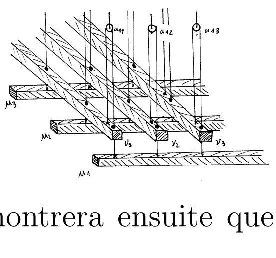
La borne de Jacobi. Déterminant tropical, ordre et formes normales des systèmes d'EDO

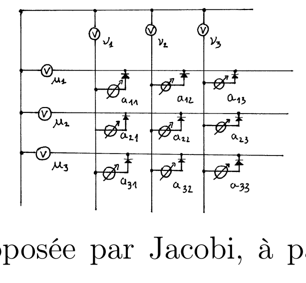
F. Ollivier
LIX, UMR CNRS n° 7161
École polytechnique
F-91128 Palaiseau cedex
francois.ollivier@lix.polytechnique.fr

Jacobi [1, 2] a affirmé que l'ordre d'un système différentiel ordinaire $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $1 \le i \le n$, tel que $\mathrm{ord}_{x_j} P_i = a_{i,j}$ était borné par $\max_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$. Cette expression est le *déterminant tropical* de la matrice $(a_{i,j})$. On obtient une expression *tropicale* en remplaçant les produits par des sommes et les sommes par des maxima [8].

Jacobi a fourni un algorithme polynomial pour calculer le déterminant tropical, qui fut réinventé en 1955 par Kuhn [6, 7] en s'inspirant des travaux de Kőnig [5] et Egerváry [3]. Celui-ci avait montré que si μ_i et ν_j forment une *couverture minimale* de $(a_{i,j})$, c'est-à-dire si $a_{i,j} \le \mu_i + \nu_j$ et si $\sum_{i=1}^{n}(\mu_i + \nu_i)$ est minimale, alors cette somme est le déterminant tropical de $(a_{i,j})$.

On illustrera les rapports entre l'algorithme de Jacobi et celui de Kuhn de même que les rapports entre les *canons minimaux* de Jacobi, quantités minimales à ajouter à chaque ligne pour que chacune contienne des maxima (dans leur colonne) placés dans des colonnes toutes différentes, et les couvertures minimales d'Egerváry, en s'aidant d'analogies physiques, comme le système mécanique ou le montage électrique ci-dessous.





On montrera ensuite que la méthode proposée par Jacobi, à partir du canon minimal, pour parvenir dans le cas générique, c'est-à-dire si le *déterminant tropical* est non nul, à une forme normale en dérivant chaque équation un nombre minimal de fois s'étend au cadre plus général des couvertures d'Egerváry.

On illustrera ensuite de quelques exemples la méthode de Jacobi pour rechercher toutes les formes normales d'un système d'EDO, ainsi que sa méthode pour déterminer combien de fois il faut dériver chacune des équations du système pour parvenir à calculer une résolvante, méthode que Jordan a retrouvé pour tenter de prouver la borne de Jacobi [4].

On conclura avec quelques autres possibilités d'emploi du déterminant tropical et des couvertures, comme la recherche d'un décomposition diagonale ou triangulaire par blocs.

Bibliographie

[1] Jacobi (Carl Gustav Jacob), « De investigando ordine systematis aequationum differentialum vulgarium cujuscunque », traduction anglaise, *AAECC*, **20**, (1), 7–32, 2009.

[2] Jacobi (Carl Gustav Jacob), « De aequationum differentialum systemate non normali ad formam normalem revocando », traduction anglaise, *AAECC*, **20**, (1), 33–64, 2009.

[3] Egerváry (Jenő), « Matrixok kombinatorius tulajdonságairól » [En hongrois : Des propriétés cmbinatoires des matrices], *Matematikai és Fizikai Lapok*, vol. 38, 1931., 16–28 ; traduit en américain par H. W. Kuhn, Paper 4, Issue 11 of *Logistik Papers*, Georges Washington University Research Project, 1955.

[4] Jordan (Camille), « Sur l'ordre d'un système d'équations différentielles », *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, vol. 7, B., 127–130, 1883.

[5] Kőnig (Dénes), « Gráfok és mátrixok », *Matematikai és Fizikai Lapok* 38 : 116–119, 1931.

[6] Kuhn (Harold H.), « The Hungarian method for the assignment problem », *Naval res. Logist. Quart.* **2** (1955), 83–97.

[7] Kuhn (Harold H.), "A tale of three eras : The discovery and rediscovery of the Hungarian Method", *European Journal of Operational Research*, 219 (2012), 641–651.

[8] Maclagan (Diane) and Sturmfels (Bernd), *Introduction to Tropical Geometry*, preprint, 2015.

https ://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/TropicalBook20.4.14.pdf