, d'ailleurs plus nombreux chez les matheux qu'à l'extérieur ( !), responsable de la crise financière. Celle-ci est due principalement à la cupidité insensée des grands managers du système bancaire international, lequel s'est délibérément dégagé de son rôle traditionnel de soutien par prêts d'investissement à l'économie réelle, pour s'enfoncer dans la spéculation immobilière la plus abjecte.

En ce qui concerne les mathématiques financières, je constate tout de même – et, d'une certaine manière, je suis fier de me trouver dans cette situation – que cela fait maintenant 110 ans que les mathématiques peinent terriblement à expliquer, et/ou modéliser, l'évolution incessante des marchés. J'ai cru comprendre, il y a bien longtemps, que l'objet de la recherche scientifique est d'essayer d'expliquer, et ce domaine en a bien besoin.

Que n'aurait-on pas entendu si la communauté probabiliste s'était détournée avec horreur de « cette plaie de la finance... ». Le ton aurait été : pendant que le monde entier croule sous une crise financière incompréhensible, vous – les théoriciens de l'aléatoire – vous amusez à des problèmes oiseux...

C'est peut-être une piètre consolation que de comprendre – à peu près – comment on est parvenu à détruire l'économie de la planète (lire Stiglitz aide !), mais on peut aussi penser que les connaissances accumulées pourront peut-être servir – cette fois – à d'autres fins, par exemple, à minimiser les risques, financiers ou autres... En tout cas, certains collègues Outre-Rhin par exemple, y travaillent d'arrache-pied... Je constate d'ailleurs que les mêmes pourfendeurs des mathématiques financières n'ont pas un regard vers tous les petits bonhommes verts qui pullulent sur nos écrans, nos murs... et vantent le crédit à la consommation, fléau qui touche des millions de personnes aux revenus modestes dans notre pays et ailleurs. Cette pratique s'appelait autrefois : usure, et était passible de prison.

En conclusion, chers Mousquetaires, écrivez des lettres incendiaires contre les petits bonshommes verts, et je me joindrai volontiers à vous... En attendant, ne confondez pas *Gazette des Mathématiciens* et *Canard enchaîné*, et cessez de vitupérer contre vos voisins de palier.

Mon but serait atteint si cette modeste mise au point pouvait aider à maintenir un dialogue digne de ce nom entre différents « courants » de la communauté mathématique.

*Marc Yor*
*Université Pierre et Marie Curie*

# LIVRES

**Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après...**
M. Audin
Springer, 2008. 276 p. ISBN : 978-3-642-00445-2. 39 €

Après son très beau livre sur Sofia Kovalevskaya, Michèle Audin récidive en publiant un très intéressant ouvrage de mathématiques dans lequel elle fait œuvre d'historienne et de mathématicienne sur des sujets qui ne sont peut-être pas tout à fait dans la ligne de ses recherches, mais qui montrent qu'elle a une très grande culture mathématique qu'elle voudrait faire partager à un grand cercle de lecteurs. Pourquoi avoir choisi ces trois mathématiciens ?

Le lecteur averti peut le deviner, mais l'auteure justifie pleinement ses choix, en revendiquant un fort penchant de sympathie pour Fatou. D'abord tout mathématicien qui a suivi une formation universitaire connaît les trois noms : Pierre Fatou (1878-1929) pour un lemme qui porte son nom et qui donne un résultat sur la convergence des intégrales d'une suite de fonctions et la limite de la suite des intégrales de ces fonctions ; Gaston Julia (1893-1978) est connu au moins pour ses ensembles qui sont plus ou moins à l'origine de la théorie des fractals et ses nombreux théorèmes en géométrie et en théorie de la variable complexe ; enfin Paul Montel (1876-1975) pour ses théorèmes sur les familles normales de fonctions et pour les positions qu'il a occupées dans l'université. Comme les dates le précisent ces trois mathématiciens ont vécu aux mêmes époques, à la charnière des XIX[e] et XX[e] siècles, tous les trois ont été formés dans le moule de l'École normale supérieure, y ont partagé les enseignements des mêmes grands maîtres de l'époque de leur jeunesse, tous les trois ont été plus ou moins victimes des conséquences directes ou indirectes des dernières guerres mondiales. La blessure qui a défiguré Gaston Julia au cours de la guerre de 1914-1918 lui a infligé d'atroces souffrances et l'a obligé à porter un masque inconfortable.

Mais ce qui réuni ces trois mathématiciens pourrait se résumer en un mot : l'itération. On connaît cette théorie dans un cadre très général qui, en gros, consiste à étudier le comportement d'une suite $P(n)$ de points dans un espace $E$, la suite étant construite par itération d'une fonction $f$ définie sur $E$ et à valeurs dans $E$, autrement dit pour $P(O)$ donné on construit $P(n) = f(P(n-1))$, la nature de $f$ dépend de l'espace, par exemple si $E$ est l'espace des nombres complexes $C$, $f$ peut être une fraction rationnelle, une fonction holomorphe, ou une fonction méromorphe. Les questions sont nombreuses : existe-t-il des points fixes, des orbites périodiques, des points irréguliers, des attracteurs ? En fait, comme le montre bien l'auteure, le vocabulaire sur l'itération s'est forgé au fur et à mesure de l'élaboration de la théorie, on peut dire que les fractals ont permis de construire un champ bien structuré, ce qui ne veut pas dire que tout est fait dans ce domaine de l'itération. Mais Fatou et Julia ont largement contribué à développer ce champ, avec bien entendu des querelles de priorité, des chamailleries, des coteries. Toutefois ce qui est bien mis en valeur dans le livre c'est le rôle de Fatou qui n'était pas inséré dans la famille officielle des mathématiques, il n'était pas très loin puisqu'il était astronome, qu'il travaillait à l'observatoire de Paris et que les relations entre astronomes, mécaniciens et mathématiciens étaient très étroites, d'ailleurs jusque vers les années 1950, tous les mathématiciens étaient qualifiés de géomètres y compris dans le giron de la très docte Académie des sciences.

Dans cette présentation l'objectif n'est pas de développer son contenu mathématique, mais d'amener le lecteur à prendre connaissance du contexte dans lequel se faisait la recherche mathématique et l'environnement politique et social de l'époque ; à la lecture du livre on peut se faire une idée des raisons de la détérioration des relations entre les mathématiciens allemands et français : la guerre de 1870 et la guerre de 1914 ont complètement détruit la coopération qui s'était établie au cours du XIX$^{e}$ siècle entre les écoles allemandes et françaises, la circulation des hommes de part et d'autre du Rhin a été interrompue durant des décennies, elle ne s'est rétablie dans un seul sens et partiellement sous le nazisme, après la dernière guerre les relations entre mathématiciens allemands et français ontretrouvé une dynamique qui s'étend aujourd'hui à toute l'Europe et même au-delà. Mais pendant longtemps il a été difficile d'oublier l'hécatombe de la guerre de 1914-1918 puisque des promotions entières d'élèves de l'École normale supérieure avaient disparu dans les combats ou dans les tranchées, si le massacre a été quantitativement moins lourd pour la guerre de 1939-1945, de nombreux savants français sont morts dans les camps nazis – pour donner une simple idée du désastre rappelons que Jacques Hadamard a perdu ses trois fils dans les guerres, ses deux aînés au cours de la guerre de 1914-1918 et le troisième au cours de la dernière guerre mondiale.

Le livre est passionnant car au cours de sa lecture on croise des grands noms non seulement des mathématiques, mais de la science, voire de la politique, le génie de Henri Poincaré se fait sentir tout au long de la période considérée. Les attitudes des uns ou des autres ont influencé la carrière des uns et des autres : la modestie de Fatou, son isolement à l'observatoire, ne lui ont sans doute pas permis d'embrasser une carrière universitaire, à la différence de Julia très connu par la place qu'il a occupée au sein de la communauté mathématique ou de Montel qui a adopté des positions qui lui auraient permis de se maintenir dans des postes administratifs dans les périodes critiques. Michèle Audin a puisé toutes les informations de son livre aux meilleures sources : archives de l'Académie des sciences, du Collège de France, des familles de Fatou, de Paul Lévy ; dans les appendices le lecteur se délectera à la lecture des lettres échangées entre Fatou et Montel : les contenus mathématiques à l'état brut montre la science en marche, les commentaires sont aussi un régal aussi bien dans le contenu que dans la forme marquée par les différents modèles contemporains de ces lettres.

Quelques mots sur la structure du livre : après une brève introduction, le premier chapitre « Le grand Prix, le cadre » et le second « Le grand Prix des Sciences Mathématiques », chapitres qui justifient le sous-titre du livre, le troisième traite « Des mémoires » une forme de communications des recherches aujourd'hui pratiquement abandonnée. Le quatrième chapitre est plus mathématique, il est consacré aux « Suites de l'itération ». Le cinquième chapitre « Sur Pierre Fatou » donne une préférence à ce dernier, le lecteur découvrira les raisons de la discrétion de l'auteure en ce qui concerne Julia ; pour Montel c'est un peu moins clair, mais sa personnalité se dévoilera, au moins partiellement, à la lecture des lettres données dans l'appendice.

Plus d'une vingtaine de pages donne des références bibliographiques : on pourra s'étonner de trouver les noms d'écrivains comme Claude Simon, Erich Maria Remarque, Louis Aragon, Henri Barbusse. Lisez le livre et vous comprendrez !

À la fin de l'ouvrage, une douzaine de pages donne un index particulièrement complet et très facile à lire et à exploiter ; en plus des termes techniques utiles à un lecteur non averti, on peut y trouver la plupart des noms de mathématiciens qui ont fait avancer les mathématiques sur une centaine d'années qui s'étalent de la fin du XIX$^{e}$ siècle jusqu'au trois-quarts du XX$^{e}$ siècle.

Un bien beau livre que je recommande chaleureusement. Michèle pour quelle date est programmé le suivant ?

Gérard Tronel,
Université Paris VI

---

**Subsystems of Second Order Arithmetic (Second Edition)**
Stephen G. Simpson
ASL, Perspectives in Logic, 2009. 464 p. ISBN : 978-0-521-88439-6. 50€

L'ouvrage, qui est une réédition d'un livre publié en 1999 et rapidement épuisé, s'adresse aussi bien aux spécialistes de logique qu'aux mathématiciens non spécialistes (voire philosophes) intéressés par les problèmes des fondements des mathématiques. À travers les sous-systèmes de l'arithmétique du second ordre ($Z_2$), deux thèmes sont étudiés dans les deux moitiés de l'ouvrage : les *reverse mathematics*, et les modèles des sous-systèmes de $Z_2$.

Le programme des *reverse mathematics* (terme que je propose de traduire en français par « mathématiques à rebours »), avec lequel la première édition de ce livre est presque devenue synonyme, consiste à déterminer la force logique exacte des systèmes d'axiomes nécessaires pour prouver un théorème mathématique en cherchant à remonter du théorème vers les axiomes : si la théorie $T$ prouve $P$ et que réciproquement tous les axiomes de $T$ sont prouvables, dans une théorie de base $T_0$ plus faible que $T$, à partir de $P$, on peut dire que (au-dessus de $T_0$) la théorie $T$ est précisément celle qui a la force logique pour prouver $P$. On peut en trouver une préfiguration dans la démonstration de l'équivalence du lemme de Zorn avec l'axiome du choix, mais le livre de Simpson s'intéresse à des théorèmes de mathématiques « ordinaires » et non de théorie des ensembles.

Le cadre général choisi est celui de $Z_2$, c'est-à-dire la théorie logique qui n'admet que deux sortes d'objets, les entiers naturels et les ensembles d'entiers naturels, et dont les axiomes sont ceux de Peano (l'axiome de récurrence étant formulé sur les ensembles : $\forall X\,(0 \in X \ \wedge\ \forall n\,(n \in X \Rightarrow (n+1) \in X) \ \Rightarrow \forall n\,(n \in X)))$ ainsi que le schéma de compréhension qui permet de former l'ensemble $\{n : \varphi(n)\}$ pour toute propriété $\varphi$ des entiers naturels (y compris si elle contient des quantificateurs portant sur les ensembles). Une première thèse sous-jacente dans ce livre est celle que de très nombreux théorèmes usuels des mathématiques peuvent se reformuler dans ce langage (cela peut demander un certain travail de codage : un espace métrique séparable, par exemple, sera vu comme la fonction distance sur une partie dénombrable de celui-ci, identifiée à une partie de $\mathbb{N}$) ; et que, lorsque c'est le cas, ce sont alors des théorèmes de $Z_2$ qui sont, en fait, démontrables dans des théories beaucoup plus faibles.

L'auteur définit cinq principaux sous-systèmes de $Z_2$, généralement en restreignant le schéma de compréhension : une théorie de base nommée $RCA_0$ (pour « Recursive Comprehension Arithmetic ») et quatre extensions de celle-ci appelées, dans l'ordre de force logique croissante, $WKL_0$ (« Weak König's Lemma »), $ACA_0$ (« Arithmetical Comprehension »), $ATR_0$ (« Autonomous Transfinite Recursion ») et $\Pi^1_1$-$CA_0$ (« $\Pi^1_1$-Comprehension »). Philosophiquement, l'auteur propose de les considérer comme typiques des raisonnements respectivement du constructivisme, du réductionnisme finitiste, du prédicativisme, du « réductionnisme prédicativiste », et d'un certain niveau d'imprédicativisme. La première partie de l'ouvrage est consacrée, à travers les cinq chapitres qui suivent l'introduction, à l'étude de ces cinq principaux systèmes, et des mathématiques directes et à rebours pour eux.

Pour de nombreux théorèmes mathématiques usuels (issus de l'algèbre, l'analyse réelle, etc.), l'auteur démontre l'équivalence du théorème avec une de ces théories : c'est-à-dire qu'il démontre le théorème dans la théorie (sens « direct »), puis, pour les cas autres que le système de base $RCA_0$ il démontre les axiomes de la théorie à partir du théorème considéré (sens « à rebours ») et de $RCA_0$. À titre d'exemple, je peux mentionner le résultat typique suivant : si la théorie $ACA_0$ désigne $Z_2$ dans laquelle le schéma de compréhension est limité aux formules $\varphi$ arithmétiques (c'est-à-dire ne contenant autant quantificateur sur les ensembles), et si la théorie de base $RCA_0$ est celle dans laquelle l'axiome de récurrence est exprimé comme un schéma pour les formules arithmétiques $\Sigma^0_1$ (c'est-à-dire de la forme $\exists m\, \theta(m)$ où $\theta(m)$ ne porte que des quantificateurs de la forme $\exists k < t$ ou $\forall k < t$ bornés par un terme $t$) et où le schéma de compréhension est limité aux formules arithmétiques $\Delta^0_1$ (c'est-à-dire qui peuvent être exprimées de façon équivalente comme une formule $\Sigma^0_1$ ou comme la négation d'une telle formule), alors le théorème de Bolzano-Weierstrass est équivalent, au-dessus de $RCA_0$, à la théorie $ACA_0$. Le théorème du point fixe de Brouwer, lui, est équivalent à $WKL_0$, c'est-à-dire l'affirmation que tout sous-arbre infini de l'arbre des suites binaires finies a une branche infinie.

La seconde partie de l'ouvrage est plus technique, et consacrée aux modèles des cinq systèmes étudiés dans la première partie. Le dernier chapitre s'intéresse aux modèles généraux et, à travers eux, aux fragments du premier ordre des systèmes considérés : l'auteur y montre notamment que $RCA_0$ et $WKL_0$ prouvent les mêmes théorèmes du premier ordre, et que les théorèmes du premier ordre prouvés par $ACA_0$ sont ceux de l'arithmétique de Peano usuelle ; il esquisse de plus le calcul des ordinaux de théorie de la démonstration « à la Gentzen » des cinq théories considérées. L'avant-dernier chapitre est consacré aux $\omega$-modèles (ceux dont la partie du premier ordre est standard), et leur rapport avec la théorie de la calculabilité et des hyperdegrés : entre autres résultats, il y est démontré que les ensembles récursifs forment le plus petit $\omega$-modèle de $RCA_0$, et que les ensembles arithmétiques (c'est-à-dire, récursifs dans le *n*-ième saut de Turing absolu pour un certain entier *n*) forment le plus petit $\omega$-modèle de $ACA_0$. Le chapitre précédent est consacré aux $\beta$-modèles, c'est-à-dire aux sous-modèles $\Sigma^1_1$-élémentaires du modèle standard $\omega$ : l'auteur démontre par exemple qu'il existe un plus petit $\beta$-modèle de $\Pi^1_1$-$CA_0$, formé des ensembles récursifs dans le *n*-ième hypersaut absolu pour un certain entier *n* ; au-delà de ce résultat, il décrit la construction de la hiérarchie constructible des parties de $\omega$ à l'intérieur de $ATR_0$, et esquisse le lien entre $\beta$-modèles de sous-systèmes forts de $Z_2$ et théorie des ensembles admissibles ou théorie de la structure fine de *L*.

L'ouvrage se conclut par un appendice qui énonce, sans démonstration mais avec des références précises, des résultats supplémentaires, par exemple sur la question de l'affaiblissement de la théorie de base.

Ce livre m'a frappé par son exhaustivité : on croirait en l'ayant lu tout savoir sur les sous-systèmes de $Z_2$ tant il est difficile de trouver une question qui n'ait pas été traitée, sinon directement dans le corps d'un chapitre, au moins dans une des références suggérées à la fin de chaque section. Les démonstrations sont – malgré une certaine concision – précises et tout à fait claires. Le plan général permet de retrouver facilement le résultat qu'on cherche, et les tableaux synoptiques du premier chapitre sont également très utiles pour se repérer parmi les nombreux sujets traités (on regrette seulement l'absence d'un schéma récapitulant les nombreuses théories introduites au-delà des cinq principales, avec leurs définitions et liens logiques).

Le contenu est suffisamment « self-contained » et clairement présenté pour être abordable en ayant des connaissances minimales en logique. Au-delà de la seule précision mathématique, l'exposition donne une assez bonne intuition de la manière dont fonctionnent les théories étudiées.

L'auteur s'était donné pour tâche de répondre à la « question principale » : « quels axiomes d'existence d'ensembles sont nécessaires pour prouver les théorèmes des mathématiques ordinaires et non ensemblistes ? ». Ce défi me semble avoir été relevé avec succès, même si je le trouve plus convaincant dans la partie concernant les trois théories les plus faibles que pour les deux dernières (dont les théorèmes portent essentiellement sur la théorie descriptive des ensembles). En tout état de cause, les résultats présentés dans les deux parties m'ont paru intéressants et souvent surprenants.

Mon principal regret concerne l'absence de nouveautés dans cette seconde édition : l'auteur n'a fait que corriger des fautes typographiques et rafraîchir la bibliographie, alors que les résultats nouveaux qui auraient pu être ajoutés (au moins en appendice) ne manquent pas. Ce n'est pas un reproche grave : le livre reste tout à fait actuel, il trouvera sa place parmi les références dans la bibliothèque de tout spécialiste ou amateur de logique.

David Madore,
Télécom ParisTech

**A Higher-Dimensional Sieve Method. With Procedures for Computing Sieve Functions**

Harold G. Diamond, H. Halberstam, William F. Galway

Cambridge University Press, 2008. 290 p. ISBN : 9780521894876. 47£

En théorie analytique des nombres, le concept classique de crible regroupe les techniques permettant d'obtenir des estimations (ou, à défaut, des bornes inférieures ou supérieures) pour la cardinalité des ensembles du type

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) = \{a \in \mathcal{A} : (a,p) = 1 \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}\},$$

où $\mathcal{A}$ désigne une suite finie d'entiers et $\mathcal{P}$ désigne un ensemble fini de nombres premiers. Il ne s'agit ici que de l'un des exemples les plus simples et les plus standards dans lesquels des méthodes de crible conduisent à des estimations intéressantes. Une manière agréable (et se prêtant bien aux généralisations) de reformuler le problème est de noter $\Omega_p$ le singleton contenant la classe de congruence de 0 modulo $p$, pour tout $p \in \mathcal{P}$, et de réécrire :

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P}) = \{a \in \mathcal{A} : a \,(\mathrm{mod}\, p) \notin \Omega_p \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}\},$$

De manière plus générale, on peut s'affranchir de l'hypothèse de finitude sur $\mathcal{P}$ (dans de nombreuses applications classiques du crible on définit $\mathcal{P}$ comme étant l'ensemble de tous les nombres premiers) quitte à se restreindre à l'étude de l'ensemble tronqué :

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \{a \in \mathcal{A} : a \,(\mathrm{mod}\, p) \notin \Omega_p \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}, p \leqslant z\}, \qquad z \geqslant 1,$$

où, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\Omega_p$ est une partie de l'ensemble des classes de congruences modulo $p$.

Un paramètre important et permettant une distinction pratique des méthodes de crible est la dimension $\kappa$ du crible. Cet invariant apparaît naturellement dans la description ci-dessus des ensembles $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ : notons tout d'abord $\omega$ la fonction arithmétique multiplicative associant la cardinalité de $\Omega_p$ à un premier $p \in \mathcal{P}$ et 0 à un premier en dehors de $\mathcal{P}$. Pour $d \geqslant 1$ un entier, notons $\mathcal{A}_d = \{a \in \mathcal{A} \colon d \mid a\}$. L'hypothèse de travail centrale de l'ouvrage recensé ici (hypothèse également présente dans la littérature classique sur le sujet) est qu'il existe une constante $X$ (approximation convenable de $|\mathcal{A}|$) et un bon choix d'ensembles $\Omega_p$ (équivalent au choix d'une fonction $\omega$) tels que, pour tout entier $d$ dont les seuls facteurs premiers sont dans $\mathcal{P}$,

$$r_{\mathcal{A}}(d) := |\mathcal{A}_d| - \omega(d)d^{-1}X,$$

est petit, au moins en moyenne sur un sous-ensemble fini des valeurs possibles pour $d$. On peut voir $\omega(p)p^{-1}$ comme étant la probabilité, pour $p \in \mathcal{P}$, d'être un diviseur d'éléments de $\mathcal{A}$. Avec ces notations, on dit que la méthode de crible vérifie la condition $C(\kappa)$ si $\kappa \geqslant 1$ et qu'il existe une constante $A > 1$ telle que pour tout $(w, w_1)$ tel que $2 \leqslant w_1 < w$,

$$\prod_{w_1 \leqslant p < w} (1 - \omega(p)p^{-1})^{-1} \leqslant \left(\frac{\log w}{\log w_1}\right)^{\kappa} \left(1 + \frac{A}{\log w_1}\right).$$

La dimension d'un crible est la plus petite valeur de $\kappa$ telle que $C(\kappa)$ soit vérifiée.

Dans le cas fondamental $\kappa = 1$, le crible est dit linéaire. Par ailleurs, dans le cadre de l'étude de la conjecture des nombres premiers jumeaux, une attaque classique par le crible consiste en l'étude du cas $\mathcal{A} = \{n(n+2)\colon 1 \leqslant n \leqslant X\}$ et $\mathcal{P}$ égal à l'ensemble de tous les nombres premiers. Soit alors $\omega$ la fonction qui à un entier $d \geqslant 1$ associe le nombre de solutions modulo $d$ à la congruence $n(n+2) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)$. On peut alors montrer (cf paragraphe 1.4) que ce crible est de dimension 2 et que, plus généralemnt, une étude analogue pour l'ensemble des $g$-uplets de nombres premiers $(n, n+a_1, \ldots, n+a_{g-1})$, $g \geqslant 2$ conduit à la mise en place d'un crible de dimension $g$.

Cet ouvrage s'intéresse à l'évaluation de la cardinalité d'ensembles $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ ou $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ comme ci-dessus en mettant l'accent sur l'importance de la valeur de la dimension $\kappa$ dans les estimations obtenues. Les méthodes utilisées sont communément appelées *petits cribles*. Cette terminologie renvoie au fait que l'on se restreint à des ensembles « criblants » $\Omega_p$ dont la cardinalité reste bornée lorsque $p$ croît (dans le cas contraire, on parle de grand crible).

La littérature, à ce sujet est riche. Citons par exemple le célèbre *Sieve methods* coécrit par le second auteur et Richert. Cet ouvrage traite plus spécifiquement des deux types classiques de petit crible que sont les cribles de Selberg et de Brun–Iwaniec–Rosser.

Le chapitre 1 est consacré à la mise en place des notations (malheureusement assez lourdes, comme c'est souvent, et inévitablement, le cas dans ce domaine) et à des rappels historiques, notamment concernant la très classique application du crible au problème des nombres premiers jumeaux (via le crible de Selberg, on montre de manière effective que pour l'essentiel, les nombres premiers ne sont pas des nombres premiers jumeaux).

Les auteurs rappellent ensuite quelques faits standards concernant le crible de Selberg. Ils rappellent le théorème de Selberg dont certaines variations, exposées dans le chapitre 5, sont au cœur des contributions nouvelles du chapitre 9. Citons également le « lemme fondamental » prouvé dans le chapitre 4, étape également très classique dans la mise en pratique du crible, et prouvée ici via le théorème de Selberg : dans le présent contexte le but du lemme fondamental est de donner un moyen d'évaluer certaines moyennes pondérées de la densité d'ensembles $\Omega_p$.

Cette première partie, très technique, contient, en plus de résultats liés au crible de Selberg, une description et des applications du crible linéaire d'Iwaniec–Rosser. Forts de ces résultats préliminaires, les auteurs consacrent la seconde partie de l'ouvrage à leur résultat principal donnant de nouvelles bornes supérieures ou inférieures pour la cardinalité de $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$. On note que dans l'énoncé du résultat (Théorème 9.1), les bornes inférieures et supérieures obtenues ont la même forme, exception faite de la fonction (notée $f_\kappa$ ou $F_\kappa$) intervenant dans le terme principal.

Diverses applications du théorème principal sont ensuite données (notamment une version de la formule des nombres premiers de Mertens pour des nombres algébriques). Les auteurs développent pour cela une technique de « crible pondéré » dont le but est d'évaluer les valeurs prises par certaines formes linéaires. Enfin, une dernière partie est dédiée à l'étude analytique des fonctions $f_\kappa$ et $F_\kappa$ apparaissant dans le théorème 9.1. Dans un appendice, Galway décrit des techniques de calcul effectif liées aux méthodes de crible auxquelles l'ouvrage se consacre. Différents tableaux de données permettent de comparer la valeur de certains paramètres intervenant dans les résultats déduits du théorème principal avec les meilleures valeurs connues jusqu'ici.

Cet ouvrage, très technique, s'adresse avant tout à un auditoire familier avec les méthodes de crible, en particulier les cribles de Selberg et de Brun-Rosser-Iwaniec. Il constitue une très bonne référence, en ce sens que l'on y trouve beaucoup des résultats les plus récents du domaine. En revanche, on peut regretter l'importance, peut être exagérée, accordée à l'uniformité des résultats relativement à la valeur de la dimension $\kappa$. Ces précautions rendent la lecture assez difficile et peuvent parfois « masquer » les aspects les plus importants du crible. À ma connaissance, en effet, les résultats de théorie des nombres les plus profonds du domaine ont été obtenus via des cribles de dimension entière (ou demi-entière) n'excédant pas 3.

Florent Jouve,
Université Paris XI