Habilitation à diriger des recherches
Théorie des représentations et algèbre homologique

Estanislao Herscovich

Soutenance: le 1er décembre 2017

A mis padres, mi ejemplo a seguir.

Physics is mathematical not because we know so much about the physical world, but because we know so little : it is only its mathematical properties that we can discover.
Bertrand Russell. [1]

Wie im Leben der Völker das einzelne Volk nur dann gedeihen kann, wenn es auch allen Nachbarvölkern gut geht, und wie das Interesse der Staaten es erheischt, dass nicht nur innerhalb jedes einzelnen Staates Ordnung herrsche, sondern auch die Beziehungen der Staaten unter sich gut geordnet werden müssen, so ist es auch im Leben der Wissenschaften.
David Hilbert. [2]

1. An Outline of Philosophy, Ch.15 : The Nature of our Knowledge of Physics, (1927).
2. Axiomatisches Denken. Mathematische Annalen **78**, (1918), p. 405.

Remerciements

Au cours de ma vie, j'ai toujours apprécié et profité de la connaissance d'autres pour apprendre de nouveaux sujets. Bien que cela n'empêche pas que l'on puisse apprendre un sujet en solitude, il me semble aussi un avantage et une manière très efficace de pouvoir assimiler des nouveaux thèmes, et de prendre connaissance de la recherche d'autres, ce qui peut être spécialement utile pour le propre travail. C'est pour cela que cette liste de personnes sera essentiellement incomplète. Il y a plusieurs personnes qui m'ont influencé très fortement dans mon développement mathématique, parmi lesquelles je voudrais mentionner mon ex-directrice de doctorat, Andrea Solotar, qui m'a guidé avec plusieurs conseils dans ma vie de mathématicien après le Ph.D., Roland Berger et Eduardo Marcos, avec qui j'ai eu plusieurs discussions intéressantes sur la propriété de Koszul d'algèbres, et Henning Krause, qui m'a aidé à élargir mes bases mathématiques.

D'ailleurs, je veux remercier les membres du jury : Roland Berger, Jean Fasel, Christian Kassel et Thierry Lambre, et les rapporteurs : Grégory Ginot, Eduardo do Nascimento Marcos et Sarah Witherspoon, pour son travail et les plusieurs suggestions et indications sur ce mémoire. Je veux spécialement remercier Jean Fasel pour être mon garant et aussi pour me guider avec plusieurs nuances dans le processus de rédaction de ce mémoire, et Thierry Lambre pour son appui, ses conseils et le temps pour m'expliquer beaucoup de subtilités dans la vie professionnelle. Je suis aussi redevable à Jean-Pierre Demailly de son aide et orientation pendant les différentes étapes nécessaires pour cette habilitation. Finalement, je voudrais aussi remercier mes collègues de l'Institut Fourier et surtout je suis redevable à Alessandra Frabetti, à Nguyen Viet Dang et à Michał Wrochna pour plusieurs discussions ces derniers temps, en particulier sur des sujets liés avec la théorie quantique des champs. Je voudrais aussi remercier mes chers amis Belén et Reinaldo, qui m'ont beaucoup aidé, et qui j'ai eu de la chance de connaître à Grenoble.

Table des matières

Abstract

This manuscript includes a somehow detailed account without proofs on my research after my Ph.D. Thesis. It is organised into 4 different topics: the representation theory of Yang-Mills and super Yang-Mills algebras; Koszul algebras and their generalizations; applications of A_∞-algebras in homological algebra, with special attention to Hochschild (co)homology; and some applications of representation theory to mathematical-physics, in particular, Quantum Field Theory. In most of the cases I try to justify the questions tackled by presenting the corresponding motivation and/or some basic examples. Concerning each of the previously mentioned topics, I also describe several open problems I am interested in, some of which I am currently analyzing, and some new interests.

Résumé

Ce mémoire présente de façon détaillée mon activité de recherche passée après mon Doctorat, mais sans donner des preuves précises. Elle est organisée autour de quatre sujets : la théorie des représentations des algèbres de Yang-Mills et de super Yang-Mills ; les algèbres de Koszul et ses généralisations ; les applications des A_∞-algèbres dans l'algèbre homologique, en particulier, dans la cohomologie et l'homologie de Hochschild ; et des applications de la théorie des représentations dans la physique-mathématique, spécialement dans la théorie quantique des champs. J'ai essayé en général de présenter les motivations qui m'ont mené aux problèmes considérés, dans quelques cas sous la forme d'exemple. Par rapport aux sujets mentionnés, j'ai aussi indiqué quelques questions ouvertes et des problèmes assez concrets que j'envisage traiter dans l'avenir, ainsi que quelques nouveaux intérêts.

Introduction

Présentation

Ce mémoire présente, sans preuves détaillées, les principaux résultats que j'ai obtenus après ma thèse de Doctorat, ainsi que quelques articles moins importants qui sont seulement listés ci-dessous. J'espère de cette façon donner une idée suffisamment précise de mon activité de recherche passée. D'ailleurs, je voudrais aussi illustrer mes perspectives à venir à partir de questions ouvertes ainsi que les nouvelles lignes de recherche que j'ai abordées et que je souhaite continuer.

Je peux regrouper mes travaux autour des quatre thèmes :

(a) les algèbres de Yang-Mills et de super Yang-Mills ;

(b) les algèbres de Koszul et ses généralisations ;

(c) les A_∞-algèbres et ses applications dans l'algèbre homologique, en particulier, dans la cohomologie et l'homologie de Hochschild ;

(d) des applications de la théorie des représentations dans la physique-mathématique, spécialement dans la théorie quantique des champs.

C'est clair qu'il existe des intersections entre les points mentionnés et que les items précédents essaient seulement de décrire mes sujets de recherche approximativement.

De façon plus détaillée, ma liste de publications dans des journaux à comité de lecture incluent :

(i) Publications sur la théorie des représentations et l'algèbre homologique suivant ma thèse de Master :

  (a) (avec A. Solotar) *Derived invariance of Hochschild-Mitchell (co)homology and one-point extensions*. J. Algebra **315**, (2007), no. 2, pp. 852–873.

  (b) (avec A. Solotar) *Hochschild-Mitchell cohomology of linear categories*. J. Pure Appl. Algebra **209**, (2007), no. 1, pp. 37–55.

(ii) Publications sur la théorie des représentations et l'algèbre homologique suivant ma thèse de Doctorat :

  (a) (avec A. Solotar) *Representation theory of Yang-Mills algebras*. Ann. of Math. (2), 173, (2011), no. 2, pp. 1043–1080.

  (b) (avec A. Solotar) *Hochschild and cyclic homology of Yang-Mills algebras*. J. Reine Angew. Math. **665**, (2012), pp. 73–156.

(iii) Publications sur la théorie des représentations et l'algèbre homologique après ma thèse de Doctorat :

Ch. 1 (a) *The Dixmier map for nilpotent super Lie algebras*. Comm. Math. Phys. **313**, (2012), no. 2, pp. 295–328.

Ch. 2 (b) *Representation theory of super Yang-Mills algebras*. Comm. Math. Phys. **320**, (2013), no. 3, pp. 783–820.

Ch. 3 (c) (avec A. Rey) *On a definition of multi-Koszul algebras*. J. Algebra **376**, (2013), pp. 196–227.

Ch. 3 (d) *On the multi-Koszul property for connected algebras*. Documenta Math. **18**, (2013), pp. 1301–1347.

Ch. 3 (e) (avec A. Solotar et M. Suárez-Álvarez) *PBW-deformations and deformation* à la Gerstenhaber *of N-Koszul algebras*. J. Noncommut. Geom. **8**, (2014), no. 2, pp. 505–539.

Ch. 2 (f) *Some remarks on representations of Yang-Mills algebras*. J. Math. Phys. **56**, (2015), 011702, 6 pp.

Ch. 4 (g) *Spectral sequences associated to deformations*. J. Homotopy Relat. Struct. **12**, (2017), no. 3, 513–548.

(h) *On the Merkulov construction of A_∞-(co)algebras*. Accepté pour publication dans Ukrainian Math. J. (2017). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/On-the-Merkulov-construction.pdf`.

Ch. 5 (i) *Using torsion theory to compute the algebraic structure of Hochschild-(co)homology*. Accepté pour publication dans Homology Homotopy Appl. (2016). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Using-torsion-theory.pdf`.

Ch. 4 (j) *A higher homotopic extension of persistent (co)homology*. Accepté pour publication dans J. Homotopy Relat. Struct. (2017). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/A-higher-homotopic-persistent-homology.pdf`.

(k) (avec S. Chouhy et A. Solotar) *Hochschild homology and cohomology of down-up algebras*. Accepté pour publication dans J. Algebra. (2017). Disponible à `https://arxiv.org/abs/1609.09809`.

(iv) Publications dans des domaines de recherche autres que les mathématiques (physique et économie) :

(a) (avec M. Ferreyra, A. Peuriot, G. Santiago et V. Sleszak) *Espectroscopía de absorción y optoacústica pulsada de NO_2-N_2 en* 532 *nm. (Absorption and optoacoustic laser-beam spectroscopy for NO_2-N_2 in* 532 *nm.).* Anales AFA, Bahía Blanca, v. 16, 2004.

(b) (avec P. Minces et C. Nuñez) *Winding strings in* AdS_3. J. High Energy Phys., no. 06, 047, (2006), 32. pp.

(c) (avec M. Richarte) *Black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a string cloud background*. Phys. Lett. B. **689**, no. 4–5, (2010), pp. 192–200.

(d) *Noncommutative valuation of options*. Rep. Math. Phys. 78 (2016), no. 3, 371-386.

En outre, ma liste de préprints envoyés pour publication incluent :

Ch. 5 1. *Hochschild (co)homology of Koszul dual pairs*. (2016). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Hochschild-(co)homology-of-Koszul-dual-pairs`.

2. *Applications of one-point extensions to compute the A-infinity-(co)module structure of several Ext (resp., Tor) groups*. (2016). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Applications-of-one-point-extensions.pdf`.

Ch. 6 3. *Renormalization in Quantum Field Theory (after R. Borcherds)*. (2017). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Renormalization-in-QFT.pdf`.

4. *On the definition of multi-Koszul modules*. (2017). Disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/On-the-definition-of-multi-Koszul-modules.pdf`.

Dans ce mémoire je vais seulement discuter les résultats dans les articles qui sont accompagnés d'une référence à gauche indiquant le chapitre correspondant en rouge. En particulier, je vais organiser la présentation de ces travaux en six parties :

1. la théorie des représentations des super algèbres de Lie nilpotentes (Chapitre 1) ;
2. les algèbres de Yang-Mills et de super Yang-Mills (Chapitre 2) ;
3. les algèbres de Koszul et ses généralisations (Chapitre 3) ;
4. l'algèbre homologique et les A_∞-algèbres (Chapitre 4) ;
5. la cohomologie et l'homologie de Hochschild des algèbres graduées (Chapitre 5) ;
6. la théorie de la renormalisation en théorie quantique des champs d'après R. Borcherds (Chapitre 6).

Discussion sommaire des travaux futurs

Par rapport à mes travaux envisagés, je souhaite continuer avec l'étude des lignes de recherche suivantes :

1. le calcul de la cohomologie et de l'homologie des super Yang-Mills équivariantes (voir Section 2.3) ;
2. la dualité de Koszul des algèbres différentielles graduées (ou des A_∞-algèbres) (voir Section 3.4) ;
3. l'étude la théorie des déformations des algèbres multi-Koszul (voir Section 3.6) ;
4. l'utilisation de la théorie des A_∞-algèbres dans l'algèbre homologique (voir Sections 4.3 et 5.5) ;
5. le calcul de la structure algébrique de la cohomologie et l'homologie de Hochschild des algèbres (voir Sections 5.5 et 5.7) ;
6. la théorie de la renormalisation en théorie quantique des champs d'après R. Borcherds (voir Section 6.4).

Description brève du Chapitre 1

Ce chapitre décrit un résultat de la théorie des super algèbres de Lie nilpotentes démontré dans [Her12] : l'existence de l'application de Dixmier-Duflo, qui classifie les idéaux (bilatères) maximaux de la super algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une super algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Plus précisément, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une super algèbre de Lie nilpotente sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique zéro. On dénotera par $\mathrm{Prim}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ l'ensemble des idéaux primitifs, ou, de façon équivalente, maximaux, de la super algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ et par Ad_0 le groupe adjoint de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}_0$. Alors, l'application de Dixmier-Duflo usuelle pour les algèbres de Lie nilpotentes peut s'étendre au cas des super algèbres de Lie nilpotentes, *i.e.* il existe une application bijective

$$I : \mathfrak{g}_0^*/\mathrm{Ad}_0 \to \mathrm{Prim}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big) \tag{0.0.1}$$

qui envoie une classe d'équivalence $[\lambda]$ d'une fonctionnelle linéaire $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ sous l'action du groupe Ad_0 vers un idéal primitif $I(\lambda)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et qui coïncide avec l'application de Dixmier-Duflo usuelle si $\mathfrak{g}_1 = 0$.

En principe, il pourrait sembler que le résultat précédent suit de façon directe du travail [Kac77] de V. Kac (*cf.* Thm. 7', p. 82, où il affirme que des résultats similaires sont aussi vrais pour des super algèbres de Lie complètement résolubles). Néanmoins, les Théorèmes 7 et 7' dans [Kac77] contiennent une faute, comme A. Sergeev explique dans [Ser99]. Plus précisément, la preuve d'un résultat essentiel dans la démonstration de ces deux théorèmes, à savoir l'item (a) du premier théorème, est incorrecte, comme Sergeev précise dans la Section 5 de son article. On veut par contre remarquer que les items (b), (c) et (d) du Théorème 7 sont encore vrais pour des super algèbres de Lie nilpotentes, comme on peut déduire à partir des résultats dans [Ser99].

En outre, la construction dans [Her12] de l'application (0.0.1) est complètement explicite, une différence majeure avec le point de vue dans [Let92]. L'ingrédient principal dans la construction du morphisme (0.0.1) c'est l'existence des polarisations pour les super algèbres de Lie nilpotentes, une notion introduite dans [Her12] et qui généralise la définition standard pour les algèbres de Lie nilpotentes. Par ailleurs, une conséquence de la description explicite de l'application (0.0.1) –et qui ne suit pas des résultats dans [Let92]– est l'isomorphisme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \simeq \mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k)$ des super algèbres, où $(p,q) = (\dim(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_0^\lambda)/2, \dim(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1^\lambda))$ et $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}_0^\lambda \oplus \mathfrak{g}_1^\lambda$ est le noyau de la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto \lambda([x,y])$, pour $x,y \in \mathfrak{g}$. On a aussi décrit les idéaux maximaux de l'algèbre sous-jacente à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et une propriété assez utile des stabilisateurs des idéaux primitifs de la super algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: si $\mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathfrak{k}_0^*$ et $\mathfrak{g}'$ est le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé par les éléments x tels que $\lambda([x,\mathfrak{k}]) = 0$, alors $\mathfrak{st}(I(\lambda),\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}$, où $\mathfrak{st}(I(\lambda),\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, I(\lambda)] \subseteq I(\lambda)\}$. Ce dernier résultat a été l'une des motivations centrales de l'article [Her12], puisqu'il a été l'outil fondamental dans la preuve du résultat principal du travail [Her13a] sur la caractérisation des quotients simples des super algèbres de super Yang-Mills (voir Chapitre 2).

Description brève du Chapitre 2

Ce chapitre décrit les résultats démontrés dans les articles [Her13a] et [Her15]. Les algèbres de super Yang-Mills $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ ont été introduites par A. Schwarz et M. Movshev dans [MS06] et elles donnent une description des équations de Yang-Mills dans la théorie de jauge super symétrique en physique en termes de la théorie des représentations, où n indique la dimension de l'espace de base et s la quantité de super symétries. *Grosso modo*, l'algèbre de super Yang-Mills est le quotient de l'algèbre libre engendrée par des générateurs donnés par les composantes des champs dans une théorie de jauge modulo l'idéal engendré par les équations d'Euler-Lagrange associées. Elle est munie de façon naturelle d'une graduation de sorte que $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ devient une algèbre graduée positivement et connexe. De plus, $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ est par définition l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}$, qui peut être aussi regardée comme une super algèbre de Lie. En conséquence, on peut aussi considérer $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ en tant que super algèbre. Cette famille d'algèbres graduées étend celle introduite par A. Connes et M. Dubois-Violette dans [CDV02], qui sont appelées algèbres de Yang-Mills : elles correspondent au cas $s = 0$ et sont donc dénotées par $\mathrm{YM}(n)$. Ces algèbres apparaissent aussi dans la théorie de jauge des D-branes et la théorie des cordes (voir [Nek03]).

Dans [Her13a] j'ai étudié les quotients simples des super algèbres de super Yang-Mills $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ et l'on a obtenu en particulier les algèbres des opérateurs différentiels de l'espace plat super symétrique. Plus précisément, le résultat principal dans [Her13a] dit que toute super algèbre de Clifford-Weyl $\mathrm{Cliff}_q(k)\otimes A_p(k)$ avec $p \geq 3$, ou $p = 2$ et $q \geq 2$, est un quotient des toutes les super algèbres de super Yang-Mills $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$, avec $n \geq 3$ et $s \geq 1$. Cela étend le résultat principal prouvé dans [HS11]. Ça nous donne en particulier des solutions des équations de Yang-Mills dans la théorie de jauge super symétrique en termes des opérateurs différentiels dans l'espace plat super symétrique. La méthode utilisée pour obtenir ces quotients a été celle développée dans [Her12] et décrite dans le chapitre 1 : plus particulièrement, les Propositions 16 et 18 dans [Her12] (voir Propositions 1.0.15 et 1.0.17) ont été fondamentales. En fait, la motivation principale pour laquelle j'ai étendu dans [Her12] l'application de Dixmier-Duflo aux super algèbres de Lie nilpotentes c'était pour étudier les quotients simples des algèbres de super Yang-Mills, vues comme des super algèbres.

Dans l'article [Her15] j'ai trouvé d'autres solutions des équations de Yang-Mills dans la théorie de jauge, différentes de celles décrites dans [HS11]. Plus précisément, j'ai démontré que toute algèbre de Lie libre à deux générateurs est un quotient d'une algèbre de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n)$ avec $n \geq 4$. En conséquence, et en employant des résultats de M. Kuranishi, et de C. H. Lu et Z. X. Wan, on trouve que toutes les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples sont des quotients des algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ avec $n \geq 4$, ainsi que l'algèbre de Witt, l'algèbre de Virasoro et toutes les algèbres de Kac-Moody affines. Si l'on combine ce résultat avec le Thm. 1.1 dans [HS11], on obtient en particulier des solutions des équations de Yang-Mills données par des opérateurs différentiels agissant sur les sections d'un fibré vectoriel tordu (sur l'espace plat de dimension $n \geq 4$) associé à une représentation d'une algèbre de Lie semi-simple, ou d'une algèbre de Kac-Moody affine. Par ailleurs, j'ai aussi montré que le résultat précédent n'est pas valable pour $\mathfrak{ym}(3)$, puisque $\mathfrak{sl}(2,k)$ n'est pas parmi ses quotients.

Description brève du Chapitre 3

Dans ce chapitre on va décrire d'abord les résultats des articles [HR13] et [Her13b]. La notion d'*algèbre de Koszul* a été introduite par S. Priddy dans [Pri70], motivé par le travail [Kos50] de J.-L. Koszul. Ces algèbres apparaissent de façon naturelle dans le théorie des représentations (*cf.* [BGS88, BGS96]), la géométrie algébrique (*cf.* [Frö99]), les groupes quantiques (*cf.* [Man87]), et la combinatoire (*cf.* [HL07]). Par contre, elles sont quadratiques, *i.e.* de la forme $T(V)/\langle R\rangle$, avec $R \subseteq V^{\otimes 2}$, ce qui restreint très fortement les exemples des algèbres à traiter. R. Berger a généralisé dans [Ber01] la notion d'algèbre de Koszul (*cf.* aussi [GMMVZ04]) pour les cas des algèbres homogènes, *i.e.* des algèbres définies par $T(V)/\langle R\rangle$, où $R \subseteq V^{\otimes N}$ avec $N \geq 2$. Elles sont appelées *algèbres de Koszul généralisées*, ou N-*Koszul* si l'on veut souligner le degré de l'espace de relations, dont le cas $N = 2$ coïncide avec la notion introduite par Priddy. La définition introduite par Berger partage beaucoup de “bonnes” propriétés avec la notion de Priddy, ce qui justifie la terminologie. En particulier, l'algèbre de Yoneda d'une algèbre N-Koszul A est engendrée par ses composantes de degrés 1 et 2 –on dit dans ce cas que A est $\mathcal{K}_2$ (voir [CS08])– et la structure algébrique du dual de Koszul de A est calculée de façon immédiate à partir de celle de l'algèbre A de départ. Ils existent par contre des propriétés des algèbres de Koszul qui ne sont pas satisfaites par les algèbres de Koszul généralisées, *e.g.* elles ne forment pas une classe fermée par l'opération de prendre le dual de Koszul ou par les extensions d'Ore graduées, l'algèbre de Yoneda d'une algèbre N-Koszul n'est pas formelle pour $N \geq 3$, etc.

Le but des articles [HR13] et [Her13b] c'est de construire une extension de la définition d'algèbre de Koszul pour des algèbres graduées positivement et connexes mais pas forcément homogènes, *i.e.* des algèbres A de la forme $T(V)/\langle R\rangle$, où V est un espace vectoriel gradué positivement et $R \subseteq T(V)_+ \cdot T(V)_+$ est aussi gradué mais il n'est pas nécessairement inclus dans une puissance tensorielle de V. La nouvelle définition doit satisfaire quelques propriétés basiques, *e.g.* que l'algèbre de Yoneda soit engendrée (en tant qu'algèbre) par les composantes de degré cohomologique 1 et 2 et que sa structure algébrique soit décrite de façon triviale à partir de l'algèbre A de départ. Dans l'article [HR13], en collaboration avec A. Rey, on a travaillé en supposant que V soit concentré en degré 1, une hypothèse standard pour les algèbres de Koszul généralisées, mais qui n'est pas satisfaite par les algèbres de super Yang-Mills (regardées comme des algèbres graduées). Comme il s'agit de l'un des exemples qui m'intéressait le plus, c'est pour cette raison que j'ai introduit dans [Her13b] une extension de la notion d'algèbre de Koszul généralisée, appelée *algèbre multi-Koszul*, qui est valable pour toutes les algèbres graduées positivement et connexes. Cette définition coïncide avec celle que l'on a introduite dans [HR13] si V est concentré en degré 1 et, en particulier, elle coïncide avec la notion d'algèbre de Koszul généralisée si l'algèbre est homogène. En plus, les algèbres multi-Koszul ont un comportement homologique assez semblable à celui des algèbres de Koszul généralisées. En effet, il existe une description directe de la structure d'A_∞-algèbre de l'algèbre de Yoneda d'une algèbre multi-Koszul, qui rassemble celle du cas des algèbres de Koszul généralisées. En outre, toute algèbre multi-Koszul est aussi $\mathcal{K}_2$.

Finalement, dans la Section 3.5 je vais présenter les résultats démontrés dans [HSSÁ14], en collaboration avec A. Solotar et M. Suárez-Álvarez. Le principal résultat de l'article c'est que toute déformation de PBW faible d'une k-algèbre N-homogène A telle que $\mathrm{Tor}_3^A(k,k)$ soit concentré en degré $N+1$ satisfait la propriété de PBW. Cet énoncé est un cas particulier du *principe de déformation de Koszul* (voir [Dri92]) : il à été démontré par A. Braverman et D. Gaitsgory pour le cas $N = 2$ dans [BG96] et par R. Berger et V. Ginzburg pour N quelconque dans [BG06]. On veut aussi mentionner que le cas général a aussi été traité par G. Fløystad et J. Vatne dans [FV06], mais il y a une erreur dans l'article mentionné. Plus précisément, en employant la notation de ce travail, après l'identité définissant γ sur la ligne 22 de la p. 122, les auteurs affirment que $\gamma \circ \sigma$ s'annule. Cela n'est pas forcement vrai, puisqu'il n'existe aucune identification canonique de la résolution de Koszul $K_\bullet$ dans la résolution bar $B_\bullet$ compatible avec l'opération de prendre les crochets $[1,-]$. En fait, on peut déjà noter ce problème à partir des définitions par récurrence des cochaines du produit dans l'algèbre déformée qui correspondent à une déformation de PBW faible dans la Prop. 2.11 dans [HSSÁ14].

Par ailleurs, les méthodes de l'article [BG06] ne sont pas de nature homologique mais ils utilisent très fortement les propriétés du treillis des sous-espaces associés à une algèbre N-homogène qui satisfait que $\mathrm{Tor}_3^A(k,k)$ est concentré en degré $N+1$, tandis que le but de l'article [HSSÁ14] a été de démontrer le principe de déformation de Koszul pour les déformation de PBW faibles à partir d'établir le lien entre les déformation de PBW (faibles ou non) et les déformations (graduées) au sens de Gerstenhaber. Cela pourrait permettre d'étendre la preuve dans [HSSÁ14] aux algèbres qui ne sont pas nécessairement homogènes.

Description brève du Chapitre 4

Dans ce chapitre on va présenter les résultats des articles [Her17a] et [Her17c]. Dans l'article [Lap02], S. Lapin a construit une suite spectrale multiplicative à partir d'une déformation formelle $A_\hbar$ d'une algèbre différentielle graduée (ou d'une A_∞-algèbre) A munie d'une autre bigraduation qui satisfait une certaine compatibilité. En fait, le produit de cette suite spectrale est seulement l'ombre d'une structure multiplicative à homotopie près sur la même suite spectrale. De plus, comme le même auteur a observé dans [Lap08], cette construction peut s'appliquer en particulier à une déformation obtenue à partir d'une filtration sur l'algèbre différentielle graduée (ou l'A_∞-algèbre) A. Par ailleurs, étant donné une filtration quelconque d'une algèbre différentielle graduée (ou A_∞-algèbre) A, on rappelle que l'on peut toujours construire une suite spectrale multiplicative, que l'on appelle *canonique* (voir par exemple [McC01], Part I, ou [Wei94], Ch. 5). Le but de l'article [Her17a] c'est de démontrer que la suite spectrale multiplicative définie par Lapin dans le cas d'une algèbre différentielle graduée (ou d'une A_∞-algèbre) munie d'une filtration est isomorphe à la suite spectrale canonique. Une conséquence intéressante de ce résultat c'est que l'on peut toujours munir une suite spectrale multiplicative canonique d'une structure fortement homotopique dont la produit est la multiplication de départ. Un autre corollaire de nos résultats c'est que toute suite spectrale sur un corps peut se construire à l'aide d'un complexe filtré.

L'une des motivations pour l'article [Her17a], c'était l'étude des structures A_∞ sur la cohomologie persistante, que l'on a réalisée dans [Her17c]. Dans la Section 4.2 on va décrire brièvement ces résultats. Plus précisément, on a montré qu'il existe une pseudométrique sur l'ensemble des A_N-algèbres munies d'une structure de module sur la catégorie associée à un EPO P, satisfaisant quelques propriétés de finitude, qui étend de façon canonique la pseudométrique du goulot d'étranglement définit dans la théorie de cohomologie persistante. En plus, la nouvelle pseudométrique est plus fine que celle du goulot d'étranglement et elle est invariante par des quasi-isomorphismes d'A_N-algèbres.

Description brève du Chapitre 5

Dans ce chapitre je vais raconter deux de mes derniers articles : [Her16a] et [Her16b]. Le but du premier c'est de montrer qu'il est possible de calculer la structure d'algèbre (et même d'A_∞-algèbre) de la cohomologie de Hochschild $HH^\bullet(A)$ d'une algèbre graduée positivement et connexe A au niveau de la résolution projective minimale P du A-bimodule A si l'on connaît la structure d'A_∞-algèbre du dual de Koszul $\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k)$. De façon analogue, étant donné un A-bimodule graduée quelconque M, on peut calculer la structure de bimodule (et même d'A_∞-bimodule) de l'homologie de Hochschild $H_\bullet(A,M)$ sur la cohomologie $HH^\bullet(A)$ au niveau de la résolution projective minimale du A-bimodule A. On veut souligner que cette méthode n'utilise pas de morphismes de comparaison avec la résolution bar (ou n'importe quelle autre résolution), ni de relèvement $\Delta : P \to P \otimes_A P$ de l'identité de A. Les formules qui décrivent les structures mentionnées sont absolument explicites. En particulier, on déduit les expressions pour le produit cup calculées par R.-O. Buchweitz, E. Green, N. Snashall et Ø. Solberg dans [BGSS08] dans le cas où A est de Koszul et par Y. Xu et H. Xiang dans [XX11] dans le cas où A est de Koszul généralisée. On veut remarquer en plus que, grâce à un théorème annoncé par B. Keller dans la Xème ICRA à Toronto, Canada, en 2002, le calcul de la structure d'A_∞-algèbre de $\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k)$ se réduit à vérifier si une structure d'A_∞-algèbre donnée satisfait une condition assez facile à manipuler. Les avantages de cette nouvelle méthode sont clairs : on travaille sur un objet plus petit que les résolutions de A, et l'on doit en principe vérifier qu'une structure A_∞ satisfait une condition assez simple, au lieu de construire des morphismes.

Par ailleurs, dans l'article [Her16b] j'ai étudié la relation entre la dualité de Koszul et le calcul de Tamarkin-Tsygan. Cette dernière notion a été introduite par D. Tamarkin et B. Tsygan dans [TT05] dans son étude de la géométrie non commutative du point de vue homologique initié par G. Rinehart dans [Rin63], basé sur le travail de G. Hochschild, B. Kostant et A. Rosenberg dans [HKR62]. Si A est une algèbre différentielle graduée A, le calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A), B_A)$ associé est formé par la cohomologie de Hochschild $HH^\bullet(A)$ munie de sa structure d'algèbre de Gerstenhaber, l'homologie de Hochschild $HH_\bullet(A)$, regardé comme module de Gerstenhaber sur $HH^\bullet(A)$, et l'opérateur de Connes B_A sur l'homologie $HH_\bullet(A)$. Dans l'article [Her16b] j'ai démontré que, étant donné une algèbre différentielle graduée augmentée A qui satisfait quelques propriétés de finitude, le calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A), B_A)$ de A est *dual* au calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(E(A)), HH_\bullet(E(A)), B_{E(A)})$ du dual de Koszul $E(A)$ de A. La notion de dualité des calculs de Tamarkin-Tsygan a été introduite dans le même article et elle veut dire qu'il existe une paire (f,g), où $f : HH^\bullet(E(A)) \to HH^\bullet(A)$ est un isomorphisme d'algèbres de Gerstenhaber et $g : HH_\bullet(A)^\# \to HH_\bullet(E(A))$ est un isomorphisme de modules de Gerstenhaber sur $HH^\bullet(E(A))$ tel que $B_{E(A)} \circ g = -g \circ B_A^\#$, où $HH_\bullet(A)$ est un module de Gerstenhaber sur $HH^\bullet(E(A))$ via f et $(-)^\#$ dénote le dual gradué.

Description brève du Chapitre 6

Dans ce chapitre, on va décrire seulement quelques résultats contenus dans le manuscrit [Her17d] en raison de son extension. Le but de ce travail est en fait :

(i) de donner une formulation complète et précise de la théorie de renormalisation dans la théorie quantique des champs perturbative (pQFT), d'après le point de vue introduit par R. Borcherds dans [Bor11]. En particulier, on a expliqué en détail les différents objets qu'il a considérés, ainsi que les structures algébriques et topologiques qu'ils portent.

(ii) de donner une preuve exhaustive des Théorèmes 15, 18, 20 et 21 dans [Bor11] sur l'action simplement transitive du groupe de renormalisation sur l'ensemble des mesures de Feynman associées à un propagateur du type coupe et sur l'existence des mesures de Feynman associées à tels propagateurs (voir [Her17d], Thms. 6.0.8, 7.3.8, 7.4.2 et 7.5.2). Pour pouvoir assurer l'existence des mesures de Feynman on a été forcé à imposer une condition supplémentaire sur le propagateur qui n'apparaît pas dans [Bor11] (voir Def. 7.3.4). On remarque par contre que cette dernière hypothèse est vérifiée dans le cas de la théorie des champs scalaires ou de la théorie des champs de Dirac.

Par contre, pour des raisons d'espace on va décrire *grosso modo* les définitions les plus importantes, pour finalement limiter la présentation seulement à étudier certaines structures algébriques qui n'ont pas été considérées par Borcherds de façon explicite (puisqu'elles ont été introduites simultanément ou même postérieurement) mais qui jouent un rôle important. Plus précisément, on va expliquer un ingrédient fondamental dans la définition de mesure de Feynman donné par un couplage de Laplace qui est obtenu comme une extension du propagateur. Ce point de vue à été expliqué en fait dans le cas particulier d'une théorie quantique des champs de dimension zéro par C. Brouder, B. Fauser, A. Frabetti et R. Oeckl dans [BFFO04]. Par contre, dans la situation général on doit travailler dans le contexte des catégories 2-monoïdales (aussi appelées catégories duoïdales), qui ont été introduites par M. Aguiar et C. Mahajan dans [AM10] (voir aussi [BM12, Str12]), puisque l'on doit en général manipuler deux produits tensoriels différents. En fait, à partir des objets utilisés par Borcherds, je me suis trouvé avec une notion de catégorie munie des 2 produits tensoriels qui satisfaisait des conditions de compatibilité et M. Street m'a indiqué très gentiment par mail que cette notion est un cas particulier de celle de catégorie 2-monoïdale, qui existait déjà depuis quelques ans. Par ailleurs, pour pouvoir travailler avec la notion de couplage de Laplace dans ce contexte il faut considérer une structure supplémentaire à celle de catégorie 2-monoïdale, que j'ai introduite dans [Her17d] et que j'ai appelée *encadrement*. Le but de ce chapitre c'est d'expliquer ces constructions en détail.

Chapitre 1

L'application de Dixmier-Duflo des super algèbres de Lie nilpotentes

1.0.1. Le but de l'article [Her12] c'est d'étendre l'application de Dixmier-Duflo aux super algèbres de Lie nilpotentes. Plus précisément, le résultat principal de ce chapitre donne une paramétrisation explicite des idéaux primitifs de la super algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une super algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sur un corps k de caractéristique zéro et algébriquement clos. On suppose désormais ces hypothèses sur le corps k. On va procéder à expliquer ces résultats plus en détail.

1.0.2. On remarque d'abord que les notions de super algèbre de Lie résoluble et nilpotente sont les mêmes que dans le cas usuel. En plus, si la super algèbre de Lie est nilpotente, les idéaux primitifs et les idéaux maximaux coïncident, comme le résultat suivant l'indique.

1.0.3 Proposition ([Let89], Prop. 3.3)**.** *Soit I un idéal (bilatère) de la super algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une super algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, différent de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Alors, I est primitif si et seulement si I est maximal.*

1.0.4. Pour paramétrer les idéaux primitifs, on introduit une définition de polarisation qui généralise la notion usuelle (voir [Dix96], 1.12.8). On définit l'espace vectoriel $\mathcal{L}_\mathfrak{g} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, k)$ des formes linéaires paires sur $\mathfrak{g}$, *i.e.* une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ appartient à $\mathcal{L}_\mathfrak{g}$ si elle s'annule sur $\mathfrak{g}_1$. Alors, étant donné $\lambda \in \mathcal{L}_\mathfrak{g}$, on défini une forme bilinéaire super antisymétrique $\langle\, ,\rangle_\lambda$ sur $\mathfrak{g}$ par $\langle x, y\rangle_\lambda = \lambda([x,y])$, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$. On obtient *a fortiori* une forme bilinéaire antisymétrique A_λ sur $\mathfrak{g}_0$ et une forme bilinéaire symétrique B_λ sur $\mathfrak{g}_1$. On note par $\mathfrak{g}^\lambda$ le noyau de $\langle\, ,\rangle_\lambda$, ce qui donne une sous-algèbre de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. D'après V. Kac (voir [Kac77], p. 83), une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *subordonnée* à λ si $\lambda([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ et $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}^\lambda$. On définit une *polarisation* de $\mathfrak{g}$ en $\lambda \in \mathcal{L}_\mathfrak{g}$ comme une sous-algèbre subordonnée $\mathfrak{h}$ de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont le super espace vectoriel sous-jacent est un sous-espace maximal totalement isotropique du super espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de la forme bilinéaire $\langle\, ,\rangle_\lambda$. Cette définition coïncide avec la notion usuelle de polarisation si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie (voir [Dix96], 1.12.8). En plus, si λ satisfait $\lambda([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]) = 0$, alors cette notion de polarisation coïncide avec celle de A. Sergeev dans [Ser99].

1.0.5 Proposition ([Her12], Prop. 13)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie résoluble. Alors, pour toute fonctionnelle linéaire $\lambda \in \mathcal{L}_\mathfrak{g}$ il existe une polarisation en λ.*

Ce résultat nous dit précisément que l'ensemble des polarisations n'est pas vide.

1.0.6. Étant donné $\lambda \in \mathcal{L}_\mathfrak{g}$ et $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on définit deux (super) représentations $F_{\lambda,\mathfrak{h},i} = k.v_{\lambda,\mathfrak{h},i}$ de la super algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ par $x.v_{\lambda,\mathfrak{h},i} = \lambda(x)v_{\lambda,\mathfrak{h},i}$, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, où le degré de $v_{\lambda,\mathfrak{h},i}$ est i. L'importance de ces représentations est expliquée par le théorème suivant.

1.0.7 Théorème ([Her12], Thm. 3)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie nilpotente et $\lambda \in \mathcal{L}_\mathfrak{g}$ une fonctionnelle linéaire. Alors, il existe une polarisation $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ en λ telle que le $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module induit* $\mathrm{ind}(F_{\lambda,\mathfrak{h},i}, \mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} F_{\lambda,\mathfrak{h},i}$ *est simple.*

1.0.8. Par définition, si l'on dénote par $\rho_{\mathfrak{h},i}$ le morphisme de structure de la représentation $\mathrm{ind}(F_{\lambda,\mathfrak{h},i}, \mathfrak{g})$, alors le noyau de $\rho_{\mathfrak{h},i}$ est un idéal primitif de la super algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Le résultat suivant montre que ce noyau est indépendant de la polarisation $\mathfrak{h}$ et de l'indice i.

1.0.9 Théorème ([Her12], Thm. 4). *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie nilpotente et $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ une fonctionnelle linéaire. Étant donnés deux polarisations $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ en λ et deux indices $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soient $\rho_{\mathfrak{h},i}$ et $\rho_{\mathfrak{h}',j}$ les morphismes de structure des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modules* $\operatorname{ind}(F_{\lambda,\mathfrak{h},i}, \mathfrak{g})$ *et* $\operatorname{ind}(F_{\lambda,\mathfrak{h}',j}, \mathfrak{g})$. *Alors,* $\ker(\rho_{\mathfrak{h},i}) = \ker(\rho_{\mathfrak{h}',j})$.

1.0.10. À partir du théorème précédent, on peut définir $I(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ comme le noyau de $\rho_{\mathfrak{h},i}$, pour une polarisation quelconque $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ en λ et un indice quelconque $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.0.11 Théorème ([Her12], Thm. 5). *Soit I un idéal primitif de la super algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une super algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Alors, il existe $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ telle que $I = I(\lambda)$.*

1.0.12. D'après le dernier théorème, on peut conclure que l'application

$$I : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \to \operatorname{Prim}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big) \tag{1.0.1}$$

est surjective.

1.0.13 Proposition ([Her12], Prop. 15). *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie nilpotente et soit* Ad_0 *le groupe adjoint algébrique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Le groupe* Ad_0 *agit de façon naturelle sur $\mathfrak{g}_0^* \simeq \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$. Cette action est dite* coadjointe. *Étant donnés $\lambda, \lambda' \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$, alors $I(\lambda) = I(\lambda')$ si et seulement si λ et λ' appartiennent à la même orbite de $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ sous l'action coadjointe de* Ad_0.

1.0.14. En conséquence, on trouve que (1.0.1) induit une application bijective

$$I : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}/\mathrm{Ad}_0 \to \operatorname{Prim}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big). \tag{1.0.2}$$

1.0.15 Proposition ([Her12], Prop. 16). *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie nilpotente et $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ une fonctionnelle linéaire. Alors,* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \simeq \mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k)$, *où* $(p,q) = \operatorname{sdim}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ *est la super dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ est n'importe quelle polarisation de $\mathfrak{g}$ en λ,* $\mathrm{Cliff}_q(k)$ *dénote la super algèbre de Clifford et $A_p(k)$ est l'algèbre de Weyl.*

Ce résultat est une conséquence de la description explicite des idéaux primitifs de la super algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ donnée par (1.0.2).

1.0.16. Un autre corollaire, qui est très utile pour l'étude de la théorie des représentations des algèbres de super Yang-Mills, est le suivant. On rappelle d'abord quelques définitions. Étant donné un idéal $\mathfrak{k}$ d'une super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et un idéal I de la super algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$, le *stabilisateur de I dans* $\mathfrak{g}$, noté par $\mathfrak{st}(I,\mathfrak{g})$, est le sous-espace du super espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments homogènes $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\operatorname{ad}(x)(I) \subseteq I$ (*i.e.* tels que $[x,z] = \operatorname{ad}(x)(z) \in I$, pour tous les éléments homogènes $z \in I$). Il est facile à vérifier que $\mathfrak{st}(I,\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{k}$.

1.0.17 Proposition ([Her12], Prop. 18). *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie nilpotente, $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{k}}$. On dénote par $\mathfrak{g}'$ le super espace vectoriel formé par les éléments $x \in \mathfrak{g}$ qui satisfont $\lambda([x,\mathfrak{k}]) = 0$. Noter que $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{st}(I(\lambda),\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{g}' + \mathfrak{k}$.*

1.0.18. Il est intéressant à noter que l'on a l'égalité pour la proposition précédente dans le cas des algèbres de Lie nilpotentes (voir [Dix96], Prop. 6.2.8). Par contre, on ne sait pas si c'est aussi vrai pour les super algèbres de Lie nilpotentes. Au moins cet auteur a parlé avec M. Duflo (en 2011), qui est un expert sur ce sujet, et il n'était pas sûr si la dernière inégalité dans la Proposition 1.0.17 est en fait une égalité.

Chapitre 2

Les algèbres de Yang-Mills et de super Yang-Mills

Dans [CDV02] (voir aussi [CDV07]), A. Connes et M. Dubois-Violette ont introduit une famille d'algèbres, appelées *algèbres de Yang-Mills* et dénotées par $\mathrm{YM}(n)$, où n indique la dimension de l'espace de base, dont la théorie des représentations permet d'étudier la théorie de Yang-Mills en physique. Plus précisément, l'algèbre de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ est le quotient de l'algèbre libre à n générateurs $\nabla_1, \dots, \nabla_n$ modulo les relations données par les équations d'Euler-Lagrange d'une connexion ∇ de Yang-Mills écrites en coordonnées $\nabla_1, \dots, \nabla_n$. En particulier, la théorie des représentations de ces algèbres permet d'obtenir des solutions des équations de Yang-Mills sur l'espace plat. On remarque que, par définition, $\mathrm{YM}(n)$ est l'algèbre universelle enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{ym}(n)$, pour tout n. Dans la première section on va rappeler les résultats dans l'article [Her13a] sur les quotients simples des super algèbres de super Yang-Mills, tandis que dans la Section 2.2 on va présenter quelques résultats prouvés dans [Her15] de la théorie des représentations des algèbres de Yang-Mills

2.1 Les quotients simples des super algèbres de super Yang-Mills

2.1.1. Les *algèbres de super Yang-Mills* ont été introduites par M. Movshev et A. Schwarz dans l'article [MS06] (voir aussi [Mov05]). Elles généralisent les algèbres de Yang-Mills mentionnées ci-dessus et, de façon analogue aux algèbres de Yang-Mills, elles permettent d'étudier la théorie de jauge super symétrique en physique.

2.1.2. On va rappeler maintenant la définition d'algèbre de super Yang-Mills. Elles ont plusieurs incarnations différentes. On va se concentrer maintenant sur la version des super algèbres de Lie. Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un super espace vectoriel sur un corps k (de caractéristique zéro et algébriquement clos) de super dimension $(n,s) \in \mathbb{N}^2$, où $n+s > 0$, tel que V_0 est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée g. Le groupe algébrique $\mathrm{SO}(V_0, g)$ et donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(V_0, g)$ agissent sur V_0 (avec l'action standard). On écrit $V = V(n,s)$, $V_0 = V(n)_0$ et $V_1 = V(s)_1$ pour remarquer la (super) dimension. On suppose en plus qu'il existe une application linéaire $\Gamma : S^2 V_1^* \to V_0$. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ une base homogène de V, où $\mathcal{B}_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{z_1, \dots, z_s\}$, avec $|x_i| = 0$, pour tout $i = 1, \dots, n$, et $|z_a| = 1$, pour tout $a = 1, \dots, s$, et soit $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_0^* \cup \mathcal{B}_1^*$ la base duale de V^* avec $\mathcal{B}_0^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ et $\mathcal{B}_1^* = \{z_1^*, \dots, z_s^*\}$. On fixe $\Gamma^i_{a,b} = x_i^*(\Gamma(z_a^*, z_b^*))$, pour $i = 1, \dots, n$ et $a, b = 1, \dots, s$, et g^{-1} la forme bilinéaire symétrique non dégénérée *inverse* sur V_0^*, *i.e.* g^{-1} est la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V_0^* donnée par l'image de g par l'isomorphisme $V_0 \to V_0^*$ défini par $v \mapsto g(v, -)$. Alors, la représentation matricielle de g^{-1} relative à la base duale $\mathcal{B}_0^*$ est l'inverse de la matrice de g relative à $\mathcal{B}_0$ et l'on peut écrire donc $g^{i,j} = g^{-1}(x_i^*, x_j^*)$ et $g_{i,j} = g(x_i, x_j)$.

2.1.3. Soit $\mathfrak{f}(V)$ la super algèbre de Lie engendrée par le super espace vectoriel V. La *super algèbre de Lie de super Yang-Mills* associée à (V, g) et à Γ est définie comme le quotient

$$\mathfrak{ym}(V,g)^\Gamma = \mathfrak{f}(V)/\langle R(V,g)^\Gamma \rangle,$$

où $R(V,g)^\Gamma$ est le sous-espace du super espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{f}(V)$ engendré par les éléments

$$r_{0,i} = \sum_{j,l,m=1}^{n} g^{j,l} g^{i,m} [x_j,[x_l,x_m]] - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{s} \Gamma^i_{a,b}[z_a,z_b], \qquad r_{1,a} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{b=1}^{s} \Gamma^i_{a,b}[x_i,z_b], \tag{2.1.1}$$

pour tous $i = 1,\dots,n$ et $a = 1,\dots,s$, respectivement. On considère aussi la super algèbre universelle enveloppante $\mathrm{YM}(V,g)^\Gamma = \mathcal{U}(\mathfrak{ym}(V,g)^\Gamma)$ de $\mathfrak{ym}(V,g)^\Gamma$ et que l'on appelle la *super algèbre (associative) de super Yang-Mills*. Par définition, $\mathrm{YM}(V,g)^\Gamma$ est la super algèbre donnée par le quotient de la super algèbre tensorielle $T(V(n,s))$ engendrée par $V(n,s)$ modulo l'idéal (bilatère) engendré par le sous-espace $R(V(n,s),g)^\Gamma$ du super espace vectoriel $F^3T(V(n,s))$, où $\{F^\bullet T(V(n,s))\}_{\bullet\in\mathbb{N}}$ dénote la filtration croissante canonique de la super algèbre tensorielle.

2.1.4. Il est facile à vérifier que $R(V,g)^\Gamma$ est indépendant du choix de la base homogène $\mathcal{B}$, et donc on peut supposer en outre que $\mathcal{B}_0$ est orthonormée. Dans ce cas $R(V,g)^\Gamma$ est engendré par

$$r_{0,i} = \sum_{j=1}^{n} [x_j,[x_j,x_i]] - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{s} \Gamma^i_{a,b}[z_a,z_b], \qquad r_{1,a} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{b=1}^{s} \Gamma^i_{a,b}[x_i,z_b]. \tag{2.1.2}$$

En fait, on va supposer que $R(V,g)^\Gamma$ est engendré par les éléments précédents. En conséquence, si le super espace vectoriel V a super dimension (n,s), on peut dénoter les super algèbres de Yang-Mills tout simplement par $\mathfrak{ym}(n,s)^\Gamma$ et $\mathrm{YM}(n,s)^\Gamma$, respectivement. On écrira aussi $R(n,s)^\Gamma$ au lieu de $R(V,g)^\Gamma$. Noter que $\mathfrak{ym}(n) = \mathfrak{ym}(n,0)^0$ est précisément l'algèbre de Yang-Mills introduite par A. Connes et M. Dubois-Violette dans [CDV02].

2.1.5. Par ailleurs, on voit bien que l'on pourrait aussi considérer $\mathfrak{ym}(n,s)^\Gamma$ comme une algèbre de Lie graduée, où le degré de x_i est 2 et celui de z_a est 3 pour tous $i = 1,\dots,n$ et $a = 1,\dots,s$. En conséquence, $\mathrm{YM}(n,s)^\Gamma$ peut être aussi regardée en tant qu'algèbre positivement graduée et connexe. Dans ce cas, on appellera plutôt $\mathfrak{ym}(n,s)^\Gamma$ *l'algèbre de Lie graduée de super Yang-Mills* et $\mathrm{YM}(n,s)^\Gamma$ *l'algèbre (associative) de super Yang-Mills*. De façon générique, on pourrait dénoter n'importe quelle version de ces algèbres graduées ou de ces super algèbres (de Lie ou associatives) simplement par *algèbre de super Yang-Mills*, pour simplifier.

2.1.6. On dit que Γ (ou même l'algèbre de super Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n,s)^\Gamma$) est *non dégénéré(e)* si $n \neq 0$ et qu'il existe une fonctionnelle linéaire $\lambda \in V_0^*$ telle que la forme bilinéaire $\lambda \circ \Gamma : V_1^* \otimes V_1^* \to k$ est non dégénérée si $s \neq 0$. On suppose désormais que toutes les algèbres de super Yang-Mills sont non dégénérées.

2.1.7. On va énoncer quelques propriétés des algèbres de super Yang-Mills. Pour cela, on rappelle d'abord qu'une algèbre positivement graduée et connexe A est appelée *AS régulière (à gauche) de dimension d et paramètre de Gorenstein ℓ* si elle a dimension globale (à gauche) d et

$$\mathcal{E}xt^i_A(k,A) \simeq \begin{cases} k[\ell], & \text{si } i = d, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, une algèbre positivement graduée et connexe A est dite de *Calabi-Yau graduée (à gauche) de dimension d et paramètre ℓ* si elle a un résolution projective formée de A-bimodules de type fini, elle a dimension globale d et elle satisfait (*cf.* [BT07], Def. 4.2)

$$\mathcal{E}xt^i_{A^e}(A,A^e) \simeq \begin{cases} A[\ell], & \text{si } i = d, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

dans la catégorie des A^e-modules à droite. Il existent aussi les notions évidentes d'algèbre AS régulière à droite et de Calabi-Yau graduée à droite. Comme on travaille avec des algèbres de Hopf graduées, les définitions à gauche et à droite coïncident, donc on omettra de les préciser.

2.1.8 Proposition ([Her13a], Prop. 3)**.** *Soit* $(n,s) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \{(1,0),(1,1)\}$*. L'algèbre graduée* $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ *est AS régulière de dimension globale* 3 *et paramètre de Gorenstein* 8*. Elle est aussi de Calabi-Yau graduée de dimension* 3 *et la même valeur du paramètre.*

La preuve du résultat précédent est une conséquence de la caractérisation explicite de la résolution projective minimale du $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$-module (à gauche ou à droite) k donnée dans [Her13a], Prop. 2. Même si ces super algèbres ne sont pas de Koszul, au sens introduit par R. Berger dans [Ber01] (voir aussi [GMMVZ04]), puisque elles ne sont pas homogènes, $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ est multi-Koszul pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \{(1,0),(1,1)\}$, une notion introduite dans [Her13b] (voir *ibid*, Exemple 3.22).

2.1.9 Théorème ([Her13a], Thm. 2)**.** *Soit* $n \geq 2$*. La sous-algèbre de Lie graduée* $\mathfrak{t}\hat{\mathfrak{ym}}(n,s)^{\Gamma} = [\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}, \mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}]$ *est une algèbre de Lie graduée libre.*

La preuve de ce résultat suit des propriétés homologiques mentionnées ci-dessus.

2.1.10 Corollaire ([Her13a], Cor. 2 et 4)**.** *Soit* $n \geq 2$*, ou* $n = 1$ *et* $s \geq 3$*. Alors,* $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ *n'est pas noethérienne (à gauche ou à droite). Pourtant,* $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ *est cohérente (à gauche et à droite)*

Ce résultat est une conséquence directe du théorème précédent.

2.1.11. Le résultat fondamental de l'article [Her13a] est le théorème suivant. Il décrit *grosso modo* certains solutions des équations de Yang-Mills super symétriques par des opérateurs différentiels de l'espace plat super symétrique.

2.1.12 Théorème ([Her13a], Thm. 4)**.** *Soient* $n,s,p,q \in \mathbb{N}$ *tels que* $n \geq 3$ *et* $s \geq 1$*. On suppose en plus que* $p \geq 3$*, ou* $p = 2$ *et* $q \geq 2$*. Alors, il existe un homomorphisme surjectif de super algèbres*

$$\mathcal{U}\Big(\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}\Big) \twoheadrightarrow \mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k).$$

En outre, il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que ce morphisme se factorise par le quotient* $\mathcal{U}(\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}/F^{\ell}(\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}))$*, i.e.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}\Big(\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}\Big) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads] & & \mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k) \\
& \mathcal{U}\Big(\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}/F^{\ell}\mathfrak{ym}(n,s)^{\Gamma}\Big) \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

La preuve du théorème précédent utilise essentiellement des résultats sur l'application de Dixmier-Duflo des super algèbres de Lie nilpotentes démontrés dans [Her12] et mentionnés dans le chapitre précédent (en particulier, les Propositions 1.0.15 et 1.0.17), et le fait que $\mathfrak{t}\hat{\mathfrak{ym}}(n,s)^{\Gamma}$ est une super algèbre de Lie libre (voir Théorème 2.1.9).

2.2 Sur les représentations des algèbres de Yang-Mills

2.2.1. Dans cette section on va présenter les résultats principaux du petit article [Her15]. Le but de ce travail c'est de répondre une question posée par J. Alev : quelles algèbres de Lie (semi-simples) peut-on obtenir comme des quotients des algèbres de Yang-Mills $\mathfrak{ym}(n)$, pour $n \geq 3$? Une autre raison pour laquelle on veut trouver des quotients semi-simples de $\mathfrak{ym}(n)$, c'est la suivante : si l'on combine les solutions des équations de Yang-Mills par des opérateurs différentiels agissant sur un fibré de rang un sur l'espace plat trouvées dans [HS12] avec des représentations d'algèbres de Lie simples, on obtient des solutions des équations de Yang-Mills par des opérateurs différentiels qui agissent sur des sections globales des fibrés vectoriels tordus sur l'espace plat définis à partir des représentations d'algèbres de Lie semi-simples mentionnées avant.

2.2.2 Proposition ([Her15], Prop. 2.1)**.** *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \geq 2m$*. Alors, il existe un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie (graduées) de* $\mathfrak{ym}(n)$ *vers* $\mathfrak{f}(m)$*, l'algèbre de Lie libre à* m *générateurs.*

2.2.3 Corollaire ([Her15], Cor. 2.2, 2.3 et 2.4)**.** *Soit* $n \geq 4$*. Alors, toute algèbre de Lie semisimple est un quotient de l'algèbre de Yang-Mills* $\mathfrak{ym}(n)$*. En outre, l'algèbre de Witt* $\mathfrak{W}$ *et l'algèbre de Virasoro* Vir *sont des quotients de* $\mathfrak{ym}(n)$*, ainsi que toutes les algèbres de Kac-Moody* $\mathfrak{g}(A)$ *ou* $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ *si* $r + 2 \geq m$*, où* r *est le rang de la matrice* $m \times m$ A *(cela inclut en particulier toutes les algèbres de Kac-Moody affines).*

Ce corollaire est une conséquence directe de la proposition précédente et des résultats de la théorie de Lie démontrés par M. Kuranishi dans [Kur51] pour les algèbres semi-simples, et par C. H. Lu et Z. X. Wan dans [LW86] pour les algèbres de Kac-Moody.

2.2.4. La Proposition 2.2.2 n'est pas valable pour $n = 3$, comme le résultat suivant le montre.

2.2.5 Proposition ([Her15], Prop. 2.7)**.** *Soit* $\phi : \mathfrak{ym}(3) \to \mathrm{sl}(2,k)$ *un morphisme quelconque d'algèbres de Lie. Alors, l'image de* ϕ *est une sous-algèbre de Lie résoluble de* $\mathrm{sl}(2,k)$*.*

La preuve de la proposition précédente utilise des résultats fondamentaux de la théorie des algèbres de Lie nilpotentes, comme le théorème de Jacobson-Morozov.

2.3 Perspective par rapport à l'homologie de Hochschild des algèbres de super Yang-Mills

Une question largement ouverte sur les algèbres de super Yang-Mills $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ est la cohomologie et l'homologie de Hochschild et cyclique. Comme il s'agit des algèbres de Calabi-Yau de dimension globale 3 (voir Proposition 2.1.8), il suffit de calculer les quatre groupes d'homologie de Hochschild. En plus, comme on travaille sur un corps k de caractéristique zéro, la suite SBI, qui relie l'homologie de Hochschild et la homologie cyclique, est scindée, ce qui réduit encore plus les groupes à calculer. La propriété de multi-Koszulité de $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ permet de simplifier encore plus les calculs : à partir de deux groupes d'homologie on peut obtenir (au moins) les séries de Hilbert des autres. Par contre, les calculs à effectuer sont très loin d'être triviaux, puisqu'il faut manipuler la théorie des représentations des algèbres de Lie $\mathfrak{so}(n)$ pour pouvoir contrôler les cocycles qui apparaissent dans les calculs homologiques qu'il faut réaliser. En principe, on peut supposer en plus que l'application Γ dans la définition d'algèbre de super Yang-Mills est compatible avec l'action de $\mathfrak{so}(n)$ –ce que l'on a appelé "condition d'*équivariance*" de l'algèbre de super Yang-Mills dans [Her12]–. Il s'agit en tout cas d'une hypothèse qui est satisfaite dans les exemples qui proviennent de la théorie de jauge super symétrique ([Her12], p. 787).

Chapitre 3

Sur les algèbres de Koszul et ses généralisations

3.0.1. Dans les trois premières sections de ce chapitre on va présenter sans preuves détaillées les résultats des articles [HR13] et [Her13b]. Le but de ces articles c'est de présenter une extension de la notion d'algèbre de Koszul (généralisée) pour des algèbres graduées positivement et connexes, de sorte que l'algèbre de Yoneda satisfasse beaucoup des propriétés vérifiées par les définitions d'algèbre de Koszul et d'algèbre de Koszul généralisée de S. Priddy et de R. Berger, respectivement. La différence la plus importante avec la plupart des points de vue précédents (voir [GM05, LHL07, LS10]) c'est que l'on n'impose pas de conditions sur les degrés de générateurs des modules projectifs de la résolution projective minimale du module trivial k, mais l'on fixe "l'allure" de ces espaces vectoriels gradués. La raison pour laquelle on renonce à l'idée d'imposer une condition sur les degrés mentionnés est expliqué dans la Section 3.1 avec un exemple assez simple. Comme tous les résultats du premier article ont été démontrés dans le deuxième (à partir d'autres méthodes) pour une situation plus générale où l'algèbre graduée de départ n'est pas forcément engendré en degré 1, on va se concentrer à expliquer ici seulement le dernier article.

Finalement, on va décrire dans la Section 3.5 les résultats de l'article [HSSÁ14].

3.1 Un exemple intéressant

3.1.1. Soit k un corps. Étant donné $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on définit $\phi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\phi_s(2j) = sj$, $\phi_s(2j+1) = sj+1$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'une algèbre s-homogène $A = T(V)/\langle R\rangle$, *i.e.* $R \subseteq V^{\otimes s}$, où $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, est dite *de Koszul généralisée* ou *s-Koszul* si la résolution projective minimale $(P_\bullet, d_\bullet)$ du A-module à gauche k satisfait que $P_n \simeq A \otimes E_n$, où E_n est un espace vectoriel gradué concentré en degré $\phi_s(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De façon équivalente, une algèbre s-homogène A est de Koszul généralisée si et seulement si l'algèbre de Yoneda $\mathrm{Ext}^\bullet_A(k,k)$ est engendrée (en tant qu'algèbre) par $\mathrm{Ext}^1_A(k,k)$ et $\mathrm{Ext}^2_A(k,k)$ (voir [GMMVZ04], Thm. 4.1).

3.1.2. Plusieurs généralisations de la définition d'algèbre s-Koszul que l'on trouve dans la littérature sont décrites en termes des conditions sur les degrés possibles de l'espace gradué E_n. On veut montrer avec l'exemple suivant que ce point de vue contient un problème fondamental. Par exemple, si l'on suit cette idée avec une algèbre A avec relations en degré par exemple 3 et 4, il serait tentant de penser que l'extension de la notion de Koszul doit au moins inclure le cas où le n-ième module projectif de la résolution projective minimale du A-module k est engendré en degré $\phi_3(n)$ et $\phi_4(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.1.3. On considère les algèbres $B = k\langle x,y,z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$. Il est facile à voir que C est 4-Koszul, tandis que B est 3-homogène mais elle n'est pas 3-Koszul (puisque par exemple z^2x^2y est un générateur minimal du degré 5 du noyau de la deuxième différentielle de la résolution projective minimale du B-module k). On définit $A = B *_k C$ le produit libre de B et C, *i.e.* $A = k\langle x,y,z,u\rangle/\langle x^2y, z^2x, u^4\rangle$. Alors, la résolution projective minimale du A-module k est de la forme

$$\cdots \to A \otimes k.u^{\phi_4(i)} \to \cdots \to A \otimes k.u^8 \to A \otimes W \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0,$$

où $V = k.x \oplus k.y \oplus k.z \oplus k.u$, $R = k.x^2 y \oplus k.z^2 x \oplus k.u^4$, $W = k.z^2 x^2 y \oplus k.u^5$ et les différentielles sont les évidentes. Cela implique que le n-ième module libre de la résolution projective minimale du A-module k est engendré par un espace vectoriel gradué concentré en degrés $\phi_3(n)$ et $\phi_4(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, comme A est un produit libre de B et C, l'algèbre de Yoneda de A est le produit direct des algèbres de Yoneda de B et de C, ce qui implique que l'algèbre de Yoneda de A satisfait les "mauvaises" propriétés des algèbres duales de Koszul d'une algèbre qui n'est pas de Koszul généralisée. Par exemple, comme B n'est pas 3-Koszul, l'algèbre de Yoneda de B n'est engendré (comme algèbre graduée) par les composantes de degré cohomologique 1 et 2, et en conséquence l'algèbre de Yoneda de A n'est pas engendré (en tant qu'algèbre graduée) par les composantes de degré cohomologique 1 et 2.

3.1.4. Vu que le contrôle sur les degrés des générateurs de chaque module projectif de la résolution projective minimale de k ne suffit pas pour éviter des exemples d'algèbres dont l'algèbre de Yoneda a les mêmes pathologies que dans le cas non Koszul généralisé, le point de vue que l'on a suivi dans [HR13] et [Her13b] c'est d'imposer plutôt une condition sur l'espace vectoriel gradué total des générateurs de chaque module projectif de la résolution projective minimale de k. On va procéder à l'expliquer dans la section suivante.

3.2 La définition d'algèbre multi-Koszul

3.2.1. Soit k un corps. On dénote désormais par $A = \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ une algèbre unifère positivement graduée et connexe, *i.e.* $A_0 = k$. On suppose en plus que chaque composante homogène A_n est de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit $A_{>0} = \oplus_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. L'*espace de générateurs (irréductibles)* de A est une sous-espace vectoriel gradué $V \subseteq A_{>0}$ tel que la composition de l'inclusion précédente avec la projection canonique $A_{>0} \to A_{>0}/(A_{>0}.A_{>0})$ est une bijection. En conséquence, il existe un homomorphisme surjectif d'algèbres graduées $\pi : T(V) \to A$. Si I dénote le noyau de π, on obtient $A \simeq T(V)/I$, où $I \subseteq T(V)^{\geq 2} = T(V)_{>0} \otimes T(V)_{>0}$ est un idéal homogène de $T(V)$. Soit R un *espace de relations* de A, *i.e.* un sous-espace vectoriel gradué de I qui est isomorphe à $I/(T(V)_{>0} \otimes I + I \otimes T(V)_{>0})$ sous la projection canonique. De façon équivalente, un espace de relations peut être défini comme un sous-espace vectoriel gradué $R \subseteq I$ tel que l'idéal de $T(V)$ engendré par $\langle R \rangle$ coïncide avec I et que

$$R \cap \Big(T(V)_{>0} \otimes R \otimes T(V) + T(V) \otimes R \otimes T(V)_{>0}\Big) = 0. \tag{3.2.1}$$

On va écrire $A = T(V)/\langle R\rangle$, où $R \subseteq T(V)^{\geq 2}$.

3.2.2. Par ailleurs, on a introduit la définition suivante dans [Her13b], Subsection 3.1. Un sous-espace vectoriel $U \subseteq T(V)$ de l'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel V est dit *fidèle de type tenseur-intersection à gauche* (resp., *à droite*) si $(U \otimes W_1) \cap (U \otimes W_2) = U \otimes (W_1 \cap W_2)$ (resp., $(W_1 \otimes U) \cap (W_2 \otimes U) = (W_1 \cap W_2) \otimes U$) pour tous les sous-espaces vectoriels $W_1, W_2 \subseteq T(V)$. En plus, U est *fidèle du type tenseur-intersection* s'il l'est à gauche et à droite.

3.2.3 Proposition ([Her13b], Prop. 3.2)**.** *Soit $U \subseteq T(V)$ un sous-espace vectoriel de l'algèbre tensorielle engendré par V. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) U est fidèle du type tenseur-intersection à gauche (resp., à droite).

(ii) $U \cap (U.T(V)_{>0}) = 0$ (resp., $U \cap (T(V)_{>0}.U) = 0$).

(iii) étant donné un ensemble fini I d'indices, une famille libre $\{u_i : i \in I\} \subseteq U$ et une collection arbitraire d'éléments $w_i \in T(V)$ pour $i \in I$, si $\sum_{i\in I} u_i \otimes w_i = 0$ (resp., $\sum_{i\in I} w_i \otimes u_i = 0$), alors $w_i = 0$ pour tout $i \in I$.

3.2.4. Il est facile à voir que V et R sont des sous-espaces fidèles de type tenseur-intersection de $T(V)$ (voir [Her13b], Example 3.3). On peut présenter les propriétés suivantes des sous-espaces fidèles de type tenseur-intersection de $T(V)$.

3.2.5 Corollaire ([Her13b], Rk. 3.4, Cor. 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9)**.** *Soit V un espace vectoriel positivement gradué, $T(V)$ l'algèbre tensorielle et $U \subseteq T(V)$ un sous-espace fidèle de type tenseur-intersection à gauche (resp., à droite). Alors,* *(i)* *si $U' \subseteq U$, alors U' est aussi fidèle de type tenseur-intersection à gauche (resp., à droite), et si $W \subseteq T(V)$ est fidèle de type tenseur-intersection à gauche (resp., à droite), alors $U \otimes W \subseteq T(V)$ l'est aussi ;*

(ii) *si $U' \subseteq U$ et $W' \subseteq W \subseteq T(V)$, alors on a les identités $(U' \otimes W) \cap (U \otimes W') = U' \otimes W'$ (resp., $(W \otimes U') \cap (W' \otimes U) = W' \otimes U'$) des sous-espaces vectoriels de $T(V)$;*

(iii) *si $\{U_i\}_{i\in I}$ est une famille libre des sous-espaces vectoriels gradués de U, la famille de sous-espaces de $T(V)$ donnée par $\{U_i \otimes T(V)\}_{i\in I}$ (resp., $\{T(V) \otimes U_i\}_{i\in I}$) est aussi libre ;*

(iv) *si $\{W_i\}_{i\in I}$ est une famille libre de sous-espaces gradués de $T(V)$, la collection des sous-espaces de $T(V)$ définie par $\{U \otimes W_i\}_{i\in I}$ (resp., $\{W_i \otimes U\}_{i\in I}$) est libre ;*

(v) *soient $W \subseteq T(V)$, U' et W' deux espaces vectoriels gradués quelconques, et $f : U \to U'$ et $g : W \to W'$ deux homomorphismes d'espaces vectoriels gradués, alors il existe un homomorphisme $f \otimes g : U \otimes W \to U' \otimes W'$ (resp., $g \otimes f : W \otimes U \to W' \otimes U'$) d'espaces vectoriels gradués qui envoie $\sum_i u_i \otimes w_i$ (resp., $\sum_i w_i \otimes u_i$) vers $\sum_i f(u_i) \otimes g(w_i)$ (resp., $\sum_i g(w_i) \otimes f(u_i)$), où $u_i \in U$ et $w_i \in W$.*

3.2.6. Étant donné deux sous-espaces vectoriels U et W de $T(V)$, on écrira $U.W$ au lieu de $U \otimes W$ et $U^{(i)}$ au lieu de $U^{\otimes i}$, où $i \in \mathbb{N}$, pour réduire la notation. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on considère le sous-espace vectoriel de $T(V)$ donné par

$$ {}^{i}T = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{j=0}^{N} V^{(j)}.R^{(i)}.V^{(N-j)} \Big), \tag{3.2.2}$$

où la somme précédente est directe par le Corollaire 3.2.5. On définit ${}^{i}T^{N} = \cap_{j=0}^{N} V^{(j)}.R^{(i)}.V^{(N-j)}$ et l'on remarque que ${}^{0}T = T(V)$.

3.2.7. Étant donné $N \in \mathbb{N}^*$, on rappelle qu'une *partition* $\bar{n}$ de N est une suite de nombres entiers non négatifs $\bar{n} = (n_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)}$ à support fini (*i.e.* $n_i = 0$ pour presque tous $i \in \mathbb{N}^*$) telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} n_i = N$. La *longueur* de la partition $\bar{n}$, qui sera noté par $l(\bar{n})$, est définie comme le plus grand nombre entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_\ell \neq 0$. On dénote par $\mathrm{Par}_\ell(N)$ l'ensemble de partitions de N de longueur inférieure ou égale à ℓ, et l'on écrit $\mathrm{Par}(N)$ au lieu de $\mathrm{Par}_N(N)$. Si $N = 0$, on pose $\mathrm{Par}(0) = \{0\}$.

3.2.8. Finalement, on définit par récurrence la famille $\{J_i(V,R)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces gradués de $T(V)$ de la façon suivante. On pose $J_0(V,R) = k$. On va définir d'abord les espaces vectoriels indexés par des entiers pairs. On suppose que l'on a défini $J_0(V,R), J_2(V,R), \dots, J_{2i}(V,R)$, où $i \in \mathbb{N}$. Alors, on pose

$$ J_{2(i+1)}(V,R) = R^{(i+1)} \cap \left(\sum_{N\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left(\bigcap_{\substack{\bar{n} \in \mathrm{Par}(i) \\ \bar{m} \in \mathrm{Par}_{i+1}(N)}} V^{(m_1)}.J_{2n_1}(V,R) \dots V^{(m_i)}.J_{2n_i}(V,R).V^{(m_{i+1})} \right)}_{H_{N,i}(V,R)} \right). \tag{3.2.3}$$

D'ailleurs, on définit

$$ J_{2i+1}(V,R) = \big(V.J_{2i}(V,R) \big) \cap \big(J_{2i}(V,R).V \big). \tag{3.2.4}$$

On écrira souvent J_i au lieu de $J_i(V,R)$.

3.2.9. Noter les identités $J_1 = V$, $J_2 = R$ et $J_3 = (V.R) \cap (R.V)$ des sous-espaces vectoriels gradués de $T(V)$. Par ailleurs, on remarque que $J_{2j} \subseteq R^{(j)}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et, par conséquent, $J_{2j+1} \subseteq (V.R^{(j)}) \cap (R^{(j)}.V)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. En outre, la somme dans (3.2.3) est directe (voir [Her13b], Subsection 3.2) et donc

$$ J_{2(i+1)} = \left(\bigoplus_{N\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \left(\bigcap_{\substack{\bar{n} \in \mathrm{Par}(i) \\ \bar{m} \in \mathrm{Par}_{i+1}(N)}} V^{(m_1)}.J_{2n_1}.V^{(m_2)} \dots V^{(m_i)}.J_{2n_i}.V^{(m_{i+1})} \right) \right) \cap R^{(i+1)}. \tag{3.2.5}$$

3.2.10 Lemme ([Her13b], Lemma 3.11)**.** *Soit $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la collection de sous-espaces vectoriels gradués de $T(V)$ donnée par $J_0 = k$,* (3.2.3) *et* (3.2.4)*. Alors, J_i est un sous-espace vectoriel fidèle de type tenseur-intersection de $T(V)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Ce résultat est une conséquence directe des inclusions évidentes $J_{2j} \subseteq R^{(j)}$ et $J_{2j+1} \subseteq (V.R^{(j)}) \cap (R^{(j)}.V)$, et du Corollaire 3.2.5.

3.2.11. On considère la famille de sous-espaces vectoriels gradués $\{\cap_{l=0}^{N} V^{(l)}.J_{2j+1}.V^{(N-l)}\}_{N\in\mathbb{N}}$ de l'algèbre tensorielle $T(V)$, où $j \in \mathbb{N}$. Cette collection de sous-espaces vectoriels est libre, puisque le N-ième membre est inclus dans $R^{(j)}.V^{(N+1)}$ et la famille $\{R^{(j)}.V^{(N+1)}\}_{N\in\mathbb{N}}$ est libre en raison du Corollaire 3.2.5. On pose

$$ {}^{j}\tilde{T} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{l=0}^{N} V^{(l)}.J_{2j+1}.V^{(N-l)} \Big). \tag{3.2.6}$$

D'après (3.2.5) on voit bien que $J_{2j} \subseteq {}^{j-1}\tilde{T}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

3.2.12 Lemme ([Her13b], Lemma 3.12 et Cor. 3.13)**.** *Soit $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la collection de sous-espaces vectoriels gradués de $T(V)$ définie par $J_0 = k$,* (3.2.3) *et* (3.2.4)*. Alors, on a l'inclusion*

$$J_{i+j} \subseteq J_i.J_j$$

pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, a l'exception du cas où i et j sont impairs. Par ailleurs, si $i, j \in \mathbb{N}^*$ sont impairs, on a l'inclusion

$$J_{i+j} \subseteq \Big(T(V).J_i.J_j\Big) \cap \Big(J_i.T(V).J_j\Big) \cap \Big(J_i.J_j.T(V)\Big).$$

3.2.13. On va introduire la notation suivante pour pouvoir manipuler les éléments de J_i. Étant donnés des sous-espaces vectoriels gradués $W_1, \dots, W_m$ de $T(V)_{>0}$, un élément $\omega \in W_1 \dots W_m \subseteq T(V)_{>0}$ peut s'écrire comme une somme finie

$$\sum_{(\omega)} \omega_{(1)}|\omega_{(2)}|\dots|\omega_{(m-1)}|\omega_{(m)},$$

avec $\omega_{(i)} \in W_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Si les sous-espaces vectoriels $W_{j_1}, \dots, W_{j_l}$ de $T(V)_{>0}$ coïncident avec $V \subseteq T(V)_{>0}$ pour $1 \le j_1 < \dots < j_l \le m$, on va écrire une barre sur les facteurs $\omega_{(j_1)}, \dots, \omega_{(j_l)}$. De plus, on va omettre le symbole de la somme pour simplifier.

3.2.14. Soit $j \in \mathbb{N}$. Par (3.2.4), on voit bien que, si $\omega \in J_{2j+1}$, alors on peut l'écrire sous la forme $\omega = \bar{\omega}_{(1)}|\omega_{(2)}$ et $\omega = \omega_{(1)}|\bar{\omega}_{(2)}$. On remarque que $\omega_{(1)}$ et $\omega_{(2)}$ ne représentent pas les mêmes éléments dans ces deux écritures de ω. On peut donc considérer les éléments $(\pi \otimes \mathrm{id}_{J_{2j}})(\omega) \otimes 1$ et $1 \otimes (\mathrm{id}_{J_{2j}} \otimes \pi)(\omega)$ dans $A \otimes J_{2j} \otimes A$, où $\pi : T(V) \to A$ dénote la projection canonique. De façon équivalente, on peut les écrire comme $\pi(\bar{\omega}_{(1)})|\omega_{(2)}|1$ et $1|\omega_{(1)}|\pi(\bar{\omega}_{(2)})$, respectivement. Ces éléments sont bien-définis par Corollaire 3.2.5. On a donc une application $J_{2j+1} \to A \otimes J_{2j} \otimes A$ donnée par

$$\omega \mapsto \pi(\bar{\omega}_{(1)})|\omega_{(2)}|1 - 1|\omega_{(1)}|\pi(\bar{\omega}_{(2)}),$$

ou sinon par

$$\omega \mapsto \bar{\omega}_{(1)}|\omega_{(2)}|1 - 1|\omega_{(1)}|\bar{\omega}_{(2)},$$

si l'on regarde V dans A. On dénote par $\delta^b_{2j+1} : A \otimes J_{2i+1} \otimes A \to A \otimes J_{2j} \otimes A$ l'extension A^e-linéaire de l'application précédente. Il s'agit d'un homomorphisme de A-bimodules gradués.

3.2.15. Par ailleurs, étant donné $j \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application ${}^{j-1}\tilde{T} \to A \otimes J_{2j-1} \otimes A$ d'espaces vectoriels gradués définie par la somme des morphismes ${}^{j-1}\tilde{T}^N \to A \otimes J_{2j-1} \otimes A$ des espaces vectoriels gradués que l'on va procéder à décrire pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Si $\omega \in {}^{j-1}\tilde{T}^N$, alors, pour tout $0 \le l \le N$, on peut écrire $\omega = \omega^l_{(1)}|\omega^l_{(2)}|\omega^l_{(3)}$, où $\omega^l_{(1)} \in V^{(l)}$, $\omega^l_{(2)} \in J_{2j-1}$ et $\omega^l_{(3)} \in V^{(N-l)}$. Pour tout $0 \le l \le N$ on considère l'élément

$$(\pi|_{V^{(l)}} \otimes \mathrm{id}_{J_{2j-1}} \otimes \pi|_{V^{(N-l)}})(\omega) = \pi(\omega^l_{(1)})|\omega^l_{(2)}|\pi(\omega^l_{(3)}),$$

dans $A \otimes J_{2j-1} \otimes A$. On veut souligner que ces éléments sont bien définis grâce au Corollaire 3.2.5. Cela permet de définir une application ${}^{j-1}\tilde{T} \to A \otimes J_{2j-1} \otimes A$ d'espaces vectoriels gradués comme la somme des applications ${}^{j-1}\tilde{T}^N \to A \otimes J_{2j-1} \otimes A$ considérées avant, *i.e.* on a

$$\omega \mapsto \sum_{l=0}^{N} \pi(\omega^l_{(1)})|\omega^l_{(2)}|\pi(\omega^l_{(3)}).$$

L'inclusion $J_{2j} \subseteq {}^{j-1}\tilde{T}$ induit alors une application $J_{2j} \to A \otimes J_{2j-1} \otimes A$ d'espaces vectoriels gradués. On va dénoter par

$$\delta^b_{2j} : A \otimes J_{2j} \otimes A \to A \otimes J_{2j-1} \otimes A$$

son extension A^e-linéaire. L'application δ^b_{2j} est un homomorphisme de A-bimodules gradués.

3.2.16. On a donc défini une famille $\{K_{L-R}(A)_i = A \otimes J_i \otimes A\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A-bimodules gradués munie des homomorphismes $\delta^b_i : K_{L-R}(A)_i \to K_{L-R}(A)_{i-1}$ de A-bimodules gradués pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

3.2.17 Proposition ([Her13b], Prop. 3.14)**.** *Soit A une algèbre positivement graduée et connexe, et soit $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la collection de sous-espaces vectoriels gradués de $T(V)$ donnée par $J_0 = k$,* (3.2.3) *et* (3.2.4)*. On considère la famille $\{K_{L-R}(A)_i = A \otimes J_i \otimes A\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A-bimodules gradués munie des homomorphismes $\delta^b_i : K_{L-R}(A)_i \to K_{L-R}(A)_{i-1}$ de A-bimodules gradués pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Cette construction est en fait un complexe de A-bimodules gradués, i.e. $\delta^b_{i-1} \circ \delta^b_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. En plus, ce complexe est exacte en degré homologique* 1, *i.e.* $\mathrm{Ker}(\delta^b_1) = \mathrm{Im}(\delta^b_2)$.

3.2.18. On va considérer l'augmentation $\delta^b_0 : K_{L-R}(A)_\bullet \to A$ du complexe précédent , où δ^b_0 est le produit de A. Alors, le complexe $K_{L-R}(A)_\bullet$ coïncide avec la résolution projective minimale du A-bimodule A jusqu'au degré homologique 2. On l'appelle le *complexe multi-Koszul de bimodules* de A. De façon semblable, on définit le complexe augmenté $(K(A)_\bullet, \delta_\bullet)$ (resp., $(K(A)'_\bullet, \delta'_\bullet)$) donné par $(K_{L-R}(A)_\bullet \otimes_A k, \delta^b_\bullet \otimes_A \mathrm{id}_k)$ (resp., $(k \otimes_A K_{L-R}(A)_\bullet, \mathrm{id}_k \otimes_A \delta^b_\bullet)$), et qui est appelé le *complexe multi-Koszul à gauche (resp., à droite)* de A. On remarque que le complexe multi-Koszul à gauche (resp., à droite) de A coïncide avec la résolution projective minimale du A-module à gauche (resp., à droite) k jusqu'au degré homologique 2.

3.2.19 Définition ([Her13b], Def. 3.15)**.** *Soit A une algèbre positivement graduée et connexe. On dit que A est* multi-Koszul à gauche (resp., à droite) *si le complexe multi-Koszul à gauche (resp., à droite) de A est exact en tout degré homologique strictement positif.*

3.2.20 Fait ([Her13b], Prop. 3.17, Rks. 3.16 et 3.18, Lemma 3.23 et Prop. 3.24)**.** *Soit $A = T(V)/\langle R \rangle$ une algèbre positivement graduée et connexe. Alors,*

1. *A est multi-Koszul à gauche si et seulement si elle est multi-Koszul à droite, et si et seulement si le complexe multi-Koszul de bimodules de A est exact en tout degré homologique strictement positif ;*
2. *si A est multi-Koszul, le complexe multi-Koszul de bimodules (resp., à gauche, à droite) de A est une résolution projective minimale du A-bimodule A (resp., du A-module à gauche k, du A-module à droite k) ;*
3. *pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ l'application canonique $J_{i+1} \to \mathrm{Ker}(\delta_i)$ définie comme la restriction de δ_{i+1} est injective, et le morphisme induit $J_{i+1} \to \mathrm{Ker}(\delta_i) \otimes_A k$ donné comme la composition de l'inclusion précédente et la projection canonique $\mathrm{Ker}(\delta_i) \to \mathrm{Ker}(\delta_i) \otimes_A k$ est injectif pour tous les entiers $i \in \mathbb{N}^*$ pairs ;*
4. *A est multi-Koszul si et seulement s'il existe un isomorphisme $\mathrm{Tor}^A_n(k,k) \simeq J_n$ d'espaces vectoriels gradués pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

3.2.21 Proposition ([Her13b], Prop. 3.20)**.** *Soit $A = T(V)/\langle R \rangle$ une algèbre s-homogène, i.e. V est un espace vectoriel de dimension finie et $R \subseteq V^{\otimes s}$, où $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Alors, A est multi-Koszul si et seulement si A est s-Koszul au sens de R. Berger. En outre, si $A = T(V)/\langle R \rangle$ avec V est un espace vectoriel de dimension finie concentré en degré* 1, *alors A est multi-Koszul si et seulement si A est multi-Koszul au sens défini dans* [HR13].

3.2.22.*Exemple.* Les algèbres de super Yang-Mills $\mathrm{YM}(n,s)^\Gamma$ non dégénérées introduites dans la Section 2.1 (en tant qu'algèbres graduées, comme expliqué dans 2.1.5) donnent un exemple d'algèbre multi-Koszul pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \{(1,0),(1,1)\}$, comme on peut vérifier d'après la description explicite de la résolution projective minimale du $\mathrm{YM}(n,s)^\Gamma$-module trivial k dans [Her13a], Prop. 2.

3.3 La structure algébrique de l'algèbre de Yoneda d'une algèbre multi-Koszul

3.3.1. On va procéder maintenant à décrire la structure d'A_∞-algèbre augmentée de l'algèbre de Yoneda $\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k)$ d'une algèbre multi-Koszul A. On rappelle que, d'après un théorème de T. Kadeishvili (voir [Kad80]), l'algèbre de Yoneda d'une algèbre positivement graduée et connexe, étant la cohomologie d'une algèbre différentielle graduée (l'algèbre différentielle graduée donnée par le dual de la construction bar de A), a naturellement une structure d'A_∞-algèbre augmentée (unique à quasi-isomorphisme près). Or, $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ est l'homologie d'une cogèbre différentielle graduée –la construction bar de A– et elle porte donc une structure d'A_∞-cogèbre coaugmentée (unique à quasi-équivalence près), d'après un théorème de V. Guggenheim (voir [Gug82], ou sinon [Her17b] pour une autre preuve dans une situation un peu plus générale). Comme la structure d'A_∞-algèbre de $\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k)$ est seulement donnée par le dual gradué de l'A_∞-cogèbre coaugmentée $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$, il suffira de décrire cette dernière structure. Les structures d'A_∞-cogèbre coaugmentée et d'A_∞-algèbre augmentée sont appelées des *modèles*. En raison du Fait 3.2.20, on travaillera avec l'espace vectoriel gradué $J = \oplus_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

3.3.2. La counité de J est la projection canonique sur J_0 et la coaugmentation est donnée par l'inclusion de J_0 dans J. Pour tous $i, i' \in \mathbb{N}$, on considère l'application

$$\iota_{i,i'} : J_{i+i'} \to J_i \otimes J_{i'} \tag{3.3.1}$$

donnée par l'inclusion canonique $J_{i+i'} \subseteq J_i \otimes J_{i'}$ si i ou i' est pair (voir Lemme 3.2.12), et par la composition de l'inclusion canonique $J_{i+i'} \subseteq T(V) \otimes J_i \otimes J_{i'}$ (voir Lemme 3.2.12) et l'application $\epsilon_{T(V)} \otimes \mathrm{id}_{J_i} \otimes \mathrm{id}_{J_{i'}}$ si i et i' sont impairs, où $\epsilon_{T(V)} : T(V) \to k$ est la projection canonique.

3.3.3 Fait. *Étant donnés deux entiers impairs $i, i' \in \mathbb{N}^*$, l'application $\iota_{i,i'} : J_{i+i'} \to J_i \otimes J_{i'}$ coïncide avec la composition de l'inclusion $J_{i+i'} \subseteq J_i \otimes T(V) \otimes J_{i'}$ dans le Lemme 3.2.12 et l'application $\mathrm{id}_{J_i} \otimes \epsilon_{T(V)} \otimes \mathrm{id}_{J_{i'}}$. Elle coïncide aussi avec la composition de l'inclusion $J_{i+i'} \subseteq J_i \otimes J_{i'} \otimes T(V)$ et $\mathrm{id}_{J_i} \otimes \mathrm{id}_{J_{i'}} \otimes \epsilon_{T(V)}$.*

Ce résultat est une conséquence immédiate de (3.2.5).

3.3.4. Soient $n \geq 3$ et $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ un n-uplet formé d'entiers impairs. On considère la décomposition

$$\bigoplus_{N\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \Big(\bigcap_{\bar{m}\in \mathrm{Par}_{n+1}(N)} V^{(m_1)}.J_{i_1-1}.V^{(m_2)} \dots V^{(m_n)}.J_{i_n-1}.V^{(m_{n+1})} \Big). \tag{3.3.2}$$

Soit $p_N^{\bar{i}}$ la projection de ce sous-espace vectoriel de l'algèbre tensorielle sur la N-ième composante, où $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Par (3.2.5), on voit bien que $J_{i_1+\dots+i_n+2-n}$ est inclus dans (3.3.2). De plus, il est facile à vérifier (d'après (3.2.4), le Lemme 3.2.10 et la Proposition 3.2.3) que la n-ième composante est incluse dans $J_{i_1} \otimes \dots \otimes J_{i_n}$. Enfin, pour tout $n \geq 3$ et tout n-uplet $(i_1, \dots, i_n)$ formé d'entiers impairs, on définit l'application

$$\iota_{i_1,\dots,i_n} : J_{i_1+\dots+i_n+2-n} \to J_{i_1} \otimes \dots \otimes J_{i_n} \tag{3.3.3}$$

donnée par la composition de l'inclusion de $J_{i_1+\dots+i_n+2-n}$ dans (3.3.2), la projection $p_n^{\bar{i}}$ et l'inclusion de la n-ième composante de (3.3.2) dans $J_{i_1} \otimes \dots \otimes J_{i_n}$.

3.3.5 Proposition ([Her13b], Prop. 4.4)**.** *Soit A une algèbre multi-Koszul et soit $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la collection des sous-espaces vectoriels de $T(V)$ donnée par $J_0 = k$, (3.2.3) et (3.2.4). On définit $J = \oplus_{i\in\mathbb{N}} J_i$, muni d'une graduation homologique induite par l'indice i. On pose*

(i) $\Delta_2 : J \to J \otimes J$ *tel que* $\Delta_2|_{J_i} = \sum_{\ell=0}^{i} \iota_{\ell,i-\ell}$*, pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *;*

(ii) pour tout $n \geq 3$, $\Delta_n : J \to J^{\otimes n}$ tel que $\Delta_n|_{J_i} = \sum \iota_{i_1,\dots,i_n}$, où la somme est indexée par les n-uplets $(i_1, \dots, i_n)$ de nombres entiers impairs tels que $i_1 + \dots + i_n + 2 - n = i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

En conséquence, J est une A_∞-cogèbre coaugmentée pour $\Delta_1 = 0$, les comultiplications Δ_2 et Δ_n, $n \geq 3$, la counité donnée par la projection canonique sur J_0 et la coaugmentation définie par l'inclusion de J_0 dans J.

3.3.6 Théorème ([Her13b], Thm. 4.1 et Thm. 4.8). *Soit A une algèbre multi-Koszul et soit $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la collection des sous-espaces vectoriels de $T(V)$ donnée par $J_0 = k$,* (3.2.3) *et* (3.2.4). *Alors, la structure d'A_∞-cogèbre coaugmentée sur J est un modèle pour* $\mathrm{Tor}^A_\bullet(k,k)$. *En conséquence, les A_∞-algèbres augmentées $\mathcal{E}xt^\bullet_A(k,k)$ et $J^\#$ sont quasi-isomorphes.*

La preuve de ce résultat utilise fortement la structure d'A_∞-cogèbre coaugmentée sur J trouvée dans la Proposition 3.3.5 et un théorème annoncé par B. Keller dans la Xème ICRA, à Toronto, Canada, en 2002. Pour une preuve de ce dernier résultat, voir [Her13b], Thm. 4. 7.

3.3.7 Proposition ([Her13b], Prop 3.31). *Soit $A = T(V)/\langle R\rangle$ une algèbre multi-Koszul, où V et R sont de dimension finie. Alors, l'algèbre graduée sous-jacente à $\mathcal{E}xt^\bullet_A(k,k) = \mathrm{Ext}^\bullet_A(k,k)$ est engendrée (en tant qu'algèbre) par* $\mathrm{Ext}^1_A(k,k)$ *et* $\mathrm{Ext}^2_A(k,k)$, *i.e. A est $\mathcal{K}_2$ (au sens de T. Cassidy et B. Shelton, voir* [CS08]*).*

Ce résultat est une conséquence de la description explicite de la structure d'algèbre de $\mathcal{E}xt^\bullet_A(k,k) = \mathrm{Ext}^\bullet_A(k,k)$ dans le Théorème 3.3.6.

3.4 Perspective par rapport à la dualité de Koszul

Il existent encore plusieurs questions ouvertes sur la propriété de multi-Koszulité. En particulier, une question intéressante est si l'algèbre sous-jacente à l'algèbre duale de Koszul $\mathcal{E}xt^\bullet_A(k,k)$ d'une algèbre multi-Koszul A est aussi multi-Koszul. La réponse à cette question est en effet oui si A est homogène, comme on peut démontrer à partir des résultats bien établis dans [GMMVZ04]. Il serait intéressant de connaître la réponse dans le cas général à cause de deux raisons fondamentales. D'abord, cela permettrait de mieux comprendre la dualité de (multi-)Koszul. D'autre part, comme le dual de Koszul d'une algèbre est en principe une A_∞-algèbre, la réponse mentionnée pourrait apporter un éclairage sur une question posée par Yu. Manin dans [Man88] et pour laquelle il a eu plusieurs essais de réponse (voir [Bez94, PP05, HW08]) : comment est-ce que l'on peut généraliser la notion d'algèbre de Koszul aux algèbres différentielles graduées ?

Par ailleurs, comme indiqué par E. Marcos, il serait utile d'avoir une notion de "module de Koszul" sur les algèbres multi-Koszul, qui étend la notion de module de Koszul des algèbres de Koszul généralisées (voir [GMMVZ04]). Je travaille en ce moment sur le sujet et en fait j'ai déjà une définition qui généralise celle des modules de Koszul sur des algèbres N-Koszul que j'ai appelée *module multi-Koszul* ([Her17e]), basée sur quelques discussions avec Marcos. Il restent encore plusieurs questions ouvertes sur la catégorie des modules multi-Koszul. Par exemple, il serait intéressant de comprendre si le dual de Koszul d'un module multi-Koszul l'est aussi (comme dans le cas d'algèbres homogènes) et de savoir si la catégorie de modules multi-Koszul sur une algèbre multi-Koszul est fermée par l'opération $\Omega^2(-)$ donnée par le double syzygie. On remarque que la réponse à cette question est affirmative dans le cas des algèbres homogènes.

3.5 Les déformations de PBW des algèbres de Koszul généralisées

3.5.1. Dans cette section on va présenter les principaux résultats de l'article [HSSÁ14], en collaboration avec A. Solotar et M. Suárez-Álvarez. Le but du travail c'est de démontrer, à partir des outils homologiques, que toute déformation de PBW faible U d'une k-algèbre N-homogène A telle que $\mathrm{Tor}^A_3(k,k)$ est concentré en degré $N+1$ satisfait la propriété de PBW. Cet énoncé, appelé de façon générale le *principe de déformation de Koszul*, à été démontré par A. Braverman et D. Gaitsgory pour le cas $N = 2$ dans [BG96] et par R. Berger et V. Ginzburg pour le cas général dans [BG06]. Par contre, la preuve qu'ils ont donnée n'est pas basée sur des outils de l'algèbre homologique mais sur des propriétés des treillis de sous-espaces vectoriels associés à une algèbre homogène. Le but de l'article [HSSÁ14] c'est de démontrer le principe de déformation de Koszul à partir d'établir le lien entre les déformation de PBW (faibles ou non), considérées par R. Berger et V. Ginzburg, et les déformations au sens de Gerstenhaber.

3.5.2. Soit k un anneau semi-simple qui inclut un corps F de caractéristique zéro tel que $k^e = k \otimes_F k^{op}$ est semi-simple et soit $A = T(V)/\langle R\rangle$ une k-algèbre N-homogène (*i.e.* $R \subseteq V^{\otimes N}$). Comme d'habitude, tous les produits tensoriels sans aucune décoration seront sur k, *i.e.* $\otimes = \otimes_k$. On remarque d'abord que l'algèbre tensorielle $T(V) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$ est munie d'une filtration croissante $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $F^n = \oplus_{i=0}^{N} V^{\otimes i}$. On veut considérer les k-algèbres filtrées $U = T(V)/\langle P\rangle$ avec $P \subseteq F^N$ telles que

1. $R = \pi_N(P)$, où $\pi_N : T(V) \to V^{\otimes N}$ est la projection canonique,
2. U est munie de la filtration induite par celle de l'algèbre tensorielle $T(V)$,
3. le morphisme surjectif $p : A \to \mathrm{gr}(U)$ d'algèbres graduées induit par la projection $T(V) \to U$ est un isomorphisme.

On dit dans ce cas que U est une *déformation de PBW* de A, ou que U *satisfait la propriété de PBW.*

3.5.3. La condition que p soit injectif est équivalente à une suite infinie d'égalités sur certains k-bimodules qui s'écrivent en termes de V et R. Plus précisément, si l'on définit $L_n = \sum_{i+j\leq n-N} V^{\otimes i} P V^{\otimes j} \subseteq T(V)$, pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre filtrée U satisfait la propriété de PBW si et seulement si

$$L_n \cap F^{n-1} = L_{n-1}, \tag{3.5.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir [BG06], Prop. 3.3). En fait, il suffit seulement de vérifier l'identité précédente pour $n \geq N$. L'égalité (3.5.1) pour $n = N$, *i.e.* $L_N \cap F^{N-1} = L_{N-1}$, peut s'exprimer de façon équivalente par

$$P \cap F^{N-1} = 0, \tag{3.5.2}$$

tandis que (3.5.1) pour $n = N+1$, c'est à dire $L_{N+1} \cap F^N = L_N$, est équivalent à

$$(V \otimes P + P \otimes V) \cap F^N \subseteq P. \tag{3.5.3}$$

L'algèbre U est dite une *déformation de PBW faible* de A si seulement les identités (3.5.2) et (3.5.3) sont vérifiées.

3.5.4. Si l'on suppose que (3.5.2) est satisfaite, alors l'application $\pi_N : F^N \to V^{\otimes N}$ établit une bijection entre P et $R = \pi_N(P)$. Donc, il existe une application k^e-linéaire $\varphi : R \to F^{N-1}$ telle que $\mathrm{id}-\varphi$ est l'inverse de $\pi_N|_P$, *i.e.* $P = \{r - \varphi(r) : r \in R\}$. On écrira $\varphi = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j$, où $\varphi_j : R \to V^{\otimes j}$ est la composition de φ et la projection canonique $F^{N-1} \to V^{\otimes j}$. Dans ce cas, l'identité (3.5.3) est équivalente à $(\varphi \otimes 1_V - 1_V \otimes \varphi)(R_{N+1}) \subseteq P$ (voir [BG06], Prop. 3.5), ou sinon

$$(\varphi_{N-1} \otimes 1_V - 1_V \otimes \varphi_{N-1})(R_{N+1}) \subseteq R, \tag{3.5.4}$$

$$\varphi_0 \circ (\varphi_{N-1} \otimes 1_V - 1_V \otimes \varphi_{N-1})(R_{N+1}) = 0, \tag{3.5.5}$$

$$\Big(\varphi_j \circ (\varphi_{N-1} \otimes 1_V - 1_V \otimes \varphi_{N-1}) + (\varphi_{j-1} \otimes 1_V - 1_V \otimes \varphi_{j-1})\Big)(R_{N+1}) = 0, \tag{3.5.6}$$

pour tout $0 < j < N$ (voir [BG06], Prop. 3.6).

3.5.5. La notion de déformation graduée d'une algèbre graduée est essentiellement la même que celle que M. Gerstenhaber a considérée dans [Ger64], Sec. 1.2-1.5, mais où l'on pose que la variable formelle a degré 1, *i.e.* une *déformation graduée* d'une k-algèbre graduée A est une structure de $k[\hbar]$-algèbre sur $A[\hbar]$, où $\hbar$ a degré 1, telle que $A[\hbar]/\langle\hbar\rangle \simeq A$. On notera la déformation graduée typiquement par $A_\hbar$. Dans ce cas, on peut considérer l'algèbre $A_\hbar/\langle \hbar - 1\rangle$, qui est munie d'une filtration de la façon suivante. D'abord, il existe une application k^e-linéaire $A \to A_\hbar/\langle\hbar - 1\rangle$ donnée par la composition de l'inclusion canonique $A \to A_\hbar$ et la projection projection $A_\hbar \to A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$. On considère la filtration sur $A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$ induite par l'application précédente et la filtration de A induite par sa la graduation.

3.5.6. On rappelle que, étant donné une algèbre B pourvue d'une filtration croissante $\{F^\bullet B\}_{\bullet\in\mathbb{N}}$, l'*algèbre de Rees* associée est la $k[\hbar]$-algèbre graduée

$$R(B) = \Big\{ \sum_{i\in I} b_i \hbar^i : I \text{ est fini et } b_i \in F^i B\Big\},$$

considérée comme sous-algèbre de $B[\hbar]$ avec le produit trivial qui étend le produit de B et munie de la graduation avec B concentré en degré zéro et $\hbar$ en degré 1. Il est facile à vérifier que $R(B)/\langle\hbar-1\rangle \simeq B$ et $R(B)/\langle\hbar\rangle \simeq \operatorname{gr}(B)$ (*cf.* [CG97], Cor. 2.3.8). En outre, $R(-)$ définit un foncteur de la catégorie des k-algèbres filtrées dans la catégorie des $k[\hbar]$-algèbres graduées.

3.5.7. On verra maintenant que l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée $A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$ est isomorphe à A. On considère l'application k^e-linéaire $\rho' : A_\hbar \to A$ (il ne s'agit pas d'un morphisme d'algèbres) donnée par $\sum_{j=0}^m a_j\hbar^j \mapsto \sum_{j=0}^m a_j$. On voit bien que ρ' préserve les filtrations induites par les graduations et que $\rho'((\hbar-1)b) = 0$, pour tout $b \in A_\hbar$. En conséquence, ρ' induit un isomorphisme de k-bimodules filtrés $\rho^* : A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle \to A$, l'inverse étant l'application $A \to A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$ mentionnée dans 3.5.5. Ainsi, ρ^* induit un isomorphisme de k-bimodules gradués $\rho : \operatorname{gr}(A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle) \to \operatorname{gr}(A) \simeq A$.

3.5.8 Proposition ([HSSÁ14], Prop. 2.5)**.** *Soit A une algèbre graduée et soit $A_\hbar$ une déformation graduée de A. Alors, il existe un isomorphisme canonique de $k[\hbar]$-algèbres graduées $R(A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle) \to A_\hbar$ tel que le homomorphisme induit $A \simeq R(A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle)/\langle\hbar\rangle \to A_\hbar/\langle\hbar\rangle \simeq A$ est l'identité, où $A \simeq R(A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle)/\langle\hbar\rangle$ est donné par la composition de l'inverse de ρ et l'isomorphisme canonique d'algèbres graduées $\operatorname{gr}(A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle) \simeq R(A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle)/\langle\hbar\rangle$. En particulier, les foncteurs $A_\hbar \mapsto A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$ et $U \mapsto R(U)$ sont des quasi-inverses.*

3.5.9. On va préciser maintenant le lien entre les déformation faibles de PBW de A et ses déformations graduées. Pour cela, on remarque seulement que l'on a (partiellement) construit dans [HSSÁ14], Section 1, des morphismes de complexes $\bar\sigma_\bullet : K_\bullet(A) \to \bar C_\bullet(A)$ et $\bar\tau_\bullet : \bar C_\bullet(A) \to K_\bullet(A)$, et une homotopie $s_\bullet : \bar C_\bullet(A) \to \bar C_\bullet(A)$, tels que $\bar\tau_\bullet \circ \bar\sigma_\bullet = \mathrm{id}_{K_\bullet(A)}$ pour $\bullet = 0,\dots,3$ et $\mathrm{id}_{K_\bullet(A)} - \bar\sigma_\bullet \circ \bar\tau_\bullet = \bar b_{\bullet+1} \circ s_\bullet + s_{\bullet-1} \circ \bar b_\bullet$, où $\bar C_\bullet(A)$ est la résolution réduite de Hochschild de A et $K_\bullet(A)$ est la résolution de bimodules de Koszul de A. Le résultat suivant nous dit comment construire une déformation de PBW faible à partir d'une déformation graduée.

3.5.10 Proposition ([HSSÁ14], Prop. 2.11)**.** *Soit $\times$ le produit d'une déformation graduée $A_\hbar$ de A donné par*

$$a \times b = a.b + \sum_{i\geq 1} \psi_i(a,b)\hbar^i,$$

où $\psi_i : (A/k)^{\otimes 2} \to A$ (resp., $\psi_i^\sim : \bar C_2(A) \to A$) sont des applications k^e-linéaires (resp., A^e-linéaires) qui satisfont une certaine condition de normalisation (voir [HSSÁ14], *2.3). On définit $\varphi_{N-j}^\sim = \psi_j^\sim \circ \bar\sigma_2$, pour $j = 1,\dots,N$. Alors, les morphismes induits $\varphi_{N-j} : R \to F^{N-1}$ satisfont* (3.5.4), (3.5.5) *et* (3.5.6), *et ils définissent par conséquent une déformation de PBW faible.*

3.5.11. Réciproquement, la proposition suivante nous dit comment construire une déformation graduée à partir d'une déformation de PBW faible.

3.5.12 Proposition ([HSSÁ14], Prop. 2.13)**.** *Soit $U = T(V)/\langle P\rangle$ une algèbre filtrée avec $P \subseteq F^N$ et soit $A = T(V)/\langle R\rangle$, avec $R = \pi_N(P) \subseteq V^{\otimes N}$. On suppose que $\operatorname{Tor}_3^A(k,k)$ est concentré en degré $N+1$ et que U est une déformation de PBW faible de A, i.e. que* (3.5.2) *est vérifié et que les applications k^e-linéaires $\varphi_j : R \to V^{\otimes j}$ (pour $j = 0,\dots,N-1$) qui décrivent P satisfont* (3.5.4), (3.5.5) *et* (3.5.6). *On pose $(\psi_j')^\sim = \varphi_{N-j} \circ \bar\tau_2$ pour $j = 1,\dots,N$ et zéro sinon. On définit $\psi_j^\sim : \bar C_2(A) \to A$ pour $j \in \mathbb{N}^*$ par récurrence. D'abord, on pose $\psi_1^\sim = (\psi_1')^\sim$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et l'on suppose que l'on a défini $\psi_1,\dots,\psi_j$. On pose $\eta_{j+1}^\sim = d(\psi_{j+1}')^\sim \circ s_2 + \mathrm{sq}(\psi_1,\dots,\psi_j)^\sim \circ s_2$ et $\psi_{j+1}^\sim = (\psi_{j+1}')^\sim - \eta_{j+1}^\sim$. Alors, $\psi_\bullet$ définissent une déformation graduée de A.*

3.5.13 Théorème ([HSSÁ14], Thm. 3.1)**.** *Soit A une algèbre N-homogène qui satisfait que $\operatorname{Tor}_3^A(k,k)$ est concentré en degré $N+1$ et soit $A_\hbar$ une déformation graduée de A dont le produit est donné par des applications $\{\psi_j : (A/k)^{\otimes 2} \to A\}_{j\in\mathbb{N}^*}$. D'après la Proposition 3.5.10, on construit des applications $\{\varphi_j : R \to V^{\otimes j}\}_{0\leq j<N}$ et l'on obtient donc une algèbre filtrée $U = T(V)/\langle P\rangle$, où $P = \{r - \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j(r) : r \in R\}$. Alors, il existe un isomorphisme de k-algèbres filtrées $U \to A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$.*

Réciproquement, soit $U = T(V)/\langle P\rangle$ une algèbre filtrée avec $P \subseteq F^N$ et soit $A = T(V)/\langle R\rangle$ l'algèbre N-homogène associée avec $R = \pi_N(P) \subseteq V^{\otimes N}$, qui satisfait que $\operatorname{Tor}_3^A(k,k)$ est concentré en degré $N+1$. On suppose que U est une déformation de PBW faible de A et l'on définit la déformation graduée $A_\hbar$ de A en employant la Proposition 3.5.12. Alors, il existe un isomorphisme de k-algèbres filtrées $U \to A_\hbar/\langle\hbar-1\rangle$.

En conséquence, dans le deux cas U est une déformation de PBW de A et le morphisme

$$A \xrightarrow{p} \mathrm{gr}(U) \to \mathrm{gr}(A_\hbar/\langle \hbar - 1\rangle) \xrightarrow{\rho} A$$

est l'identité.

3.5.14. Le théorème précédent implique que toute déformation de PBW faible d'une algèbre N-homogène A qui satisfait que $\mathrm{Tor}_3^A(k,k)$ est concentré en degré $N+1$ est en fait une déformation de PBW. Cela démontre le principe de déformation de Koszul énoncé dans 3.5.1. En plus, $A_\hbar/\langle \hbar - 1\rangle$ et U sont deux déformations de PBW de A équivalentes. Ainsi, la construction de la Proposition 3.5.10 donne une application

$$\Big\{\text{classes d'équiv des défo. gr. de } A\Big\} \longrightarrow \Big\{\text{classes d'équiv. des défo. de PBW de } A\Big\}$$

et elle coïncide avec $A_\hbar \mapsto A_\hbar/\langle \hbar - 1\rangle$. On va prouver en plus que cette application est en fait une bijection.

3.5.15 Théorème ([HSSÁ14], Thm. 3.3)**.** *Soit A une algèbre N-homogène qui satisfait que* $\mathrm{Tor}_3^A(k,k)$ *est concentré en degré $N+1$ et soit $A_\hbar$ une déformation graduée de A dont le produit est donné par des applications $\{\psi_j : (A/k)^{\otimes 2} \to A\}_{j\in\mathbb{N}^*}$. D'après la Proposition 3.5.10, on construit des applications $\{\varphi_j : R \to V^{\otimes j}\}_{0\le j<N}$ et l'on obtient donc une algèbre filtrée $U = T(V)/\langle P\rangle$, où $P = \{r - \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j(r) : r \in R\}$. Alors, il existe un isomorphisme de $k[\hbar]$-algèbres graduées $R(U) \to A_\hbar$ tel que le morphisme induit $A \simeq R(U)/\langle\hbar\rangle \to A_\hbar/\langle\hbar\rangle \simeq A$ est l'identité, où l'application $A \simeq R(U)/\langle\hbar\rangle$ est celle décrite dans la Proposition 3.5.8.*

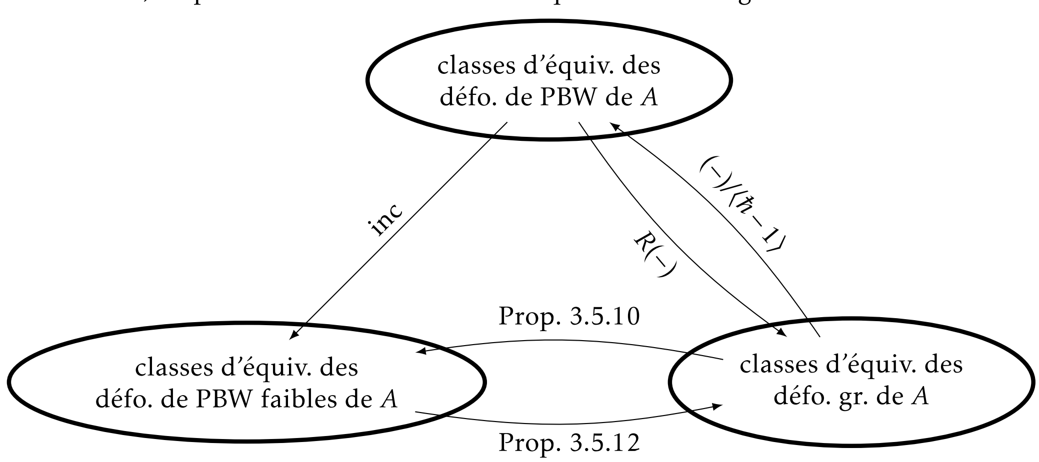
Réciproquement, soit $U = T(V)/\langle P\rangle$ une algèbre filtrée avec $P \subseteq F^N$ et soit $A = T(V)/\langle R\rangle$ l'algèbre N-homogène associée avec $R = \pi_N(P) \subseteq V^{\otimes N}$, qui satisfait que $\mathrm{Tor}_3^A(k,k)$ *est concentré en degré $N+1$. On suppose que U est une déformation de PBW faible de A et l'on définit la déformation graduée $A_\hbar$ de A en employant la Proposition 3.5.12. Alors, on trouve de nouveau qu'il existe un isomorphisme de $k[\hbar]$-algèbres graduées $R(U) \to A_\hbar$ tel que le morphisme induit $A \simeq R(U)/\langle\hbar\rangle \to A_\hbar/\langle\hbar\rangle \simeq A$ est l'identité, où l'application $A \simeq R(U)/\langle\hbar\rangle$ est celle décrite dans la Proposition 3.5.8.*

3.5.16. Le théorème précédent nous dit tout simplement que les déformations graduées de A données par $R(U)$ et $A_\hbar$ son équivalentes, et par conséquent la construction de la Proposition 3.5.12 induit une application

$$\Big\{\text{classes d'équiv. des défo. de PBW de } A\Big\} \longrightarrow \Big\{\text{classes d'équiv des défo. gr. de } A\Big\}$$

et elle coïncide avec $U \mapsto R(U)$.

3.5.17. En bref, on peut résumer l'information acquise avec le diagramme suivant



Les deux premiers paragraphes des Théorèmes 3.5.13 et 3.5.15 dissent précisément que ces applications sont bien définies et que le diagramme est commutatif. Le principe de déformation de Koszul (*i.e.*, le dernier paragraphe du Théorème 3.5.13) est alors une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme et le fait que les foncteurs $A_\hbar \mapsto A_\hbar/\langle \hbar - 1\rangle$ et $U \mapsto R(U)$ sont des quasi-inverses (voir Proposition 3.5.8).

3.6 Perspective de recherche par rapport aux déformations de PBW des algèbres graduées

Le point de vue présenté dans la Section 3.5 pour démontrer le principe de déformation de Koszul à partir d'exprimer le lien entre les déformations de PBW faibles d'une algèbre homogène A qui satisfait une condition supplémentaire sur $\mathrm{Tor}_3^A(k,k)$ et ses déformations graduées (au sens de Gerstenhaber) peut s'appliquer plus en général aux algèbres graduées positivement et connexes. Le candidat de condition homologique a imposer suit précisément de la définition d'algèbre multi-Koszul, *i.e.* $\mathrm{Tor}_3^A(k,k) \simeq V \otimes R \cap R \otimes V$. Dans ce cas il faudrait étendre les constructions dans les Propositions 3.5.10 et 3.5.12 aux algèbres graduées positivement et connexes pour construire des déformations de PBW faibles à partir des déformations graduées et vice versa. L'application la plus intéressante que j'envisage pour l'énoncé du principe de déformation de Koszul dans ce cas serait d'étudier les déformations de PBW des algèbres de super Yang-Mills décrites dans la Section 2.1. Cela étendrait les résultats dans [BDV06] pour les algèbres de Yang-Mills. On veut remarquer que la version super symétrique des algèbres de Yang-Mills considérée dans ce dernier article (et qui a été définie dans [CDV07]) n'est pas équivalente à celle que l'on a présentée dans la Section 2.1.

Chapitre 4

L'algèbre homologique et les A-infini-algèbres

4.1 Les suites spectrales et la théorie des déformations des A_∞-algèbres

4.1.1. La notion de suite spectrale est due à J. Leray dans son article [Ler46]. Elle a été présentée de façon plus algébrique par J.-L. Koszul dans [Kos47a] (voir aussi [Kos47b]). D'ailleurs, W. S. Massey a introduit la définition de couples exactes (voir [Mas52] et [Mas53]), comme une façon très systématique pour produire des suites spectrales. L'un des exemples le plus important de couple exacte de Massey est donné à partir d'un complexe muni d'une filtration. De cette façon, à partir de tout complexe filtré on a une couple exacte, ce qui donne enfin une suite spectrale, que l'on appellera *canonique* (voir par exemple [McC01], Part I). D'après [McC99], la notion de suite spectrale considérée dans le travail de Leray est ce que l'on appelle suite spectrale *multiplicative*, *i.e.* une suite spectrale pourvue d'un produit tel que chaque page devienne une algèbre différentielle graduée. On rappelle que dans ce cas la structure d'algèbre graduée sur chaque page d'une suite spectrale multiplicative est donnée à partir de la cohomologie de la page précédente. L'exemple standard pour produire une telle suite spectrale est à partir d'une algèbre différentielle graduée (ou d'une A_∞-algèbre) munie d'une filtration. En outre, Massey a étudié dans [Mas54] la structure algébrique nécessaire sur une couple exacte de sorte que la suite spectrale associée ait une structure multiplicative. On veut remarquer que dans la définition standard de suite spectrale (*e.g.*, [Wei94], Ch. 5) chaque page est pourvue en plus d'une bigraduation et la différentielle satisfait une condition de compatibilité avec la bigraduation qui dépend du niveau de la page. Néanmoins, pour simplifier cette explication, on omettra la bigraduation, même si l'on fera quelques remarques par rapport au rôle qu'elle joue.

4.1.2. Par ailleurs, S. Lapin a construit dans [Lap02] une suite spectrale multiplicative à partir d'une déformation formelle d'une algèbre différentielle graduée (ou d'une A_∞-algèbre). Il faut aussi imposer une condition sur la déformation formelle pour que la suite spectrale associée ait une bigraduation et que les différentielles soient compatibles avec la bigraduation. On dira dans ce cas que la déformation formelle est *bigraduée*. Comme il est indiqué dans [Lap08], on peut construire cette suite spectrale à partir de la déformation formelle bigraduée associée à toute algèbre différentielle graduée (ou A_∞-algèbre) munie d'une filtration. On veut remarquer que Lapin n'a jamais considéré cette bigraduation qui est typique en algèbre homologique. Par contre, ses motivations sont plutôt liées à la topologie algébrique, où l'on n'utilise pas ce degré supplémentaire. En tout cas les objets qu'il a étudié et ceux considérés dans ce mémoire sont essentiellement les mêmes (à ces degrés près).

4.1.3. Le résultat suivant a été essentiellement démontré par Lapin dans [Lap02], Thm. 3.1 et Cor. 3.1, à partir de la théorie de la perturbation homologique, même s'il a été énoncé d'une façon différente. Je l'ai démontré en employant la méthode de l'obstruction de Kadeishvili.

4.1.4 Théorème ([Her17b], Thm. 3.7)**.** *Soient k un corps, A une A_∞-algèbre munie d'une filtration compatible et $A_\hbar$ une déformation formelle bigraduée de A. On considère $H^\bullet(A)$ pourvu de la structure d'A_∞-algèbre et du quasi-isomorphisme $f_\bullet : H^\bullet(A) \to A$ d'A_∞-algèbres donnés par le théorème de Kadeishvili. Alors, il existe une déformation formelle bigraduée $H^\bullet(A)_\hbar$ de $H^\bullet(A)$ et un quasi-isomorphisme $\tilde{f}_\bullet : H^\bullet(A)_\hbar \to A_\hbar$ de déformations* *formelles bigraduées d'A_∞-algèbres, i.e. tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} H^\bullet(A)_\hbar \arrow[r, "\tilde{f}_\bullet"] \arrow[d] & A_\hbar \arrow[d] \\ H^\bullet(A) \arrow[r, "f_\bullet"] & A \end{tikzcd}$$

est commutatif, où les deux flèches verticales sont les projections canoniques. En outre, toutes ces structures de déformations formelles bigraduées de $H^\bullet(A)$ sont quasi-isomorphes.

4.1.5. On va maintenant présenter la construction de la suite spectrale de Lapin. Il faudrait en principe imposer des bigraduations compatibles sur les A_∞-algèbre, mais on les omettra pour simplifier. Soit $(A, m_\bullet)$ une A_∞-algèbre minimale (*i.e.* $m_1 = 0$) et soit $(A_\hbar, \tilde{m}_\bullet)$ une déformation formelle bigraduée A, où l'on dénote $\tilde{m}_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_n^i \hbar^i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'*algèbre différentielle graduée projetée* $\mathrm{P}(A_\hbar)$ *de* $A_\hbar$ comme l'algèbre différentielle graduée sur k dont l'espace sous-jacent est A, munie de la multiplication m_2 et la différentielle $\tilde{m}_1^1$. Il est facile à vérifier que $\mathrm{P}(A_\hbar)$ est une algèbre différentielle graduée. On regardera P comme un foncteur de la catégorie des déformations formelles bigraduées vers la catégorie des algèbres différentielles graduées. Soient $A_\hbar$ et $B_\hbar$ deux déformations formelles bigraduées des A_∞-algèbres minimales A et B, et soit $(f_\bullet, \tilde{f}_\bullet)_{\bullet\in\mathbb{N}^*}$ un morphisme de déformations formelles bigraduées de $A_\hbar$ vers $B_\hbar$. Son image par P est un morphisme d'algèbres différentielles graduées de $\mathrm{P}(A_\hbar)$ dans $\mathrm{P}(B_\hbar)$ donné par f_1. En particulier, ce foncteur envoie des quasi-isomorphismes vers des isomorphismes.

4.1.6. Par ailleurs, on définit la *déformation translatée* $\mathrm{T}(A_\hbar)$ *de* $A_\hbar$ comme l'A_∞-algèbre sur $k[\hbar]$ dont la structure de $k[\hbar]$-module sous-jacent coïncide avec celle de $A_\hbar$ mais les multiplications sont données par $\tilde{m}_i^{\mathrm{T}} = \tilde{m}_i \hbar^{i-2}$. Noter que $\tilde{m}_1^{\mathrm{T}}$ est bien défini puisque $m_1^0 = 0$. En outre, en raison de l'homogénéité de cette définition, l'identité de Stasheff $\mathrm{SI}(n)$ pour $\mathrm{T}(A_\hbar)$ est équivalente à l'identité de Stasheff $\mathrm{SI}(n)$ pour $A_\hbar$ multipliée par $\hbar^{(n-3)}$. Si $A_\hbar$ est unifère, $\mathrm{T}(A_\hbar)$ l'est aussi. En outre, $\mathrm{T}(A_\hbar)$ est une déformation formelle bigraduée de $\mathrm{P}(A_\hbar)$. On peut considérer T comme un foncteur de la catégorie des déformations formelles bigraduées des A_∞-algèbres minimales vers la catégorie des déformations formelles bigraduées des A_∞-algèbres. En effet, soient $A_\hbar$ et $B_\hbar$ deux deux déformations formelles bigraduées des A_∞-algèbres minimales A et B, et soit $(f_\bullet, \tilde{f}_\bullet)_{\bullet\in\mathbb{N}^*}$ un morphisme de déformations formelles bigraduées de $A_\hbar$ vers $B_\hbar$. L'image de $(f_\bullet, \tilde{f}_\bullet)_{\bullet\in\mathbb{N}^*}$ par T est la paire $(f_1, \mathrm{T}(\tilde{f}))$, où $\mathrm{T}(\tilde{f})$ est le morphisme de $\mathrm{T}(A)$ dans $\mathrm{T}(B)$ dont la i-ième composante $\mathrm{T}(\tilde{f})_i$ est donnée par $\tilde{f}_i \hbar^{i-1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. L'identité sur les morphismes des A_∞-algèbres $\mathrm{MI}(n)$ pour $\mathrm{T}(\tilde{f})_\bullet$ est équivalente à l'identité sur les morphismes des A_∞-algèbres $\mathrm{MI}(n)$ de $\tilde{f}_\bullet$ multipliée par $\hbar^{(n-2)}$. De nouveau, l'unité est compatible avec ces constructions. Noter en plus que T préserve des quasi-isomorphismes.

4.1.7. On va utiliser le Théorème 4.1.4 pour produire une collection de déformations formelles bigraduées. Soit $({}^0A, {}^0m_\bullet)$ une A_∞-algèbre et soit $({}^0A_\hbar, {}^0\tilde{m}_\bullet)$ une déformation formelle bigraduée de ${}^0A$. Par le Théorème 4.1.4, il existe une déformation formelle bigraduée $(H^\bullet({}^0A)_\hbar, {}^0\tilde{\bar{m}}_\bullet)$ de l'A_∞-algèbre $(H^\bullet({}^0A), {}^0\bar{m}_\bullet)$, qui est quasi-isomorphe avec la déformation formelle bigraduée donnée et qui satisfait par construction ${}^0\tilde{\bar{m}}_1^0 = 0$. Alors, on peut considérer la déformation formelle bigraduée $\mathrm{T}(H^\bullet({}^0A)_\hbar)$ de $\mathrm{P}(H^\bullet({}^0A)_\hbar)$. On va les écrire ${}^1A_\hbar$ et ${}^1A$, respectivement. Si l'on répète ce processus, on obtient alors une collection d'algèbres différentielles graduées $\{{}^rA\}_{r\in\mathbb{N}}$ avec ses déformations formelles bigraduées ${}^rA_\hbar$ correspondantes, pour tout $r \in \mathbb{N}$, telle que $\mathrm{T}(H^\bullet({}^rA)_\hbar) = {}^{(r+1)}A_\hbar$ et $\mathrm{P}(H^\bullet({}^rA)_\hbar) = {}^{(r+1)}A$, où $H^\bullet({}^rA)_\hbar$ est la déformation formelle bigraduée de $H^\bullet({}^rA)$ donnée par le Théorème 4.1.4. Il est direct que la collection d'algèbres différentielles graduée $\{{}^rA\}_{r\in\mathbb{N}}$ est une suite spectrale multiplicative.

4.1.8 Définition (Lapin). *Soit* $({}^0A, {}^0m_\bullet)$ *une A_∞-algèbre sur un corps k et soit* $({}^0A_\hbar, {}^0\tilde{m}_\bullet)$ *une déformation formelle bigraduée de* ${}^0A$. *La suite spectrale* $\{{}^rA\}_{r\in\mathbb{N}}$ *construite dans 4.1.7 est appelée la* L-suite spectrale multiplicative associée à la déformation formelle bigraduée ${}^0A_\hbar$ de ${}^0A$.

Lapin n'a jamais fait de façon explicite cette définition mais elle est sous-entendue dans son travail.

4.1.9. La construction de la L-suite spectrale multiplicative associée à une déformation formelle bigraduée est très compliquée, puisque elle fait intervenir le Théorème 4.1.4, qui n'est pas explicite. En effet, la construction de la déformation formelle bigraduée $H^\bullet(A)_\hbar$ de $H^\bullet(A)$ dépend de beaucoup de choix et elle est loin d'être simplement calculée en général. On va donc montrer une façon équivalente de traiter la construction de Lapin.

4.1.10. Soit $(A, m_\bullet)$ une A_∞-algèbre sur un corps k munie d'une déformation formelle bigraduée $(A_\hbar, \tilde{m}_\bullet)$. On définit l'$A_\infty$-algèbre $\mathrm{D}(A_\hbar)$ sur $k[\hbar]$ dont l'espace sous-jacent est

$$\Big\{a \in A_\hbar : \text{il existe } b \in A_\hbar \text{ tel que } \tilde{m}_1(a) = \hbar.b\Big\},$$

muni des applications $\tilde{m}_i^{\mathrm{D}} = \hbar^{i-2}\tilde{m}_i|_{\mathrm{D}(A_\hbar)}$, pour $i \in \mathbb{N}^*$. On remarque ces multiplications sont bien définies, *i.e.* l'image de $\tilde{m}_i^{\mathrm{D}}$ est incluse dans $\mathrm{D}(A_\hbar)$.

4.1.11 Lemme ([Her17b], Lemma 5.3)**.** *L'opérateur* D *défini dans 4.1.10 induit un foncteur de la catégorie des déformations formelles bigraduées d'A_∞-algèbres dans elle même. En effet, soient $A_\hbar$ et $B_\hbar$ deux déformations formelles bigraduées des A_∞-algèbres A et B, respectivement, et soit $(f_\bullet, \tilde{f}_\bullet)_{\bullet\in\mathbb{N}^*}$ un morphisme de déformations formelles bigraduées de $A_\hbar$ vers $B_\hbar$. L'image de ce morphisme par* D *est la paire $(f_1, \mathrm{D}(\tilde{f}))$, dont le morphisme $\mathrm{D}(\tilde{f})$ de $\mathrm{T}(A)$ dans $\mathrm{T}(B)$ a la composante i-ième $\mathrm{D}(\tilde{f})_i$ donnée par $\hbar^{i-1}\tilde{f}_i|_{\mathrm{D}(A_\hbar)}$, pour $i \in \mathbb{N}^*$.*

4.1.12 Lemme ([Her17b], Lemma 5.4)**.** *Soit $(A, m_\bullet)$ une A_∞-algèbre sur un corps k munie d'une déformation formelle bigraduée $(A_\hbar, \tilde{m}_\bullet)$. Si A est minimale, i.e. $m_1 = 0$, alors $\mathrm{D}(A_\hbar) = \mathrm{T}(A_\hbar)$. En outre, le foncteur* D *préserve des quasi-isomorphismes.*

Le résultat précédent implique en particulier que le foncteur D coïncide avec le foncteur T dans le domaine de définition du dernier.

4.1.13 Proposition ([Her17b], Prop. 5.5)**.** *Soit $(A, m_\bullet)$ une A_∞-algèbre sur un corps k munie d'une déformation formelle bigraduée $(A_\hbar, \tilde{m}_\bullet)$. Alors, les déformations formelles bigraduées $\mathrm{D}(A_\hbar)$ et $\mathrm{T}(H^\bullet(A)_\hbar)$ sont quasi-isomorphes.*

Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme précédent.

4.1.14. En particulier, étant donné une A_∞-algèbre $(A, m_\bullet)$ sur k munie d'une déformation formelle bigraduée $(A_\hbar, \tilde{m}_\bullet)$, on définit une suite de déformations formelles bigraduées $({}^rA'_\hbar, {}^r\tilde{m}'_\bullet)$, pour $r \in \mathbb{N}$, où le r-ième terme de la suite est donné par l'application du foncteur D^r à $A_\hbar$ et D^0 est le foncteur identité. On note que cette suite de déformations formelles bigraduées est définie de façon explicite, une différence majeure avec la suite de déformations formelles bigraduées considérée dans 4.1.7.

La propriété la plus importante du foncteur D est la suivante.

4.1.15 Fait ([Her17b], Fact 5.6)**.** *Soit B une A_∞-algèbre sur un corps k munie d'une filtration (qui satisfait quelques hypothèses de complétude) et soit $A_\hbar = \mathrm{Re}_{F^\bullet B}(B)$ l'A_∞-algèbre de Rees associée à B. Étant donné $s \in \mathbb{N}$, le complexe sou-jacent de $D^s(A_\hbar).\hbar^s$ coïncide avec le $k[\hbar]$-module différentiel gradué*

$$^{s}\mathcal{D} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\Big(\big(F^pB \cap d_B^{-1}(F^{p+s}B)\big) \otimes k.\hbar^{-p+s}\Big) \subseteq B \otimes k[\hbar^{\pm 1}], \tag{4.1.1}$$

associé au complexe filtré (B, d_B), où d_B est l'opération m_1 de l'A_∞-algèbre B, et le complexe sous-jacent au quotient $D^s(A_\hbar)/\langle\hbar\rangle$ coïncide avec le gradué associé

$$^{s}\mathcal{E} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\left(\frac{F^pB \cap d_B^{-1}(F^{p+s}B)}{F^{p+1}B \cap d_B^{-1}(F^{p+1+s}B)}\right) \tag{4.1.2}$$

au complexe filtré (B, d_B). Les identifications précédentes sont compatibles avec les produits donnés par m_2.

D'après le fait précédent, on peut introduire des structures d'A_∞-algèbres sur les complexes (4.1.1) et (4.1.2).

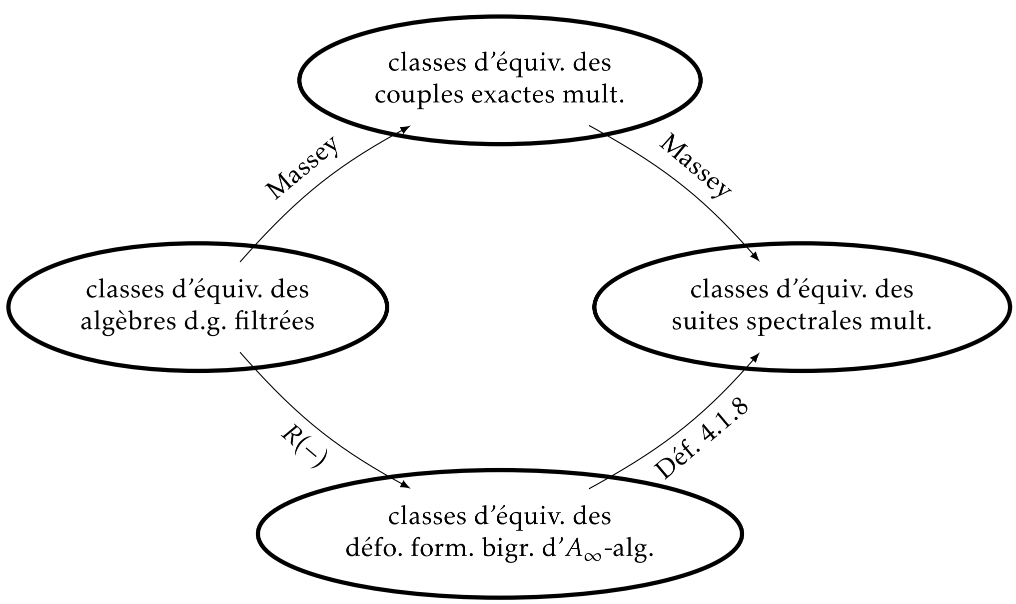
4.1.16 Théorème ([Her17b], Thm. 5.8)**.** *Soit $A_\hbar$ une déformation formelle bigraduée d'une A_∞-algèbre A sur un corps k. On considère la collection des A_∞-algèbres $\{{}^rA\}_{r\in\mathbb{N}}$, chacune d'elles munie d'une déformation formelle bigraduée ${}^rA_\hbar$, pour $r \in \mathbb{N}$, définie dans 4.1.7. Par ailleurs, on définit $({}^rA'_\hbar, {}^rA')$, pour $r \in \mathbb{N}$, où ${}^rA'_\hbar = \mathrm{D}^r(A_\hbar)$, D^0 dénote le foncteur identité et ${}^rA' = {}^rA'_\hbar/\langle\hbar\rangle$. Alors, ${}^rA'$ est une A_∞-algèbre et ${}^rA'_\hbar$ est une déformation formelle bigraduée de ${}^rA'$. En outre, les déformations formelles bigraduées $({}^rA_\hbar, {}^rA)$ et $({}^rA'_\hbar, {}^rA')$ sont quasi-isomorphes pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.*

Le théorème précédent montre précisément que la construction de Lapin est en fait équivalente à celle que l'on a introduite dans 4.1.10, ce qui était l'une de buts de l'article [Her17b]. L'autre des buts c'est le corollaire suivant, qui dit que la structure multiplicative de la L-suite spectrale multiplicative associée à une déformation formelle bigraduée définie à partir d'une filtration d'une A_∞-algèbre coïncide avec la suite spectrale multiplicative canonique.

4.1.17 Corollaire ([Her17b], Cor. 5.9)**.** *Soit B une A_∞-algèbre sur un corps k munie d'une filtration (qui satisfait quelques hypothèses de complétude) et soit $A_\hbar = \mathrm{Re}_{F^\bullet B}(B)$ l'A_∞-algèbre de Rees associée à B, ce qui donne une déformation formelle bigraduée de l'A_∞-algèbre $A = \mathrm{Gr}_{F^\bullet B}(B)$. Alors, la L-suite spectrale multiplicative associée à la déformation $A_\hbar$ de A (voir Définition 4.1.8) est isomorphe à la suite spectrale multiplicative canonique associée à B.*

Ce corollaire est une conséquence directe du Théorème 4.1.16 et du Fait 4.1.15, ainsi que des quelques résultats basiques de la théorie des couples exactes (voir [Her17b], Prop. 2.1). Une autre conséquence de ce corollaire c'est qu'il nous permet de considérer une structure associative fortement homotopique sur toute suite spectrale multiplicative canonique, donnée par la suite des déformations formelles bigraduées dans 4.1.7, ou dans 4.1.10, de façon compatible avec le produit de départ.

4.1.18. On peux résumer l'information établie jusqu'au présent par le diagramme suivant :



où les deux applications supérieures ont été définies par Massey, comme on a rappelé dans 4.1.1, l'application $R(-)$ est donnée par la construction de Rees usuelle (voir (4.1.1)) et la flèche restante est celle introduite dans la Définition 4.1.8. Le contenu du Corollaire 4.1.17 –et l'un des buts les plus importants de l'article [Her17a]– est précisément que le diagramme précédent est commutatif.

4.1.19. Dans [Her17a], Prop. 4.2, on a démontré que l'application $R(-)$ est en faite surjective. De façon analogue, [Lap01], Prop. 3.2, nous dit que l'image de la restriction de l'application introduite dans la Définition

4.1.8 au sous-ensemble formé par les déformations formelles bigraduées où toutes les multiplications m_i valent zéro si $i \geq 2$ est l'ensemble des toutes les suites spectrales (multiplicatives avec le produit trivial). Une conséquence immédiate de ces deux affirmations et la commutativité du diagramme précédent, c'est que toute suite spectrale sur un corps est obtenue à partir d'un complexe filtré.

4.2 Une structure fortement homotopique sur la cohomologie persistante

4.2.1. Dans cette section on va présenter de façon sommaire les résultats de l'article [Her17c]. Pour les expliquer, on rappelle d'abord que le but de la théorie de la (co)homologie persistante c'est, *grosso modo*, définir des notions de "distance" entre complexes filtrés (qui satisfont quelques hypothèse de finitude) sur un EPO P. On adresse le lecteur aux ouvrages [EH08] par H. Edelsbrunner et J. Harer, ou à l'exposé très complet [EH10] par les mêmes auteurs, ou sinon à l'article [ZC05] par G. Carlsson et A. Zomorodian. L'idée pour construire ces distances peut être expliquée de la façon suivante : d'abord on note que par la construction de Rees (4.1.1) on peut associer à tout complexe C filtré sur P un complexe $\mathcal{D}$ de modules sur la catégorie $\tilde{P}$ associée à P. Ensuite, le n-ième groupe de cohomologie $H^n(\mathcal{D})$ de ce complexe porte donc une structure de module sur $\tilde{P}$ et d'après un théorème de type Azumaya-Krull-Schmidt (qui est valable grâce aux hypothèses de finitude sur le complexe filtré) on peut décomposer $H^n(\mathcal{D})$ comme une somme directe unique (à permutations près) des modules indécomposables k_I sur $\tilde{P}$, qui sont paramétrés par des intervalles I dans P. Finalement, on associe à chaque complexe filtré C ci-dessus une application qui envoie (n,I) dans la multiplicité de k_I dans la décomposition de $H^n(\mathcal{D})$, que l'on appelle code-barre de degré n associé au complexe filtré. La méthode standard pour construire la distance entre deux complexes C et C' filtrés sur P, c'est de donner une pseudométrique fixe sur l'ensemble des code-barres de degré quelconque et calculer cette pseudométrique entre les code-barres associées pour chaque degré donné n. Une pseudométrique typique c'est la pseudométrique du goulot d'étranglement. L'idée de l'article [Her17c] c'est la suivante. On suppose que C est en fait une algèbre différentielle graduée filtrée et, donc, par le théorème de Kadeishvili la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée de Rees porte une structure d'A_∞-algèbre sur k. On montre qu'il existe une extension de la pseudométrique considérée ci-dessus qui tient compte aussi des structures d'A_∞-algèbres.

4.2.2. Soit $(P,\geqslant)$ un EPO (ensemble partiellement ordonné) muni d'un produit associatif et commutatif $\star : P \times P \to P$ qui satisfait la propriété de *monotonie*, *i.e.* étant donnés $p_1 \geqslant p_1'$ et $p_2 \geqslant p_2'$, où $p_1, p_2, p_1', p_2' \in P$, alors $p_1 \star p_2 \geqslant p_1' \star p_2'$. On va considérer la catégorie associée $\tilde{P}$ à l'EPO P dont les objets sont les éléments de P et pour toute paire d'éléments $p', p \in P$ tels que $p \geqslant p'$, on a un unique morphisme $\omega_p^{p'} : p \to p'$ dans $\tilde{P}$. Il n'y a pas d'autres morphismes, et les compositions et les identités sont déterminées de façon univoque. Elle est appelée la *catégorie associée à l'EPO P*.

4.2.3. Soit (C, d_C) un complexe P-filtré, *i.e.* $C = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n$ est muni d'une filtration décroissante $\{F^pC\}_{p\in P}$ formée par des sous-complexes, c'est à dire $F^pC = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F^pC^n$ est donné par $F^pC^n = F^pC \cap C^n$, $d_C(F^pC) \subseteq F^pC$ et $F^pC \supseteq F^{p'}C$, pour tous $p, p' \in P$ tels que $p \leqslant p'$. On suppose en plus que (C, d_C) est muni d'un produit associatif de sorte que C devient une algèbre différentielle graduée et la filtration est *multiplicative*, *i.e.* $F^pC \cdot F^qC \subseteq F^{p\star q}C$, pour tous $p, q \in P$. Si P a l'unité 0 pour $\star$ et (C, d_C) a l'unité 1_C, on suppose en plus que $1_C \in F^0C$. Dans ce cas, le complexe $\mathcal{D} = {}^0\mathcal{D}$ défini dans (4.1.1) donne une algèbre différentielle graduée, avec le produit (et l'unité) induit(s).

4.2.4. On rappelle qu'un *module* sur $\tilde{P}$ est un foncteur covariant de $\tilde{P}$ dans la catégorie des k-espaces vectoriels et, de façon équivalente, un *module gradué* (resp., *complexe de modules*) sur $\tilde{P}$ est un foncteur covariant de $\tilde{P}$ dans la catégorie (abélienne) des k-espaces vectoriels gradués (resp., complexes de k-espaces vectoriels). On peut regarder $\mathcal{D}$ comme un complexe $\tilde{\mathcal{D}}$ de modules sur $\tilde{P}$. En effet, pour tout $p \in P$, on pose $\tilde{\mathcal{D}}(p) = F^pC$ et pour $\omega_p^{p'}$ on définit $\tilde{\mathcal{D}}(\omega_p^{p'})$ comme l'inclusion canonique $\mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^{p'}$ de complexes. Si l'on prend la cohomologie ponctuellement, *i.e.* si l'on considère la composition $H^\bullet \circ \tilde{\mathcal{D}}$, on trouve un module gradué sur $\tilde{P}$, qui s'appelle la *cohomologie persistante (complète)* du complexe filtré C et que l'on dénotera par $H^\bullet(\mathcal{D})$. De façon analogue, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième groupe de cohomologie de $\mathcal{D}$ est un module sur

$\tilde{P}$, que l'on dénote par $H^n(\mathcal{D})$ et qui est appelé le *n-ième groupe de cohomologie persistante* du complexe filtré C. Il est clair que

$$H^\bullet(\mathcal{D}) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(\mathcal{D}).$$

Étant donné $p', p \in P$ tels que $p \geqslant p'$, le *n-ième groupe de cohomologie persistante $PH^n_{p,p'}(C)$ du complexe filtré C de p dans p'* est l'image du morphisme $\omega_p^{p'}$ par le foncteur $H^n(\mathcal{D})$, c'est à dire, l'image de l'application

$$H^n(F^pC) \to H^n(F^{p'}C)$$

induite par l'inclusion canonique $F^pC \to F^{p'}C$.

4.2.5. Une partie non vide $I \subseteq P$ est appelée un *intervalle* si, étant donné $p', p'' \in I$ et $p \in P$ tels que $p' \leqslant p \leqslant p''$, alors $p \in I$. On dénote par $\mathcal{I}_P$ l'ensemble des intervalles de P. Un *code-barre* est une application $\mathcal{I}_P \to \mathbb{N}$. Un intervalle est dit *borné à gauche (resp., à droite)* s'ils existent $p \in P \setminus I$ et $p' \in I$ tels que $p \prec p'$ (resp., $p \succ p'$). Étant donné un intervalle $I \subseteq P$, il définit un module k_I sur $\tilde{P}$, appelé *module du type intervalle*, par $k_I(p) = k$ si $p \in I$ et $k_I(p) = 0$, sinon. En plus, on pose $k_I(\omega_p^{p'}) = \mathrm{id}_k$ si $p, p' \in I$ et $p \geqslant p'$, et $k_I(\omega_p^{p'}) = 0$, sinon. D'après un théorème de W. Crawley-Boevey, si M est un module sur $\tilde{P}$ tel que $M(p)$ est de dimension finie pour tout $p \in P$, alors M est une somme directe (unique à permutations près) des modules de type intervalle (voir [CB15], Thm. 1.1). On suppose d'abord que le complexe filtré C satisfait que les $H^n(F^pC)$ est de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $p \in P$. On dit qu'un intervalle $I \subseteq P$ est une *barre de degré n associée à C avec multiplicité non nulle* si le module de type intervalle k_I apparaît dans la décomposition unique du module $H^n(\mathcal{D})$ sur $\tilde{P}$. On va dénoter par $\mathcal{GI}_P$ l'ensemble d'applications qui envoient des paires (n, I) dans un nombre entier non négatif, où $n \in \mathbb{Z}$ et $I \subseteq P$ est un intervalle. Étant donné un intervalle $I \subseteq P$ et $n \in \mathbb{Z}$, on dénote par $\mathcal{CB}(C)$ l'application qui envoie (I, n) dans la multiplicité de k_I dans la décomposition du module $H^n(\mathcal{D})$ sur $\tilde{P}$ mentionnée avant, et on l'appelle le *code-barre associé au complexe filtré C*.

4.2.6. La situation d'intérêt pour le calcul de l'homologie persistante est donnée par $C = C^\bullet(\mathcal{X}, k)$, où X est un ensemble simplicial (ou topologique). Dans ce cas C est une algèbre différentielle graduée pour le produit cup et l'unité donnée par l'application $C_\bullet(\mathcal{X}, k) \to k$ dont la restriction à $C_n(\mathcal{X}, k)$ est zéro si $n \neq 0$ et envoie le 0-simplex vers 1 (voir [Hat02], Ch. 3, Sec. 2, ou [FHT01], Ch. 10, (d)). Par contre, étant donné une filtration quelconque de l'ensemble simplicial $\mathcal{X}$ indexée par (disons) les nombres entiers $\mathbb{Z}$ (comme d'habitude en topologie algébrique), la filtration induite sur $C^\bullet(\mathcal{X}, k)$ n'est pas en général multiplicative si l'on utilise le produit des nombres entiers (voir [Shi76]). C'est précisément ce phénomène qui a lieu avec les filtrations considérées dans l'homologie persistante. Dans ce cas, il faut considérer plutôt le produit dans $P = \mathbb{Z}$ donné par $p \star p' = \inf(p, p')$.

4.2.7. La méthode la plus standard pour définir une distance entre des complexes filtrés, c'est de définir des pseudométriques sur l'espace des code-barres de degré quelconque : étant donnés deux complexes filtrés C et C' on calcule la pseudométrique entre les code-barres associées. On suppose pour cela que P est muni d'une métrique d_P telle que la topologie d'ordre est induite par cette métrique et elle satisfait $d_P(p, p'') = d_P(p, p') + d_P(p', p'')$, pour tous $p, p', p'' \in P$ tels que $p \leqslant p' \leqslant p''$. Étant donné $I \in \mathcal{P}$, on définit sa longueur $\ell(I)$ comme le supremum de l'ensemble

$$\Big\{ d_P(p', p) : p', p \in I \text{ tel que } p' \leqslant p \Big\}.$$

Plus généralement, si $S \subseteq P$ est une partie non vide, on définit $\ell(S)$ comme le supremum de l'ensemble

$$\Big\{ \ell(I) : I \in \mathcal{I}_P \text{ et } I \subseteq S \Big\}.$$

En plus, on pose $\ell(\emptyset) = 0$. On définit maintenant la métrique $\tilde{d}$ sur l'ensemble $\mathcal{I}_P \sqcup \{*\}$ de la façon suivante. D'abord, étant donnés deux intervalles I et J dans P, on pose

$$\tilde{d}(I, J) = \max\Big(\ell\Big((I \cap J) \setminus I\Big), \ell\Big((I \cap J) \setminus J\Big)\Big), \qquad \tilde{d}(I, *) = \tilde{d}(*, I) = \ell(I)/2 \qquad \text{et} \qquad \tilde{d}(*, *) = 0.$$

Étant donnés deux code-barres $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de degré n, *i.e.* des applications qui envoient (n,I) dans un nombre entier non négatif, où $I \subseteq P$ est un intervalle, la *pseudométrique du goulot d'étranglement* entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ est définie par

$$d_{\mathcal{B}}(\mathcal{S},\mathcal{S}) = \inf_{\mathcal{P}\in \mathrm{PM}(\mathcal{S},\mathcal{S}')} \sup_{(\hat{s}_1,\hat{s}_2)\in|\mathcal{P}|} \tilde{d}(\hat{s}_1,\hat{s}_2), \tag{4.2.1}$$

où $\hat{s}_1$ et $\hat{s}_2$ dont des éléments de $\mathcal{I}_P \sqcup \{*\}$, et l'on rappelle que $\mathrm{PM}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ est l'ensemble des applications $\mathcal{P}$ de $|\mathcal{P}| = ((\mathcal{I}_P \sqcup \{*\}) \times (\mathcal{I}_P \sqcup \{*\})) \setminus \{(*,*)\}$ dans $\mathbb{N}$ qui satisfont que, pour tout $I \in \mathcal{I}_P$, on a

$$\sum_{\hat{s}'\in\mathcal{I}_P\sqcup\{*\}} \mathcal{P}(I,\hat{s}') = \mathcal{S}(I) \quad \text{et} \quad \sum_{\hat{s}\in\mathcal{I}_P\sqcup\{*\}} \mathcal{P}(\hat{s},I) = \mathcal{S}'(I).$$

Finalement, on définit la *pseudométrique totale du goulot d'étranglement* entre les complexes filtrés C et C' (ou entre ses complexes de Rees associés)

$$\partial_{\mathcal{B}}\Big(H^\bullet(\mathcal{D}),H^\bullet(\mathcal{D}')\Big) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} d_{\mathcal{B}}\Big(H^n(\mathcal{D}),H^n(\mathcal{D}')\Big). \tag{4.2.2}$$

4.2.8. En tout cas, on trouve que le complexe $\mathcal{D} = {}^0\mathcal{D}$ dans (4.1.1) est une k-algèbre différentielle graduée (munie d'un degré interne donné par l'indice qui provient de P), que l'on a appelée algèbre (différentielle graduée) de Rees. D'après le théorème de Kadeishvili, sa cohomologie porte une structure d'A_∞-algèbre (unifère) sur k, et cette structure est unique à isomorphisme d'A_∞-algèbres près. De façon équivalente, le premier terme $D = H^\bullet(\mathcal{D})$ du système des couples exactes associée à (C,d_C) est de façon naturelle une A_∞-algèbre (unifère) sur k. On suppose en plus qu'il existe un sous-EPO $P_s \subseteq P$ discret qui satisfait que pour tout $p \in P$ il existe $p' \in P_s$ tel que $F^pC = F^{p'}C$ et les intervalles dans l'ensemble des barres associées à C avec multiplicité non nulle sont de la forme $I = \{p \in P : p'' \succcurlyeq p\}$ avec $p'' \in P_s$, ou $\{p \in P : p'' \succcurlyeq p \succ p'\}$, avec $p'' \succ p'$ dans P_s. En remplaçant $\mathcal{D}$ par l'algèbre de Rees associée à la filtration indexée par P_s, on voit que cela implique que la nouvelle algèbre différentielle graduée de Rees $\mathcal{D}$ a une action naturelle de $k[\hbar]$ et en fait $\mathcal{D}$ est une algèbre différentielle graduée sur $k[\hbar]$.

4.2.9. On définit $\mathcal{A}_N^{\min}$ l'espace vectoriel formé par les A_∞-algèbres minimales (avec une P_s-graduation) $H = \oplus_{p\in P_s} \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^{p,n}$, où $P_s \subseteq P$ est une partie discrète et fermée de P munie du produit associatif et commutatif $\star$, et H est pourvu d'une structure de module sur $\tilde{P}_s$ pour l'application $p \mapsto \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^{p,n}$. On suppose que le produit de H est bilinéaire pour l'action de $k[\hbar]$. À partir de l'inclusion $P_s \subseteq P$ on peut donc considérer H de façon canonique comme un module sur $\tilde{P}$.

4.2.10 Proposition ([Her17c], Prop. 3.2)**.** *Soit $N \in \mathbb{N}^* \sqcup \{+\infty\}$ et soit $\partial_{\mathcal{B}}$ la pseudométrique du goulot d'étranglement définie sur l'ensemble de code-barres dans* (4.2.2)*. Il existe une pseudométrique $\partial_{\mathcal{B},N}$ sur l'espace $\mathcal{A}_N^{\min}$ qui coïncide avec la pseudométrique $\partial_{\mathcal{B}}$ si $N = 1$ et qui est plus fine en général. Elle est invariante par rapport aux quasi-isomorphismes des structures d'A_N-algèbres dans $\mathcal{A}_N^{\min}$.*

La construction de la pseudométrique $\partial_{\mathcal{B},N}$ est réalisée de façon explicite pour tout N dans [Her17c]. Par contre, comme elle est un peut technique, on préfère seulement d'esquisser l'idée de la construction pour $N = 2$. Elle est faite dans ce cas en trois étapes :

1. D'après les commentaires dans 4.2.8, H et H' sont dans ce cas des algèbres sur $k[\hbar]$, puisque elles sont obtenues comme la cohomologie des algèbres différentielles graduées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, respectivement. Par rapport à la structure de $k[\hbar]$-module, H et H' se décomposent donc en termes des modules de type intervalle. On écrit alors $H^n \simeq \oplus_{j\in J_n} k_{I_j}$ et $(H')^n \simeq \oplus_{j'\in J'_n} k_{I'_{j'}}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On pose $J = \sqcup_{n\in\mathbb{Z}} J_n$ et $J' = \sqcup_{n\in\mathbb{Z}} J'_n$. Si $j \in J_n$, on écrit $|j| = n$, et de même pour $j' \in J'_n$.
2. Le produit de H donne une application $k_{I_{j_1}} \otimes_{k[\hbar]} k_{I_{j_2}} \to H$, pour tous j_1 et j_2 dans J, dont l'image est un sous-$k[\hbar]$-module de H, et il s'écrit donc comme une somme directe $\oplus_{j\in J_{j_1,j_2}} k_{I_j}$ des modules de type intervalle de la décomposition de H, et de même pour H'. Cela nous donne un code-barre $H_{j_1,j_2}^{|j_1|+|j_2|}$ de degré $|j_1| + |j_2|$ pour toute paire $(j_1,j_2) \in J^2$ et de même pour H'.

3. Étant donné $i \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble X, on dénote par $X^{[i]}$ l'ensemble des application de $\{1,\dots,i\}$ dans X. On définit la *pseudométrique du goulot d'étranglement de type* A_2 entre les algèbres (H,m) et (H',m') par
$$\partial_{\mathcal{B},2}\Big((H,m),(H',m')\Big) = \inf \sup_{\substack{i=1,2 \\ \phi \in (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_n)^{[i]}}} d_{\mathcal{B}}\Big(H^{|\phi(1)_1|+\dots+|\phi(i)_1|}_{\phi(1)_1,\dots,\phi(i)_1}, (H')^{|\phi(1)_2|+\dots+|\phi(i)_2|}_{\phi(1)_2,\dots,\phi(i)_2}\Big), \tag{4.2.3}$$
où l'infimum est considéré sur l'ensemble d'uplets $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{PM}(J_n,J'_n)$ et l'on dénote $\phi(j) = (\phi(j)_1,\phi(j)_2)$, $\phi(j)_1 \in J \cup \{*\}$, $\phi(j)_2 \in J' \cup \{*\}$, pour tout $j = 1,2$.

En général, il faut aussi appliquer une procédure générale due à C. Himmelberg de passage au quotient de la pseudométrique de la forme (4.2.3) par rapport à une relation d'équivalence (voir [Him68]).

4.2.11. On veut remarquer que la structure d'A_N-algèbre considérée dans la proposition précédente n'est pas sur $k[\hbar]$ en général, mais sur k. Autrement dit, il n'y a pas en principe de compatibilité entre cette structure et celle de module sur $\tilde{P}$. Par ailleurs, avec les résultats dans [Her17a] (adaptés au cas où les indices ne sont pas forcément de nombres entiers), on trouve qu'il existe une structure d'A_∞-algèbre sur $k[\hbar]$ dans un espace $\mathscr{D}$, qui est quasi-isomorphe comme A_∞-algèbre sur $k[\hbar]$ avec $\mathcal{D}$, minimale au sens de S. Sagave (voir [Sag10]) et qui est quasi-isomorphe (mais seulement en tant qu'A_∞-algèbre sur k) avec D. Le passage de $\mathscr{D}$ vers D implique alors une perte d'information assez importante. Ce serait intéressant de savoir si l'on peut quand même définir une généralisation de la notion de cohomologie persistante (et de la pseudométrique considérée ci-dessus) au niveau de l'espace $\mathscr{D}$, qui semble par contre assez compliqué de manipuler.

4.2.12.*Exemple.* On va présenter le calcul suivant, qui est une variation d'un exemple dans [BM15]. Dans ce cas, on va donner deux complexes filtrés dont la pseudométrique du goulot d'étranglement vaut zéro, mais tels que la pseudométrique $\partial_{\mathcal{B},2}$ est différente de zéro. On définit les espace topologiques $Y = (S^2_1 \vee S^2_2 \vee S^2_3 \vee S^4) \cup_{g_1} e^6_1 \cup_{g_2} e^6_2$ et $X = Y \cup_{g_3} e^4$, où S^2_j dénote la j-ième copie d'une sphère S^2, e^4 est une 4-cellule, e^6_i sont deux 6-cellules pour $i = 1,2$ et
$$g_1 = [\mathrm{id}_{S^4}, \mathrm{id}_{S^2_1}] + [\mathrm{id}_{S^2_1}, [\mathrm{id}_{S^2_1}, [\mathrm{id}_{S^2_1}, \mathrm{id}_{S^2_2}]]], \quad g_2 = [\mathrm{id}_{S^4}, \mathrm{id}_{S^2_2}], \quad g_3 = [\mathrm{id}_{S^2_1}, \mathrm{id}_{S^2_2}].$$

On note que X est simplement l'espace K_1 et Y est K_0 dans [BM15], Section 3. On considère la filtration croissante de X donnée par $F_2X = X$, $F_1X = Y$ et $F_0X = \emptyset$. Par ailleurs, on définit les espaces topologiques $Y' = S^2_1 \vee S^2_2 \vee S^2_3 \vee S^4 \vee S^6_1 \vee S^6_2$ et $X' = Y' \vee S^4$, où S^6_j dénote la j-ième copie de S^6, pour $j = 1,2$. On considère la filtration croissante de X' de la forme $F_2X' = X'$, $F_1X' = Y'$ et $F_0X' = \emptyset$. Dans ce cas, l'EPO P' est formé par 3 éléments $\{0 < 1 < 2\}$ avec l'opération $i \star j = \min(i,j)$. Il est facile à voir que les filtrations décroissantes induites sur les complexes de cochaines singulières sont multiplicatives pour cet ensemble d'indices. On regarde P' dans $\mathbb{R}$ et, donc, on peut supposer sans perte de généralité que la longueur de l'intervalle $]-\infty,0]$ est 2ℓ, avec $\ell > 0$, tendis que les longueurs de $]0,1]$ et $]1,2]$ sont 1. On dénote par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les algèbres différentielles graduées de Rees par rapport à P'. Il est facile à vérifier que (avec des calculs similaires à ceux qui apparaissent dans [BM15])
$$H^\bullet(\mathcal{D})_0 = \begin{cases} k.1_{0,0}, & \text{si } \bullet = 0,\\ k.a_{2,0} \oplus k.a'_{2,0} \oplus k.a''_{2,0}, & \text{si } \bullet = 2,\\ k.b_{4,0} \oplus k.b'_{4,0}, & \text{si } \bullet = 4,\\ k.g_{6,0} \oplus k.g'_{6,0}, & \text{si } \bullet = 6,\\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \qquad H^\bullet(\mathcal{D})_1 = \begin{cases} k.b'_{4,1}, & \text{si } \bullet = 4,\\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$
et $H^\bullet(\mathcal{D})_2 = 0$. La structure de module sur $\tilde{P}'$ dans $H^\bullet(\mathcal{D})$ est déterminée par l'action de ω^0_1 dans $H^\bullet(\mathcal{D})_1$, puisque le reste est trivial. Celle-là est donnée par envoyer $b'_{4,1}$ dans $b'_{4,0}$.

À partir d'un argument assez simple qui concerne seulement la connaissance des cohomologies des sphères et des bouquets, on déduit que la structure de module de $H^\bullet(\mathcal{D}')$ sur $\tilde{P}'$ est décrite de la même façon que $H^\bullet(\mathcal{D})$ et elles sont donc isomorphes. En particulier, la distance du goulot d'étranglement considérée dans cohomologie persistante vaut zéro.

On va démontrer que la distance $\partial_{\mathcal{B},2}$ entre les mêmes objets n'est pas nulle. D'abord, il est clair que $1_{0,0}$ est l'unité de $H^\bullet(\mathcal{D})$ et de $H^\bullet(\mathcal{D}')$, respectivement. Par ailleurs, un argument standard de topologie algébrique nous dit le produit de $H^\bullet(\mathcal{D}')$ est trivial, *i.e.* le produit de deux éléments dans $H^{>0}(\mathcal{D}')$ est zéro. Cependant, à partir des techniques de théorie d'homotopie rationnelle (aussi rappelées dans [BM15]), le produit dans $H^{>0}(\mathcal{D})$ est donné par

$$a_{2,0} \cup a'_{2,0} = a_{2,0} \cup a'_{2,0} = b'_{4,0}, \qquad a_{2,0} \cup b_{4,0} = b_{4,0} \cup a_{2,0} = g_{6,0}, \qquad a'_{2,0} \cup b_{4,0} = b_{4,0} \cup a'_{2,0} = g'_{6,0}.$$

Les autres produits de $H^{>0}(\mathcal{D})$ valent zéro. La définition de $\partial_{\mathcal{B},2}$ implique que la distance entre $H^\bullet(\mathcal{D}')$ et $H^\bullet(\mathcal{D})$ vaut ℓ.

4.3 Perspective par rapport à la structure fortement homotopique sur la cohomologie persistante

4.3.1. Comme indiqué dans 4.2.11, il serait intéressant d'étudier l'A_∞-algèbre $\mathscr{D}$ sur $k[\hbar]$, qui est quasi-isomorphe comme A_∞-algèbre sur $k[\hbar]$ avec l'algèbre différentielle de Rees $\mathcal{D}$, minimale au sens de S. Sagave, et qui est quasi-isomorphe avec D (mais seulement en tant qu'A_∞-algèbres sur k). L'existence de l'A_∞-algèbre $\mathscr{D}$ sur $k[\hbar]$ est une conséquence de la Proposition 4.1.4. En particulier, il serait intéressant de savoir si l'on peut définir une généralisation de la notion de cohomologie persistante et de la pseudométrique considérée dans la Proposition 4.2.10 au niveau de l'espace $\mathscr{D}$, qui semble par contre assez compliqué de manipuler.

Chapitre 5

La cohomologie et l'homologie de Hochschild des algèbres graduées

5.0.1. Dans ce chapitre on va décrire les résultats démontrés dans les articles [Her16a] et [Her16b]. Dans le premier travail j'ai démontré qu'il est possible de calculer la structure d'algèbre (et même d'A_∞-algèbre) de la cohomologie de Hochschild $HH^\bullet(A)$ d'une algèbre graduée positivement et connexe A sur un corps k au niveau de la résolution projective minimale P du A-bimodule A si l'on connaît la structure d'A_∞-algèbre du dual de Koszul $\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k)$. De même, soit M un A-bimodule graduée, on peut calculer la structure de bimodule (et même d'A_∞-bimodule) de l'homologie de Hochschild $H^\bullet(A,M)$ sur la cohomologie $HH^\bullet(A)$ au niveau de la résolution projective minimale du A-bimodule A. La différence principale avec les points de vue précédents c'est que la nouvelle méthode n'utilise pas de morphismes de comparaison avec la résolution bar (ou n'importe quelle autre résolution), ni de relèvement $\Delta : P \to P \otimes_A P$ de l'identité de A. Les expression du produit cup et cap sont absolument explicites : dans le cas particulier où A est de Koszul on trouve l'expression du produit cup calculé par R.-O. Buchweitz, E. Green, N. Snashall et Ø. Solberg dans [BGSS08], tandis que si A est de Koszul généralisée on trouve les expressions du produit cup de Y. Xu et H. Xiang dans [XX11]. On veut noter que les expressions pour le produit cap ne semblent pas d'avoir été décrites avant. En outre, on remarque que, à partir d'un théorème de B. Keller, le calcul de la structure d'A_∞-algèbre de $\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k)$ se réduit à vérifier si une structure d'A_∞-algèbre donnée satisfait une condition élémentaire.

Dans l'article [Her16b], j'ai étudié la relation entre la dualité de Koszul et le calcul de Tamarkin-Tsygan. Plus précisément, si A est une algèbre différentielle graduée A qui satisfait quelques propriétés de finitude, le calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A), B_A)$ de A est dual au calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(E(A)), HH_\bullet(E(A)), B_{E(A)})$ du dual de Koszul $E(A)$ de A. La notion de dualité des calculs de Tamarkin-Tsygan a été introduite dans le même article et elle veut dire qu'il existe une paire (f,g), où $f : HH^\bullet(E(A)) \to HH^\bullet(A)$ est un isomorphisme d'algèbres de Gerstenhaber, $g : HH_\bullet(A)^\# \to HH_\bullet(E(A))$ est un isomorphisme de modules de Gerstenhaber sur $HH^\bullet(E(A))$ tel que $B_{E(A)} \circ g = -g \circ B_A^\#$, où $HH_\bullet(A)$ est un module de Gerstenhaber sur $HH^\bullet(E(A))$ via f et $(-)^\#$ dénote le dual gradué.

5.1 Les résultats de l'article [Her16a] en un coup d'œil : le cas des algèbres de Koszul

5.1.1. Dans cette section on va présenter les résultats de l'article [Her16a] dans la cas particulier d'une algèbre de Koszul. Cela va nous permettre d'illustrer les idées fondamentales du travail mentionné ci-dessus et en même temps de donner une preuve assez directe du principal résultat dans [BGSS08] sans faire aucun calcul. Par contre, cela va simplifier de façon assez importante les outils nécessaires par rapport au cas général, puisque l'on n'aura pas besoin de la théorie de torsion des A_∞-algèbres topologiques.

5.1.2. On suppose désormais que k est un corps. On rappelle qu'un *élément de Maurer-Cartan a* d'une algèbre différentielle graduée augmentée (Λ, d_Λ), est un élément $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$. Si Λ est muni d'une graduation supplémentaire qui n'est pas de nature homologique (typiquement appelée graduation d'Adams), on va supposer que a est homogène de degré zéro pour l'autre graduation. On peut dans ce cas considérer l'algèbre différentielle graduée augmentée *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$, où $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$ mais on ne change pas la structure algébrique restante de Λ. Si (M, d_M) est un Λ-bimodule différentiel gradué, le *bimodule différentiel gradué tordu* $(M, d_{M,a})$ sur $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est défini de façon équivalente.

5.1.3. Étant donné une algèbre différentielle graduée augmentée A et une cogèbre différentielle graduée coaugmentée C, soit $\Lambda = \mathcal{H}om(C,A)$ l'algèbre différentielle graduée augmentée munie du produit de convolution et les unité et augmentation évidentes. Une *cochaine tordante* τ est un élément de Maurer-Cartan de Λ qui satisfait que $\epsilon_A \circ \tau = \tau \circ \eta_C = 0$, où ϵ_A est l'augmentation de A et η_C est la coaugmentation de C. On dénotera l'algèbre différentielle graduée augmentée tordue de Λ par $\mathcal{H}om^\tau(C,A)$, et on l'appellera l'*algèbre de convolution tordue*. En outre, si M est un A-bimodule différentiel gradué, $M \otimes C$ est un bimodule différentiel gradué sur Λ à partir de

$$\phi \cdot (m \otimes c) \cdot \psi = (-1)^\epsilon \phi(c_{(3)}).m.\psi(c_{(1)}) \otimes c_{(2)},$$

où $m \in M$, $c \in C$, $\Delta_C^{(3)}(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$ est la notation usuelle de Sweedler pour le coproduit itéré de C, $\phi, \psi \in \mathcal{H}om(C,A)$ et $\epsilon = \deg\psi \deg c + \deg c_{(3)}(\deg m + \deg c_{(1)} + \deg c_{(2)} + \deg \psi)$. La torsion du bimodule différentiel gradué précédent sera dénotée par $M \otimes_\tau C$ et appelée le *produit tensoriel tordu*. Il est facile à vérifier que $M \otimes_\tau C$ est un bimodule différentiel gradué sur $\mathcal{H}om^\tau(C,A)$. On rappelle que, étant donné une algèbre différentielle graduée augmentée A, il existe une cogèbre différentielle graduée coaugmentée $B^+(A)$ associée naturellement, dont l'algèbre graduée sous-jacente est la cogèbre tensorielle $T(I_A[1])$ et I_A dénote le noyau de l'augmentation de A, et une la cochaine tordante $\tau_A : B^+(A) \to A$, appelée *universelle*, définie comme la composition de la projection canonique $B^+(A) \to I_A[1]$, l'inverse du morphisme de suspension $I_A[1] \to I_A$ et moins l'inclusion canonique $I_A \to A$.

5.1.4 Fait ([Her16b], Fact 2.1)**.** *Soit A algèbre différentielle graduée augmentée sur k et soit τ_A la cochaine tordante universelle. Alors,*

(i) il existe une identification canonique entre le complexe $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A)$ qui calcule la cohomologie de Hochschild de A et $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$. En outre, le produit cup du premier complexe coïncide avec le produit de convolution du deuxième complexe.

(ii) il y une identification canonique entre le complexe $M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A)$ qui calcule l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M et le produit tensoriel tordu $M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$. En plus, la structure de bimodule du premier complexe sur $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A)$ donnée par les produits cap coïncide avec la structure de bimodule du deuxième complexe sur $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$.

5.1.5. Soit $A = T(V)/\langle R \rangle$ une algèbre quadratique, *i.e.* $R \subseteq V^{\otimes 2}$, sur un corps k. On suppose que A est de Koszul et l'on considère la cogèbre différentielle graduée $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ munie de la différentielle nulle, où le degré cohomologique de la composante $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ est $-i$ (voir [PP05], Ch. 1, Section 1, pp. 4–5). La structure de cette cogèbre différentielle graduée et son quasi-isomorphisme avec la construction bar $B^+(A)$ de A, que l'on décrira dans les lignes suivantes, est bien connue et l'une des propriétés les plus importantes de la théorie des algèbres de Koszul. On a les isomorphismes canoniques $\mathrm{Tor}_0^A(k,k) \simeq k$, $\mathrm{Tor}_1^A(k,k) \simeq V$ et

$$\mathrm{Tor}_i^A(k,k) \simeq \bigcap_{j=0}^{i-2} V^{\otimes j} \otimes R \otimes V^{\otimes (i-j)}, \tag{5.1.1}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On pose $C_0 = k$, $C_1 = V$ et l'on définit C_i comme l'expression à droite dans (5.1.1) si $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On peut donc identifier $C = \oplus_{i \in \mathbb{N}} C_i$ avec $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$. À partir de cet isomorphisme le coproduit Δ est donné de la manière suivante. La composition de la restriction de Δ à C_i avec la projection canonique sur $C_{i'} \otimes C_{i''}$, où $i = i' + i''$, est l'inclusion canonique $C_i \subseteq C_{i'} \otimes C_{i''}$ de sous-espaces vectoriels de $T(V)$. La counité est la projection canonique de C sur $C_0 = k$ et la coaugmentation est l'inclusion canonique de $k = C_0$ dans C. Il est clair que C est cocomplète. On rappelle que l'application $f : C \to B^+(A)$ induite par les inclusions

$$C_i \subseteq V^{\otimes i} \to I_A[1]^{\otimes i},$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, est un quasi-isomorphisme de cogèbres différentielles graduées coaugmentées cocomplètes (en fait, c'est équivalent à la propriété de Koszul de A). Il est facile à vérifier que la cochaine tordante $\tau = \tau_A \circ f$ est donnée de manière explicite par l'application dont la restriction à V est moins l'inclusion canonique $V \to A$ et la restriction à C_i est zéro pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

5.1.6 Proposition ([Her16b], Prop. 2.2). *Soient A une algèbre de Koszul sur un corps k, M un A-bimodule et $C = \mathrm{Tor}^A_\bullet(k,k)$ la cogèbre différentielle graduée coaugmentée et cocomplète décrite ci-dessus. On considère le quasi-isomorphisme $f : C \to B^+(A)$ rappelé avant. On pose $\tau = \tau_A \circ f$. Alors, l'application $\mathcal{H}om(f,A)$ est un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées augmentées de $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A),A)$ dans $\mathcal{H}om^{\tau}(C,A)$ et $\mathrm{id}_M \otimes f$ est un quasi-isomorphisme de bimodules différentiels gradués sur $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A),A)$ de $M \otimes_\tau C$ dans $M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$, où $M \otimes_\tau C$ a une structure de bimodule différentiel gradué sur $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A),A)$ à partir de $\mathcal{H}om(f,A)$.*

En conséquence, on trouve un isomorphisme $HH^\bullet(A) \to H^\bullet(\mathcal{H}om^\tau(C,A))$ d'algèbres graduées et un isomorphisme $H_\bullet(M \otimes_\tau C) \to H_\bullet(A,M)$ de bimodules gradués sur $HH^\bullet(A)$, où $H_\bullet(M \otimes_\tau C)$ est un bimodule gradué sur $HH^\bullet(A)$ via $HH^\bullet(A) \to H^\bullet(\mathcal{H}om^\tau(C,A))$.

La preuve de la proposition précédente peut se diviser en deux parties. Dans la première étape on utilise la description générale des complexes donnée dans le Fait 5.1.4 avec les propriétés générales de la torsion de structures pour assurer que les applications $\mathcal{H}om(f,A)$ et $\mathrm{id}_M \otimes f$ sont des morphismes d'algèbres différentielles graduées et de bimodules différentiels gradués, respectivement. Enfin, on démontre que ces deux applications sont des quasi-isomorphismes à partir d'un argument standard sur la comparaison des résolutions. Noter que la partie concernant la cohomologie de Hochschild dans la proposition précédente implique le théorème principal dans [BGSS08].

5.2 Quelques constructions avec A_∞-cogèbres

5.2.1. Dans cette section on va commencer à expliquer les généralisations fortement homotopiques des constructions utilisées dans 5.1.3. Elles seront nécessaires pour le Théorème 5.4.3.

5.2.2. Soit C une A_∞-cogèbre coaugmentée et A une algèbre différentielle graduée augmentée. On considère le complexe d'espaces vectoriels $\mathcal{H} = \mathcal{H}om(C,A)$ muni de la structure d'A_∞-algèbre augmentée suivante, appelée *A_∞-algèbre de convolution*, où $m_1^{\mathcal{H}}$ est donnée par la différentielle usuelle $d_A \circ \phi - (-1)^{\deg \phi} \phi \circ \Delta_1^C$,

$$m_n^{\mathcal{H}}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) = (-1)^{n(\deg \phi_1 + \cdots + \deg \phi_n + 1)} \mu_A^{(n)} \circ (\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) \circ \Delta_n^C \tag{5.2.1}$$

pour $n \geq 2$, $1_{\mathcal{H}om(C,A)} = \eta_A \circ \epsilon_C$ et $\epsilon_{\mathcal{H}om(C,A)}(\phi) = \epsilon_A \circ \phi \circ \eta_C(1_k)$.

5.2.3. Si $f_\bullet : C \to D$ est un morphisme d'A_∞-cogèbres coaugmentées, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le morphisme

$$(f_n)_* : \mathcal{H}om(D,A)^{\otimes n} \to \mathcal{H}om(C,A) \tag{5.2.2}$$

d'espaces vectoriels gradués et degré cohomologique $1-n$ par $(f_1)_*(\phi) = \phi \circ f_1$ et

$$(f_n)_*(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) = (-1)^{(n-1)(\deg \phi_1 + \cdots + \phi_n)} \mu_A^{(n)} \circ (\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) \circ f_n$$

pour $n \geq 2$. Alors (5.2.2) est un morphisme d'A_∞-algèbres augmentées. En particulier, le dual gradué $C^\#$ de C a une structure d'A_∞-algèbre augmentée.

5.2.4. Si M est un A-bimodule différentiel gradué sur une algèbre différentielle graduée augmentée A et C est une A_∞-cogèbre coaugmentée, alors $M \otimes C$ est un A_∞-bimodule sur $\mathcal{H}om(C,A)$ avec les morphismes $m_{0,0}^{M\otimes C} = d_M \otimes \mathrm{id}_C + \mathrm{id}_M \otimes \Delta_1^C$ et, pour $p+q \geq 1$,

$$\begin{aligned} &m_{p,q}^{M\otimes C}\big(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_p \otimes (m \otimes c) \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_q\big) \\ &\qquad = (-1)^{\epsilon'}\big(\phi_1(c_{(q+2)}) \ldots \phi_p(c_{(q+p+1)})\big).m.\big(\psi_1(c_{(1)}) \ldots \psi_q(c_{(q)})\big) \otimes c_{(q+1)}, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

où $\Delta^C_{p+q+1}(c) = c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(p+q+1)}$ et

$$\begin{aligned}\epsilon' =& pq + \deg c \deg m + (p+q+1) \sum_{i=1}^{p} \deg \phi_i + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ q+2 \leq i' \leq q+i}} \deg c_{(i')} \deg \phi_i \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq j' < j}} \deg c_{(j')} \deg \psi_j + \Big(\deg m + \sum_{i=1}^{p} \deg c_{(q+1+i)} + \sum_{j=1}^{q} \deg \psi_j \Big) \Big(\sum_{j=1}^{q+1} \deg c_{(j)} \Big).\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Si M est un module différentiel gradué à gauche (resp., à droite) sur A, on peut le regarder comme un A-bimodule différentiel gradué en employant l'augmentation ϵ_A, *i.e.* $a.m.a' = \epsilon_A(a')a.m$ (resp., $a.m.a' = \epsilon_A(a)m.a'$). On le dénotera par M_{ϵ_A} (resp., ${}_{\epsilon_A}M$).

5.2.5. Si $g : M \to N$ est un morphisme de A-bimodules différentiels gradués sur une algèbre différentielle graduée augmentée A et C est une A_∞-cogèbre coaugmentée, alors $g \otimes \mathrm{id}_C : M \otimes C \to N \otimes C$ est un morphisme strict d'A_∞-bimodules sur $\mathcal{H}om(C, A)$.

5.2.6. Soit $f_\bullet : C \to D$ un morphisme d'A_∞-cogèbres coaugmentées et soit A une algèbre différentielle graduée augmentée. Il induit un morphisme d'A_∞-algèbres augmentées $(f_\bullet)_* : \mathcal{H}om(D, A) \to \mathcal{H}om(C, A)$, comme indiqué dans (5.2.2). En particulier, étant donné un A-bimodule différentiel gradué M, cela permet de regarder $M \otimes C$ comme un A_∞-bimodule sur $\mathcal{H}om(D, A)$. Alors, la collection de morphismes

$$F_{p,q} : \mathcal{H}om(D, A)^{\otimes p} \otimes (M \otimes C) \otimes \mathcal{H}om(D, A)^{\otimes q} \to M \otimes D \tag{5.2.5}$$

donnés par

$$\begin{aligned}&F_{p,q}\big(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_p \otimes (m \otimes c) \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_q\big) \\ &\quad = (-1)^{\varepsilon'} \Big(\phi_1(d_{(q+2)}) \dots \phi_p(d_{(q+p+1)})\Big).m.\Big(\psi_1(d_{(1)}) \dots \psi_q(d_{(q)})\Big) \otimes d_{(q+1)},\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

où $f_{p+q+1}(c) = d_{(1)} \otimes \cdots \otimes d_{(p+q+1)}$ et ε' est donné par la même expression que ϵ' dans (5.2.4) si l'on remplace $c_{(i)}$ par $d_{(i)}$, définit un morphisme d'A_∞-bimodules sur $\mathcal{H}om(D, A)$.

5.3 La torsion d'A_∞-algèbres

5.3.1. Dans cette section on va expliquer les généralisations fortement homotopiques de la théorie de torsion utilisée dans 5.1.2. Elles seront nécessaires pour le Théorème 5.4.3.

5.3.2. Soit $(A, m_\bullet)$ une A_∞-algèbre augmentée *topologique* et complète (voir [LH03], Ch. 6). On rappelle que cela implique qu'il existe une topologie complète du sous-espace vectoriel sous-jacent à A donnée par un suite décroissante $\{F^n A\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels –considérés comme une famille de voisinages de l'origine– telle que les morphismes m_i, avec $i \in \mathbb{N}^*$, et ϵ_A sont des applications contractantes par rapport à la filtration. On rappelle que k est muni de la filtration discrète $\{F^n k\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $F^0 k = k$ et $F^n k = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De même, un *morphisme* entre deux A_∞-algèbre augmentées topologiques est un morphisme $f_\bullet$ d'A_∞-algèbre augmentées tel que f_i est une application contractante par rapport aux filtrations, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Les notions d'A_∞-bimodule topologique et de morphisme d'A_∞-bimodules topologiques sont claires.

5.3.3. Soit $a \in F^1 A$ de degré cohomologique 1 (et degré d'Adams zéro). On dit que a satisfait l'*équation de Maurer-Cartan* si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} m_n(a^{\otimes n}) \tag{5.3.1}$$

converge vers zéro. On dénote l'ensemble des éléments qui satisfont l'équation de Maurer-Cartan par $\mathrm{MC}(A)$.

5.3.4. Étant donné $l, n \in \mathbb{N}$, on définit

$$p^a_{l,n} : A^{\otimes n} \to A^{\otimes(l+n)}$$

de la façon suivante. Si $n = 0$, on pose $p^a_{l,0}(1_k) = a^{\otimes l}$, avec $a^{\otimes 0} = 1_k \in k$. Si $n \geq 1$,

$$p^a_{l,n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{\bar{l} \in \mathbb{N}^{n+1,l}} (-1)^{w''} a^{\otimes l_1} \otimes x_1 \otimes a^{\otimes l_2} \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes a^{\otimes l_n} \otimes x_n \otimes a^{\otimes l_{n+1}},$$

où $w'' = \sum_{j=2}^{n+1} l_j(\deg x_1 + \cdots + \deg x_{j-1} + j - 1)$.

5.3.5 Fait ([Her16a], Fact 3.6)**.** *Soit $(A, m_\bullet)$ une A_∞-algèbre augmentée topologique et complète. On dénote l'unité par 1_A et l'augmentation par ϵ_A. Soit $a \in \mathrm{MC}(A)$. On pose*

$$m^a_n = \sum_{l \in \mathbb{N}} (-1)^{\frac{l(l+1)}{2} + ln} m_{n+l} \circ p^a_{l,n} \tag{5.3.2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Elle est bien définie puisque la somme est convergente. En plus, $(A, m^a_\bullet)$ est une A_∞-algèbre augmentée topologique et complète avec unité 1_A et augmentation ϵ_A.

5.3.6. Soient $a \in \mathrm{MC}(A)$ et $f_\bullet : A \to B$ un morphisme d'A_∞-algèbres augmentées topologiques complètes. On définit *l'image* b de a par $f_\bullet$ comme l'élément de B donné par la somme de la série convergente

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + 1} f_n(a^{\otimes n}). \tag{5.3.3}$$

5.3.7 Fait ([Her16a], Facts 3.7 et 3.8)**.** *Soit $f_\bullet : A \to B$ un morphisme d'A_∞-algèbres augmentées topologiques complètes et soit $a \in \mathrm{MC}(A)$. Alors, l'image b de a par $f_\bullet$ satisfait l'équation de Maurer-Cartan. En plus, si l'on définit*

$$f^a_n = \sum_{l \in \mathbb{N}} (-1)^{\frac{l(l+1)}{2} + ln} f_{n+l} \circ p^a_{l,n},$$

alors f^a_n est bien défini pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^a_\bullet$ est un morphisme d'A_∞-algèbres augmentées topologiques de $(A, m^{A,a}_\bullet)$ dans $(B, m^{B,b}_\bullet)$.

5.3.8. Soit M un A_∞-bimodule sur une A_∞-algèbre augmentées topologiques complète A. On dit que M est *presque discret* s'il existe une filtration croissante $\{F_i M\}_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-A_∞-bimodules de M (*i.e.* l'inclusion de $F_i M$ dans M est un morphisme strict d'A_∞-bimodules sur A) qui est exhaustive (*i.e.* $\cup_{i \in \mathbb{N}} F_i M = M$) et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe $\ell \in \mathbb{N}$ qui satisfait que $m_{p,q}(\omega \otimes m \otimes \omega') = 0$ pour tous $m \in F_i M$, $\omega \in I_A[1]^{\otimes p}$ et $\omega' \in I_A[1]^{\otimes q}$ tels que $\omega \otimes \omega' \in F^\ell(I_A[1]^{\otimes(p+q)})$. On rappelle que I_A est le noyau de l'augmentation de A. De même, étant donnés deux A_∞-bimodules presque discrets M et N sur une A_∞-algèbre augmentées topologiques complète A, avec les filtrations croissantes $\{F_i M\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{F_i N\}_{i \in \mathbb{N}}$, respectivement, et $f_{\bullet,\bullet} : M \to N$ un morphisme d'A_∞-bimodules sur A, on dit que $f_{\bullet,\bullet}$ est *presque discret (par rapport aux filtrations)* si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_{p,q}(I_A[1]^p \otimes F_i M \otimes I_A[1]^q) \subseteq F_i N$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_{p,q}(\omega \otimes m \otimes \omega') = 0$ pour tous $m \in F_i M$, $\omega \in I_A[1]^{\otimes p}$ et $\omega' \in I_A[1]^{\otimes q}$ tels que $\omega \otimes \omega' \in F^\ell(I_A[1]^{\otimes(p+q)})$. On a des résultats similaires aux faits précédents pour les A_∞-bimodules presque discrets et les morphismes presque discrets des A_∞-bimodules (voir [Her16a], Facts 3.9–3.10).

5.4 Les résultats de l'article [Her16a]

5.4.1 Lemme ([Her16a], Lemmas 3.12 et 3.13)**.** *Soient C une A_∞-cogèbre coaugmentée munie d'une graduation d'Adams connexe et A une algèbre différentielle graduée augmentée. On considère l'A_∞-algèbre de convolution $\mathcal{H} = \mathcal{H}om(C, A)$. Elle a une topologie où $F^i\mathcal{H}$ est la partie de $\mathcal{H}$ donnée par les applications qui s'annulent sur le sous-espace $F_{i-1}C$ de C formé par les éléments de degré d'Adams inférieur ou égal à $i-1$. En plus, $\mathcal{H}$ est une A_∞-algèbre augmentées topologiques complète.*

D'ailleurs, on suppose en plus que M est un A-bimodule différentiel gradué. Alors, l'A_∞-bimodule $M \otimes C$ est presque discret pour la filtration croissante $F_i(M \otimes C) = M \otimes F_i C$. En outre, si $f_\bullet : C \to D$ est un morphisme d'A_∞-cogèbres coaugmentées munies d'une graduation d'Adams connexe, alors le morphisme induit de $M \otimes C$ dans $M \otimes D$ est presque discret.

5.4.2. Un *cochaine tordante généralisée (ou homotopique)* de C dans A est un élément $\tau \in \mathrm{MC}(\mathcal{H}om(C,A))$ tel que $\epsilon_A \circ \tau$ et $\tau \circ \eta_C$ valent zéro. L'équation (5.3.1) se réécrit de la façon suivante :

$$d_A \circ \tau + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^{i(i+1)/2+1} \mu_A^{(i)} \circ \tau^{\otimes i} \circ \Delta_i = 0, \tag{5.4.1}$$

où $\mu_A^{(i)} : A^{\otimes i} \to A$ est l'application induite par le produit de A. La torsion de l'A_∞-algèbre $\mathcal{H}om(C,A)$ par τ est appelée l'*A_∞-algèbre de convolution tordue* et sera dénotée par $\mathcal{H}om^\tau(C,A)$. La torsion de l'A_∞-bimodule $M \otimes C$ par τ est appelée le *produit tensoriel tordu* (de M et C par τ) et on l'écrira $M \otimes_\tau C$.

5.4.3 Théorème ([Her16a], Thm. 4.3)**.** *Soit A une algèbre (Adams) graduée positivement et connexe, soit C une A_∞-cogèbre coaugmentée minimale (i.e. $\Delta_1 = 0$) telle qu'il existe un quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées*

$$\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k) \to C^\#,$$

et soit τ la cochaine tordante induite par le théorème de Keller (voir [Her16a], *Thm. 4.2). Alors, il existe un quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées du complexe standard $C^\bullet(A,A)$ qui calcule la cohomologie de Hochschild de A dans $\mathcal{H}om^\tau(C,A)$, ce qui en particulier induit un isomorphisme d'algèbres graduées de $HH^\bullet(A)$ dans $H^\bullet(\mathcal{H}om^\tau(C,A))$.*

Étant donné un A-bimodule gradué M et le quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées précédent, il existe un quasi-isomorphisme d'A_∞-bimodules sur $C^\bullet(A,A)$ de $M \otimes_\tau C$ dans le complexe $C_\bullet(A,M)$ qui calcule l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M. Il induit en particulier un isomorphisme de bimodules gradués de $H_\bullet(A \otimes_\tau C)$ dans $H_\bullet(A,M)$ sur $HH^\bullet(A)$.

5.5 Perspective par rapport au calcul de la structure algébrique de la cohomologie et l'homologie de Hochschild

Une question assez naturelle c'est si le Théorème 5.4.3 est valable sans l'hypothèse que l'algèbre A soit graduée positivement et connexe. Dans ce cas il existe une notion de dualité de Koszul due à L. Positselski : en général, le dual de Koszul d'une algèbre différentielle graduée unifère non augmentée est une A_∞-algèbre courbée. Il serait intéressant de savoir si l'on peut trouver alors la structure algébrique de la cohomologie et de l'homologie de Hochschild d'une algèbre quelconque, à partir d'une extension convenable au cas courbé des résultats mentionnés dans les trois sections précédentes. En outre, il serait intéressant de savoir s'il est possible de déduire de façon directe (*i.e.* sans faire des calculs soumis aux choix qui ne sont pas canoniques) la structure d'algèbre de Gerstenhaber de la cohomologie de Hochschild à partir de la connaissance de la structure d'A_∞-algèbre (courbée) du dual de Koszul et possiblement d'autres informations du type homotopique. Ce dernier problème est très compliqué, donc il serait intéressant de pouvoir le comprendre même dans des situations très particulières.

5.6 Les résultats de l'article [Her16b]

5.6.1. On va rappeler dans cette section les résultats prouvés dans [Her16b]. Dans cet article j'ai démontré que, étant donné une algèbre différentielle graduée augmentée A qui satisfait quelques propriétés de finitude, le calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A), B_A)$ de A est *dual* au calcul de Tamarkin-Tsygan $(HH^\bullet(E(A)), HH_\bullet(E(A)), B_{E(A)})$ du dual de Koszul $E(A)$ de A. Cela généralise des résultats par B. Feĭgin et B. Tsygan dans [FT87] pour l'homologie de Hochschild des algèbres de Koszul, et par Y. Félix, L. Menichi et

J.-C. Thomas dans [FMT05] pour la cohomologie de Hochschild des algèbres différentielles graduées simplement connexes. Le point de vue fondamental que l'on va utiliser c'est la description de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée augmentée comme une algèbre de convolution tordue et de l'homologie de Hochschild à partir d'un produit tensoriel tordue (voir Fait 5.1.4). On commence d'abord avec le résultat général suivant et l'on rappelle que $(-)^{\#}$ dénote le dual gradué.

5.6.2 Proposition ([Her16b], Prop. 3.2). *Soient C une cogèbre différentielle graduée coaugmentée et A une algèbre différentielle graduée augmentée. On suppose que les deux sont munies d'une graduation supplémentaire, appelée d'Adams, qui est localement de dimension finie. Alors, $C^{\#}$ est une algèbres différentielle graduée augmentée et $A^{\#}$ est une cogèbre différentielle graduée coaugmentée. Si $\tau \in \mathcal{H}om(C,A)$ est une cochaine tordante, alors $\tau^{\#} \in \mathcal{H}om(A^{\#},C^{\#})$ l'est aussi et il existe un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées augmentées*

$$\mathcal{H}om^{\tau}(C,A) \longrightarrow \mathcal{H}om^{\tau^{\#}}(A^{\#},C^{\#}) \tag{5.6.1}$$

donné par $\phi \mapsto \phi^{\#}$. À partir de cet isomorphisme, le bimodule différentiel gradué $C^{\#} \otimes_{\tau^{\#}} A^{\#}$ sur $\mathcal{H}om^{\tau^{\#}}(A^{\#},C^{\#})$ devient un bimodule différentiel gradué sur $\mathcal{H}om^{\tau}(C,A)$. En outre, l'application

$$C^{\#} \otimes_{\tau^{\#}} A^{\#} \longrightarrow (A \otimes_{\tau} C)^{\#} \tag{5.6.2}$$

donnée par $(g \otimes f) \mapsto ((a \otimes c) \mapsto f(a)g(c))$ est un isomorphisme de bimodules différentiels gradués sur $\mathcal{H}om^{\tau}(C,A)$.

5.6.3. Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k. D'après B. Keller, on rappelle que le *dual de Koszul* de A est l'algèbre différentielle graduée augmentée $B^{+}(A)^{\#}$, où $B^{+}(A)$ est la construction bar de A (voir [Kel94], Section 10.2). On va dénoter le dual de Koszul de A par $E(A)$.

5.6.4. On suppose désormais que A est munie d'une graduation supplémentaire, typiquement appelée graduation d'Adams, de sorte que A est Adams connexe (voir [LPWZ08]). Par ailleurs, on rappelle qu'il existe un quasi-isomorphisme canonique $E(E(A)) \to A$ d'algèbres différentielles graduées augmentées : à des identifications près, il s'agit de la counité de la paire des foncteurs adjoints donnée par la construction bar et la construction cobar. Si l'on prend le dual gradué de l'application précédente, on trouve un quasi-isomorphisme $\hat{\beta}_A : A^{\#} \to B^{+}(E(A))$ de cogèbres différentielles graduées coaugmentées.

Le premier résultat important de l'article [Her16b] est le théorème suivante.

5.6.5 Théorème ([Her16b], Thm. 3.3). *Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k et munie d'une graduation supplémentaire (appelée graduation d'Adams) de sorte que A est Adams connexe. On a un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées augmentées*

$$\mathcal{H}om^{\tau_{E(A)}}\Big(B^{+}\big(E(A)\big), E(A)\Big) \to \mathcal{H}om^{\tau_A}\Big(B^{+}(A), A\Big) \tag{5.6.3}$$

donné par la composition de l'application $\phi \mapsto \phi \circ \hat{\beta}_A$ et (5.6.1). *Par conséquent,* (5.6.3) *induit un isomorphisme $HH^{\bullet}(E(A)) \to HH^{\bullet}(A)$ d'algèbres différentielles graduées augmentées.*

Par ailleurs, on a un quasi-isomorphisme

$$\Big(A \otimes_{\tau_A} B^{+}(A)\Big)^{\#} \to E(A) \otimes_{\tau_{E(A)}} B^{+}\Big(E(A)\Big) \tag{5.6.4}$$

de bimodules différentiels gradués sur $\mathcal{H}om^{\tau_{E(A)}}(B^{+}(E(A)), E(A))$ dont le domaine est un bimodule différentiel gradué sur $\mathcal{H}om^{\tau_{E(A)}}(B^{+}(E(A)), E(A))$ via (5.6.3). *Il est donné par la composition de l'identification canonique $(A \otimes_{\tau_A} B^{+}(A))^{\#} \simeq E(A) \otimes_{\tau_A^{\#}} A^{\#}$ (voir* (5.6.2)*) et $\mathrm{id} \otimes \hat{\beta}_A$. Par conséquent, on a un isomorphisme $HH_{\bullet}(A)^{\#} \to HH_{\bullet}(E(A))$ de bimodules gradués sur $HH^{\bullet}(E(A))$.*

La preuve du théorème précédent est immédiate à partir de la description de la cohomologie de Hochschild et de l'homologie de Hochschild dans le Fait 5.1.4.

5.6.6 Théorème ([Her16b], Thm. 3.4). *Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k et Adams connexe, comme dans le théorème précédent. L' isomorphisme*

$$HH^{\bullet}\big(E(A)\big) \to HH^{\bullet}(A) \tag{5.6.5}$$

induit par le quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées augmentées (5.6.3) *est compatible avec les crochets de Gerstenhaber, i.e. il s'agit d'un isomorphisme d'algèbres de Gerstenhaber.*

La preuve du résultat précédent se base dans la construction d'une comparaison entre les complexes qui calculent les cohomologies de Hochschild respectives à partir de la résolution bar réduite décrite dans le Fait 5.1.4.

5.6.7. Soit Λ une algèbre différentielle graduée augmentée. On rappelle que l'opérateur de Connes B_Λ est l'endomorphisme de degré cohomologique -1 du complexe $\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$ donné par

$$B_\Lambda\big(\lambda_0 \otimes [\lambda_1|\ldots|\lambda_n]\big) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{\epsilon_{i+1}\epsilon^i} 1_\Lambda \otimes [\lambda_{i+1}|\ldots|\lambda_n|\lambda_0|\ldots|\lambda_i], \tag{5.6.6}$$

où $\lambda_j \in \Lambda$, pour $j = 0,\ldots,n$, $\epsilon_i = (\sum_{j=0}^{i-1} \deg \lambda_j) - i$ et $\epsilon^i = (\sum_{j=i+1}^{n} \deg \lambda_j) - n + i$ (voir [Tsy04], Section 2.1, (11)). On considère l'algèbre différentielle graduée augmentée $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, où ε a degré cohomologique -1 (et degré d'Adams zéro) et la différentielle est triviale. Il s'agit donc d'une algèbre commutative au sens gradué. L'opérateur de Connes B_Λ définit une action à gauche de $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ sur $\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$ via $\varepsilon \cdot v = B_\Lambda(v)$ et donc une action à droite via l'identité $v \cdot \varepsilon = (-1)^{\deg v} \varepsilon \cdot v$, pour $v \in \Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$ homogène. En effet, il s'agit d'une conséquence des identités $B_\Lambda^2 = 0$ et $B_\Lambda \circ D' = -D' \circ B_\Lambda$, où D' est la différentielle de $\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$ (voir [Tsy04], Prop 2.1). En outre, ces deux actions commutent et alors $\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$ est un bimodule différentiel gradué sur $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Par conséquent, $HH_\bullet(\Lambda)$ est un bimodule gradué sur $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Enfin, étant donné un bimodule différentiel gradué M sur $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, on va utiliser la convention suivante (seulement d'intérêt dans le cas $M = \Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$) pour l'action à gauche sur le dual gradué $M^\#$ (et donc aussi pour l'action à droite via la règle de signes de Koszul) :

$$(\varepsilon \cdot f)(m) = -(-1)^{\deg f} f(\varepsilon m). \tag{5.6.7}$$

Noter que le choix de signes provient de regarder $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ comme l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie graduée $k.\varepsilon$.

5.6.8 Proposition ([Her16b], Prop. 3.5)**.** *Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k et Adams connexe, comme dans le théorème précédent. On regarde $HH_\bullet(A)^\#$ et $HH_\bullet(E(A))$ comme des bimodules gradués sur $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Alors, l'isomorphisme*

$$HH_\bullet(A)^\# \to HH_\bullet\big(E(A)\big) \tag{5.6.8}$$

induit par le quasi-isomorphisme (5.6.4) *est un morphisme de modules gradués sur $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$.*

5.6.9. Soit Λ une algèbre différentielle graduée augmentée. On rappelle que les actions à gauche et à droite de l'algèbre de Lie graduée $HH^\bullet(\Lambda)[1]$ sur le module de Lie $HH_\bullet(\Lambda)$ sont données par les commutateurs gradués des actions correspondantes de l'algèbre $\mathcal{H}om^{\tau_\Lambda}(B^+(\Lambda),\Lambda)$ sur $\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$ avec l'opérateur de Connes B_Λ. En effet, l'action de Lie à gauche de $\phi \in \mathcal{H}om^{\tau_\Lambda}(B^+(\Lambda),\Lambda)$ sur $\bar\lambda \in \Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda)$, qui sera dénotée par $L_\phi(\bar\lambda)$, est donnée par $L_\phi(\bar\lambda) = \varepsilon \cdot (\phi \cdot \bar\lambda) - (-1)^{\deg \phi} \phi \cdot (\varepsilon \cdot \bar\lambda)$. L'action à gauche sur l'espace dual gradué $(\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda))^\#$ est donnée par la formule usuelle de la théorie des représentations de Lie : $L_\phi(\bar\lambda') = -(-1)^{\deg \bar\lambda' \deg \phi} \bar\lambda' \circ L_\phi$, où $\bar\lambda' \in (\Lambda \otimes_{\tau_\Lambda} B^+(\Lambda))^\#$ (voir [Tsy04], Sections 2 et 4).

5.6.10 Théorème ([Her16b], Thm. 3.6)**.** *Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k et Adams connexe, comme dans la proposition précédente. Alors, l'isomorphisme* (5.6.8) *est un isomorphisme de modules de Gerstenhaber sur $HH^\bullet(E(A))$, i.e. est un isomorphisme de bimodules gradués sur $HH^\bullet(E(A))$ et un isomorphisme de modules de Lie sur sur $HH^\bullet(E(A))[1]$. En outre, avec cette identification l'opérateur de Connes dans $HH_\bullet(E(A))$ se correspond avec moins le dual de l'opérateur de Connes de $HH_\bullet(A)$.*

Le théorème précédent est une conséquence directe des définitions rappelées dans 5.6.9, du Théorème 5.6.5 et de la Proposition 5.6.8.

5.6.11. On rappelle la définition suivante introduite dans [Her16b], Section 3.5. On dit qu'un calcul de Tamarkin-Tsygan $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{H}_\bullet, \tilde{d})$ est *dual* à un autre calcul de Tamarkin-Tsygan $(H^\bullet, H_\bullet, d)$ s'il existe une paire (f, g) où $f : \tilde{H}^\bullet \to H^\bullet$ est un isomorphisme d'algèbres de Gerstenhaber, $g : H_\bullet^\# \to \tilde{H}_\bullet$ est un isomorphisme de modules de Gerstenhaber sur $\tilde{H}^\bullet$ tel que $\tilde{d} \circ g = -g \circ d^\#$, où $H_\bullet$ est un module de Gerstenhaber sur $\tilde{H}^\bullet$ via f. La conclusion finale de l'article [Her16b] est la suivante.

5.6.12 Corollaire ([Her16b], Cor. 3.7)**.** *Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k et Adams connexe, comme dans le théorème précédent. Alors, le calcul de Tamarkin-Tsygan de $E(A)$ est dual à celui de A.*

5.7 Perspective par rapport au calcul de Tamarkin-Tsygan et la dualité de Koszul

Une question assez naturelle c'est si le Corollaire 5.6.12 est valable sans l'hypothèse que l'algèbre A soit augmentée. Comme mentionné dans la Section 5.5, dans ce cas il existe une notion de dualité de Koszul due à Positselski et le dual de Koszul d'une algèbre différentielle graduée unifère non augmentée est une algèbre différentielle graduée unifère non augmentée courbée. Il serait intéressant d'étudier s'il existe une notion naturelle de calcul de Tamarkin-Tsygan pour le cas courbé et si l'on peut démontrer une dualité entre les calculs de Tamarkin-Tsygan correspondants. En outre, il serait intéressant de savoir si la dualité entre les calculs de Tamarkin-Tsygan des algèbres différentielles graduées (augmentées) est en fait l'ombre d'une dualité plus canonique au niveau des structures fortement homotopiques des complexes de la cohomologie et l'homologie de Hochschild des algèbres duales de Koszul. En fait, le quasi-isomorphisme entre les structures de B_∞-algèbres des complexes de cohomologie de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée augmentée et son dual de Koszul peut se déduire des résultats de Keller dans [Kel03]. Par contre, il n'est pas clair comment procéder pour l'homologie de Hochschild.

Chapitre 6

La théorie de la renormalisation en théorie quantique des champs d'après R. Borcherds

6.0.1. Dans l'article [Bor11], R. Borcherds a introduit un nouveau point de vue sur la théorie quantique des champs. Il partage par contre plusieurs points d'intersection avec des travaux précédents, *e.g.* ceux de E. Stueckelberg et A. Peterman dans [SP53], de O. Steinmann dans [Ste71], de H. Epstein et V. Glaser dans [EG73], de R. Brunetti et K. Fredenhagen dans [BF00], de S. Hollands et R. Wald dans [HW01,HW02] entre d'autres. Néanmoins, il existe quelques mérites dans l'exposition de Borcherds qui ne se trouvent pas en principe dans les autres articles. Par exemple, les constructions que l'on va considérer sont très générales et n'exigent pas que l'espace-temps soit globalement hyperbolique. En outre, il n'est pas nécessaire d'imposer de condition de finitude sur n'importe quel degré d'homogénéité des distributions involucrées (voir [Her17d], Rk. 6.0.10).

6.1 La théorie quantique des champs en deux mots

6.1.1. On va procéder maintenant à décrire quelques ingrédients de la théorie quantique des champs. On expliquera seulement ce dont on aura besoin dans la suite. On fixe désormais une variété différentielle réelle M de dimension finie n, un fibré vectoriel (réel ou complexe) E sur M de rang r et un nombre entier $i \in \mathbb{N}$. On suppose que M est muni d'un ordre partiel $\leq \subseteq M \times M$ (*i.e.* une relation réflexive, antisymétrique et transitive) qui est *fermé* (*i.e.* $\leq$ est une partie fermée de $M \times M$). L'ordre $\leq$ est appelé la *relation causale* de l'espace-temps M. Deux parties $Z, Z' \subseteq M$ sont dites *séparées de genre espace* si $((Z \times Z') \cup (Z' \times Z)) \cap \leq = \emptyset$. Ce choix sera appelé la *donnée (initiale) de la théorie quantique des champs (QFT) d'ordre i*.

6.1.2. On dénote par $J^i E$ le *fibré des jets d'ordre i de E* et par $\Gamma(E)$ les sections globales (C^∞) de E, que l'on appelle *l'espace des champs classiques*. On définit alors l'*espace des dérivées (d'ordre i) des champs classiques* par $\Gamma(J^i E)$, l'*espace des lagrangiens (d'ordre i)* par $S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$ et l'*espace des densités lagrangiennes (d'ordre i)* par $\Gamma(\mathrm{Vol}(M)) \otimes_{C^\infty(M)} S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$, où $\mathrm{Vol}(M)$ dénote le fibré vectoriel (de rang 1) de densités de M. On remarque que, étant donné un $C^\infty(M)$-module X, $S_{C^\infty(M)}X$ est l'algèbre symétrique de X dans la catégorie monoïdale des $C^\infty(M)$-modules. On va dénoter $\Gamma(\mathrm{Vol}(M)) \otimes_{C^\infty(M)} S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$ par $\mathscr{L}_i(M,E)$ et $\Gamma_c(\mathrm{Vol}(M)) \otimes_{C^\infty(M)} S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$ par $\mathscr{L}_{i,c}(M,E)$. On veut remarquer que ces espaces sont naturellement munis d'une topologie localement convexe bornologique et complète. Finalement, on définit l'*espace des actions (non locales)* comme l'algèbre symétrique $\tilde{S}\mathscr{L}_i(M,E)$ de l'espace sous-jacent à $\mathscr{L}_i(M,E)$ dans la catégorie monoïdale CLCS_{HD} des espaces localement convexes convenables munie du produit tensoriel convenable $\tilde{\otimes}_\beta$.

6.1.3 Définition. *D'après* [Bor11], *Def. 9, on définit une* mesure de Feynman *ω comme une fonctionnelle linéaire continue $\omega : \tilde{S}\mathscr{L}_{i,c}(M,E) \to \mathbb{C}$ satisfaisant $\omega(1_S) = 1$.*

6.1.4. En physique par contre, on n'est pas intéressé à toutes les mesures de Feynman dans la définition précédente, mais seulement à celles qui peuvent se construire à partir d'autres objets plus simples, appelés *propagateurs* et qui forment les briques fondamentaux de la théorie.

6.1.5 Définition. *Un* propagateur Δ *associé à une donnée initiale de QFT d'ordre i est une application bilinéaire continue*

$$\Delta : \Gamma_c\Big(\mathrm{Vol}(M)\otimes J^i E\Big)\tilde{\otimes}_\beta \Gamma_c\Big(\mathrm{Vol}(M)\otimes J^i E\Big) \to \mathbb{C}.$$

On dénote l'espace des propagateur par $\mathrm{Prop}_i(M,E)$*. Il s'agit d'un* $C^\infty(M\times M)$*-module. Un propagateur* Δ *est dit* local *si* $\Delta(\sigma,\sigma') = \Delta(\sigma',\sigma)$*, pour tous* $\sigma,\sigma' \in \Gamma_c(\mathrm{Vol}(M)\otimes J^i E)$ *dont les supports sont séparés de genre espace.*

6.1.6. On va utiliser la description suivante de l'espace des propagateurs.

6.1.7 Lemme ([Her17d], Lemma 5.4.3)**.** *Il existe un isomorphisme* $C^\infty(M\times M)$*-linéaire et continue*

$$\mathrm{Prop}_i(M,E) \simeq \mathfrak{Hom}_{C^\infty(M)\tilde{\otimes}_\beta C^\infty(M)}\Big(\Gamma(J^iE)\tilde{\otimes}_\beta\Gamma(J^iE), \mathscr{D}'(M\times M)\Big), \tag{6.1.1}$$

où $\mathscr{D}'(M\times M)$ *indique l'espace des distributions sur* $M\times M$ *au sens de L. Hörmander (voir* [Hör03]*) et* $\mathfrak{Hom}$ *dénote l'espace des applications continues et* $C^\infty(M)\tilde{\otimes}_\beta C^\infty(M)$*-linéaires. En plus, le codomaine de* (6.1.1) *est isomorphe à l'espace* $\mathscr{D}'(M\times M, (J^iE\boxtimes J^iE)^*)$ *des distributions à valeurs dans les sections du fibré* $(J^iE\boxtimes J^iE)^*$.

6.1.8. On aura besoin d'une condition sur le propagateur Δ qui permette le produit des distributions dans l'image de l'application associée (6.1.1). Cette condition fait intervenir la notion de *front d'onde* $\mathrm{WF}(\Delta(\sigma,\sigma'))$ de l'évaluation de la distribution associée à Δ en $\sigma,\sigma' \in \Gamma(J^iE)$. Pour la définition du front d'onde d'une distribution et ses propriétés, voir [Hör03], Ch. 8.

6.1.9 Définition. *D'après* [Bor11]*, Def. 7, on dit qu'un propagateur* $\Delta \in \mathrm{Prop}_i(M,E)$ *est* pré-coupe *avec une famille de cônes propres fermés et convexes* $\{\mathscr{P}_p\}_{p\in M}$*, où* $\mathscr{P}_p \subseteq T_p^*M$*, si*

- *(i) pour tout* $(v,w)\in \mathrm{WF}_{(p,q)}(\Delta)$ *avec* $(p,q)\in M\times M$*, on a* $-v\in\mathscr{P}_p$ *et* $w\in\mathscr{P}_q$*, et en plus* Δ *s'écrit comme une somme infinie d'éléments* $u\otimes u'$*, où* $u,u'\in\mathscr{D}'(M,(J^iE)^*)$ *tels que* $\mathrm{WF}_p(u)\subseteq -\mathscr{P}_p$ *et* $\mathrm{WF}_q(u')\subseteq\mathscr{P}_q$ *; pour tous* $p,q\in M$ *;*
- *(ii) pour tout* $(v,w)\in\mathrm{WF}_{(p,p)}(\Delta)$ *avec* $p\in M$*, on a* $w=-v$*.*

6.1.10. La seule information que l'on veut retenir de la définition précédente c'est que les distributions qui vont bientôt apparaître pourront être multipliées grâce à la condition introduite avant. On voit bien que l'on peut aussi introduire d'autres conditions sur le propagateurs pour que les produits des distributions induites soient bien définis. En fait, dans [Her17d] on a aussi besoin de considérer le cas où les distributions induites par Δ sont des fonctions continues et l'on utilise le produit usuel pour ces fonctions. Pourtant, dans ce mémoire on va se restreindre à considérer seulement le cas pré-coupe pour simplifier, bien que les arguments et les constructions soient les mêmes.

6.1.11. Soit $\Delta\in\mathrm{Prop}_i(M,E)$ un propagateur pré-coupe et soit $\bar{\Delta}\in\mathfrak{Hom}_{C^\infty(M)\otimes C^\infty(M)}(\Gamma(J^iE)\otimes\Gamma(J^iE),\mathscr{D}'(M\times M))$ l'application donnée par le Lemme 6.1.7. D'après [Bor11], $\bar{\Delta}$ induit une unique application

$$\tilde{\Delta}\in\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)\otimes C^\infty(M)}\Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\otimes S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE),\mathscr{D}'(M\times M)\Big)$$

donnée par $\tilde{\Delta}(1_M,1_M)=1_{M^2}$, où $1_M\in C^\infty(M)$ est la fonction constante unité de M et de même pour 1_{M^2}, $\tilde{\Delta}(1_M,\sigma_1\dots\sigma_n)=0$ pour tous $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in\Gamma(J^iE)$ et $n\in\mathbb{N}^*$, et

$$\tilde{\Delta}(\sigma_1\dots\sigma_n,\tau_1\dots\tau_m)=\begin{cases}\sum_{\varsigma\in\mathbb{S}_n}\bar{\Delta}(\sigma_1,\tau_{\varsigma(1)})\dots\bar{\Delta}(\sigma_n,\tau_{\varsigma(n)}), & \text{si } n=m\in\mathbb{N}^*,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases} \tag{6.1.2}$$

pour tous $\sigma_1,\dots,\sigma_n,\tau_1,\dots,\tau_m\in\Gamma(J^iE)$ et $n,m\in\mathbb{N}^*$.

6.1.12. Le point important que l'on veut traiter dans ce mémoire c'est l'affirmation suivante : dans le paragraphe avant la Déf. 9 dans [Bor11], Borcherds dit essentiellement qu'il construit des applications

$$\check{\Delta}^{m,m'}:\tilde{S}^m\Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)\tilde{\otimes}_\beta\tilde{S}^{m'}\Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)\longrightarrow\mathscr{D}'(M^m\times M^{m'}) \tag{6.1.3}$$

pour tous $m, m' \in \mathbb{N}$, à partir de l'application $\tilde{\Delta}$, de sorte que $\check{\Delta} = \oplus_{m,m'\in\mathbb{N}} \check{\Delta}^{m,m'}$ est un *couplage de Laplace*. Ce couplage de Laplace serait fondamental dans la définition de mesure de Feynman associée à un propagateur (voir [Bor11], Def. 9, ou sinon [Her17d], Def. 5.7.9). La notion de couplage de Laplace est connue avec plusieurs noms différents, *e.g.* structure co-quasi-triangulaire (sans la condition d'inversibilité), bicaractère ; et il semble qu'elle a été introduite pour la première fois par P. Doubilet, G.-C. Rota et J. Stein (voir [DRS74], Section 7, (1)). Il s'agit d'une application $\langle\,,\rangle : C \otimes C \to A$ dans une catégorie monoïdale $\mathscr{C}$, où C est une bigèbre (avec unité η_C et counité ϵ_C) et A est une algèbre (avec unité η_A), qui satisfait que

$$\langle cc', d\rangle = \langle c, d_{(1)}\rangle \cdot \langle c', d_{(2)}\rangle, \quad \langle c, dd'\rangle = \langle c_{(1)}, d\rangle \cdot \langle c_{(2)}, d'\rangle,$$
$$\langle\,,\rangle \circ (\eta_C \otimes \mathrm{id}_C) = \langle\,,\rangle \circ (\mathrm{id}_C \otimes \eta_C) = \eta_A \circ \epsilon_C,$$

pour tous $c, c', d, d' \in C$, où l'on utilise la notation de Sweedler $\Delta_C(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ et $\Delta_C(d) = d_{(1)} \otimes d_{(2)}$ pour le coproduit de C. On a écrit pour simplicité la définition pour le cas d'une catégorie monoïdale $\mathscr{C}$ concrète, mais le cas général est clair. Pour une très belle explication du rôle des couplages de Laplace dans QFT (de dimension zéro), voir l'article [BFFO04] de C. Brouder, B. Fauser, A. Frabetti et R. Oeckl.

6.1.13. Il existe par contre un problème avec l'affirmation de Borcherds : $C = \tilde{S}(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E))$ est une algèbre pour le produit tensoriel convenable $\tilde{\otimes}_\beta$ sur k, tandis que la structure de cogèbre de $S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$ est avec le produit tensoriel $\otimes_{C^\infty(M)}$, ce qui ne s'étend pas de façon canonique à une structure de cogèbre pour C par rapport à un produit tensoriel (en principe inconnu), qui est différent de $\tilde{\otimes}_\beta$. Cela indique déjà que la notion de bigèbre que C devrait porter ne se réalise pas dans une catégorie monoïdale, mais dans une catégorie avec deux produits tensoriels *a priori* différents. En outre, il n'est pas possible de construire "de façon naturelle" une structure de cogèbre sur C qui étend le coproduit de $S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$. C'est pour ça que l'on va utiliser la cogèbre tensorielle $C = \tilde{T}(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E))$ à la place. Le fait que ce choix est en fait compatible avec toutes les autres constructions de la théorie quantique des champs que l'on a étudié dans [Her17d] est loin d'être évident.

6.2 Les catégories 2-monoïdales encadrées

6.2.1. La définition suivante peut se trouver dans [AM10], 6.1.

6.2.2 Définition. *Une* catégorie monoïdale double *est un quintuplet* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_\otimes, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_\boxtimes)$, *où* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_\otimes)$ *et* $(\mathscr{C}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_\boxtimes)$ *sont des catégories monoïdales. Elle est dite* symétrique *s'il existe en plus un morphisme naturel* τ *tel que* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_\otimes, \tau)$ *est une catégorie symétrique monoïdale. Une* catégorie 2-monoïdale *est une catégorie monoïdale double munie d'un morphisme naturel*

$$\mathrm{sh}_{A,B,C,D} : (A \otimes_{\mathscr{C}} B) \boxtimes_{\mathscr{C}} (C \otimes_{\mathscr{C}} D) \to (A \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \otimes_{\mathscr{C}} (B \boxtimes_{\mathscr{C}} D) \tag{6.2.1}$$

dans $\mathscr{C}$ *et trois morphismes*

$$\mu_\boxtimes : I_\otimes \boxtimes_{\mathscr{C}} I_\otimes \to I_\otimes, \quad \Delta_\otimes : I_\boxtimes \to I_\boxtimes \otimes_{\mathscr{C}} I_\boxtimes \quad \textit{et} \quad \nu : I_\boxtimes \to I_\otimes, \tag{6.2.2}$$

dans $\mathscr{C}$ *qui satisfont les conditions suivantes. On dénotera les isomorphismes d'associativité et les unités à gauche et à droite de* $(\mathscr{C}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_\boxtimes)$ *par* $a^\boxtimes_{X,Y,Z}$, $\ell^\boxtimes_X$ *et* $r^\boxtimes_X$, *respectivement, et ceux de* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_\otimes)$ *par* $a^\otimes_{X,Y,Z}$, $\ell^\otimes_X$ *et* $r^\otimes_X$, *respectivement.*

(i) Étant donné des objets $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ de $\mathscr{C}$, les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \big((X_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_1) \boxtimes_{\mathscr{C}} (X_2 \otimes_{\mathscr{C}} Y_2)\big) \boxtimes_{\mathscr{C}} (X_3 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3) \arrow[dl, "\mathrm{sh}_{X_1,Y_1,X_2,Y_2} \boxtimes_{\mathscr{C}} \mathrm{id}_{X_3 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3}"'] \arrow[dr, "a^{\boxtimes}_{X_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_1, X_2 \otimes_{\mathscr{C}} Y_2, X_3 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3}"] & \\
\big((X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} X_2) \otimes_{\mathscr{C}} (Y_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_2)\big) \boxtimes_{\mathscr{C}} (X_3 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3) \arrow[d, "\mathrm{sh}_{X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} X_2, Y_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_2, X_3, Y_3}"'] & & (X_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_1) \boxtimes_{\mathscr{C}} \big((X_2 \otimes_{\mathscr{C}} Y_2) \boxtimes_{\mathscr{C}} (X_3 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}_{X_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_1} \boxtimes_{\mathscr{C}} \mathrm{sh}_{X_2,Y_2,X_3,Y_3}"] \\
\big((X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} X_2) \boxtimes_{\mathscr{C}} X_3\big) \otimes_{\mathscr{C}} \big((Y_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_2) \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3\big) \arrow[dr, "a^{\boxtimes}_{X_1,X_2,X_3} \otimes_{\mathscr{C}} a^{\boxtimes}_{Y_1,Y_2,Y_3}"'] & & (X_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_1) \boxtimes_{\mathscr{C}} \big((X_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} X_3) \otimes_{\mathscr{C}} (Y_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3)\big) \arrow[dl, "\mathrm{sh}_{X_1,Y_1,X_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} X_3, Y_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3}"] \\
& \big(X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} (X_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} X_3)\big) \otimes_{\mathscr{C}} \big(Y_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} (Y_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3)\big) &
\end{tikzcd} \tag{6.2.3}$$

et

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \big((X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_1) \otimes_{\mathscr{C}} (X_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_2)\big) \otimes_{\mathscr{C}} (X_3 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3) \arrow[dr, "a^{\otimes}_{X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_1, X_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_2, X_3 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3}"] & \\
\big((X_1 \otimes_{\mathscr{C}} X_2) \boxtimes_{\mathscr{C}} (Y_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_2)\big) \otimes_{\mathscr{C}} (X_3 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3) \arrow[ur, "\mathrm{sh}_{X_1,X_2,Y_1,Y_2} \otimes_{\mathscr{C}} \mathrm{id}_{X_3 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3}"] & & (X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_1) \otimes_{\mathscr{C}} \big((X_2 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_2) \otimes_{\mathscr{C}} (X_3 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_3)\big) \\
\big((X_1 \otimes_{\mathscr{C}} X_2) \otimes_{\mathscr{C}} X_3\big) \boxtimes_{\mathscr{C}} \big((Y_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_2) \otimes_{\mathscr{C}} Y_3\big) \arrow[u, "\mathrm{sh}_{X_1 \otimes_{\mathscr{C}} X_2, X_3, Y_1 \otimes_{\mathscr{C}} Y_2, Y_3}"] \arrow[dr, "a^{\otimes}_{X_1,X_2,X_3} \boxtimes_{\mathscr{C}} a^{\otimes}_{Y_1,Y_2,Y_3}"'] & & (X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_1) \otimes_{\mathscr{C}} \big((X_2 \otimes_{\mathscr{C}} X_3) \boxtimes_{\mathscr{C}} (Y_2 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3)\big) \arrow[u, "\mathrm{id}_{X_1 \boxtimes_{\mathscr{C}} Y_1} \otimes_{\mathscr{C}} \mathrm{sh}_{X_2,X_3,Y_2,Y_3}"'] \\
& \big(X_1 \otimes_{\mathscr{C}} (X_2 \otimes_{\mathscr{C}} X_3)\big) \boxtimes_{\mathscr{C}} \big(Y_1 \otimes_{\mathscr{C}} (Y_2 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3)\big) \arrow[ur, "\mathrm{sh}_{X_1, X_2 \otimes_{\mathscr{C}} X_3, Y_1, Y_2 \otimes_{\mathscr{C}} Y_3}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.2.4}$$

sont commutatifs.

(ii) Le triplet $(I_{\otimes}, \mu_{\boxtimes}, \nu)$ est une algèbre unifère dans la catégorie monoïdale $(\mathscr{C}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes})$ et le triplet $(I_{\boxtimes}, \Delta_{\otimes}, \nu)$ est une cogèbre counifère dans la catégorie monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes})$.

(iii) Pour toute paire d'objets X et Y dans $\mathscr{C}$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
I_{\boxtimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} (X \otimes_{\mathscr{C}} Y) \arrow[r, "\Delta_{\otimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} \mathrm{id}_{X \otimes_{\mathscr{C}} Y}"] \arrow[d, "\ell^{\boxtimes}_{X \otimes_{\mathscr{C}} Y}", "\wr"'] & (I_{\boxtimes} \otimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes}) \boxtimes_{\mathscr{C}} (X \otimes_{\mathscr{C}} Y) \arrow[d, "\mathrm{sh}_{I_{\boxtimes}, I_{\boxtimes}, X, Y}"] \\
X \otimes_{\mathscr{C}} Y \arrow[r, "(\ell^{\boxtimes}_X \otimes_{\mathscr{C}} \ell^{\boxtimes}_Y)^{-1}", "\sim"'] & (I_{\boxtimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} X) \otimes_{\mathscr{C}} (I_{\boxtimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X \otimes_{\mathscr{C}} Y) \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes} \arrow[r, "\mathrm{id}_{X \otimes_{\mathscr{C}} Y} \boxtimes_{\mathscr{C}} \Delta_{\otimes}"] \arrow[d, "r^{\boxtimes}_{X \otimes_{\mathscr{C}} Y}", "\wr"'] & (X \otimes_{\mathscr{C}} Y) \boxtimes_{\mathscr{C}} (I_{\boxtimes} \otimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes}) \arrow[d, "\mathrm{sh}_{X, Y, I_{\boxtimes}, I_{\boxtimes}}"] \\
X \otimes_{\mathscr{C}} Y \arrow[r, "(r^{\boxtimes}_X \otimes_{\mathscr{C}} r^{\boxtimes}_Y)^{-1}", "\sim"'] & (X \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes}) \otimes_{\mathscr{C}} (Y \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes})
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
(I_{\otimes} \otimes_{\mathscr{C}} X) \boxtimes_{\mathscr{C}} (I_{\otimes} \otimes_{\mathscr{C}} Y) \arrow[r, "\ell^{\otimes}_X \boxtimes_{\mathscr{C}} \ell^{\otimes}_Y", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{sh}_{I_{\otimes}, X, I_{\otimes}, Y}"] & X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y \arrow[d, "(\ell^{\otimes}_{X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y})^{-1}", "\wr"'] \\
(I_{\otimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes}) \otimes_{\mathscr{C}} (X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y) \arrow[r, "\mu_{\boxtimes} \otimes_{\mathscr{C}} \mathrm{id}_{X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y}"] & I_{\otimes} \otimes_{\mathscr{C}} (X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X \otimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes}) \boxtimes_{\mathscr{C}} (Y \otimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes}) \arrow[r, "r^{\otimes}_X \boxtimes_{\mathscr{C}} r^{\otimes}_Y", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{sh}_{X, I_{\otimes}, Y, I_{\otimes}}"] & X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y \arrow[d, "(r^{\otimes}_{X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y})^{-1}"', "\wr"] \\
(X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y) \otimes_{\mathscr{C}} (I_{\otimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y} \otimes_{\mathscr{C}} \mu_{\boxtimes}"] & (X \boxtimes_{\mathscr{C}} Y) \otimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes}
\end{tikzcd}$$

commutent.

De plus, on dit qu'une catégorie 2-monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes}, \mathrm{sh})$ *est* symétrique *si la catégorie monoïdale* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes})$ *est munie d'une tresse symétrique* τ *telle que* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \tau)$ *est une catégorie monoïdale symétrique,* $(I_{\boxtimes}, \Delta_{\otimes}, \nu)$ *est une cogèbre counifère cocommutative dans* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \tau)$ *et pour tout 4-uplet d'objets A, B, C et D dans* $\mathscr{C}$ *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes_{\mathscr{C}} B) \boxtimes_{\mathscr{C}} (C \otimes_{\mathscr{C}} D) \arrow[r, "\mathrm{sh}_{A,B,C,D}"] \arrow[d, "\tau(A,B)\otimes\tau(C,D)"] & (A \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \otimes_{\mathscr{C}} (B \boxtimes_{\mathscr{C}} D) \arrow[d, "\tau(A\boxtimes_{\mathscr{C}} C, B\boxtimes_{\mathscr{C}} D)"] \\
(B \otimes_{\mathscr{C}} A) \boxtimes_{\mathscr{C}} (D \otimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[r, "\mathrm{sh}_{B,A,D,C}"] & (B \boxtimes_{\mathscr{C}} D) \otimes_{\mathscr{C}} (A \boxtimes_{\mathscr{C}} C)
\end{tikzcd} \tag{6.2.5}$$

commute. [1]

6.2.3 Définition ([Her17d], Def. 3.2.6)**.** *Une catégorie 2-monoïdale symétrique* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \tau, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes}, \mathrm{sh})$ *est dite* encadrée *s'il existe une catégorie monoïdale* $(\mathscr{C}', \boxtimes_{\mathscr{C}'}, I'_{\boxtimes}, \tau')$ *et un foncteur fidèle* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ *qui est monoïdal faible et symétrique pour la structure monoïdale symétrique* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \tau)$ *avec les morphismes de cohérence* φ_0 *et* φ_2*, et qui est monoïdal strict pour* $(\mathscr{C}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes})$ *avec les isomorphismes de cohérence* ψ_0 *et* ψ_2*, tels que*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(B) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(D) \arrow[r, "\varphi_2(A,B)\boxtimes_{\mathscr{C}'}\varphi_2(C,D)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(A)}\boxtimes_{\mathscr{C}'}\tau'_{\boxtimes}(F(B),F(C))\boxtimes_{\mathscr{C}'}\mathrm{id}_{F(D)}"] & F(A \otimes_{\mathscr{C}} B) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C \otimes_{\mathscr{C}} D) \arrow[d, "\psi_2(A\otimes_{\mathscr{C}} B, C\otimes_{\mathscr{C}} D)"', "\wr"] \\
F(A) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(B) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(D) \arrow[d, "\psi_2(A,C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}\psi_2(B,D)", "\wr"'] & F\big((A \otimes_{\mathscr{C}} B) \boxtimes_{\mathscr{C}} (C \otimes_{\mathscr{C}} D)\big) \arrow[d, "F(\mathrm{sh}_{A,B,C,D})"] \\
F(A \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(B \boxtimes_{\mathscr{C}} D) \arrow[r, "\varphi_2(A\boxtimes_{\mathscr{C}} C, D\boxtimes_{\mathscr{C}} D)"] & F\big((A \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \otimes_{\mathscr{C}} (B \boxtimes_{\mathscr{C}} D)\big)
\end{tikzcd} \tag{6.2.6}$$

commute pour tous les objets A, B, C et D de $\mathscr{C}$*, ainsi que*

$$\begin{tikzcd}
I'_{\boxtimes} \boxtimes_{\mathscr{C}'} I'_{\boxtimes} \arrow[r, "\ell'_{I'_{\boxtimes}}", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi_0\boxtimes_{\mathscr{C}'}\varphi_0"'] & I'_{\boxtimes} \arrow[dd, "\varphi_0"] \\
F(I_{\otimes}) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(I_{\otimes}) \arrow[d, "\psi_2(I_{\otimes},I_{\otimes})"', "\wr"] & \\
F(I_{\otimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes}) \arrow[r, "F(\mu_{\boxtimes})"] & F(I_{\otimes})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I'_{\boxtimes} \arrow[dr, "\varphi_0"] \arrow[dd, "\psi_0"', "\wr"] & \\
& F(I_{\otimes}) \\
F(I_{\boxtimes}) \arrow[ur, "F(\nu)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I'_{\boxtimes} \arrow[r, "\psi_0", "\sim"'] \arrow[d, "(\ell'_{I'_{\boxtimes}})^{-1}"', "\wr"] & F(I_{\boxtimes}) \arrow[dd, "F(\Delta_{\otimes})"] \\
I'_{\boxtimes} \boxtimes_{\mathscr{C}'} I'_{\boxtimes} \arrow[d, "\psi_0\boxtimes_{\mathscr{C}'}\psi_0"', "\wr"] & \\
F(I_{\boxtimes}) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(I_{\boxtimes}) \arrow[r, "\varphi_2(I_{\boxtimes},I_{\boxtimes})"] & F(I_{\boxtimes} \otimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes})
\end{tikzcd} \tag{6.2.7}$$

où l'on dénote les isomorphismes de l'unité à gauche et à droite de $\mathscr{C}'$ *par* ℓ'_Y *et* r'_Y*, respectivement.*

6.2.4. Il existent plusieurs exemples de catégories 2-monoïdales, mais dans ce mémoire on va se concentrer sur le cas suivant, qui ne semble pas d'avoir été observé avant. Soit A une algèbre unifère commutative dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\mathscr{C}}, \tau)$ qui est cocomplète et telle que le produit tensoriel commute avec les colimites à chaque côté. Soient $TA = \oplus_{m\in\mathbb{N}} A^{\otimes_{\mathscr{C}} m}$ la construction tensorielle et $\Sigma A = \oplus_{m\in\mathbb{N}} \Sigma^m A$ la construction symétrique, dont la composante de degré zéro est l'unité $I_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$. On considère que TA est munie de la structure canonique de cogèbre counifère colibre cocomplète dans $\mathscr{C}$, avec le coproduit donné par la deconcaténation et ΣA est une sous-cogèbre counifère cocommutative de TA. Pour simplifier on va supposer sans perte de généralité que $\mathscr{C}$ est une catégorie concrète. On considère en plus que TA est muni du produit suivant. Étant donné deux éléments $\sigma \in A^{\otimes_{\mathscr{C}} m}$ et $\sigma' \in A^{\otimes_{\mathscr{C}} m'}$, son produit est zéro si $m \neq m'$, et c'est le produit usuel de l'algèbre $A^{\otimes_{\mathscr{C}} m}$ induit par celui de A si $m = m'$, *i.e.*

1. Noter que cette définition de catégorie 2-monoïdale symétrique coïncide avec la notion de catégorie 2-monoïdale $\otimes_{\mathscr{C}}$-symétrique dans [AM10], Def. 6.5. Comme dans les exemples qui nous intéressent $\boxtimes_{\mathscr{C}}$ ne sera jamais tressé, on peut écarter toute mention explicite du produit tensoriel $\otimes_{\mathscr{C}}$ dans la définition de symétrie pour des raisons de simplicité.

$(a_1|\dots|a_m)(a'_1|\dots|a'_m) = (a_1 a'_1)|\dots|(a_m a'_m)$, où l'on a utilisé des bars au lieu de tenseurs. En d'autres termes, TA est la somme directe des algèbres unifères commutatives $A^{\otimes_{\mathscr{C}} m}$ dans $\mathscr{C}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il est facile à vérifier que TA devient ainsi une bigèbre counifère (mais non unifère) commutative. Par ailleurs, ΣA est une sous-bigèbre counifère (mais non unifère) de TA, qui est commutative et cocommutative. Ces structures de bigèbres sont appelées *induites* et on les dénotera par ${}^{\mu}TA$ et ${}^{\mu}\Sigma A$, respectivement.

6.2.5 Lemme ([Her17d], Lemma 3.3.4)**.** *Les bigèbres ${}^{\mu}TA$ et ${}^{\mu}\Sigma A$ définies avant ont suffisamment d'idempotents $\{1_A^{\otimes m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ (voir* [Her17d], *1.5.6) et le dernier ensemble est un monoïde avec unité pour le produit $1_A^{\otimes m} 1_A^{\otimes m'} = 1_A^{\otimes(m+m')}$ et l'unité $1_A^{\otimes 0}$. En conséquence, les catégories des modules dans $\mathscr{C}$ (firmes au sens de D. Quillen) sur ${}^{\mu}TA$ et ${}^{\mu}\Sigma A$ (voir* [Her17d], *1.5.4) ont une structure monoïdale symétrique pour le produite tensoriel usuel $\otimes_{{}^{\mu}TA}$ et $\otimes_{{}^{\mu}\Sigma A}$, respectivement.*

6.2.6. Pour réduire la notation on va écrire B au lieu de ${}^{\mu}TA$ ou ${}^{\mu}\Sigma A$ et l'on dénotera par ${}_B\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ la catégorie des B-modules dans $\mathscr{C}$ mentionnée dans le lemme précédent. Elle est munie donc d'une structure monoïdale symétrique donnée par le produit tensoriel $\otimes_B$, que l'on dénotera simplement par $\otimes$, l'unité B et la tresse induite par celle de $\mathscr{C}$. Il s'agit de la structure monoïdale usuelle de l'algèbre commutative. Par ailleurs, étant donné deux objets X et Y dans ${}_B\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$, le fait que B est une bigèbre nous dit que l'on peut utiliser son coproduit pour définir une structure de module sur B dans $X \otimes_{\mathscr{C}} Y$, que l'on va dénoter par $X \boxtimes Y$. De même, la counité de B donne une structure de module sur B dans l'unité $I_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$. On peut conclure que ${}_B\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ muni du produit tensoriel $\boxtimes$ et l'unité $I_{\mathscr{C}}$ est une catégorie monoïdale. Elle apparaît typiquement dans le théorie d'algèbres de Hopf. Alors, ${}_B\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ est naturellement une catégorie monoïdale double symétrique. La proposition suivante nous donne l'exemple le plus important pour ce mémoire de catégorie 2-monoïdale symétrique encadrée.

6.2.7 Proposition ([Her17b], Prop. 3.3.9)**.** *Soit A une algèbre unifère commutative dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\mathscr{C}}, \tau)$ qui est cocomplète et telle que le produit tensoriel commute avec les colimites à chaque côté. Soit $B = {}^{\mu}TA$ la bigèbre counifère (mais non unifère) commutative dans $\mathscr{C}$ définie dans* 6.2.4*. Alors, la catégorie monoïdale double symétrique ${}_B\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ est en fait une catégorie* 2*-monoïdale symétrique encadrée via le foncteur d'inclusion dans $\mathscr{C}$. La structure d'algèbre unifère de ${}^{\mu}TA$ de cette catégorie* 2*-monoïdale est précisément celle décrite dans* 6.2.4 *et la structure de cogèbre counifère de $I_{\mathscr{C}}$ est la triviale.*

6.2.8. La définition suivante peut se trouver dans [AM10], 6.5, sous le nom de *bimonoïde*.

6.2.9 Définition. *Soit $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes}, \mathrm{sh})$ une catégorie* 2*-monoïdale. Une* bigèbre unifère et counifère *relative à cette catégorie* 2*-monoïdale est un objet B de $\mathscr{C}$ pourvu des structures suivantes :*

(i) une structure d'algèbre unifère (B, μ, η) par rapport à $(\mathscr{C}, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes})$;

(ii) une structure de cogèbre counifère (B, Δ, ϵ) par rapport à $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes})$;

telles que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "\Delta"] & \\
B \boxtimes_{\mathscr{C}} B \arrow[ur, "\mu"] \arrow[d, "\Delta \boxtimes_{\mathscr{C}} \Delta"'] & & B \otimes_{\mathscr{C}} B \\
(B \otimes_{\mathscr{C}} B) \boxtimes_{\mathscr{C}} (B \otimes_{\mathscr{C}} B) \arrow[rr, "\mathrm{sh}_{B,B,B,B}"'] & & (B \boxtimes_{\mathscr{C}} B) \otimes_{\mathscr{C}} (B \boxtimes_{\mathscr{C}} B) \arrow[u, "\mu \otimes_{\mathscr{C}} \mu"']
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} B \boxtimes_{\mathscr{C}} B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\epsilon \boxtimes_{\mathscr{C}} \epsilon"'] & B \arrow[d, "\epsilon"] \\ I_{\otimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\otimes} \arrow[r, "\mu_{\boxtimes}"] & I_{\otimes} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\epsilon"] & \\ I_{\boxtimes} \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "\nu"] & & I_{\otimes} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\Delta"] & B \otimes_{\mathscr{C}} B \\ I_{\boxtimes} \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\Delta_{\otimes}"] & I_{\boxtimes} \otimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes} \arrow[u, "\eta \otimes_{\mathscr{C}} \eta"'] \end{tikzcd} \tag{6.2.8}$$

commutent.

6.2.10 Proposition ([Her17d], Prop. 3.4.6)**.** *Soit A une algèbre unifère commutative dans une catégorie symétrique monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\mathscr{C}}, \tau)$ qui est cocomplète et telle que le produit tensoriel commute avec les colimites à chaque côté. Soit (C, Δ, ϵ) une cogèbre counifère dans la catégorie monoïdale symétrique ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ munie du produit tensoriel $\otimes_{\mu TA}$. On rappelle que ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ a en fait une structure de catégorie 2-monoïdale symétrique encadrée (voir Proposition 6.2.7).*

On définit ${}_{\Delta}TC = \oplus_{m \in \mathbb{N}} C^{\boxtimes m}$ avec

(i) une structure d'algèbre unifère dans la catégorie monoïdale ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ munie du produit tensoriel $\boxtimes$ par le produit usuel de concaténation induit par $\boxtimes$ et l'unité donnée par l'inclusion canonique de $I_{\mathscr{C}} = C^{\boxtimes 0}$ dans ${}_{\Delta}TC$;

(ii) une structure de cogèbre counifère dans la catégorie monoïdale ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ munie du produit tensoriel $\otimes_{\mu TA}$, où la counité est donnée par le morphisme dont la restriction à $C^{\boxtimes m}$ est la composition de $\epsilon^{\boxtimes m}$ et le produit

$$({}^{\mu}TA)^{\boxtimes m} \to {}^{\mu}TA,$$

et le coproduit est le morphisme dont la restriction à $C^{\boxtimes m}$ est la composition de $\Delta^{\boxtimes m}$, le morphisme canonique

$$\mathrm{shs} : (C \otimes_{\mu TA} C)^{\boxtimes m} \to C^{\boxtimes m} \otimes_{\mu TA} C^{\boxtimes m}. \tag{6.2.9}$$

induit par sh *et le morphisme canonique*

$$C^{\boxtimes m} \otimes_{\mu TA} C^{\boxtimes m} \to {}_{\Delta}TC \otimes_{\mu TA} {}_{\Delta}TC.$$

Alors, ${}_{\Delta}TC$ est une bigèbre unifère et counifère relative à la catégorie 2-monoïdale symétrique ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$. En plus, ${}_{\Delta}TC$ est cocommutative (par rapport à τ) si C l'est.

6.2.11. On explique brièvement la situation qui nous intéresse et l'utilisation des résultats précédents pour le problème adressé dans 6.1.13 : on considère l'algèbre commutative $A = C^{\infty}(M)$ dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathscr{C} = \mathrm{CLCS}_{HD}$ des espaces localement convexes et convenables, munie du produit tensoriel convenable $\tilde{\otimes}_{\beta}$. D'après 6.2.4 on a la bigèbre counifère (mais non unifère) commutative $B = {}^{\mu}TA$ munie d'un ensemble d'unités locales. On considère donc la catégorie 2-monoïdale symétrique des modules ${}_{B}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ définie dans la Proposition 6.2.7 et encadrée dans $\mathscr{C}$ via le foncteur d'inclusion. Soit $C = S_{C^{\infty}(M)}\Gamma(J^iE)$ la cogèbre coaugmentée cocommutative colibre dans la catégorie monoïdale symétrique ${}_{A}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ munie du produit $\otimes_A$. À partir de la projection canonique $B = {}^{\mu}TA \to A$ on voit bien que C est aussi naturellement une cogèbre counifère dans la catégorie monoïdale symétrique ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ munie du produit tensoriel $\otimes_{\mu TA}$. D'après la Proposition 6.2.10, on construit donc $T_{\Delta}C$, dont l'espace sous-jacent est $\tilde{T}S_{C^{\infty}(M)}\Gamma(J^iE)$. Elle est une bigèbre unifère et counifère relative à la catégorie 2-monoïdale symétrique ${}_{\mu TA}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$.

6.3 Les couplages de Laplace dans QFT

6.3.1. On présente maintenant la définition de couplage de Laplace dans le contexte d'une catégorie 2-monoïdale symétrique encadrée. On veut noter que l'on a besoin de l'encadrement dans la définition.

6.3.2 Définition ([Her17d], Def. 5.6.2)**.** *Soit $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes}, \tau, \boxtimes_{\mathscr{C}}, I_{\boxtimes}, \mathrm{sh})$ une catégorie 2-monoïdale symétrique encadrée dans $(\mathscr{C}', \boxtimes_{\mathscr{C}'}, I'_{\boxtimes}, \tau')$ via le foncteur F (voir Définitions 6.2.2 et 6.2.3). Étant donné une bigèbre unifère et counifère $(C, \mu_C, \eta_C, \Delta_C, \epsilon_C)$ relative à la catégorie 2-monoïdale précédente et une algèbre unifère $(A, \mu_{A,\ell}, \eta_{A,\ell})$*

dans $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes})$, *un* couplage de Laplace à gauche *sur* C *relatif à la catégorie* 2*-monoïdale symétrique encadrée précédente et à valeurs dans* A *est un morphisme* $\langle\, , \rangle : C \boxtimes_{\mathscr{C}} C \to A$ *dans* $\mathscr{C}$ *tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \arrow[r, "\mathrm{id}_{F(C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}}\psi_2(C,C)", "\sim"'] \arrow[d, "F(\Delta_C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}\mathrm{id}_{F(C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}}\mathrm{id}_{F(C)}"] & F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[r, "\mathrm{id}_{F(C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}}F(\mu_C)"] & F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \arrow[r, "\psi_2(C,C)", "\sim"'] & F(C \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[d, "F(\langle,\rangle)"] \\
F(C \otimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(C\otimes_{\mathscr{C}} C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}}\varphi_2(C,C)"] & & & F(A) \\
F(C \otimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C \otimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[r, "\psi_2(C\otimes_{\mathscr{C}} C, C\otimes_{\mathscr{C}} C)", "\sim"'] & F\Big((C \otimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}} (C \otimes_{\mathscr{C}} C)\Big) \arrow[r, "F(\mathrm{sh}_{C,C,C,C})"] & F\Big((C \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \otimes_{\mathscr{C}} (C \boxtimes_{\mathscr{C}} C)\Big) \arrow[r, "F(\langle,\rangle \otimes_{\mathscr{C}} \langle,\rangle)"] & F(A \otimes_{\mathscr{C}} A) \arrow[u, "F(\mu_{A,\ell})"']
\end{tikzcd} \tag{6.3.1}$$

commute dans $\mathscr{C}'$ *et*

$$\begin{tikzcd}
C \boxtimes_{\mathscr{C}} I_{\boxtimes} \arrow[rr, "\mathrm{id}_C \boxtimes_{\mathscr{C}} \eta_C"] \arrow[d, "r_C^{\boxtimes}"] & & C \boxtimes_{\mathscr{C}} C \arrow[d, "\langle,\rangle"] \\
C \arrow[r, "\epsilon_C"] & I_{\otimes} \arrow[r, "\eta_{A,\ell}"] & A
\end{tikzcd} \tag{6.3.2}$$

commute dans $\mathscr{C}$. *De façon analogue, étant donné une bigèbre unifère et counifère* $(C, \mu_C, \eta_C, \Delta_C, \epsilon_C)$ *relative à la catégorie* 2*-monoïdale précédente et une algèbre unifère* $(A, \mu_{A,r}, \eta_{A,r})$ *dans* $(\mathscr{C}, \otimes_{\mathscr{C}}, I_{\otimes})$, *un* couplage de Laplace à droite *sur* C *relatif à la catégorie* 2*-monoïdale symétrique encadrée précédente et à valeurs dans* A *est un morphisme* $\langle\, , \rangle : C \boxtimes_{\mathscr{C}} C \to A$ *dans* $\mathscr{C}$ *tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \arrow[r, "\psi_2(C,C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}\mathrm{id}_{F(C)}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}}\mathrm{id}_{F(C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}}F(\Delta_C)"] & F(C \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \arrow[r, "F(\mu_C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}\mathrm{id}_{F(C)}"] & F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \arrow[r, "\psi_2(C,C)", "\sim"'] & F(C \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[d, "F(\langle,\rangle)"] \\
F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C \otimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[d, "\varphi_2(C,C)\boxtimes_{\mathscr{C}'}\mathrm{id}_{F(C\otimes_{\mathscr{C}} C)}"] & & & F(A) \\
F(C \otimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}'} F(C \otimes_{\mathscr{C}} C) \arrow[r, "\psi_2(C\otimes_{\mathscr{C}} C, C\otimes_{\mathscr{C}} C)", "\sim"'] & F\Big((C \otimes_{\mathscr{C}} C) \boxtimes_{\mathscr{C}} (C \otimes_{\mathscr{C}} C)\Big) \arrow[r, "F(\mathrm{sh}_{C,C,C,C})"] & F\Big((C \boxtimes_{\mathscr{C}} C) \otimes_{\mathscr{C}} (C \boxtimes_{\mathscr{C}} C)\Big) \arrow[r, "F(\langle,\rangle \otimes_{\mathscr{C}} \langle,\rangle)"] & F(A \otimes_{\mathscr{C}} A) \arrow[u, "F(\mu_{A,r})"']
\end{tikzcd} \tag{6.3.3}$$

commute dans $\mathscr{C}'$ *et*

$$\begin{tikzcd}
I_{\boxtimes} \boxtimes_{\mathscr{C}} C \arrow[rr, "\eta_C \boxtimes_{\mathscr{C}} \mathrm{id}_C"] \arrow[d, "\ell_C^{\boxtimes}"] & & C \boxtimes_{\mathscr{C}} C \arrow[d, "\langle,\rangle"] \\
C \arrow[r, "\epsilon_C"] & I_{\otimes} \arrow[r, "\eta_{A,r}"] & A
\end{tikzcd} \tag{6.3.4}$$

commute dans $\mathscr{C}$.

6.3.3. On va désormais se concentrer à expliquer la construction du couplage de Laplace à partir d'un propagateur Δ qui est pré-coupe. On adressera les problèmes indiqués dans 6.1.13 en employant les structures racontées dans 6.2.11. On utilisera donc les notations indiquées là-bas. Or, la bigèbre unifère et counifère relative à la catégorie 2-monoïdale dans la définition précédente du couplage de Laplace va être $\mathcal{B} = \tilde{T}S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^i E)$. Il faut décrire l'algèbre dans le codomaine du couplage de Laplace. Plus précisément, il va avoir deux structures différentes d'algèbre (que l'on appellera “gauche” et “droite”) sur le même espace $\mathscr{DA}(M)$ et une application $\langle\, , \rangle : \mathcal{B} \boxtimes \mathcal{B} \to \mathscr{DA}(M)$ telle que $\langle\, , \rangle$ est un couplage de Laplace à gauche pour la structure d'algèbre à gauche de $\mathscr{DA}(M)$ et un couplage de Laplace à droite pour la structure d'algèbre à droite de $\mathscr{DA}(M)$.

6.3.4. On va maintenant introduire des applications $C^\infty(M)^{\tilde{\otimes}_\beta m}\tilde{\otimes}_\beta C^\infty(M)^{\tilde{\otimes}_\beta m'}$-linéaires et continues

$$\hat{\Delta}^{m,m'} : \Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta m}\tilde{\otimes}_\beta\Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta m'} \longrightarrow \mathscr{D}'(M^m \times M^{m'}) \tag{6.3.5}$$

pour tous $m, m' \in \mathbb{N}$, qui satisfont les conditions suivantes. On définit

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{m,0} : \Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta m} \simeq \Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta m}\tilde{\otimes}_\beta\Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta 0} \longrightarrow \mathscr{D}'(M^m \times M^0) \simeq \mathscr{D}'(M^m)\\ \hat{\Delta}^{0,m} : \Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta m} \simeq \Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta 0}\tilde{\otimes}_\beta\Big(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)\Big)^{\tilde{\otimes}_\beta m} \longrightarrow \mathscr{D}'(M^0 \times M^m) \simeq \mathscr{D}'(M^m)\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

comme la composition de la counité de $(S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE))^{\tilde{\otimes}_\beta m}$ et l'inclusion canonique de $C^\infty(M)^{\tilde{\otimes}_\beta m}$ dans $\mathscr{D}'(M^m)$ donnée par les distributions C^∞ de M^m.

6.3.5. Soient $m, m' \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application des variétés différentielles

$$\mathrm{ddiag}_{m,m'} : M^m \times M^{m'} \longrightarrow \prod_{(j,j')\in\mathbb{N}^*_{\leq m}\times\mathbb{N}^0_{\leq m'}} (M \times M)$$

donnée par $(\mathrm{ddiag}_{m,m'}(\bar{p},\bar{p}'))_{(j,j')} = (p_j, p'_{j'})$, pour tous j, j', où $\bar{p} = (p_1,\dots,p_m) \in M^m$ et $\bar{p}' = (p'_1,\dots,p'_{m'}) \in M^{m'}$. On définit $\hat{\Delta}^{m,m'}$ comme la seule application $C^\infty(M)^{\tilde{\otimes}_\beta m}\tilde{\otimes}_\beta C^\infty(M)^{\tilde{\otimes}_\beta m'}$-linéaire et continue qui satisfait que

$$\hat{\Delta}^{m,m'}(\bar{\sigma}^1|\dots|\bar{\sigma}^m, \bar{\tau}^1|\dots|\bar{\tau}^{m'}) = \mathrm{ddiag}^*_{m,m'}\Big(\prod_{j=1}^{m}{}^{\boxtimes}\prod_{j'=1}^{m'}{}^{\boxtimes}\tilde{\Delta}\big(\bar{\sigma}^j_{(j')}, \bar{\tau}^{j'}_{(j)}\big)\Big), \tag{6.3.7}$$

où $\bar{\sigma}^1,\dots,\bar{\sigma}^m,\bar{\tau}^1,\dots,\bar{\tau}^{m'} \in S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)$, on a remplacé les produits tensoriels par des barres verticales, les produits indexés par j et j' sont externes et l'on utilise la notation de Sweedler $\Delta^{(m'')}_{S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_{(1)}\otimes_{C^\infty(M)} \cdots \otimes_{C^\infty(M)} \bar{\sigma}_{(m'')}$ pour le coproduit des éléments $\bar{\sigma} \in S_{C^\infty(M)}\Gamma(J^iE)$. Ces applications sont bien définies (voir [Her17d], 5.6.8).

6.3.6. Or, on considère l'espace

$$\bigoplus_{m,m'\in\mathbb{N}} \mathscr{D}'(M^m \times M^{m'}) = \Big(\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}'(M^m)\Big)^{\boxtimes 2}. \tag{6.3.8}$$

Donc, il s'agit en principe d'un objet dans ${}_{\mu TC^\infty(M)}\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$. On rappelle que $\delta_{m,m'}$ dénote la delta de Kronecker de $m, m' \in \mathbb{N}$. Étant donné $m_1, m_2, m' \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\mathrm{ddiag}_{m_1,m_2;m'} : M^{m_1+m_2} \times M^{m'} \to (M^{m_1} \times M^{m'}) \times (M^{m_2} \times M^{m'})$$

l'application $(\bar{p},\bar{p}') \mapsto (\bar{p}_1,\bar{p}',\bar{p}_2,\bar{p}')$, où $\bar{p} = (\bar{p}_1,\bar{p}_2)$ avec $\bar{p}_j \in M^{m_j}$ et $\bar{p}' \in M^{m'}$. L'application $\mathrm{ddiag}_{m;m'_1,m_2}$: $M^m \times M^{m'_1+m'_2} \to (M^m \times M^{m'_1}) \times (M^m \times M^{m'_2})$ est définie de la même façon. À partir de ces application on introduit les produits (partiellement définis) $\cdot_\ell$ et $\cdot_r$ sur l'objet (6.3.8) dans la catégorie monoïdale symétrique CLCS_{HD} des espaces localement convexes convenables de la manière suivante :

(i) l'élément $1 \in k \simeq k\tilde{\otimes}_\beta k = \mathscr{D}'(M^0 \times M^0)$ satisfait que

$$1 \cdot_\ell v = v \cdot_\ell 1 = \delta_{0,m} v \quad \text{et} \quad 1 \cdot_r v = v \cdot_r 1 = \delta_{0,m'} v,$$

si $v \in \mathscr{D}'(M^m \times M^{m'})$, pour tous $m, m' \in \mathbb{N}$;

(ii) étant donné $u \in \mathscr{D}'(M^m \times M^0)$ et $v \in \mathscr{D}'(M^0 \times M^{m'})$, avec $m, m' \in \mathbb{N}^*$, on pose $u \cdot_\ell v = v \cdot_\ell u = 0 = u \cdot_r v = v \cdot_r u$;

(iii) pour tous $u \in \mathscr{D}'(M^0 \times M^m)$ et $v \in \mathscr{D}'(M^0 \times M^{m'})$ (resp., $u \in \mathscr{D}'(M^m \times M^0)$ et $v \in \mathscr{D}'(M^{m'} \times M^0)$), avec $m, m' \in \mathbb{N}^*$, les produits partiellement définis sont donnés par (s'ils existent)

$$u \cdot_{r} v = \delta_{m,m'} uv \in \mathscr{D}'(M^m) \simeq \mathscr{D}'(M^0 \times M^m) \quad \Big(\text{resp., } u \cdot_{\ell} v = \delta_{m,m'} uv \in \mathscr{D}'(M^m) \simeq \mathscr{D}'(M^m \times M^0)\Big),$$

tandis que $u \cdot_{\ell} v$ (resp., $u \cdot_{r} v$) est le produit externe

$$u \boxtimes v \in \mathscr{D}'(M^{m+m'}) \simeq \mathscr{D}'(M^0 \times M^{m+m'}) \quad \Big(\text{resp., } u \boxtimes v \in \mathscr{D}'(M^{m+m'}) \simeq \mathscr{D}'(M^{m+m'} \times M^0)\Big);$$

(iv) pour tous $m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathscr{D}'(M^{m_1} \times M^{m'_1})$ et $v \in \mathscr{D}'(M^{m_2} \times M^{m'_2})$, on pose

$$u \cdot_{\ell} v = \delta_{m_1,m_2} \operatorname{ddiag}^*_{m_1;m'_1,m'_2}(u \boxtimes v) \tag{6.3.9}$$

et

$$u \cdot_{r} v = \delta_{m'_1,m'_2} \operatorname{ddiag}^*_{m_1,m_2;m'_1}(u \boxtimes v). \tag{6.3.10}$$

Noter que (6.3.9) et (6.3.10) sont définis si les pull-backs existent.

Les produits $\cdot_{\ell}$ et $\cdot_{r}$ ne sont pas par contre ${}^{\mu}TC^{\infty}(M)$-linéaires pour la structure de module sur ${}^{\mu}TC^{\infty}(M)$ de l'espace (6.3.8).

6.3.7 Définition ([Her17d], Def. 5.6.12). *Soit $\Delta \in \operatorname{Prop}_i(M,E)$ un propagateur pré-coupe. On considère l'objet* (6.3.8). *Soit $\mathscr{D}\mathscr{A}(M)$ le sous-module sur ${}^{\mu}TC^{\infty}(M)$ de* (6.3.8) *engendré par des itérations finies des applications des produits $\cdot_{\ell}$ et $\cdot_{r}$ à des éléments dans l'image des applications $\{\hat{\Delta}^{m,m'}\}_{m,m' \in \mathbb{N}}$. Ces produits sont bien définis.*

On considère deux nouvelles structures de ${}^{\mu}TC^{\infty}(M)$-module sur l'espace sous-jacent à (6.3.8) *et, donc, sur le sous-espace $\mathscr{D}\mathscr{A}(M)$. La première, appelée* structure à gauche, *est donnée par la structure de ${}^{\mu}TC^{\infty}(M)$-module du facteur gauche dans la décomposition* (6.3.8). *La* structure à droite *est définie par la structure de ${}^{\mu}TC^{\infty}(M)$-module du facteur droite dans la décomposition* (6.3.8). *On dénotera $\mathscr{D}\mathscr{A}(M)$ muni de la structure à gauche (resp., à droite) par $\mathscr{D}\mathscr{A}_{\ell}(M)$ (resp., $\mathscr{D}\mathscr{A}_{r}(M)$).*

6.3.8 Lemme ([Her17d], Lemma 5.6.14). *$\mathscr{D}\mathscr{A}_{\ell}(M)$ (resp., $\mathscr{D}\mathscr{A}_{r}(M)$) est une algèbre unifère dans la catégorie monoïdale symétrique ${}_{{}^{\mu}TC^{\infty}(M)}\operatorname{Mod}(\mathscr{C})$ munie du produit tensoriel $\otimes_{{}^{\mu}TC^{\infty}(M)}$ pour la multiplication $\cdot_{\ell}$ (resp., $\cdot_{r}$).*

6.3.9. On présente maintenant le résultat fondamental qui adresse les problèmes expliqués dans 6.1.13.

6.3.10 Proposition ([Her17d], Prop. 5.6.15). *L'application $\hat{\Delta} = \sum_{m,m' \in \mathbb{N}} \hat{\Delta}^{m,m'}$ est un couplage de Laplace à gauche (resp., à droite) dans la bigèbre unifère et counifère $\tilde{T}S_{C^{\infty}(M)}\Gamma(J^iE)$ relative à la catégorie 2-monoïdale symétrique ${}_{{}^{\mu}TC^{\infty}(M)}\operatorname{Mod}(\mathscr{C})$ et à valeurs dans l'algèbre unifère $\mathscr{D}\mathscr{A}_{\ell}(M)$ (resp., $\mathscr{D}\mathscr{A}_{r}(M)$). En particulier particulier, on a*

$$\hat{\Delta}^{m,m'_1+m'_2}(u, v_1 v_2) = \sum \hat{\Delta}^{m,m'_1}(u_{(1)}, v_1) \cdot_{\ell} \hat{\Delta}^{m,m'_2}(u_{(2)}, v_2), \tag{6.3.11}$$

et

$$\hat{\Delta}^{m_1+m_2,m'}(u_1 u_2, v) = \sum \hat{\Delta}^{m_1,m'}(u_1, v_{(1)}) \cdot_{r} \hat{\Delta}^{m_2,m'}(u_2, v_{(2)}), \tag{6.3.12}$$

pour tous $m, m', m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in \mathbb{N}$.

6.3.11. On peut se demander si l'on pourrait prouver des résultats similaires pour $\tilde{S}S_{C^{\infty}(M)}\Gamma(J^iE)$ au lieu de $\tilde{T}S_{C^{\infty}(M)}\Gamma(J^iE)$, comme Borcherds semble d'indiquer. Le problème avec ce dernier espace c'est qu'en principe il n'est pas un module dans ${}_{{}^{\mu}TC^{\infty}(M)}\operatorname{Mod}(\mathscr{C})$ mais dans ${}_{{}^{\mu}\Sigma C^{\infty}(M)}\operatorname{Mod}(\mathscr{C})$. Par contre, même si ${}^{\mu}\Sigma C^{\infty}(M)$ est une bigèbre counifère commutative et cocommutative avec un ensemble d'unités locales, ${}_{{}^{\mu}\Sigma C^{\infty}(M)}\operatorname{Mod}(\mathscr{C})$ n'est pas nécessairement une catégorie 2-monoïdale avec la structure induite par celle de ${}_{{}^{\mu}TC^{\infty}(M)}\operatorname{Mod}(\mathscr{C})$ (voir [Her17d], 3.5).

6.4 Perspective

Dans le manuscrit [Her17d] on a démontré la première partie des résultats dans l'article [Bor11], bien qu'il ait fallu changer quelques structures et imposer des conditions supplémentaires. En gros, on a réussi à prouver les Théorèmes 15, 18, 20 et 21 dans [Bor11]. Il reste par contre l'étude des résultats concernant la construction de la théorie quantique des champs avec des interactions. En tout cas, j'ai presque fini la première étape dans cette démarche, *i.e.* la construction de la théorie libre dans un espace-temps courbe, bien qu'ils restent encore quelques brèches.

Bibliographie

[AM10] Marcelo Aguiar et Swapneel Mahajan, *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, CRM Monograph Series, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Avec des avant-propos par Kenneth Brown et Stephen Chase, et par André Joyal. ↑(document), 6.2.1, 1, 6.2.8

[BM12] Michael Batanin et Martin Markl, *Centers and homotopy centers in enriched monoidal categories*, Adv. Math. **230** (2012), no. 4-6, 1811–1858. ↑(document)

[BGS88] A. A. Beĭlinson, V. A. Ginsburg et V. V. Schechtman, *Koszul duality*, J. Geom. Phys. **5** (1988), no. 3, 317–350. ↑(document)

[BGS96] Alexander Beilinson, Victor Ginzburg et Wolfgang Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 473–527. ↑(document)

[BM15] Francisco Belchí et Aniceto Murillo, *A_∞-persistence*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, Special issue in Computational and Applied topology **26** (2015), no. 1-2, 121–140. ↑4.2.12

[Ber01] Roland Berger, *Koszulity for nonquadratic algebras*, J. Algebra **239** (2001), no. 2, 705–734. ↑(document), 2.1.7

[BDV06] Roland Berger et Michel Dubois-Violette, *Inhomogeneous Yang-Mills algebras*, Lett. Math. Phys. **76** (2006), no. 1, 65–75. ↑3.6

[BG06] Roland Berger et Victor Ginzburg, *Higher symplectic reflection algebras and non-homogeneous N-Koszul property*, J. Algebra **304** (2006), no. 1, 577–601. ↑(document), 3.5.1, 3.5.3, 3.5.4, 3.5.4

[BT07] Roland Berger et Rachel Taillefer, *Poincaré-Birkhoff-Witt deformations of Calabi-Yau algebras*, J. Noncommut. Geom. **1** (2007), no. 2, 241–270. ↑2.1.7

[Bez94] R. Bezrukavnikov, *Koszul DG-algebras arising from configuration spaces*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 2, 119–135. ↑3.4

[Bor11] Richard E. Borcherds, *Renormalization and quantum field theory*, Algebra Number Theory **5** (2011), no. 5, 627–658. ↑(i), (ii), 6.0.1, 6.1.3, 6.1.9, 6.1.11, 6.1.12, 6.1.12, 6.4

[BG96] Alexander Braverman et Dennis Gaitsgory, *Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quadratic algebras of Koszul type*, J. Algebra **181** (1996), no. 2, 315–328. ↑(document), 3.5.1

[BFFO04] Christian Brouder, Bertfried Fauser, Alessandra Frabetti et Robert Oeckl, *Quantum field theory and Hopf algebra cohomology*, J. Phys. A **37** (2004), no. 22, 5895–5927. ↑(document), 6.1.12

[BF00] Romeo Brunetti et Klaus Fredenhagen, *Microlocal analysis and interacting quantum field theories: renormalization on physical backgrounds*, Comm. Math. Phys. **208** (2000), no. 3, 623–661. ↑6.0.1

[BGSS08] Ragnar-Olaf Buchweitz, Edward L. Green, Nicole Snashall et Øyvind Solberg, *Multiplicative structures for Koszul algebras*, Q. J. Math. **59** (2008), no. 4, 441–454. ↑(document), 5.0.1, 5.1.1, 5.1.5

[CS08] Thomas Cassidy et Brad Shelton, *Generalizing the notion of Koszul algebra*, Math. Z. **260** (2008), no. 1, 93–114. ↑(document), 3.3.7

[CDV02] Alain Connes et Michel Dubois-Violette, *Yang-Mills algebra*, Lett. Math. Phys. **61** (2002), no. 2, 149–158. ↑(document), 2, 2.1.4

[CDV07] ———, *Yang-Mills and some related algebras*, Rigorous quantum field theory, Progr. Math., vol. 251, Birkhäuser, Basel, 2007, pp. 65–78. ↑2, 3.6

[CG97] Neil Chriss et Victor Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. ↑3.5.6

[CB15] William Crawley-Boevey, *Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 5, 1550066, 8. ↑4.2.5

[Dix96] Jacques Dixmier, *Enveloping algebras*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Reprint révisé de l'édition de 1977. ↑1.0.4, 1.0.18

[DRS74] Peter Doubilet, Gian-Carlo Rota et Joel Stein, *On the foundations of combinatorial theory. IX. Combinatorial methods in invariant theory*, Studies in Appl. Math. **53** (1974), 185–216. ↑6.1.12

[Dri92] V. G. Drinfelʹd, *On quadratic commutation relations in the quasiclassical case [traduction en anglais de Mathematical physics, functional analysis (russe), 25–34, 143, "Naukova Dumka", Kiev, 1986]*, Selecta Math. Soviet. **11** (1992), no. 4, 317–326. Traductions sélectionnées. ↑(document)

[EH08] Herbert Edelsbrunner et John Harer, *Persistent homology—a survey*, Surveys on discrete and computational geometry, Contemp. Math., vol. 453, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 257–282. ↑4.2.1

[EH10] Herbert Edelsbrunner et John L. Harer, *Computational topology. An introduction*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. ↑4.2.1

[EG73] H. Epstein et V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) **19** (1973), 211–295 (1974) (anglais, avec résumé en français). ↑6.0.1

[FT87] B. L. Feĭgin et B. L. Tsygan, *Cyclic homology of algebras with quadratic relations, universal enveloping algebras and group algebras*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, pp. 210–239. ↑5.6.1

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Claude Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer-Verlag, New York, 2001. ↑4.2.6

[FMT05] Yves Félix, Luc Menichi et Jean-Claude Thomas, *Gerstenhaber duality in Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **199** (2005), no. 1-3, 43–59. ↑5.6.1

[FV06] Gunnar Fløystad et Jon Eivind Vatne, *PBW-deformations of N-Koszul algebras*, J. Algebra **302** (2006), no. 1, 116–155. ↑(document)

[Frö99] R. Fröberg, *Koszul algebras*, Advances in commutative ring theory (Fez, 1997), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 205, Dekker, New York, 1999, pp. 337–350. ↑(document)

[Ger64] Murray Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103. ↑3.5.5

[GM05] Edward L. Green et Eduardo N. Marcos, *δ-Koszul algebras*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 6, 1753–1764. ↑3.0.1

[GMMVZ04] E. L. Green, E. N. Marcos, R. Martínez-Villa et Pu Zhang, *D-Koszul algebras*, J. Pure Appl. Algebra **193** (2004), no. 1-3, 141–162. ↑(document), 2.1.7, 3.1.1, 3.4

[Gug82] V. K. A. M. Gugenheim, *On a perturbation theory for the homology of the loop-space*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), no. 2, 197–205. ↑3.3.1

[HL07] Phùng Hô Hai et Martin Lorenz, *Koszul algebras and the quantum MacMahon master theorem*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 4, 667–676. ↑(document)

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ↑4.2.6

[HW08] J.-W. He et Q.-S. Wu, *Koszul differential graded algebras and BGG correspondence*, J. Algebra **320** (2008), no. 7, 2934–2962. ↑3.4

[Her12] Estanislao Herscovich, *The Dixmier map for nilpotent super Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **313** (2012), no. 2, 295–328. ↑(document), 1.0.1, 1.0.5, 1.0.7, 1.0.9, 1.0.11, 1.0.13, 1.0.15, 1.0.17, 2.1.11, 2.3

[Her13a] ———, *Representation theory of super Yang-Mills algebras*, Comm. Math. Phys. **320** (2013), no. 3, 783–820. ↑(document), 2, 2.1.8, 2.1.7, 2.1.9, 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12, 3.2.22

[Her13b] ———, *On the multi-Koszul property for connected algebras*, Documenta Math. **18** (2013), 1301–1347. ↑(document), 2.1.7, 3.0.1, 3.1.4, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.12, 3.2.17, 3.2.19, 3.2.20, 3.2.21, 3.3.5, 3.3.6, 3.3.4, 3.3.7

[Her15] ———, *Some remarks on representations of Yang-Mills algebras*, J. Math Phys. **56** (2015), 011702, 6 pp. (electronic). ↑(document), 2, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5

[Her16a] ———, *Using torsion theory to compute the algebraic structure of Hochschild-(co)homology* (2016), disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Using-torsion-theory.pdf`. Accepté pour publication dans Homology Homotopy Appl. ↑(document), 5.0.1, 5.1, 5.1.1, 5.3.5, 5.3.7, 5.3.8, 5.4, 5.4.1, 5.4.3

[Her16b] ———, *Hochschild (co)homology of Koszul dual pairs* (2016), disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Hochschild-(co)homology-of-Koszul-dual-pairs`. ↑(document), 5.0.1, 5.1.4, 5.1.6, 5.6, 5.6.1, 5.6.2, 5.6.4, 5.6.5, 5.6.6, 5.6.8, 5.6.10, 5.6.11, 5.6.12

[Her17a] ———, *Spectral sequences associated to deformations*, J. Homotopy Relat. Struct. **12** (2017), no. 3, 513–548. ↑(document), 4.1.18, 4.1.19, 4.2.11

[Her17b] ———, *On the Merkulov construction of A_∞-(co)algebras* (2017), disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/On-the-Merkulov-construction.pdf`. Accepté pour publication dans Ukrainian Math. J. ↑3.3.1, 4.1.4, 4.1.11, 4.1.12, 4.1.13, 4.1.15, 4.1.16, 4.1.14, 4.1.17, 4.1.14, 6.2.7

[Her17c] ———, *A higher homotopic extension of persistent (co)homology* (2017), disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/A-higher-homotopic-persistent-homology.pdf`. Accepté pour publication dans J. Homotopy Relat. Struct. ↑(document), 4.2.1, 4.2.10, 4.2.9

[Her17d] ———, *Renormalization in Quantum Field Theory (after R. Borcherds)* (2017), disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/Renormalization-in-QFT.pdf`. ↑(document), (ii), 6.0.1, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.12, 6.1.13, 6.2.3, 6.2.5, 6.2.10, 6.3.2, 6.3.5, 6.3.7, 6.3.8, 6.3.10, 6.3.11, 6.4

[Her17e] ———, *On the definition of multi-Koszul modules* (2017), disponible à `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eherscov/Articles/On-the-definition-of-multi-Koszul-modules`. ↑3.4

[HR13] Estanislao Herscovich et Andrea Rey, *On a definition of multi-Koszul algebras*, J. Algebra **376** (2013), 196–227. ↑(document), 3.0.1, 3.1.4, 3.2.21

[HS11] Estanislao Herscovich et Andrea Solotar, *Representation theory of Yang-Mills algebras*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 2, 1043–1080. ↑(document)

[HS12] ———, *Hochschild and cyclic homology of Yang-Mills algebras*, J. Reine Angew. Math. **665** (2012), 73–156. ↑2.2.1

[HSSÁ14] Estanislao Herscovich, Andrea Solotar et Mariano Suárez-Álvarez, *PBW-deformations and deformation* à la Gerstenhaber *of N-Koszul algebras*, J. Noncommut. Geom. **8** (2014), no. 2, 505–539. ↑(document), 3.0.1, 3.5.1, 3.5.8, 3.5.9, 3.5.10, 3.5.12, 3.5.13, 3.5.15

[Him68] C. J. Himmelberg, *Quotients of completely regular spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 864–866. ↑4.2.9

[HKR62] G. Hochschild, Bertram Kostant et Alex Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 383–408. ↑(document)

[HW01] Stefan Hollands et Robert M. Wald, *Local Wick polynomials and time ordered products of quantum fields in curved spacetime*, Comm. Math. Phys. **223** (2001), no. 2, 289–326. ↑6.0.1

[HW02] ———, *Existence of local covariant time ordered products of quantum field in curved spacetime*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), no. 2, 309–345. ↑6.0.1

[Hör03] Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis. Reprint de la deuxième édition de 1990. ↑6.1.7, 6.1.8

[Kac77] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Advances in Math. **26** (1977), no. 1, 8–96. ↑(document), 1.0.4

[Kad80] T. V. Kadeišvili, *On the theory of homology of fiber spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), no. 3(213), 183–188 (russe). International Topology Conference (Moscow State Univ., Moscow, 1979). ↑3.3.1

[Kel94] Bernhard Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 1, 63–102. ↑5.6.3

[Kel03] ———, *Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex* (2003), disponible à `http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/dih.dvi`. Preprint. ↑5.7

[Kos47a] Jean-Louis Koszul, *Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau*, C. R. Acad. Sci. Paris **225** (1947), 217–219. ↑4.1.1

[Kos47b] ———, *Sur l'homologie des espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris **225** (1947), 477–479. ↑4.1.1

[Kos50] ———, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127. ↑(document)

[Kur51] Masatake Kuranishi, *On everywhere dense imbedding of free groups in Lie groups*, Nagoya Math. J. **2** (1951), 63–71. ↑2.2.1

[Lap01] S. V. Lapin, *Differential perturbations and D_∞-differential modules*, Mat. Sb. **192** (2001), no. 11, 55–76 (russe, avec résumé en russe); traduction en anglais, Sb. Math. **192** (2001), no. 11-12, 1639–1659. ↑4.1.19

[Lap02] ———, *D_∞-differential A_∞-algebras and spectral sequences*, Mat. Sb. **193** (2002), no. 1, 119–142 (russe, avec résumé en russe); traduction en anglais, Sb. Math. **193** (2002), no. 1-2, 119–142. ↑(document), 4.1.2, 4.1.3

[Lap08] ———, *Multiplicative A_∞-structure in the terms of spectral sequences of fibrations*, Fundam. Prikl. Mat. **14** (2008), no. 6, 141–175 (russe, avec résumé en anglais et en russe); traduction en anglais, J. Math. Sci. (N. Y.) **164** (2010), no. 1, 95–118. ↑(document), 4.1.2

[LH03] Kenji Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞-catégories*, Thèse de Doctorat, Paris, 2003. Errata à `http://www.math.jussieu.fr/~keller/lefevre/TheseFinale/corrainf.pdf`. ↑5.3.2

[Ler46] Jean Leray, *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation*, C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 1419–1422. ↑4.1.1

[Let89] Edward Letzter, *Primitive ideals in finite extensions of Noetherian rings*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 427–435. ↑1.0.3

[Let92] Edward S. Letzter, *Prime and primitive ideals in enveloping algebras of solvable Lie superalgebras*, Abelian groups and noncommutative rings, Contemp. Math., vol. 130, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 237–255. ↑(document)

[LHL07] Jia-feng Lü, Ji-wei He et Di-ming Lu, *Piecewise-Koszul algebras*, Sci. China Ser. A **50** (2007), no. 12, 1795–1804. ↑3.0.1

[LPWZ08] Di Ming Lu, John H. Palmieri, Quan Shui Wu et James J. Zhang, *Koszul equivalences in A_∞-algebras*, New York J. Math. **14** (2008), 325–378. ↑5.6.4

[LS10] Di-Ming Lu et Jun-Ru Si, *Koszulity of algebras with nonpure resolutions*, Comm. Algebra **38** (2010), no. 1, 68–85. ↑3.0.1

[LW86] Cai Hui Lu et Zhe Xian Wan, *On the minimal number of generators of the Lie algebra $\mathfrak{g}(A)$*, J. Algebra **101** (1986), no. 2, 470–472. ↑2.2.1

[Man87] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 191–205 (anglais, avec résumé en français). ↑(document)

[Man88] ———, *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1988. ↑3.4

[Mas52] W. S. Massey, *Exact couples in algebraic topology. I, II*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 363–396. ↑4.1.1

[Mas53] ———, *Exact couples in algebraic topology. III, IV, V*, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 248–286. ↑4.1.1

[Mas54] ———, *Products in exact couples*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 558–569. ↑4.1.1

[McC99] John McCleary, *A history of spectral sequences: origins to 1953*, History of topology, North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 631–663. ↑4.1.1

[McC01] ______, *A user's guide to spectral sequences*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. ↑(document), 4.1.1

[Mov05] Michael Movshev, *Yang-Mills theories in dimensions 3,4,6,10 and Bar-duality* (2005), disponible à http://arxiv.org/abs/hep-th/0503165v2. ↑2.1.1

[MS06] Michael Movshev et Albert Schwarz, *Algebraic structure of Yang-Mills theory*, The unity of mathematics, The unity of Mathematics, Progr. Math., vol. 244, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, pp. 473–523. ↑(document), 2.1.1

[Nek03] N. A. Nekrasov, *Lectures on open strings, and noncommutative gauge theories*, Unity from duality: gravity, gauge theory and strings (Les Houches, 2001), NATO Adv. Study Inst., EDP Sci., Les Ulis, 2003, pp. 477–495. ↑(document)

[PP05] Alexander Polishchuk et Leonid Positselski, *Quadratic algebras*, University Lecture Series, vol. 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. ↑3.4, 5.1.5

[Pri70] Stewart B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39–60. ↑(document)

[Rin63] George S. Rinehart, *Differential forms on general commutative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195–222. ↑(document)

[Sag10] Steffen Sagave, *DG-algebras and derived A_∞-algebras*, J. Reine Angew. Math. **639** (2010), 73–105. ↑4.2.11

[Ser99] Alexander Sergeev, *Irreducible representations of solvable Lie superalgebras*, Represent. Theory **3** (1999), 435–443 (electronic). ↑(document), 1.0.4

[Shi76] Lewis Shilane, *Filtered spaces admitting spectral sequence operations*, Pacific J. Math. **62** (1976), no. 2, 569–585. ↑4.2.6

[Ste71] Othmar Steinmann, *Perturbation expansions in axiomatic field theory*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Lecture Notes in Physics, Vol. 11. ↑6.0.1

[Str12] Ross Street, *Monoidal categories in, and linking, geometry and algebra*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **19** (2012), no. 5, 769–821. ↑(document)

[SP53] E. C. G. Stueckelberg et A. Petermann, *La normalisation des constantes dans la théorie des quanta*, Helv. Phys. Acta **26** (1953), 499–520. ↑6.0.1

[TT05] Dmitri Tamarkin et Boris Tsygan, *The ring of differential operators on forms in noncommutative calculus*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–131. ↑(document)

[Tsy04] Boris Tsygan, *Cyclic homology*, Cyclic homology in non-commutative geometry, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 121, Springer, Berlin, 2004, pp. 73–113. ↑5.6.7, 5.6.9

[Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ↑(document), 4.1.1

[XX11] Yunge Xu et Huali Xiang, *Hochschild cohomology rings of d-Koszul algebras*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), no. 1, 1–12. ↑(document), 5.0.1

[ZC05] Afra Zomorodian et Gunnar Carlsson, *Computing persistent homology*, Discrete Comput. Geom. **33** (2005), no. 2, 249–274. ↑4.2.1

Index