La « courbe en huit » du soleil

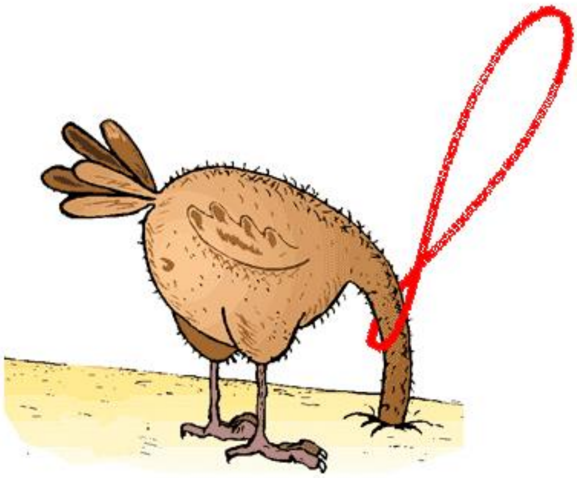
Pourquoi il faut chercher midi à 14 heures… ou presque !!

Je n'ai jamais été tenté d'approfondir la raison pour laquelle – sur certains cadrans solaires – on voit une courbe en huit.

Cette attitude « d'autruche » m'a satisfait pleinement… jusqu'à ce que les calculs d'éphémérides planétaires que je venais de programmer s'obstinent à me prouver que le Soleil atteint son altitude maximale à des *heures variables* d'un jour sur l'autre - disons **entre midi moins vingt et midi vingt du temps local !!**

J'ai d'abord mis en cause mes calculs, avant de revoir mes certitudes : **le soleil ne culmine pas à midi en temps local !!**

J'ai donc été obligé de m'intéresser au **décalage entre midi local et midi solaire**… et ce faisant j'ai dû « m'atteler » à la courbe en huit !!

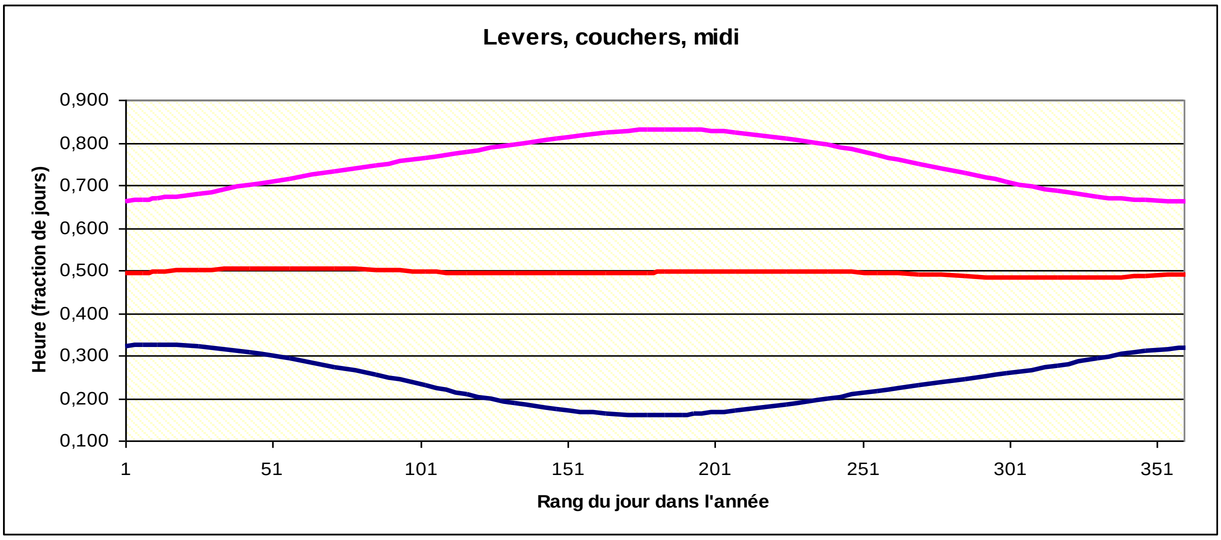


Je décris ici mon cheminement… mais d'autres relatent aussi des expériences fort didactiques de leur « découverte » du décalage midi local / midi vrai… en particulier (J.Ripert, S.Ricou)

Pour en revenir à ma démarche, j'ai vu dans l'article publié sur le site d'AstroSaône, que Jean-Pierre trace sur une année calendaire la courbe des levers et des couchers de soleil à Paris et s'intéresse à la durée du jour…

Un moyen aussi efficace que désuet de tracer cette courbe est de recourir à la table des heures de lever et de coucher du soleil du bon vieux **calendrier de la Poste** – qui trouve là une utilisation à laquelle je n'aurais pas songé et qui justifie à elle seule les étrennes données à mon facteur :

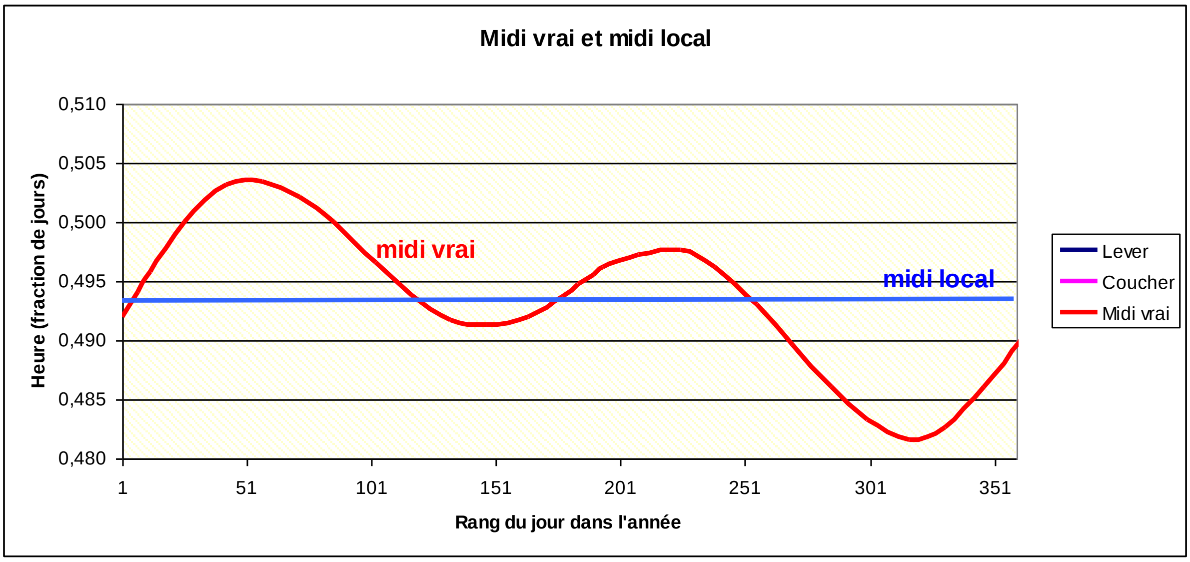
pour un jour donné, le milieu du segment lever-coucher représente 'géométriquement' le moment de la culmination du Soleil. Si l'on ajoute au graphique de Jean-Pierre la courbe (ici en rouge) passant par le milieu des segments lever-coucher, pour tous les jours de l'année, on a la surprise de constater que cette courbe n'est pas exactement rectiligne et n'est pas confondue avec la ligne '12h locales'.



Ces courbes traduisent bien la non-symétrie de la durée du jour. inscrite dans des expressions populaires du type : « à la Ste Luce (13 décembre) les jours augmentent du saut d'une puce », ou bien « en janvier les jours allongent davantage le soir »…

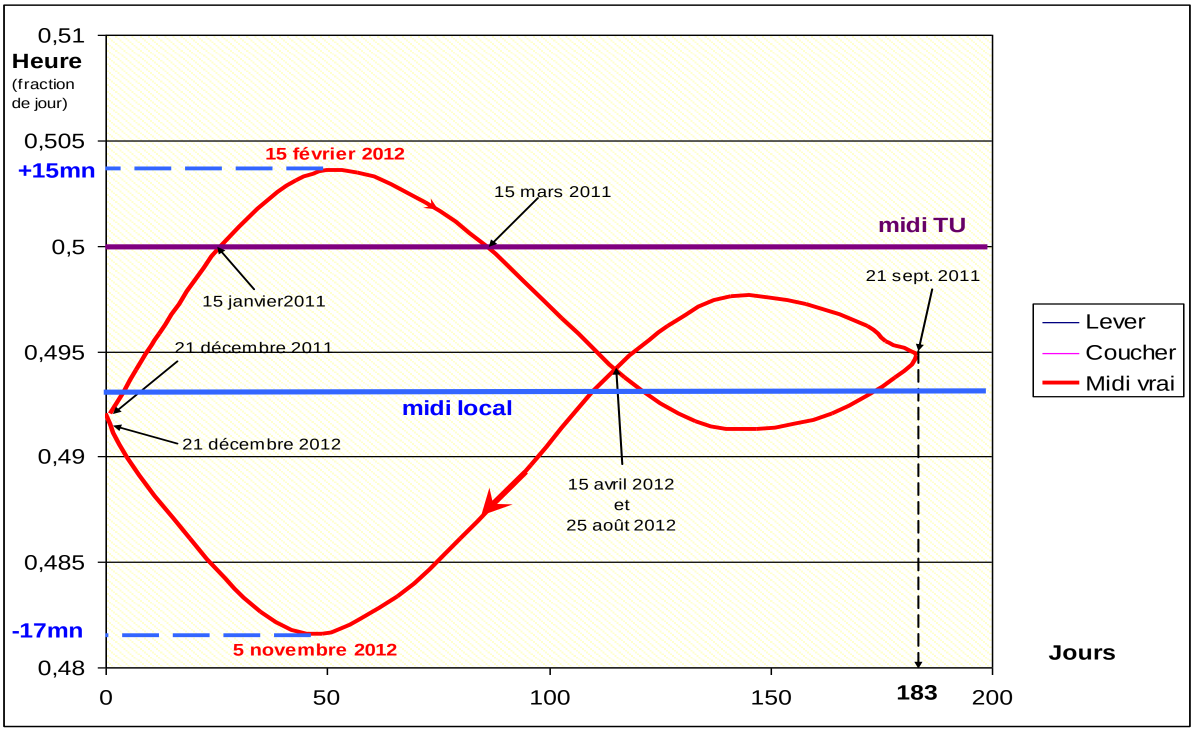
Mais sur le « graphique de Jean-Pierre » l'échelle n'est pas très appropriée pour visualiser l'ampleur du phénomène : il nous faut 'zoomer' sur ce qui se passe autour de 12h : on obtient ainsi un graphique du décalage observé – jour après jour - entre la culmination du soleil (midi vrai) et le temps universel local (midi apparent).

Voici le résultat obtenu après zoom des données de MON calendrier de la poste 2012 :



Si l'on 'replie' ce graphique annuel autour de la ligne du solstice d'été 'le 21 juin', pour tenir compte du fait que l'altitude de culmination régresse à partir de cette date, on obtient…... une **courbe en huit** !!

(En fait - s'agissant du soleil – nous considérons le phénomène sur une année « solaire » – de solstice d'hiver à solstice d'hiver, ce qui revient à effectuer un décalage d'une dizaine de jours dans les abscisses du graphe ci-dessus – tracé pour une année civile.).



Cette « courbe en huit » représente **l'équation du temps** – c'est-à-dire le décalage entre midi solaire et midi local - à Paris entre les solstices d'hiver 2011 et 2012, ***en fonction du jour calendaire.***

Elle traduit l'écart entre la culmination du soleil et le midi local (lui-même décalé du temps universel par prise en compte de la longitude du lieu ; pour Paris le décalage d'avec Greenwich est de 9mn27s ; le midi local à Paris correspond à 11h50mn33s TU soit 0,493438 en fraction de jours – unités de l'axe des ordonnées du graphique ci-dessus).

L'écart peut atteindre approximativement 16mn en plus ou en moins !!

Comment expliquer le décalage midi local / culmination ??

Je ne vais pas reprendre ici les explications qui ont été si bien développées et illustrées ailleurs. Je vous renvoie donc aux références bibliographiques ci après :

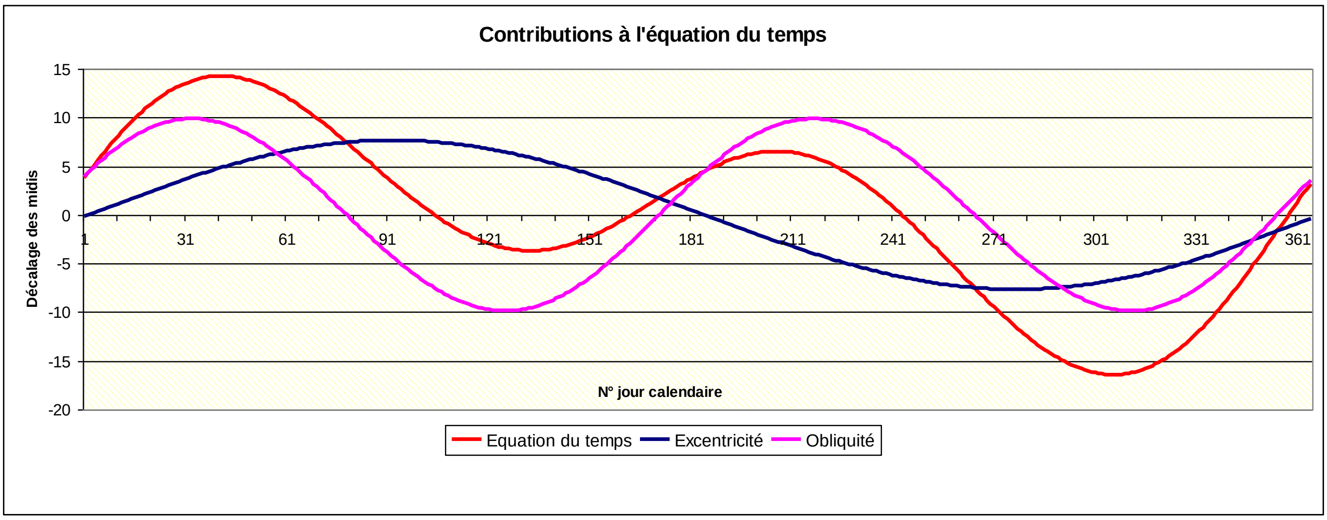
- 1) http://kaekoda.free.fr/bup/bup2.pdf
- 2) http://www.analemma.com/
- 3) http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Soleil/Heure/Index_heure.html
- 4) http://www.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsII/mul/mueller.html
- 5) J.Ripert, S. Ricou

En particulier la référence [5] met bien en évidence que le décalage entre la culmination du soleil et le midi local a pour origine :

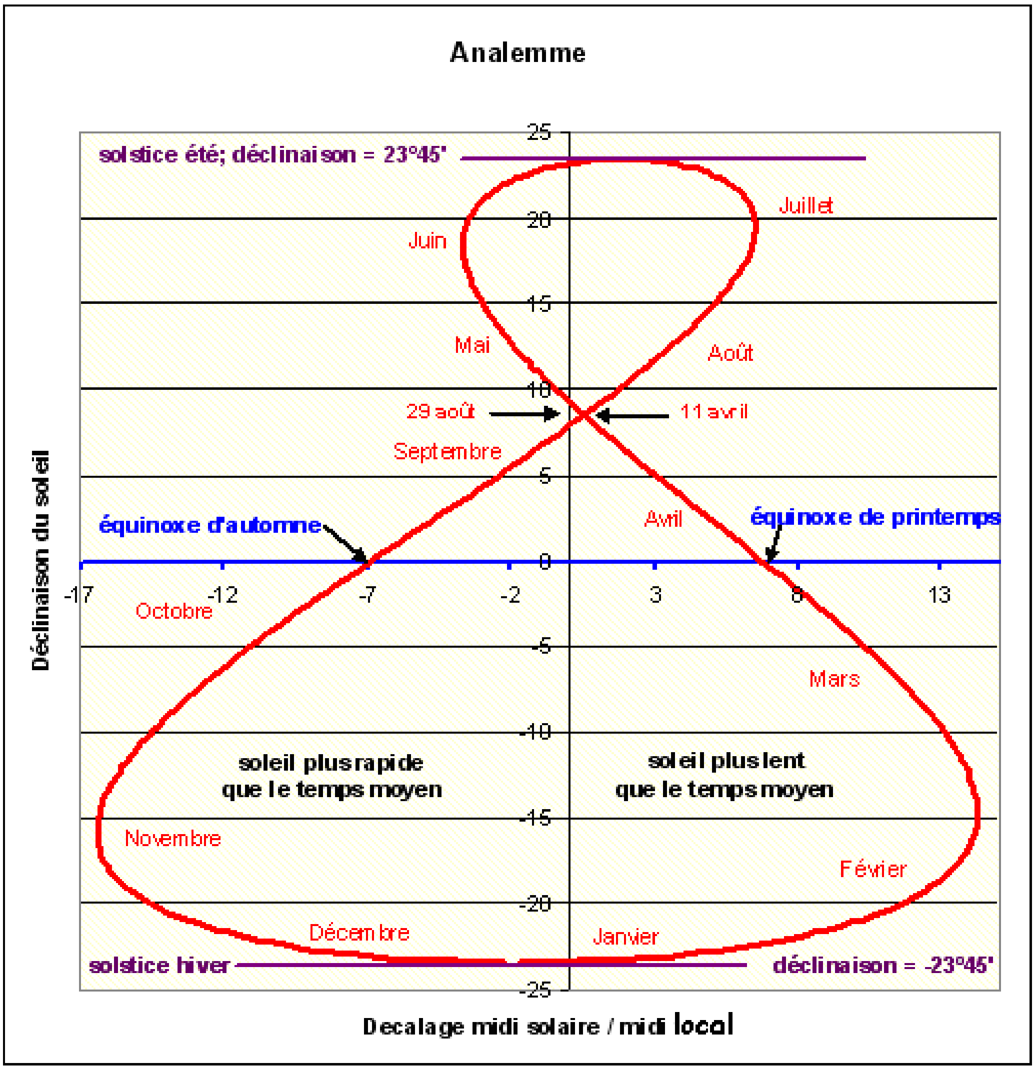
- le fait que **la terre parcourt son orbite elliptique à une vitesse variable** – selon la loi mise en évidence par Képler :
  - la vitesse de la Terre étant maximale quand elle passe au plus près du soleil, au voisinage du périhélie
  - NB : quand on trace l'orbite terrestre à l'échelle, on a la surprise de constater qu'elle est très proche d'un cercle ! A se demander comment Képler a pu se convaincre qu'il s'agissait d'une ellipse (il est vrai qu'il a commencé son raisonnement avec la planète Mars – dont l'orbite est un plus excentrique que celle de la Terre) !? En dépit de la faible excentricité de l'ellipse terrestre, l'effet est notable – sans être le plus important.
- **l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport à l'écliptique :**
  - **c'est là le paramètre le plus important** ; d'abord parce que le phénomène des saisons – qu'il génère – est la cause de la **variation de hauteur du soleil au long de l'année** ; cette variation permet au soleil de « décrire » l'analemme au firmament – en procurant au décalage des midis l'axe qui lui aurait manqué pour se déployer !!
  - mais l'inclinaison entraîne aussi intrinsèquement un **décalage entre midi solaire et midi local** ; en effet, l'heure se réfère aux coordonnées équatoriales terrestres, tandis que le mouvement du soleil se produit dans le plan de l'écliptique. Même si le soleil décrivait son ellipse à vitesse constante, la projection de son mouvement journalier dans le plan équatorial terrestre varierait en fonction de la « distance » entre les deux plans (laquelle est minimale aux équinoxes ; maximale aux solstices).
  -

L'important au final est de bien voir que **les deux décalages se cumulent jour après jour** ; comme ils sont l'un et l'autre tantôt positifs, tantôt négatifs, et que leur intensité respective est du même ordre de grandeur, le décalage résultant entre la culmination et le midi local prend lui aussi des valeurs positives ou négatives selon la période de l'année.

En calculant les deux contributions (voir méthode en Annexe) et en les combinant, on trouve :



Si l'on trace les variations de l'équation du temps (en abscisses) ***en fonction de la hauteur du soleil*** dans les coordonnées équatoriales (déclinaison) (en ordonnées), on obtient cette fois la courbe en huit bien lissée qu'on appelle **analemme** :



- au total, l’analemme traduit :
  - un retard sur le soleil vrai en début d’année, qui devient maximal fin février
  - une inversion de la tendance vers le 15 avril, puis de nouveau un retard fin juin, etc..
  - l’équation du temps s’annule (coupe l’axe des ordonnées) en 4 points - approximativement: le 24 décembre, le 13 avril, le 11 juin, le 31 août
  - le point d’intersection du huit (les 11 avril et 29 août n’a pas de signification particulière

En guise de conclusion, photo (suggérée par Yves) du cadran solaire analemmatique de l’Abbaye Royale de Brou (01) :

L’analemme est-elle immuable ?

Les deux contributions à l’équation du temps sont indépendantes du lieu où l’on se trouve sur la Terre. **L’équation du temps, c'est-à-dire le décalage midi solaire / midi local est indépendante du lieu**. L’axe des décalages de l’analemme est donc invariant

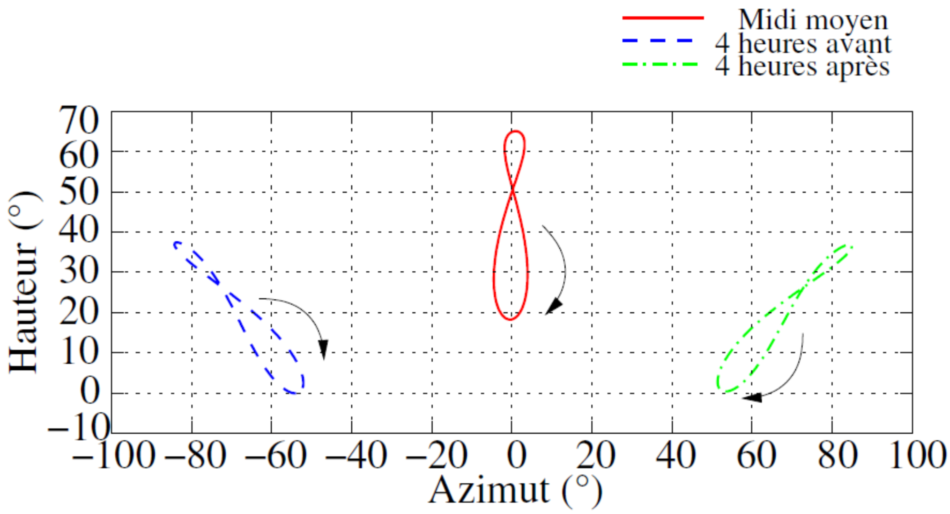
De même l’axe des hauteurs solaires – exprimé par la déclinaison - est indépendant du lieu.

L’analemme est donc globalement indépendante du lieu.

Toutefois :

- la traduction de l’analemme sur les cadrans solaires - à titre de correction de l’heure lue à partir de l’ombre portée du gnomon - dépend bien sûr du type de cadran (horizontal, vertical, équatorial,…), mais ceci est une autre histoire…
- la traduction de l’analemme telle qu’elle résulte de l’observation directe du soleil, dépend bien sûr de la latitude du lieu et des variations de la hauteur solaire à cette latitude.

Il est aussi possible de construire des analogues de l’analemme pour différents temps dans la journée (heure du passage du soleil à tel méridien, c'est-à-dire à telle longitude. Le huit est alors incliné sur l’horizon, mais fondamentalement le raisonnement ne change pas.



Position du Soleil dans le ciel à midi moyen, quatre heures auparavant et quatre heures après.

(image tirée de la référence [1])

Les variations à très long terme – induites par la précession et autres mouvements connus de très longue période affectant la rotation de la Terre - sont susceptibles de faire changer la forme de l’analemme.

Des variations significatives de l’excentricité de l’orbite terrestre, ou de l’inclinaison de l’axe terrestre – c'est-à-dire des paramètres qui la déterminent – pourraient induire des changements radicaux dans la forme de l’analemme, comme les simulations permettent de l’illustrer.

Annexe

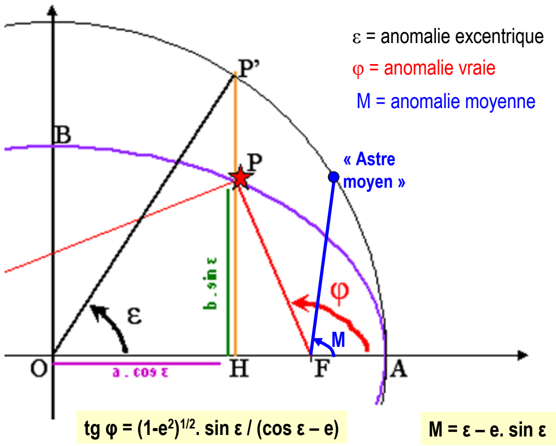
Pour en savoir plus !!... ou plutôt…

Pour en ignorer moins !!

(déconseillé aux non-matheux)

(déconseillé aussi aux matheux de haute volée !)

Comme il me semble être moins mal à l'aise dans le formalisme mathématique que dans les représentations 3D, je résume ici la démarche – sans rien démontrer et en m'aidant aussi des sites précédemment cités.



Effet d'excentricité de l'ellipse terrestre :

- définissons d'abord les anomalies :
  - **l'anomalie vraie φ** est l'angle balayé par le rayon vecteur de l'astre depuis son passage au périhélie
  - si l'on définit une « terre moyenne » de période de révolution T et décrivant une orbite circulaire centrée sur le soleil (donc au foyer F) à vitesse angulaire constante, **l'anomalie moyenne M** est l'angle décrit par cette « terre moyenne » pendant que la « vraie terre décrit » l'angle **φ**
  - **l'anomalie excentrique ε** est l'angle – mesuré à partir du périhélie – correspondant à la projection de l'astre sur le cercle exinscrit à l'ellipse selon son grand axe
- la célèbre formule de Képler relie l'anomalie excentrique ε et l'anomalie vraie M :

$$\boldsymbol{\varepsilon = M + e \sin \varepsilon},$$

où e est l'excentricité de l'orbite

  - la grandeur ε apparaissant dans les deux membres, cette équation est solvable par itération (méthode de Newton, par exemple)
  - mais le théorème d'inversion de Lagrange permet d'exprimer ε sous forme d'une série dans laquelle n'interviennent plus que e et M :

$$\varepsilon = M \; + (e-(1/8)e^3 \sin M + (e^2/2) \sin 2M + (3/8)e^3 \sin 3M$$

on peut donc obtenir ainsi l'anomalie excentrique à partir de l'anomalie moyenne

- le calcul de l'anomalie vraie φ à partir de l'anomalie excentrique fait appel à la relation :

$$tg^2 (\varphi/2) = [(1-e) / (1+e)] \,.\, tg^2 (\varepsilon /2)$$

soit encore:

$$\boldsymbol{\varphi = 2.\ Arctg\ [((1+e)/(1-e))^{1/2}\ .\ tg\ (\varepsilon /2)]}$$

on peut l'exprimer sous forme d'un développement limité en e :

$$\varphi = \varepsilon + (e+(e^3/4)) \sin \varepsilon + e^2/4 \sin 2\varepsilon + e^3/12 \sin 3\varepsilon$$

- en combinant les deux relations, on arrive donc à calculer directement l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie moyenne :

$$\boldsymbol{\varphi = M + (2e - (1/4)e^3) \sin M + (5/4)\ e^2 \sin 2M + (13/12)\ e^3 \sin 3M}$$

la correction due à l'excentricité (souvent notée C) **est donc** :

$$\boldsymbol{C = \varphi - M = (2e - (1/4)e^3) \sin M + (5/4)\ e^2 \sin 2M + (13/12)\ e^3 \sin 3M}$$

soit encore, en remplaçant l' excentricité par sa valeur, de e= 0.01671 :

$$\boldsymbol{C = \varphi - M = 1.9148\ \sin M + 0.020 \sin 2M + 0.0003 \sin 3M}$$

Effet d'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre :

- cette correction …. est aussi appelé réduction à l'équateur. Elle exprime le décalage entre la longitude écliptique du Soleil et son ascension droite.
- son intensité dépend de l'écart du soleil au point vernal :
  - or la longitude du point vernal (équinoxe de printemps) par rapport au périhélie est $\Pi = 282{,}9372°$
- la longitude écliptique du soleil est donc : $\lambda = \varphi + \Pi$
  - en intégrant l'anomalie vraie – *compte déjà tenu de la correction d'excentricité* - il vient : **$\lambda = M + C + \Pi$ (modulo 360°)**
  - il est également possible – en utilisant les développements limités des fonctions trigonométriques – d'obtenir une relation exprimant l'amplitude R de cette correction, en fonction de la longitude écliptique du soleil et l'obliquité ω : (ω=23°28')

$$\mathbf{R = - tg^2\omega/2 \,.\, \sin2\lambda + (1/2)\, tg^4\omega/2 \,.\, \sin4\lambda - (1/3)\, tg^6\omega/2 \,.\, \sin6\lambda}$$

en tenant compte du fait que ω=23°28', il vient :

$$\mathbf{R= -2.4680 \sin2\lambda + 0.0530 \sin4\lambda - 0.0014 \sin6\lambda}$$

Combinaison des deux effets précédents :

- on appelle Equation du Temps (au sens ancien de ce terme : correction), la somme algébrique des deux corrections précitées (en degrés d'arc) (NB : la convention de signe en France est évidemment l'inverse de celle des pays anglo-saxons):

équation du temps = correction d'excentricité + correction d'obliquité

$$\mathbf{\Delta = C + R}$$

- la somme obtenue est exprimée en degrés d'arc; pour la convertir en minutes d'heures – sachant que 360° d'angles correspondent à 24x60 minutes :

$$\Delta T = \Delta \times (24 \times 60)/360$$

$$\Delta T = \Delta \times 4$$

Exemple pratique de calcul de l'équation du temps pour une date donnée :

- calcul de l'anomalie moyenne du jour considéré :
  - on la calcule en fonction du jour julien :
    $M = M_0 + M_1.(J-J_{2000})$, avec $J_{2000} = 2451545$, $M_0 = 357.5291°$ (position de la terre par rapport au périhélie le 1/1/2000), et $M_1 = 0{,}9856°$/jour
  - cette formule exigeant le calcul du jour julien de la date (ce qui n'est pas difficile en soi, mais nécessite d'introduire le concept de jour julien), on peut lui préférer ici la formule approchée :

$$\mathbf{M \sim M_0 + M_1 * N \text{ (modulo 360°)}}$$

où N est le numéro du jour dans l'année

- le calcul de C, R, Δ et ΔT est alors mené à l'aide des formule précédentes
- le fichier joint représente ces calculs ainsi que les graphiques respectifs des contributions :

Calculs_analemme

(NB : la déclinaison du soleil a été calculée par la formule approchée de la référence : http://www.heliodon.net/downloads/Beckers_2010_Helio_007_fr.pdf))