AIMS Sénégal

Mardi 29 mars 2016

M'Bour African Institute of Mathematical Sciences

Autour de l'équation de Markoff

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Michel Waldschmidt

http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/

Résumé

Il est facile de montrer que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, dans laquelle les trois inconnues x, y, z sont des entiers positifs, possède une infinité de solutions. Un algorithme permet de les déterminer toutes. Cela ne résout pas tous les problèmes : en particulier, Frobenius a conjecturé que pour tout entier $z > 0$ il existe au plus une solution (x, y, z) satisfaisant $x < y < z$. Cette question fait l'objet de recherches actuelles, elle est encore ouverte.

Résumé (suite et fin)

Cette équation est apparue dans l'étude de minima de formes quadratiques (travaux de Lagrange, Hermite, Korkine, Zolotarev, Markoff, Frobenius, Hurwitz, Cassels notamment) et l'approximation rationnelle de nombres réels. Les solutions correspondent aux nombres quadratiques qui possèdent les moins bonnes approximations rationnelles, ce qui donne lieu au spectre de Lagrange–Markoff. Elle intervient aussi dans l'étude de groupes Fuchsiens et de surfaces de Riemann hyperboliques (Ford, Lehner, Cohn, Rankin, Conway, Coxeter, Hirzebruch et Zagier...).
Nous ferons un petit tour non exhaustif du sujet.

La suite des nombres de Markoff

Un *nombre de Markoff* est un nombre entier positif z tel qu'il existe des entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Par exemple 1 est un nombre de Markoff, puisque $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ est une solution.

Andrei Andreyevich Markoff
(1856–1922)

Crédit photos :
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

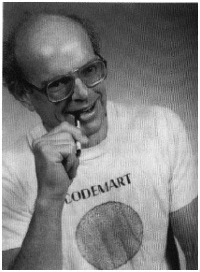
Encyclopédie des suites

1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, 1597, 2897, 4181, 5741, 6466, 7561, 9077, 10946, 14701, 28657, 33461, 37666, 43261, 51641, 62210, 75025, 96557, 135137, 195025, 196418, 294685, ...

On trouve la suite des nombres de Markoff sur la toile

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Neil J. A. Sloane



http://oeis.org/A002559

Points entiers sur une surface

Étant donné un nombre de Markoff z, il existe une infinité de couples d'entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Points entiers sur une surface

Étant donné un nombre de Markoff z, il existe une infinité de couples d'entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

C'est une équation de degré 3 en les 3 variables (x, y, z) dont on connaît une solution $(1, 1, 1)$.

Points entiers sur une surface

Étant donné un nombre de Markoff z, il existe une infinité de couples d'entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

C'est une équation de degré 3 en les 3 variables (x, y, z) dont on connaît une solution $(1, 1, 1)$.

Un algorithme permet de déterminer toutes les solutions entières.

La cubique de Markoff

La surface cubique définie par l'équation de Markoff

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

est une variété algébrique avec beaucoup d'automorphismes : permutation des variables, changements de signes et

$$(x, y, z) \mapsto (3yz - x, y, z).$$

A.A. Markoff (1856–1922)

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2.

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution,

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Si la solution dont on part est $(2, 1, 1)$, on ne trouve en fait que deux *nouvelles* solutions, $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$ (à permutation près).

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Si la solution dont on part est $(2, 1, 1)$, on ne trouve en fait que deux *nouvelles* solutions, $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$ (à permutation près).

Nouvelle = différente de la solution de départ.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi

- $(1,1,1)$ a une voisine qui est $(2,1,1)$,

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi
- $(1, 1, 1)$ a une voisine qui est $(2, 1, 1)$,
- $(2, 1, 1)$ a deux voisines : $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$,

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi
- $(1,1,1)$ a une voisine qui est $(2,1,1)$,
- $(2,1,1)$ a deux voisines : $(1,1,1)$ et $(5,2,1)$,
- toute autre solution a exactement trois voisines.

Cet algorithme les produit toutes

Supposons que la solution initiale (m, m_1, m_2) satisfasse $m > m_1 > m_2$. On va vérifier

$$m_2' > m_1' > m > m'.$$

Cet algorithme les produit toutes

Supposons que la solution initiale (m, m_1, m_2) satisfasse $m > m_1 > m_2$. On va vérifier

$$m_2' > m_1' > m > m'.$$

On peut ordonner les solutions par leur plus grande composante. Alors deux des voisins de (m, m_1, m_2) sont plus grands, le troisième est plus petit.

Cet algorithme les produit toutes

Supposons que la solution initiale (m, m_1, m_2) satisfasse $m > m_1 > m_2$. On va vérifier

$$m_2' > m_1' > m > m'.$$

On peut ordonner les solutions par leur plus grande composante. Alors deux des voisins de (m, m_1, m_2) sont plus grands, le troisième est plus petit.

Ainsi quand on part de $(1, 1, 1)$ on produit une infinité de solutions, qu'on dispose en un arbre : *l'arbre de Markoff*.

On obtient toutes les solutions

Inversement quand on part d'une solution autre que $(1, 1, 1)$, l'algorithme lui associe une solution plus petite.

On obtient toutes les solutions

Inversement quand on part d'une solution autre que $(1, 1, 1)$, l'algorithme lui associe une solution plus petite.

Par récurrence on trouve une suite de solutions de plus en plus petites qui aboutit sur $(1, 1, 1)$.

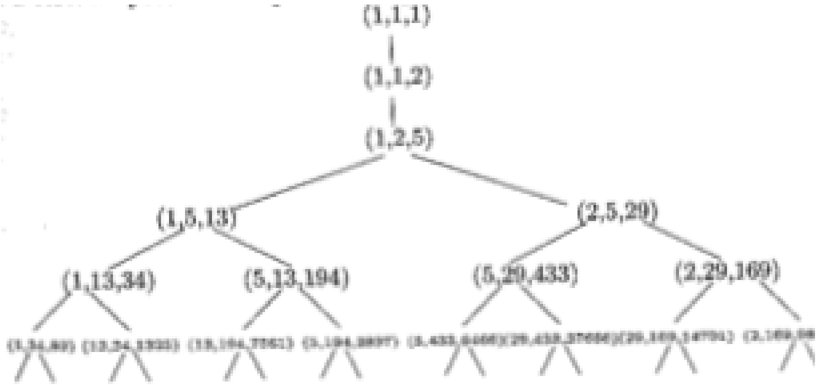
On obtient toutes les solutions

Inversement quand on part d'une solution autre que $(1, 1, 1)$, l'algorithme lui associe une solution plus petite.

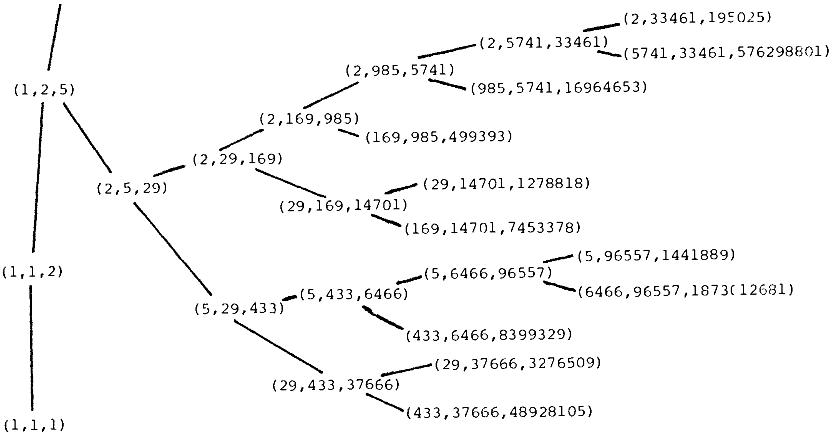
Par récurrence on trouve une suite de solutions de plus en plus petites qui aboutit sur $(1, 1, 1)$.

Donc la solution dont on est partie était dans l'arbre de Markoff.

Premières branches de l’arbre de Markoff



Arbre de Markoff partant de $(2, 5, 29)$



Arbre de Markoff jusqu'à 100 000

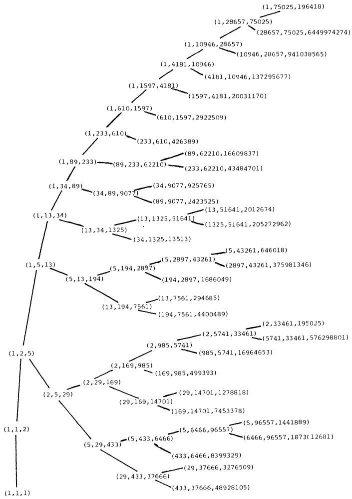


FIGURE 2
Markoff triples (p, q, r) *with* $\max(p, q) \leqslant 100000$

Don Zagier,
On the number of Markoff numbers below a given bound.
Mathematics of Computation, **39** 160 (1982), 709–723.

Fractions continues et arbre de Markoff

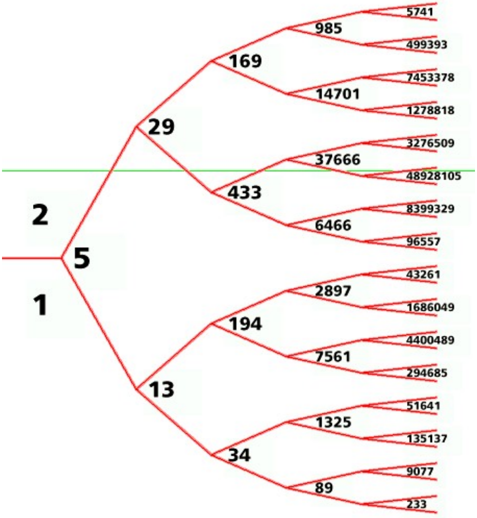
E. Bombieri,

Continued fractions and the Markoff tree,

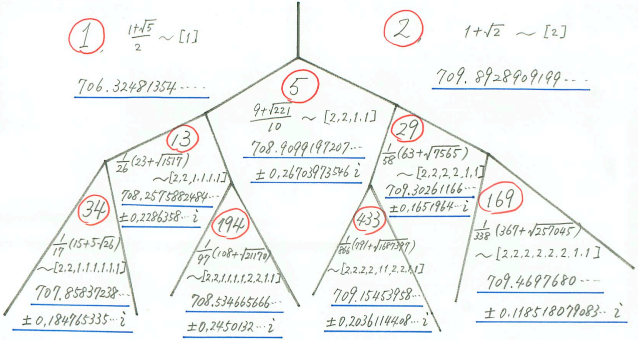
Expo. Math. **25** (2007),

no. 3, 187–213.

L'arbre de Markoff

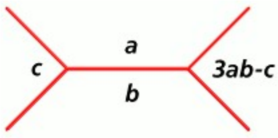


Letter from Masanobu Kaneko to Yuri Manin
26/06/2008

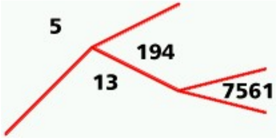


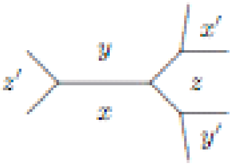
Markoff numbers, associated θ_i and the period of its continued fraction expansion, and the value $val(\pm\theta_i)$

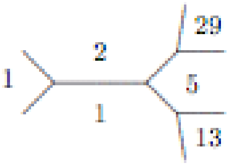
$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$



$$X^2 - 3abX + a^2 + b^2 = (X - c)(X - 3ab + c)$$







La suite de Fibonacci et l'équation de Markoff

Le plus petit nombre de Markoff est 1. Quand on fixe $z = 1$ dans l'équation de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$

La suite de Fibonacci et l'équation de Markoff

Le plus petit nombre de Markoff est 1. Quand on fixe $z = 1$ dans l'équation de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$

En décrivant l'arbre de Markoff à partir de $(1, 1, 1)$, on obtient une sous–suite de la suite de Markoff

$1, \; 2, \; 5, \; 13, \; 34, \; 89, \; 233, \; 610, \; 1597, 4181, \; 10946, \; 28657, \; \ldots\ldots$

La suite de Fibonacci et l'équation de Markoff

Le plus petit nombre de Markoff est 1. Quand on fixe $z = 1$ dans l'équation de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$

En décrivant l'arbre de Markoff à partir de $(1, 1, 1)$, on obtient une sous–suite de la suite de Markoff

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ 1597, 4181,\ 10946,\ 28657,\ \ldots\ldots$$

qui est la suite des nombres de Fibonacci d'indices impairs

$$F_1 = 1,\ F_3 = 2,\ F_5 = 5,\ F_7 = 13,\ F_9 = 34,\ F_{11} = 89,\ \ldots$$

Leonardo Pisano Fibonacci

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,$$

$$34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233\dots$$

est définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

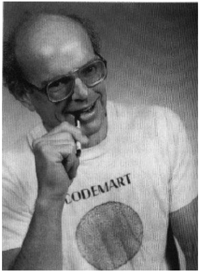
Leonardo Pisano Fibonacci
(1170–1250)

Encyclopédie des suites (suite)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, . . .

On trouve la suite de Fibonacci sur la toile **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**

Neil J. A. Sloane



http://oeis.org/A000045

Nombres de Fibonacci d'indices impairs

Les nombres de Fibonacci d'indices impairs sont des nombres de Markoff :

$$F_{m+3}F_{m-1} - F_{m+1}^2 = (-1)^m \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

et

$$F_{m+3} + F_{m-1} = 3F_{m+1} \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Nombres de Fibonacci d'indices impairs

Les nombres de Fibonacci d'indices impairs sont des nombres de Markoff :

$$F_{m+3}F_{m-1} - F_{m+1}^2 = (-1)^m \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

et

$$F_{m+3} + F_{m-1} = 3F_{m+1} \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Posons $y = F_{m+1}$, $x = F_{m-1}$, $x' = F_{m+3}$. Alors, pour m pair, on a

$$x + x' = 3y, \quad xx' = y^2 + 1$$

Nombres de Fibonacci d'indices impairs

Les nombres de Fibonacci d'indices impairs sont des nombres de Markoff :

$$F_{m+3}F_{m-1} - F_{m+1}^2 = (-1)^m \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

et

$$F_{m+3} + F_{m-1} = 3F_{m+1} \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Posons $y = F_{m+1}$, $x = F_{m-1}$, $x' = F_{m+3}$. Alors, pour m pair, on a

$$x + x' = 3y, \quad xx' = y^2 + 1$$

et

$$X^2 - 3yX + y^2 + 1 = (X - x)(X - x').$$

Ordre des *nouvelles* solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Ordre des *nouvelles* solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Désignons par m' la seconde racine du polynôme quadratique

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2.$$

Ordre des *nouvelles* solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Désignons par m' la seconde racine du polynôme quadratique

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2.$$

Ainsi

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2 = (X - m)(X - m')$$

et

$$m + m' = 3m_1m_2, \quad mm' = m_1^2 + m_2^2.$$

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$:
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:* ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$*, alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m-2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1,1,1)$, $(2,1,1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m-2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1 m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2 m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2 m_2) + (m_2^2 - m_1^2 m_2). \end{aligned}$$

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2m_2) + (m_2^2 - m_1^2m_2). \end{aligned}$$

Mais $2m_1^2 < 2m_1^2m_2$ et $m_2^2 < m_1^2m_2$, donc $a < 0$.

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2m_2) + (m_2^2 - m_1^2m_2). \end{aligned}$$

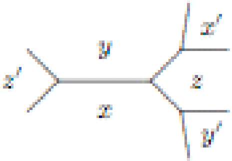
Mais $2m_1^2 < 2m_1^2m_2$ et $m_2^2 < m_1^2m_2$, donc $a < 0$.

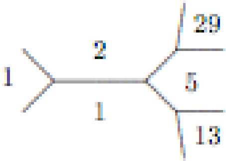
Autrement dit $\boxed{m_1 \text{ est entre } m \text{ et } m'.}$

Ordre des solutions

Si $m > m_1$ on a $m_1 > m'$ et la nouvelle solution (m', m_1, m_2) est plus petite que la solution initiale (m, m_1, m_2).

Si $m < m_1$ on a $m_1 < m'$ et la nouvelle solution (m', m_1, m_2) est plus grande que la solution initiale (m, m_1, m_2).





Facteurs premiers

Remarque. Soit m un nombre de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Le même argument montre que le PGCD de m, m_1 et m_2 est 1 : en effet, si p divise m_1, m_2 et m, alors p divise les *nouvelles* solutions produites par le procédé de la corde et de la tangente - en descendant dans l'arbre on trouve que p doit diviser 1.

Facteurs premiers

Remarque. Soit m un nombre de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Le même argument montre que le PGCD de m, m_1 et m_2 est 1 : en effet, si p divise m_1, m_2 et m, alors p divise les *nouvelles* solutions produites par le procédé de la corde et de la tangente - en descendant dans l'arbre on trouve que p doit diviser 1.
Les facteurs premiers impairs de m sont tous congrus à 1 modulo 4 (ils divisent une somme de deux carrés premiers entre eux).

Facteurs premiers

Remarque. Soit m un nombre de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Le même argument montre que le PGCD de m, m_1 et m_2 est 1 : en effet, si p divise m_1, m_2 et m, alors p divise les *nouvelles* solutions produites par le procédé de la corde et de la tangente - en descendant dans l'arbre on trouve que p doit diviser 1.
Les facteurs premiers impairs de m sont tous congrus à 1 modulo 4 (ils divisent une somme de deux carrés premiers entre eux).
Si m est un nombre de Markoff pair, alors les nombres

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{3m-2}{4}, \quad \frac{3m+2}{8}$$

sont entiers et impairs.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

Conjecture : *Étant donné* m, *un tel couple* (m_1, m_2) *est unique.*

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

Conjecture : *Étant donné* m*, un tel couple* (m_1, m_2) *est unique.*

La conjecture a été vérifiée pour $m \leq 10^{105}$.

Travaux de Frobenius

La *conjecture de Markoff* n'apparaît pas dans les travaux de Markoff en 1879 et 1880 mais dans ceux de Frobenius en 1913.

Ferdinand Georg Frobenius
(1849–1917)

Cas particuliers

La conjecture est démontrée pour certains nombres de Markoff m comme

$p^n, \quad \dfrac{p^n \pm 2}{3}$, p premier

A. Baragar (1996),
P. Schmutz (1996),
J.O. Button (1998),
M.L. Lang, S.P. Tan (2005),
Ying Zhang (2007).

Arthur Baragar

http://www.nevada.edu/ baragar/

Puissance d'un nombre premier

Anitha Srinivasan, 2007
A really simple proof of the Markoff conjecture for prime powers

Number Theory Web
Created and maintained by
Keith Matthews, Brisbane, Australia
www.numbertheory.org/pdfs/simpleproof.pdf

Markoff Equation and Nilpotent Matrices arXiv :0709.1499

Norbert Riedel

http://fr.arxiv.org/abs/0709.1499

A triple (a, b, c) *of positive integers is called a Markoff triple iff it satisfies the diophantine equation* $a^2 + b^2 + c^2 = abc$*. Recasting the Markoff tree, whose vertices are Markoff triples, in the framework of integral upper triangular* 3×3 *matrices, it will be shown that the largest member of such a triple determines the other two uniquely. This answers a question which has been open for almost 100 years.*

Markoff Equation and Nilpotent Matrices arXiv :0709.1499 [math.NT]

From : Norbert Riedel
Submission history
[v1] Mon, 10 Sep 2007 22 :11 :39 GMT (11kb)
[v2] Thu, 13 Sep 2007 18 :45 :29 GMT (11kb)
[v3] Tue, 4 Dec 2007 17 :43 :40 GMT (15kb)
[v4] Tue, 5 Aug 2008 21 :24 :23 GMT (15kb)
[v5] Thu, 12 Mar 2009 14 :08 :48 GMT (15kb)
[v6] Tue, 28 Jul 2009 18 :49 :17 GMT (15kb)
[v7] Fri, 29 Mar 2013 12 :36 :56 GMT (0kb,I)

Markoff Equation and Nilpotent Matrices arXiv :0709.1499 [math.NT]

From : Norbert Riedel
Submission history
[v1] Mon, 10 Sep 2007 22 :11 :39 GMT (11kb)
[v2] Thu, 13 Sep 2007 18 :45 :29 GMT (11kb)
[v3] Tue, 4 Dec 2007 17 :43 :40 GMT (15kb)
[v4] Tue, 5 Aug 2008 21 :24 :23 GMT (15kb)
[v5] Thu, 12 Mar 2009 14 :08 :48 GMT (15kb)
[v6] Tue, 28 Jul 2009 18 :49 :17 GMT (15kb)
[v7] Fri, 29 Mar 2013 12 :36 :56 GMT (0kb,I)
Comments : Most of the (correct) portion of this paper has been incorporated into the paper "On the Markoff equation" (arXiv :1208.4032)

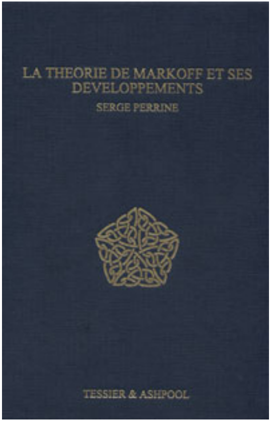
On the Markoff Equation arXiv :1208.4032

[v1] Mon, 20 Aug 2012 15 :05 :47 GMT (51kb)
[v2] Mon, 1 Apr 2013 10 :21 :39 GMT (52kb)
[v3] Wed, 15 May 2013 17 :39 :35 GMT (52kb)
[v4] Mon, 8 Jul 2013 17 :35 :21 GMT (53kb)
[v5] Sun, 13 Oct 2013 21 :23 :28 GMT (50kb)
[v6] Sun, 20 Oct 2013 13 :37 :31 GMT (50kb)
[v7] Mon, 25 Nov 2013 19 :11 :53 GMT (53kb)
[v8] Sun, 12 Jan 2014 14 :59 :52 GMT (53kb)
[v9] Mon, 15 Dec 2014 18 :50 :40 GMT (58kb)
[v10] Fri, 6 Feb 2015 20 :16 :28 GMT (59kb)
[v11] Sat, 5 Sep 2015 12 :30 :49 GMT (59kb)

Serge Perrine

http://www.tessier-ashpool.fr/html/markoff.html

La théorie de Markoff
et ses développements
Tessier et Ashpool, 2002.



http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00406601

Norbert Riedel

[v1] Mon, 10 Sep 2007 22 :11 :39 GMT (11kb)
[v2] Thu, 13 Sep 2007 18 :45 :29 GMT (11kb)
[v3] Tue, 4 Dec 2007 17 :43 :40 GMT (15kb)
[v4] Tue, 5 Aug 2008 21 :24 :23 GMT (15kb)
[v5] Thu, 12 Mar 2009 14 :08 :48 GMT (15kb)
[v6] Tue, 28 Jul 2009 18 :49 :17 GMT (15kb)

Commentaires par Serge Perrine (23/07/2009)
Sur la version 2 du 7 Novembre 2007, 32 p.
Sur la version 3 du 25 avril 2008, 57 p.
Sur la version 4 du 10 Mars 2009, 103 p.
Sur les versions 5 et 6 du 29 July 2009, 145 p.

Pourquoi le coefficient 3 ?

Soit n un entier positif.
Hurwitz (1907) : *Si l'équation* $x^2 + y^2 + z^2 = nxyz$ *a une solution en entiers positifs, alors*
ou bien $n = 3$ *et* x, y, z *sont premiers entre eux,*
ou bien $n = 1$ *et le* PGCD *des nombres* x, y, z *est* 3*.*

Friedrich Hirzebruch & Don Zagier,
The Atiyah–Singer Theorem and elementary number theory,
Publish or Perish (1974)

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car
$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

- si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

- si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

• si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

• si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

• si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

• si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

• $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

• $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,
• $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz$: pavage du plan par des triangles isocèles rectangles,

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

• $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,
• $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz$: pavage du plan par des triangles isocèles rectangles,
• $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz$: pavage ?

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers*, http://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y),g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x},$$

$$f\big(f(x)\big)=\frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n —

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n — avec la solution

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n — avec la solution

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

Exemples :

$$K_3 = \{1,\ 3\},$$
$$K_4 = \{1,\ 4\},$$
$$K_7 = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

Équation de Hurwitz

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

Quand il y a une solution en entiers positifs, il y en a une infinité, qui se répartissent en un nombre fini d'arbres.

Équation de Hurwitz $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$

Quand il y a une solution en entiers positifs, il y en a une infinité, qui se répartissent en un nombre fini d'arbres.

A. Baragar a montré qu'*il existe de telles équations nécessitant un nombre d'arbres arbitrairement grand*
J. Number Theory (1994), **49** No 1, 27-44.

Équation de Hurwitz $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$

Quand il y a une solution en entiers positifs, il y en a une infinité, qui se répartissent en un nombre fini d'arbres.

A. Baragar a montré qu'*il existe de telles équations nécessitant un nombre d'arbres arbitrairement grand*
J. Number Theory (1994), **49** No 1, 27-44.

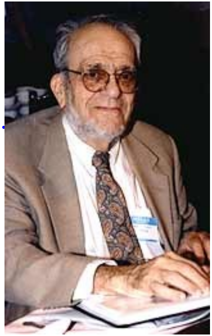
L'énoncé analogue pour le rang des courbes elliptiques sur le corps des nombres rationnels n'est pas connu.

Croissance de la suite de Markoff

1978 : ordre de grandeur de m, m_1 et m_2 pour $m^2+m_1^2+m_2^2=3mm_1m_2$ avec $m_1<m_2<m$,

$$\log(3m_1)+\log(3m_2)=\log(3m)+o(1).$$

Harvey Cohn



Identifier des mots primitifs dans un groupe libre à deux générateurs
Markoff forms and primitive words

$x\mapsto\log(3x)$: $(m_1,m_2,m)\mapsto(a,b,c)$ avec $a+b\sim c$.

Arbre d'Euclide

On part de $(0,1,1)$. Quand on a un triplet (a,b,c) avec $a+b=c$ et $a \leq b \leq c$, on en déduit deux autres plus grands $(a,c,a+c)$ et $(b,c,b+c)$

Arbre d'Euclide

On part de $(0, 1, 1)$. Quand on a un triplet (a, b, c) avec $a + b = c$ et $a \leq b \leq c$, on en déduit deux autres plus grands $(a, c, a + c)$ et $(b, c, b + c)$ et un plus petit $(a, b - a, b)$ ou $(b - a, a, b)$.

Arbre d'Euclide

On part de $(0,1,1)$. Quand on a un triplet (a,b,c) avec $a+b=c$ et $a \leq b \leq c$, on en déduit deux autres plus grands $(a,c,a+c)$ et $(b,c,b+c)$ et un plus petit $(a,b-a,b)$ ou $(b-a,a,b)$.

- $(0,1,1)$
  - $(1,1,2)$
    - $(1,2,3)$
      - $(1,3,4)$
        - $(1,4,5)$
          - $\vdots$ $\vdots$
        - $(3,4,7)$
          - $\vdots$ $\vdots$
      - $(2,3,5)$
        - $(2,5,7)$
          - $\vdots$ $\vdots$
        - $(3,5,8)$
          - $\vdots$ $\vdots$

Arbre de Markoff et arbre d'Euclide

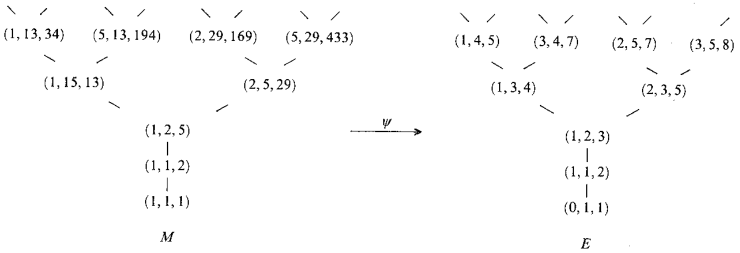


FIGURE 2. THE MARKOFF TREE AND THE EUCLID TREE

Tom Cusik & Mary Flahive,
The Markoff and Lagrange spectra,
Math. Surveys and Monographs **30**, AMS (1989).

Croissance de la suite de Markoff

Don Zagier (1982)
estimation du nombre de triplets de Markoff majorés par x :

$$c(\log x)^2 + O\big(\log x (\log\log x)^2\big),$$

$$c = 0,18071704711507\ldots$$

Conjecture : le n-ième nombre de Markoff m_n vérifie

$$m_n \sim A^{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad A = 10,5101504\cdots$$

Croissance de la suite de Markoff

Don Zagier (1982)
estimation du nombre de triplets de Markoff majorés par x :

$$c(\log x)^2 + O\big(\log x(\log\log x)^2\big),$$

$$c = 0,18071704711507\ldots$$

Conjecture : le n-ième nombre de Markoff m_n vérifie

$$m_n \sim A^{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad A = 10,5101504\cdots$$

Remark : $c = 1/(\log A)^2$.

Markoff et approximation diophantienne

J.W.S. Cassels,
An introduction to Diophantine approximation,
Cambridge Univ. Press
(1957)

John William Scott Cassels

Origine historique : approximation rationnelle

Théorème de Hurwitz (1891) : *Pour tout nombre réel irrationnel* x, *il existe une infinité de* p/q *tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Nombre d'Or
$\Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887498948482\ldots$
ce résultat est optimal.

Adolf Hurwitz
(1859–1919)

Énoncé de Hurwitz

Don Zagier,
On the number of Markoff numbers below a given bound.
Mathematics of Computation, **39** 160 (1982), 709–723.

the part of the *Markoff spectrum* (the set of all $\mu(Q)$) lying above $\frac{1}{3}$ is described exactly by the Markoff numbers. An equivalent theorem is that, under the action of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ on $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ given by $x \to (ax+b)/(cx+d)$, the $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-equivalence classes of real numbers x for which the approximation measure

$$\mu(x) = \limsup_{q \to \infty} \Big(q \cdot \min_{p \in \mathbf{Z}} |\, qx - p \,| \Big)$$

is $> \frac{1}{3}$ are in $1:1$ correspondence with the Markoff triples, the spectrum being the same as above (e.g. $\mu(x) = 5^{-1/2}$ for x equivalent to the golden ratio and $\mu(x) \leqslant 8^{-1/2}$ for all other x). Thus the Markoff numbers are important both in the theory of quadratic forms and in the theory of Diophantine approximation. They have also

M.W., *Open Diophantine Problems*,
Moscow Mathematical Journal **4** N°1, 2004, 245–305.

Énoncé de Hurwitz

Pour un nombre réel irrationnel x, la suite $(qx)_{q\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, donc

$$\limsup_{q\to\infty}\Bigl(\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\Bigr)=\frac{1}{2}\quad\text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.$$

Énoncé de Hurwitz

Pour un nombre réel irrationnel x, la suite $(qx)_{q\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, donc

$$\limsup_{q\to\infty}\Bigl(\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\Bigr)=\frac{1}{2}\quad\text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.$$

L'énoncé de Hurwitz peut se formuler :

$$\liminf_{q\to\infty} q\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

avec égalité pour $x=\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6180\dots$ le Nombre d'Or.

La suite de Fibonacci et le Nombre d'Or

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

$$\overline{\Phi} = 1 - \Phi, \quad X^2 - X - 1 = (X - \Phi)(X - \overline{\Phi}).$$

Formule de A. De Moivre (1730), L. Euler (1765), J.P.M. Binet (1843) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\Phi^n - \overline{\Phi}^n}{\Phi - \overline{\Phi}}.$$

Les nombres de Lucas

La suite $(L_n)_{n\geq 0}$ des nombres de Lucas est définie par

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad L_0 = 2,\ L_1 = 1.$$

Elle commence par
$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ 322,\ 521,\ 843,\ 1364,$
$2207,\ 3571,\ 5778,\ 9349,\ 15127,\ 24476,\ 39603,\ 64079,\ 103682,$
$167761,\ 271443,\ 439204,\ 710647,\ 1149851,\ 1860498,\ 3010349,\ \ldots$
et vérifie

$$L_n = \Phi^n + \overline{\Phi}^n.$$

avec

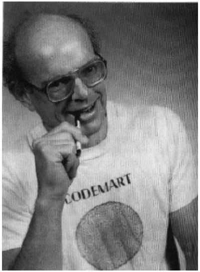
$$\overline{\Phi} = 1 - \Phi, \quad X^2 - X - 1 = (X - \Phi)(X - \overline{\Phi}).$$

Les nombres de Lucas

On trouve la suite de Lucas sur la toile

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

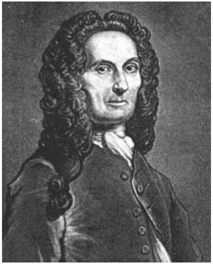
Neil J. A. Sloane



http://oeis.org/A000032

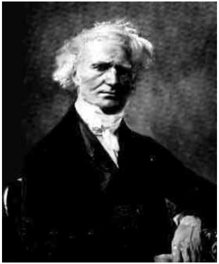
La formule de De Moivre – Euler – Binet

Abraham de Moivre (1667–1754)



Leonhard Euler (1707–1783)

Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856)



F_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n.$

Relation quadratique

On vérifie, par récurrence,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Relation quadratique

On vérifie, par récurrence,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Le membre de gauche est la valeur en (F_{n+1}, F_n) de la forme quadratique

$$X^2 - XY - Y^2 = (X - \Phi Y)(X + \Phi^{-1} Y).$$

Relation quadratique

On vérifie, par récurrence,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Le membre de gauche est la valeur en (F_{n+1}, F_n) de la forme quadratique

$$X^2 - XY - Y^2 = (X - \Phi Y)(X + \Phi^{-1} Y).$$

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ converge vers le Nombre d'Or Φ et

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_n^2 (u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}).$$

La suite u_n des quotients de Fibonacci

Les quotients $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ vérifient

$$F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}) = (-1)^n.$$

La suite u_n des quotients de Fibonacci

Les quotients $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ vérifient

$$F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}) = (-1)^n.$$

On en déduit

$$F_n^2|\Phi - u_n| = \frac{1}{\Phi^{-1} + u_n} \to \frac{1}{\Phi^{-1} + \Phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La suite u_n des quotients de Fibonacci

Les quotients $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ vérifient

$$F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}) = (-1)^n.$$

On en déduit

$$F_n^2|\Phi - u_n| = \frac{1}{\Phi^{-1} + u_n} \to \frac{1}{\Phi^{-1} + \Phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} F_n^2 \left|\Phi - \frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Fractions continues

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$ est aussi définie par

$$u_1 = 1,\ u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \geq 2).$$

Fractions continues

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$ est aussi définie par

$$u_1 = 1,\ u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \geq 2).$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_n &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-3}}}} = \cdots \\
&= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} \\
&= [1, 1, \ldots, 1] \quad n \text{ termes}
\end{aligned}$$

Fractions continues

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$ est aussi définie par

$$u_1 = 1,\ u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \geq 2).$$

Donc

$$u_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-3}}}} = \cdots$$

$$= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$$

$$= [1, 1, \ldots, 1] \quad n \text{ termes}$$

$$\Phi = [\overline{1}]$$

Le résultat de Hurwitz est optimal

L'énoncé de Hurwitz

$$\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx-p| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

est optimal : il y a égalité dans le cas $x = \Phi$.

Le résultat de Hurwitz est optimal

L'énoncé de Hurwitz

$$\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

est optimal : il y a égalité dans le cas $x = \Phi$.
Pour $|q\Phi - p| \leq 1$, on a

$$1 \leq |q^2 + pq - p^2| = |q\Phi - p| \cdot (q\Phi^{-1} + p)$$

avec

$$q\Phi^{-1} + p = q(\Phi + \Phi^{-1}) + p - q\Phi \leq q\sqrt{5} + 1,$$

donc

$$1 \leq |q\Phi - p| \cdot (q\sqrt{5} + 1).$$

Le résultat de Hurwitz est optimal

L'énoncé de Hurwitz

$$\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx-p| \le \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

est optimal : il y a égalité dans le cas $x=\Phi$.
Pour $|q\Phi - p| \le 1$, on a

$$1 \le |q^2+pq-p^2| = |q\Phi-p|\cdot(q\Phi^{-1}+p)$$

avec

$$q\Phi^{-1}+p = q(\Phi+\Phi^{-1})+p-q\Phi \le q\sqrt{5}+1,$$

donc

$$1 \le |q\Phi-p|\cdot(q\sqrt{5}+1).$$

Noter que $P(X)=X^2-X-1$ a pour discriminant 5 et $P'(\Phi)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$.

Inégalité de Liouville

Inégalité de Liouville. *Soient α un nombre algébrique de degré $d \geq 2$, $P \in \mathbf{Z}[X]$ son polynôme minimal, $c = |P'(\alpha)|$ et $\epsilon > 0$. Il existe un entier q_0 tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $q \geq q_0$,*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}.$$

Joseph Liouville, 1844

Inégalité de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}, \qquad c = |P'(\alpha)|.$$

Inégalité de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}, \qquad c = |P'(\alpha)|.$$

Quand α est un nombre réel irrationnel quadratique ($d = 2$) de discriminant $\Delta > 0$, on a $c = \sqrt{\Delta}$.

Inégalité de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}, \qquad c = |P'(\alpha)|.$$

Quand α est un nombre réel irrationnel quadratique ($d = 2$) de discriminant $\Delta > 0$, on a $c = \sqrt{\Delta}$.

Remarque : pour un polynôme quadratique irréductible $P(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients entiers de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a $\Delta \geq 5$.

Démonstration de l'inégalité de Liouville

Soient q un entier suffisamment grand, p l'entier le plus proche de $q\alpha$:

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}.$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

Soient q un entier suffisamment grand, p l'entier le plus proche de $q\alpha$:

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $a_0 > 0$ le coefficient directeur de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines, avec $\alpha_1 = \alpha$:

$$P(X) = a_0(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_d),$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

Soient q un entier suffisamment grand, p l'entier le plus proche de $q\alpha$:

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $a_0 > 0$ le coefficient directeur de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ses racines, avec $\alpha_1 = \alpha$:

$$P(X) = a_0(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_d),$$

$$q^d P(p/q) = a_0 q^d \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{p}{q} - \alpha_i\right),$$

et

$$P'(\alpha) = a_0 \prod_{i=2}^{d} (\alpha - \alpha_i).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}.$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}.$$

Donc

$$1 \leq q^d a_0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\right).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}.$$

Donc

$$1 \leq q^d a_0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\right).$$

Pour q suffisamment grand, on déduit

$$1 \leq q^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| (|P'(\alpha)| + \epsilon).$$

Constante de Lagrange

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, notons $\lambda(x) \in [\sqrt{5}, +\infty]$ la borne supérieure des $\lambda > 0$ tels qu'il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Constante de Lagrange

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, notons $\lambda(x) \in [\sqrt{5}, +\infty]$ la borne supérieure des $\lambda > 0$ tels qu'il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Autrement dit

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \liminf_{q \to \infty} q \min_{p \in \mathbf{Z}} |qx - p| \,.$$

Constante de Lagrange

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, notons $\lambda(x) \in [\sqrt{5}, +\infty]$ la borne supérieure des $\lambda > 0$ tels qu'il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Autrement dit

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \liminf_{q \to \infty} q \min_{p \in \mathbf{Z}} \left| qx - p \right|.$$

Hurwitz : $\lambda(x) \geq \sqrt{5}$ pour tout x et $\lambda(\Phi) = \sqrt{5}$.

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante de Lagrange $\lambda(x)$ est finie

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante de Lagrange $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante de Lagrange $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Par exemple les nombres de Liouville ont une constante de Lagrange infinie.

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante de Lagrange $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Par exemple les nombres de Liouville ont une constante de Lagrange infinie.

Un nombre réel irrationnel est mal approchable si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des quotients partiels de son développement en fractions continues

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots, a_n,\ \dots]$$

est bornée.

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante de Lagrange finie.

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante de Lagrange finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante de Lagrange finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

On ignore aussi s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui ne soient pas mal approchables.

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante de Lagrange finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

On ignore aussi s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui ne soient pas mal approchables.

On conjecture que *tout nombre réel irrationnel non quadratique mal approchable est transcendant.* Autrement dit on conjecture qu'il n'existe pas de nombre algébrique réel de degré ≥ 3 qui soit mal approchable.

Mesure de Lebesgue

Les nombres mal approchables forment un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Henri Léon Lebesgue
(1875–1941)

Propriétés de la constante de Lagrange

On a

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) : \qquad \left| x + 1 - \frac{p}{q} \right| = \left| x - \frac{p+q}{q} \right|$$

et

$$\lambda(-x) = \lambda(x) : \qquad \left| -x - \frac{p}{q} \right| = \left| x + \frac{p}{q} \right|,$$

Propriétés de la constante de Lagrange

On a

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) : \qquad \left|x + 1 - \frac{p}{q}\right| = \left|x - \frac{p+q}{q}\right|$$

et

$$\lambda(-x) = \lambda(x) : \qquad \left|-x - \frac{p}{q}\right| = \left|x + \frac{p}{q}\right|,$$

On a aussi $\lambda(1/x) = \lambda(x)$:

$$p^2 \left|\frac{1}{x} - \frac{q}{p}\right| = q^2 \left|\frac{p}{qx}\right| \cdot \left|x - \frac{p}{q}\right|.$$

Le groupe modulaire

Le groupe multiplicatif engendré par les trois matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ des matrices 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de déterminant ± 1.

J-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Coll. SUP, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x+1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = -x \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \frac{1}{x}$$

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) \qquad \lambda(-x) = \lambda(x) \qquad \lambda(1/x) = \lambda(x)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x+1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = -x \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \frac{1}{x}$$

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) \qquad \lambda(-x) = \lambda(x) \qquad \lambda(1/x) = \lambda(x)$$

Conséquence : *Soit* $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *et soient* a, b, c, d *des entiers rationnels satisfaisant* $ad - bc = \pm 1$. *On pose*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.

Travaux de Hurwitz (suite)

L'inégalité $\lambda(x) \geq \sqrt{5}$ *pour tout x irrationnel* est optimale pour le Nombre d'Or et pour tous les nombres *nobles* dont le développement en fraction continue se termine par une suite infinie de 1.

$$\Phi = [1, 1, 1, \ldots] = [\overline{1}].$$

Adolf Hurwitz, 1891

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalence

Deux nombres x et y sont dits $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$*–équivalents* s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ tel que

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalence

Deux nombres x et y sont dits $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$*–équivalents* s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ tel que

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Autrement dit, x et y sont reliés par une homographie à coefficients entiers de déterminant ± 1.

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalence

Deux nombres x et y sont dits $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$*–équivalents* s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ tel que

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Autrement dit, x et y sont reliés par une homographie à coefficients entiers de déterminant ± 1.

Deux nombres réels irrationnels sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalents si et seulement si leurs développement en fraction continue se terminent par la même suite de quotients partiels.

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalence

Les nombres nobles, dont le développement en fraction continue se termine par une suite infinie de 1, sont ceux qui sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalents au Nombre d'Or.

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalence

Les nombres nobles, dont le développement en fraction continue se termine par une suite infinie de 1, sont ceux qui sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalents au Nombre d'Or.

Le discriminant du polynôme irréductible d'un nombre noble est 5.

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalence

Les nombres nobles, dont le développement en fraction continue se termine par une suite infinie de 1, sont ceux qui sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalents au Nombre d'Or.

Le discriminant du polynôme irréductible d'un nombre noble est 5.

Le discriminant de $X^2 - 5$ est 20 :

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = [2, \overline{4}]$$

n'est pas un nombre noble.

Le début du spectre

Pour tous les nombres qui ne sont pas nobles, une inégalité plus forte que celle de Hurwitz

$$\lambda(x) \geq \sqrt{5} = 2,236\ 067\ 977\dots$$

est valable, à savoir

$$\lambda(x) \geq 2\sqrt{2} = 2,828\ 427\ 125\dots$$

Le début du spectre

Pour tous les nombres qui ne sont pas nobles, une inégalité plus forte que celle de Hurwitz

$$\lambda(x) \geq \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

est valable, à savoir

$$\lambda(x) \geq 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

C'est optimal pour

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980 78\ldots$$

dont le développement en fraction continue est

$$[1;\ 2,2,2,\ldots] = [1;\ \overline{2}].$$

Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$

- Benoît Rittaud, Éditions *Le Pommier* (2006).

http://www.math.univ-paris13.fr/∼rittaud/RacineDeDeux

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$ (*nombres de Pell*). Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$ (*nombres de Pell*). Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

La suite $(G_n/G_{n-1})_{n\geq 2}$ converge vers $1+\sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$ (*nombres de Pell*). Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

La suite $(G_n/G_{n-1})_{n\geq 2}$ converge vers $1+\sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

Donc il existe une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombre rationnels telle que

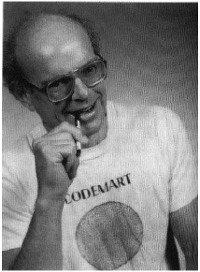
$$\lim_{n\to\infty} q_n \left| q_n\sqrt{2} - p_n \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Les nombres de Pell

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, 2744210, 6625109, 15994428, 38613965, 93222358, 225058681, 543339720, 1311738121, ...

On trouve la suite des nombres de Pell sur la toile
The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
Pell numbers

Neil J. A. Sloane



http://oeis.org/A000129

La suite du spectre

Pour tous les nombres nobles, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\ 067\ 977\ldots$$

La suite du spectre

Pour tous les nombres nobles, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

La plus petite valeur de $\lambda(x)$ pour un nombre qui n'est pas noble est atteinte par $\sqrt{2}$ et ses associés :

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

La suite du spectre

Pour tous les nombres nobles, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

La plus petite valeur de $\lambda(x)$ pour un nombre qui n'est pas noble est atteinte par $\sqrt{2}$ et ses associés :

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

Pour tous les nombres réels irrationnels x qui ne sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalents ni à Φ, ni à $\sqrt{2}$, on a

$$\lambda(x) \geq \frac{\sqrt{221}}{5} = 2,973\,213\,749\ldots$$

La suite du spectre

Pour tous les nombres nobles, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

La plus petite valeur de $\lambda(x)$ pour un nombre qui n'est pas noble est atteinte par $\sqrt{2}$ et ses associés :

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

Pour tous les nombres réels irrationnels x qui ne sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalents ni à Φ, ni à $\sqrt{2}$, on a

$$\lambda(x) \geq \frac{\sqrt{221}}{5} = 2,973\,213\,749\ldots$$

C'est optimal pour les racines du polynôme $5x^2 + 11x - 5$ et leurs associés, dont le développement en fraction continue se termine par la période $\overline{2211}$.

La suite du spectre

La suite de nombres commençant par $L_1 = \sqrt{5}$, $L_2 = 2\sqrt{2}$, $L_3 = \sqrt{221}/5$,... se poursuit avec

$$L_4 = \frac{\sqrt{1517}}{13}, \ L_5 = \frac{\sqrt{7565}}{29} \cdots$$

et plus généralement

$$L_i = \sqrt{9 - \frac{4}{m_i^2}}$$

où $m_1, m_2, \ldots$ décrit la suite $(1, 2, 5, 13, 29, \ldots)$ des nombres de Markoff.

Les polynômes quadratiques

La suite de polynômes quadratiques commençant par

$$f_1(x) = x^2 - x - 1,$$

$$f_2(x) = 2x^2 + 4x - 2,$$
$$f_5(x) = 5x^2 + 11x - 5,$$

se poursuit avec

$$f_{13}(x) = 13x^2 + 29x - 13,$$

de discriminant 1517.

Les polynômes quadratiques

La suite de polynômes quadratiques commençant par

$$f_1(x) = x^2 - x - 1,$$

$$f_2(x) = 2x^2 + 4x - 2,$$

$$f_5(x) = 5x^2 + 11x - 5,$$

se poursuit avec

$$f_{13}(x) = 13x^2 + 29x - 13,$$

de discriminant 1517. Ses racines et leurs associés ont un développement en fraction continue qui se termine par la période $\overline{221111}$.

Spectre de Lagrange

Il y a une suite infinie croissante de nombres réels $(L_i)_{i\geq 1}$ de limite 3, et une suite de nombres irrationnels quadratiques $(\theta_i)_{i\geq 1}$, telles que, pour tout $i \geq 1$, si α n'est pas $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalent à l'un des $\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}$, alors il y a une infinité de nombres rationnels satisfaisant

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{L_i q^2},$$

et cette inégalité est optimale quand α est $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalent à θ_i.

$(m_1, m_2, \dots) = (1,2,5,13,29,\dots)$

On définit une suite $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ de nombres quadratiques par

$$\theta_i = \frac{-3m_i + 2k_i + \sqrt{9m_i^2 - 4}}{2m_i},$$

où k_i est un entier qui satisfait $a_i k_i \equiv b_i \pmod{m_i}$ et (a_i, b_i, m_i) est une solution de l'équation de Markoff avec $m_i \geq \max\{a_i, b_i\}$.

$(m_1, m_2, \dots)$=(1,2,5,13,29,...)

On définit une suite $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ de nombres quadratiques par

$$\theta_i = \frac{-3m_i + 2k_i + \sqrt{9m_i^2 - 4}}{2m_i},$$

où k_i est un entier qui satisfait $a_i k_i \equiv b_i \pmod{m_i}$ et (a_i, b_i, m_i) est une solution de l'équation de Markoff avec $m_i \geq \max\{a_i, b_i\}$.

Ici, on suppose que la conjecture de Markoff est vraie, pour avoir l'unicité de (a_i, b_i).

Premières valeurs

$$L_i = \sqrt{9 - (4/m_i^2)}, \qquad \theta_i = \frac{-3m_i + 2k_i + \sqrt{9m_i^2 - 4}}{2m_i}$$

$$F_i(X,Y) = m_i X^2 + (2k_i - 3m_i)XY + \frac{k_i^2 - 3k_i m_i + 1}{m_i} Y^2.$$

i	m_i	k_i	L_i	θ_i	F_i
1	1	1	$\sqrt{5}$	$(1+\sqrt{5})/2$	$X^2 - XY - Y^2$
2	2	1	$\sqrt{8}$	$1+\sqrt{2}$	$2(X^2 - 2XY - Y^2)$
3	5	2	$\sqrt{221}/5$	$(-11+\sqrt{221})/10$	$5X^2 + 11XY - 5Y^2$

Minima de formes quadratiques

Considérons une forme quadratique $f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ à coefficients réels. Soit $\Delta(f)$ son discriminant $b^2 - 4ac$.

Minima de formes quadratiques

Considérons une forme quadratique $f(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ à coefficients réels. Soit $\Delta(f)$ son discriminant $b^2 - 4ac$.

On s'intéresse au minimum $m(f)$ de $|f(x,y)|$ sur $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On suppose donc $\Delta(f) \neq 0$ et on pose

$$C(f) = m(f)/\sqrt{|\Delta(f)|}.$$

Minima de formes quadratiques

Considérons une forme quadratique $f(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ à coefficients réels. Soit $\Delta(f)$ son discriminant $b^2 - 4ac$.

On s'intéresse au minimum $m(f)$ de $|f(x,y)|$ sur $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On suppose donc $\Delta(f) \neq 0$ et on pose

$$C(f) = m(f)/\sqrt{|\Delta(f)|}.$$

Soient α et α' les racines de $f(X,1)$:

$$f(X,Y) = a(X-\alpha Y)(X-\alpha' Y),$$

$$\{\alpha, \alpha'\} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{\Delta(f)}\right\}.$$

Exemple avec $\Delta < 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 + XY + Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = -3$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{|\Delta(f)|}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exemple avec $\Delta < 0$

La forme quadratique

$$f(X, Y) = X^2 + XY + Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = -3$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{|\Delta(f)|}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour $\Delta < 0$, la forme quadratique

$$f(X, Y) = \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}(X^2 + XY + Y^2)$$

a pour discriminant Δ et minimum $\sqrt{|\Delta|/3}$. De nouveau

$$C(f) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Formes quadratiques définies ($\Delta < 0$)

Si le discriminant est négatif, J.L. Lagrange et Ch. Hermite (lettre à Jacobi, 6 Août 1845) ont montré que $C(f) \leq 1/\sqrt{3}$ avec égalité pour $f(X, Y) = X^2 + XY + Y^2$. Pour chaque $\varrho \in (0, 1/\sqrt{3}]$, il existe une telle forme f avec $C(f) = \varrho$.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Charles Hermite (1822–1901)

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

Exemple avec $\Delta > 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 - XY - Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = 5$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{\Delta(f)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Exemple avec $\Delta > 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 - XY - Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = 5$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{\Delta(f)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Pour $\Delta > 0$, la forme quadratique

$$f(X,Y) = \sqrt{\frac{\Delta}{5}}(X^2 - XY - Y^2)$$

a pour discriminant Δ et minimum $\sqrt{\Delta/5}$. De nouveau

$$C(f) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Supposons $\Delta > 0$

A. Korkine et E.I. Zolotarev ont montré en 1873 $C(f) \leq 1/\sqrt{5}$ avec égalité pour $f_0(X,Y) = X^2 - XY - Y^2$.
Pour toutes les formes qui ne sont pas $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalentes à f_0, ils montrent $C(f) \leq 1/\sqrt{8}$.
$1/\sqrt{5} = 0,447\,213\,595\ldots$
$1/\sqrt{8} = 0,353\,553\,391\ldots$

Egor Ivanovich Zolotarev
(1847–1878)

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$).

Les travaux de Korkine et Zolotarev ont incité A.A. Markoff à étudier la question. Il décrit une infinité de valeurs de $C(f_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, entre $1/\sqrt{5}$ et $1/3$, possédant la même propriété que f_0. Ces valeurs convergent vers $1/3$. Il les construit grâce à l'arbre des solutions de l'équation de Markoff.

A. Markoff, 1879 et 1880.

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x, y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X, 1)$, disons de α.

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x, y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X, 1)$, disons de α.

Par conséquent

$$|x - y\alpha'| \sim |y| \cdot |\alpha - \alpha'|$$

et $\alpha - \alpha' = \sqrt{\Delta}/a$.

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x, y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X, 1)$, disons de α.

Par conséquent

$$|x - y\alpha'| \sim |y| \cdot |\alpha - \alpha'|$$

et $\alpha - \alpha' = \sqrt{\Delta}/a$.

Donc

$$|f(x, y)| = |a(x - \alpha y)(x - \alpha' y)| \sim \sqrt{|\Delta|} \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|.$$

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante de Lagrange

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante de Lagrange

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Le spectre de Markoff contient le spectre de Lagrange.

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante de Lagrange

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Le spectre de Markoff contient le spectre de Lagrange.

Les intersections des deux spectres avec l'intervalle $[\sqrt{5}, 3)$ coïncident et forment une *suite discrète*.

Chronologie

J. Liouville, 1844
J-L. Lagrange et Ch. Hermite, 1845
A. Korkine et E.I. Zolotarev, 1873
A. Markoff, 1879
F. Frobenius, 1915
L. Ford, 1917, 1938
R. Remak, 1924
J.W.S. Cassels, 1949
J. Lehner, 1952, 1964
H. Cohn, 1954, 1980
R.A. Rankin, 1957
A. Schmidt, 1976
S. Perrine, 2002

Fraction continue et géométrie hyperbolique

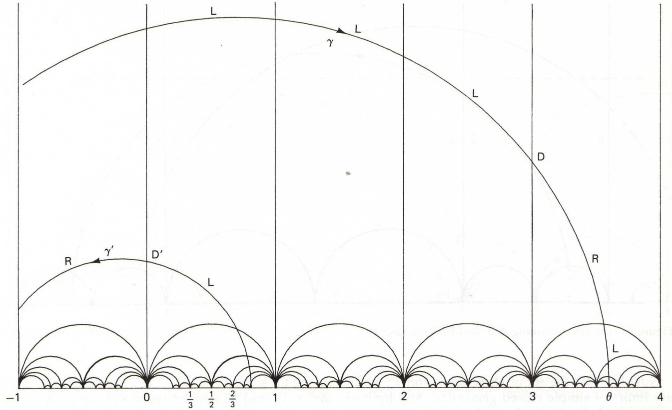


Figure 8. Reading off the continued fraction expansion of $\mathfrak{O}$ from $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{O} = 3 + \frac{1}{1+\cdots}$.

Référence : Caroline Series

Géométrie des nombres de Markoff

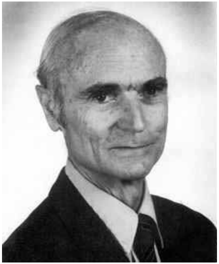
Caroline Series,
The Geometry of Markoff Numbers,
The Mathematical Intelligencer **7** N.3 (1985), 20–29.

Groupes Fuchsiens et surfaces de Riemann hyperboliques

L'arbre de Markoff peut être vu comme le dual de la triangulation du demi–plan hyperbolique par les images du domaine fondamental de l'invariant modulaire sous l'action du groupe modulaire.

Lazarus Immanuel Fuchs
(1833–1902)

Triangulation de polygones, propriétés métriques de polytopes

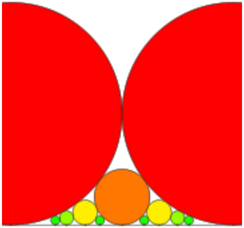
Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003)	Robert Alexander Rankin (1915 - 2001)	John Horton Conway
		

Cercles de Ford

Le cercle de Ford associé à la fraction irréductible p/q est tangent à l'axe réel au point p/q a pour rayon $1/2q^2$.

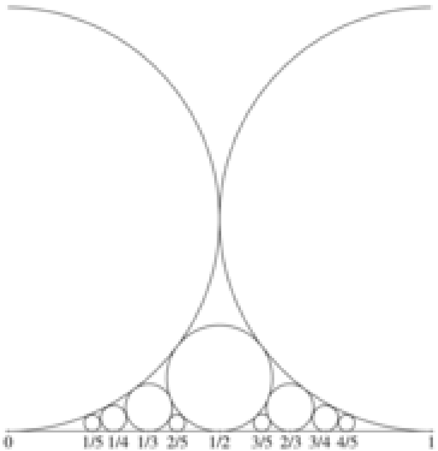
Les cercles de Ford associés à deux éléments consécutifs d'une suite de Farey sont tangents.

Lester Randolph Ford (1886–1967)



Amer. Math. Monthly (1938).

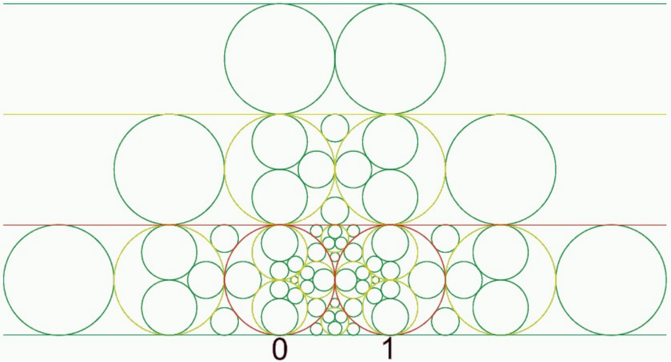
Suite de Farey d'ordre 5



$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

Fraction continue complexe

La troisième génération de la méthode d'Asmus Schmidt pour développer en fraction continue complexe



http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_03_15_04.html

Groupes de Fricke

Le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le groupe libre à deux générateurs.

La surface de Riemann quotient du demi–plan de Poincaré par Γ est un *tore troué*.

Groupes de Fricke

Le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le groupe libre à deux générateurs.

La surface de Riemann quotient du demi–plan de Poincaré par Γ est un *tore troué*. Les longueurs minimales de géodésiques fermées sont reliées aux $C(f)$, f forme quadratique indéfinie.

Domaine fondamental d'un tore troué

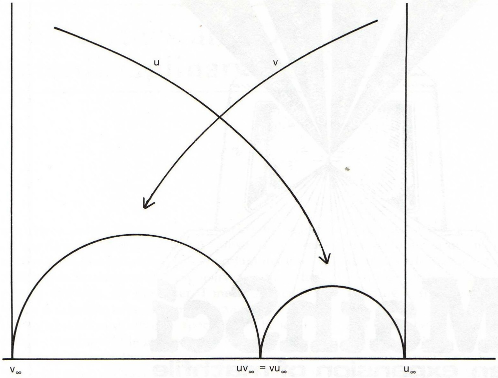


Figure 13. Fundamental region for the punctured torus.

Groupes libres

Fricke a démontré que si A et B sont deux générateurs de Γ, alors leurs traces vérifient

$$(\mathrm{tr}A)^2 + (\mathrm{tr}B)^2 + (\mathrm{tr}AB)^2 = (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)(\mathrm{tr}AB)$$

Groupes libres

Fricke a démontré que si A et B sont deux générateurs de Γ, alors leurs traces vérifient

$$(\mathrm{tr}A)^2 + (\mathrm{tr}B)^2 + (\mathrm{tr}AB)^2 = (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)(\mathrm{tr}AB)$$

Harvey Cohn montre que les formes quadratiques ayant une constante de Markoff $C(f) \in (1/3, 1/\sqrt{5}]$ sont $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$–équivalentes à

$$cx^2 + (d-a)xy - by^2$$

où

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est un générateur de Γ.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Il y a six mots de longueur 2, ce sont xy, xz, yx, yz, zx, zy.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Il y a six mots de longueur 2, ce sont xy, xz, yx, yz, zx, zy.

Le nombre de mots de longueur n est $2^{n-1}3$.

Une courbe simple sur un tore troué

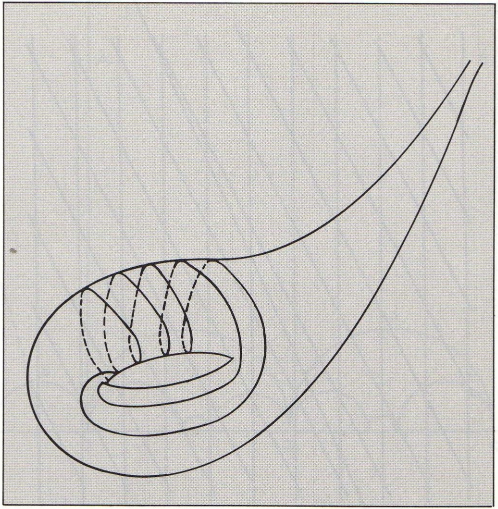
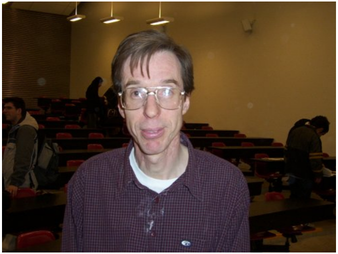


Figure 1. A simple curve on the punctured torus.

Approximation rationnelle simultanée et spectre de Markoff

Relations entre les nombres de Markoff et les nombres extrémaux : approximation simultanée de x et x^2 par des nombres rationnels de même dénominateur.

Damien Roy



Markoff–Lagrange spectrum and extremal numbers,
`arXiv.0906.0611 [math.NT]` 2 June 2009

Plus grand facteur premier des couples de Markoff

Pietro Corvaja et Umberto Zannier, 2006 :
Le plus grand facteur premier du produit xy *quand* x, y, z *est une solution de l'équation de Markoff tend vers l'infini avec* $\max\{x, y, z\}$.

Plus grand facteur premier des couples de Markoff

Pietro Corvaja et Umberto Zannier, 2006 :
Le plus grand facteur premier du produit xy *quand* x, y, z *est une solution de l'équation de Markoff tend vers l'infini avec* $\max\{x, y, z\}$.

Énoncé équivalent :
Si S *est un ensemble fini de nombres premiers, l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs x, y, z, *tels que* xy *n'aient comme diviseurs premiers que les éléments de* S.
(On dit que x et y sont des S–unités.)

AIMS Sénégal *Mardi 29 mars 2016*

M'Bour African Institute of Mathematical Sciences

Autour de l'équation de Markoff

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Michel Waldschmidt

http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/