



Outils analytiques et numériques pour la dynamique des systèmes planétaires extra-solaires en résonance ou non

Jean-Baptiste Delisle

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Delisle. Outils analytiques et numériques pour la dynamique des systèmes planétaires extra-solaires en résonance ou non. Earth and Planetary Astrophysics [astro-ph.EP]. Université Pierre et Marie Curie, France, 2014. French. <tel-01163616>

HAL Id: tel-01163616

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01163616>

Submitted on 15 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ÎLE DE FRANCE
INSTITUT DE MÉCANIQUE CÉLESTE ET DE CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES

**OUTILS ANALYTIQUES ET NUMÉRIQUES POUR LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES
PLANÉTAIRES EXTRA-SOLAIRES EN RÉSONANCE OU NON**

Par Jean-Baptiste DELISLE
Thèse de doctorat en Astronomie et Astrophysique

Dirigée par Jacques LASKAR

Présentée et soutenue publiquement le 15 septembre 2014

Devant un jury composé de :

Daniel FABRYCKY rapporteur
Jacques LASKAR directeur de thèse
Anne LEMÂÎTRE examinatrice
Rosemary MARDLING rapporteur
Alessandro MORBIDELLI examinateur
Bruno SICARDY président du jury

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Jacques Laskar pour m'avoir encadré et conseillé tout au long de cette thèse. Je le remercie aussi de la confiance qu'il m'a témoigné et de son soutien pendant ces trois années.

Je souhaite remercier également Rosemary Mardling et Daniel Fabrycky pour leur lecture attentive du manuscrit, ainsi qu'Anne Lemaître, Alessandro Morbidelli et Bruno Sicardy pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse et l'honneur qu'ils me font en participant au jury. Je remercie aussi Alexandre Correia et Stéphane Udry pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux malgré leur impossibilité de participer au jury.

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe ASD pour son accueil et l'ambiance chaleureuse de travail qui y règne. Merci en particulier à Mickaël Gastineau pour ses nombreux conseils et dépannages informatiques et à Philippe Robutel pour sa disponibilité et ses conseils scientifiques. Un grand merci à Alexandre Correia pour ses conseils et ses explications précieuses notamment sur l'effet de marée ainsi que pour m'avoir généreusement permis d'utiliser son code de simulation numérique.

Merci également Jean-Claude Mouillard qui a su me donner goût à la physique en math sup et qui m'a conseillé de retravailler la mécanique céleste pour réussir mes études. J'espère pouvoir suivre son conseil un bon moment encore.

Enfin, j'aimerais remercier ma famille et mes amis pour leur présence et leur soutien tout au long de ces longues études. Un merci tout particulier à Lucille pour sa patience, ses encouragements et son enthousiasme pendant ces dernières années.

Outils analytiques et numériques pour la dynamique des systèmes planétaires extra-solaires en résonance ou non

Résumé :

Les systèmes multi-planétaires détectés par la mission *Kepler* présentent un excès de paires de planètes proches de résonances de moyen mouvement d'ordre un (e.g. 2:1, 3:2) mais avec un rapport de périodes légèrement supérieur à la valeur résonante (e.g. $P_{ext}/P_{int} = 2.02$ au lieu de 2). Différents mécanismes ont été proposés pour expliquer cette observation. Dans cette thèse, nous étudions la possibilité que ces systèmes aient été initialement en résonance et aient atteint leur configuration actuelle à cause de la dissipation par effet de marée dans les planètes. De manière plus générale, nous établissons des critères analytiques permettant de prévoir l'évolution à long terme de systèmes en résonance d'ordre quelconque en présence de dissipation de marée. Nous montrons que cette évolution dépend de l'importance relative de la dissipation dans chacune des deux planètes. L'état final d'un système n'est pas le même suivant que la planète subissant la plus forte dissipation est la planète interne ou la planète externe. Ainsi, à partir de la configuration actuellement observée et plus spécifiquement du rapport de périodes de deux planètes proches d'une résonance, on peut déduire quelle planète a subi la dissipation la plus importante. Cela donne des contraintes importantes sur la nature des planètes considérées, car il est communément admis que les planètes rocheuses dissipent plus fortement par effet de marée que les planètes gazeuses.

Mots clés : mécanique céleste, planètes extra-solaires, systèmes planétaires, résonances, effet de marée, méthodes analytiques, méthodes numériques.

Analytical and numerical tools for the dynamics of extrasolar planetary systems in resonance or not

Abstract :

Multi-planetary systems discovered by the *Kepler* mission present an excess of planet pairs close to first-order mean-motion resonances (e.g. 2:1, 3:2) but with a period ratio slightly higher than the resonant value (e.g. $P_{out}/P_{in} = 2.02$ instead of 2). Several mechanisms have been proposed to explain this observation. In this thesis, we investigate the possibility that these systems were initially in resonance and reached their current configuration due to tidal dissipation in the planets. More generally, we establish analytical criteria for predicting the long term evolution of systems locked in resonances of any order undergoing tidal dissipation. We show that this evolution depends on the relative importance of the dissipation in each of both planets. The final state of a system depends on whether the planet undergoing the stronger dissipation is the inner or the outer planet. Therefore, from the currently observed configuration and more specifically the period ratio of two planets close to a resonance, one can deduce which of both planet underwent the strongest dissipation. This provides important constraints on the nature of the considered planets, since it is commonly accepted that rocky planets dissipate more strongly by tidal effect than gaseous planets.

Keywords : celestial mechanics, extrasolar planets, planetary systems, resonances, tidal effect, analytical methods, numerical methods.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Occurrence des résonances parmi les planètes extrasolaires	1
1.2	Formation et évolution des systèmes planétaires	1
1.2.1	Effondrement d'une nébuleuse primitive et disque protoplanétaire	1
1.2.2	Évolution ultérieure des planètes	2
1.3	Le rôle des résonances de moyen mouvement	3
1.3.1	Migration et résonance	3
1.3.2	Problématique et démarche	3
2	Étude de la dynamique des systèmes résonants conservatifs	5
2.1	Problème planétaire plan et formalisme Hamiltonien	5
2.2	Hamiltonien séculaire, problème des petits diviseurs	8
2.2.1	Méthode des séries de Lie	8
2.2.2	Forme normale séculaire	10
2.3	Hamiltonien résonant	11
2.3.1	Forme normale résonante	11
2.3.2	Réductions et intégrales premières	12
2.3.2.1	Réduction du moment cinétique	13
2.3.2.2	Réduction due à la moyennisation	13
2.3.2.3	Coordonnées complexes de Poincaré	13
2.3.2.4	Renormalisation	15
2.3.3	Calcul explicite des coefficients du Hamiltonien résonant	16
2.4	Modèle simplifié intégrable des résonances	18
2.4.1	Résonances de degré un	19
2.4.2	Cas général	21
2.4.3	Développement de la partie Keplerienne	23
2.4.4	Forme finale du Hamiltonien simplifié	23
2.4.5	Dynamique dans le modèle simplifié	24
2.4.5.1	Résonance de degré un	26
2.4.5.2	Résonance de degré deux	27
2.4.5.3	Résonance de degré trois	28
2.4.5.4	Différence fondamentale des résonances de degré un	28
2.5	Recherche de la position du centre de libration	29
2.5.1	Recherche analytique	30
2.5.2	Recherche numérique	32

3	Étude de la dynamique en présence de dissipation	35
3.1	Dissipation et sortie des résonances	35
3.2	Évolution des intégrales premières et de l'espace des phases	38
3.2.1	Migration dans le disque protoplanétaire	39
3.2.2	Effet de marée dans les planètes	39
3.3	Évolution de l'amplitude de libration	40
3.4	État final d'un système résonant sous l'action de l'effet de marée	43
3.5	Conclusions	44
4	Applications	47
4.1	Contraintes sur la structure interne des planètes	47
4.1.1	Application à GJ 163b, c (résonance 3:1, degré 2)	47
4.1.1.1	Le système détecté	47
4.1.1.2	Scenario de formation du système	48
4.1.1.3	Simulations numériques	49
4.1.2	Application à GJ 581b, c (résonance 5:2, degré 3)	53
4.1.3	Application à Kepler 18c, d (résonance 2:1, degré 1)	55
4.2	Distribution des rapports de périodes et dissipation	57
4.2.1	Statistiques de la mission <i>Kepler</i>	57
4.2.2	Scenario de sortie à excentricités faibles	61
4.2.3	Scenario de sortie à excentricités importantes	63
4.2.3.1	Scenario	63
4.2.3.2	Échelle de temps	64
5	Conclusions et perspectives	67
A	Évolution de l'amplitude de libration	69
B	Libration des angles résonants et évolution séculaire	73
C	Articles	77
C.1	Dissipation in planar resonant planetary systems	77
C.2	Resonance breaking due to dissipation in planar planetary systems	95
C.3	Tidal dissipation and the formation of Kepler near-resonant planets	110
C.4	Chaotic diffusion of the Vesta family induced by close encounters with massive asteroids	115
	Bibliographie	125

Chapitre 1

Introduction

1.1 Occurrence des résonances parmi les planètes extrasolaires

Le nombre de planètes extra-solaires détectées à ce jour est considérable. Depuis la première détection en 1992 d'une exoplanète autour d'un quasar (Wolszczan & Frail, 1992) et celle en 1995 d'une exoplanète autour d'une étoile comparable au Soleil (Mayor & Queloz, 1995), plusieurs méthodes de détection, principalement spectroscopiques (vitesses radiales) et photométriques (transits) ont permis d'établir l'existence d'environ 1800 planètes réparties dans environ 1100 systèmes planétaires. Parmi ces systèmes, 460 sont des systèmes multiples, c'est-à-dire abritant deux planètes ou plus. Ces données collectées depuis une vingtaine d'années et en particulier les nombreuses détections obtenues récemment par la mission *Kepler* de la NASA (méthode des transits), permettent aujourd'hui de réaliser des études statistiques sur les systèmes planétaires.

L'un des résultats les plus surprenant de la mission *Kepler* est le faible nombre de paires de planètes observées en résonance de moyen mouvement. Une résonance de moyen mouvement apparaît lorsque le rapport des périodes de révolution de deux planètes est rationnel ($P_{\text{ext}}/P_{\text{int}} = 4/3, 3/2, 2, 5/2, 3, \text{etc.}$). Les modèles de formation des systèmes planétaires suggèrent que ces résonances jouent un rôle important dans l'évolution des orbites des planètes et l'on pouvait s'attendre à observer un grand nombre de systèmes en résonance, en particulier dans les résonances 2:1 et 3:2. Les résultats de la mission *Kepler* montrent que très peu de planètes se trouvent dans ces résonances alors qu'un excès significatif de systèmes sont détectés avec un rapport de périodes proche mais légèrement supérieur au rapport résonant (par exemple : $P_{\text{ext}}/P_{\text{int}} \approx 2.02$ au lieu de 2, voir Lissauer et al., 2011; Fabrycky et al., 2012). La figure 1.1 reproduit un histogramme du rapport de périodes entre deux planètes d'un même système obtenu par Fabrycky et al. (2012) à partir des données de la mission *Kepler*.

Ce résultat inattendu a été l'objet d'un grand nombre d'études qui proposent différents mécanismes de formation de ces systèmes. On peut notamment citer l'effet de marée généré par l'étoile dans les planètes (Lithwick & Wu, 2012; Delisle et al., 2012, 2014; Batygin & Morbidelli, 2013b), des phénomènes dissipatifs entre les planètes et le disque protoplanétaire (Rein, 2012; Baruteau & Papaloizou, 2013), les interactions planètes-planétésimaux (Chatterjee & Ford, 2014), ou la formation in-situ des planètes (Petrovich et al., 2013; Xie, 2014). Dans cette thèse, nous explorons en détail le scénario impliquant l'effet de marée. Dans la suite de l'introduction nous donnons un bref aperçu du scénario standard de la formation des planètes en mettant l'accent sur le rôle des résonances de moyen mouvement.

1.2 Formation et évolution des systèmes planétaires

1.2.1 Effondrement d'une nébuleuse primitive et disque protoplanétaire

L'hypothèse communément admise aujourd'hui de formation des étoiles et des planètes est celle de la nébuleuse primitive. Cette hypothèse fut formulée par Swedenborg (1734) et complétée par Kant (1755) puis

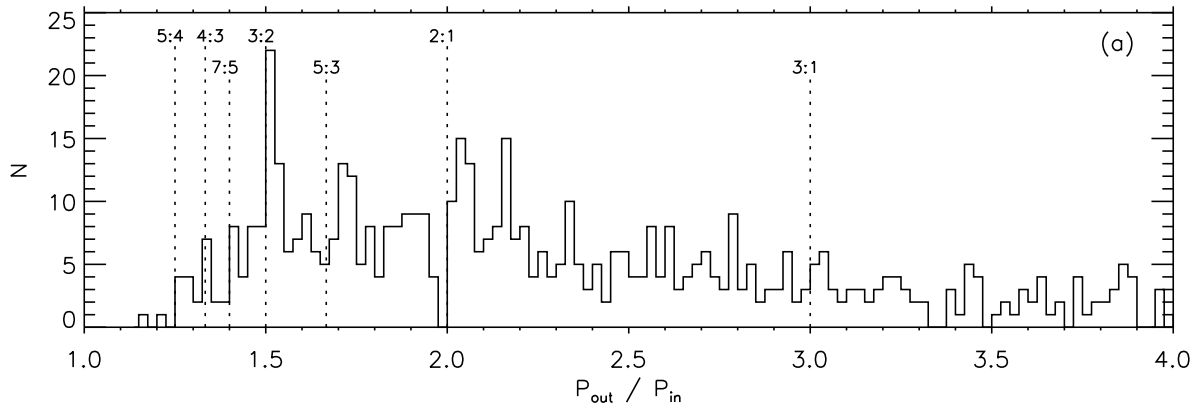


FIGURE 1.1 – Distribution du rapport de période orbitale entre deux planètes d’un même système dans la base de données des KOI de la mission *Kepler* (Fabrycky et al., 2012). On observe un excès de paires de planètes à droite des résonances 3:2 et 2:1 (rapport de période légèrement supérieur à 1.5 et 2).

indépendamment par Laplace (1796). Ces travaux s’inspirent d’une certaine manière de la théorie de Descartes (1664) qui stipule avant que la loi de gravitation de Newton (1687) ne soit connue et reconnue que les étoiles et les planètes se sont formées dans de grands tourbillons par contraction et condensation. Enfin, ce scénario de formation du Système Solaire et plus généralement des systèmes planétaires n’a cessé de s’enrichir, en particulier depuis le début du XX^{ème} siècle.

Dans ce modèle, les étoiles se forment par l’effondrement gravitationnel d’une nébuleuse de gaz et de poussière autour d’une zone initialement plus dense que l’espace environnant, à condition que la surdensité atteigne une masse critique (dite masse de Jeans, voir Jeans, 1902). Une étoile se forme alors au centre de la nébuleuse et concentre la plus grande partie de la masse initiale. En se contractant, la nébuleuse qui tourne initialement lentement autour de l’étoile naissante, accélère sa rotation par conservation du moment cinétique. Le nuage de gaz et de poussière subsistant autour de l’étoile s’aplatit pour former un disque. La matière solide (poussière) tombe alors au sein du disque de gaz vers le plan de révolution (équateur) et forme des grains de l’ordre du centimètre. L’étape suivante est encore mal connue et consiste à former un grand nombre de planétésimaux (embryons de planètes) de l’ordre du kilomètre par agrégation de ces grains de poussière (Goldreich & Ward, 1973). Ensuite, au gré des collisions entre planétésimaux, quelques objets (futurs planètes) gagnent une masse suffisante pour attirer à eux les planétésimaux voisins par attraction gravitationnelle. C’est ainsi que se forment les planètes rocheuses et le noyau des planètes gazeuses. Ces dernières sont celles qui ont formé un noyau suffisamment massif pour capturer ensuite le gaz (hydrogène et hélium) présent dans le disque protoplanétaire (Pollack et al., 1996). Le disque protoplanétaire (gaz et poussière) disparaît après une dizaine de millions d’années (Haisch et al., 2001), mettant fin à l’accrétion des planètes géantes. Il reste alors un grand nombre de planétésimaux et les planètes rocheuses continuent leur accroissement pendant une centaine de millions d’années par collision et fusion des planétésimaux.

Tant que le disque protoplanétaire est présent, des interactions gravitationnelles entre ce disque et les planètes perturbent l’évolution orbitale des planètes. Ces perturbations restent aujourd’hui mal contraintes et dépendent des propriétés du disque et des planètes mais il est communément accepté que le disque induit une migration des planètes qui le plus souvent spiralent vers l’étoile (Goldreich & Tremaine, 1979), une circularisation des orbites (diminution de l’excentricité des planètes) ainsi qu’un amortissement des inclinaisons.

1.2.2 Évolution ultérieure des planètes

Après la disparition du disque les orbites des planètes continuent d’évoluer, d’une part à cause des perturbations gravitationnelles entre les planètes et entre les planètes et les planétésimaux restants (modèle de Nice, Morbidelli et al., 2005; Tsiganis et al., 2005; Gomes et al., 2005) et d’autre part à cause d’effets dissipatifs

tels que l'effet de marée (Darwin, 1880). Cet effet est important pour les planètes proches de leur étoile et a tendance à circulariser les orbites et induire un spiralement (migration) de la planète vers son étoile. La migration des planètes par effet de marée est un processus bien plus lent que la migration due au disque protoplanétaire. En revanche, cet effet agit sur des milliards d'années (suivant l'âge des systèmes) et peut donc significativement modifier les orbites des planètes après la disparition du disque.

1.3 Le rôle des résonances de moyen mouvement

1.3.1 Migration et résonance

Lorsque deux planètes subissent une migration convergente, c'est-à-dire que le rapport de la période de révolution de la planète la plus éloignée de l'étoile sur la période de la planète interne ($P_{\text{ext}}/P_{\text{int}}$) diminue, les planètes peuvent être piégées en résonance de moyen mouvement (Weidenschilling & Davis, 1985). Une fois que deux planètes sont piégées en résonance, elles continuent de migrer en spiralant vers l'étoile mais en maintenant constant le rapport de périodes $P_{\text{ext}}/P_{\text{int}}$ à la valeur résonante (e.g. 3/2, 2, etc.). Suivant les propriétés du disque et des planètes, la capture en résonance peut être permanente ou seulement temporaire. Dans le cas d'une capture temporaire, le rapport de périodes se met à nouveau à diminuer rapidement (migration convergente) et les planètes peuvent alors être à nouveau piégées dans une autre résonance. Ces configurations résonantes des planètes sont donc probablement courantes à la fin de la phase de migration, lorsque le disque disparaît.

1.3.2 Problématique et démarche

Dans cette thèse nous explorons la possibilité qu'un grand nombre de planètes se soient retrouvées en résonance à la suite de la phase de migration dans le disque protoplanétaire et que les statistiques observées aujourd'hui soient le résultat d'une longue (plusieurs milliards d'années) phase ultérieure de dissipation par effet de marée. La problématique à laquelle nous essayons de répondre est : la dissipation par effet de marée peut-elle expliquer la présence d'un grand nombre de systèmes proches mais en dehors des résonances de moyen mouvement ? Nous cherchons à comprendre la dynamique des systèmes résonants en présence de dissipation et en particulier à envisager les différents scénarii possibles de sortie de la résonance à cause de cette dissipation.

Comme la dissipation par effet de marée est un phénomène très lent qui s'échelonne sur des milliards d'années, on distingue deux échelles de temps d'évolution du système :

- Sur le court terme, la dissipation n'affecte que très peu l'évolution du système et les trajectoires du problème dissipatif sont très proches de celles du problème conservatif (sans dissipation).
- Sur le long terme, la dissipation doit être prise en compte au travers de son effet moyen.

Le chapitre 2 traite de la dynamique conservative de deux planètes en résonance de moyen mouvement. On s'attache dans ce chapitre à construire un modèle Hamiltonien des résonances le plus simple possible. Ceci donne un point de départ pour l'étude de la dynamique résonante en présence de dissipation qui est traitée au chapitre 3. L'utilisation d'un modèle simplifié de la dynamique conservative permet d'établir des critères analytiques sur la forme de la dissipation pour prévoir l'évolution du système et en particulier une éventuelle sortie de la résonance. Nous présentons au chapitre 4 différentes applications de notre modèle et notamment au cas des statistiques de la mission *Kepler* (paragraphe 4.2). Enfin, le chapitre 5 est consacré aux conclusions et perspectives de ce travail.

Chapitre 2

Étude de la dynamique des systèmes résonants conservatifs

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de deux planètes en résonances de moyen mouvement, en l'absence de toute dissipation. Le formalisme Hamiltonien que nous adoptons ici est particulièrement adapté dans le cas conservatif. Nous reprenons dans les paragraphes 2.1-2.3 une construction classique du Hamiltonien résonant. Le paragraphe 2.4 présente une simplification supplémentaire qui permet d'obtenir un modèle intégrable (un degré de liberté) des résonances au prix d'une perte d'une partie de la complexité de la dynamique résonante. Enfin le paragraphe 2.5 est consacré à la recherche des points fixes du Hamiltonien résonant « classique », qui sont un élément essentiel dans la construction du modèle simplifié.

2.1 Problème planétaire plan et formalisme Hamiltonien

Nous reprenons ici la méthode de construction du Hamiltonien planétaire proposée par J. Laskar (voir en particulier Laskar, 1991; Laskar & Robutel, 1995). Pour ne pas alourdir les notations nous considérons un système à deux planètes autour d'une étoile. De plus nous restreignons notre étude au cas de planètes coplanaires. On note m_0 , m_1 et m_2 les masses de l'étoile, de la planète interne et de la planète externe. On suppose que l'étoile est bien plus massive que les planètes ($m_0 \gg m_1, m_2$) et le rapport de masse m_i/m_0 ($i \in \{1, 2\}$) est considéré comme un petit paramètre. Les positions des trois corps dans le plan et dans un référentiel barycentrique galiléen, sont notés \mathbf{u}_i , les quantités de mouvement sont notés $\tilde{\mathbf{u}}_i (= m_i \dot{\mathbf{u}}_i)$, où le point désigne la dérivée temporelle. Dans ce référentiel galiléen, le Hamiltonien s'écrit simplement comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_i\|^2}{m_i} - \mathcal{G} \sum_{0 \leq i < j \leq 2} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|}$$

où \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation. Le système de coordonnées $(\mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i)$ est canonique et les équations du mouvement de Newton s'obtiennent à partir des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i} \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}_i} \end{cases}$$

Dans le cas planétaire, il est naturel d'introduire des coordonnées héliocentriques, pour lesquelles les positions des planètes sont repérées par rapport à l'étoile. Il suffit pour cela d'introduire les coordonnées \mathbf{r}_i telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

Cependant, pour préserver les propriétés Hamiltoniennes, il est nécessaire de conserver un système de coordonnées canoniques. Pour ce faire, on introduit les moments $\tilde{\mathbf{r}}_i$, conjugués aux positions \mathbf{r}_i , de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_0 &= \tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{r}}_1 &= \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 &= \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{cases}$$

Ce système de coordonnées canoniques héliocentriques a été introduit pour la première fois par Poincaré en 1896 mais il n'a été utilisé pleinement par les astronomes que depuis son exhumation par Laskar (1989). Dans ce système de coordonnées, l'énergie cinétique se réécrit :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1$$

avec

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \|\tilde{\mathbf{r}}_i\|^2 \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i}$$

et

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0}$$

L'énergie potentielle devient quant à elle :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1$$

avec

$$\mathcal{U}_0 = -\mathcal{G} \sum_{i=1}^2 \frac{m_0 m_i}{\|\mathbf{r}_i\|}$$

et

$$\mathcal{U}_1 = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$$

Et le Hamiltonien est simplement la somme de ces deux contributions :

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$$

\mathcal{T}_1 et \mathcal{U}_1 sont de petites contributions (perturbations) par rapport à \mathcal{T}_0 et \mathcal{U}_0 . On voit en effet apparaître un facteur m_i/m_0 entre $\mathcal{T}_1, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{T}_0, \mathcal{U}_0$. On note $\mathcal{H}_0 = \mathcal{T}_0 + \mathcal{U}_0$ le Hamiltonien non-perturbé (ordre 0 du rapport des masses) et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{U}_1$ la perturbation (ordre 1 du rapport des masses). \mathcal{H}_0 est la réunion de deux problèmes Kepleriens (à deux corps) non couplés, chacun d'eux correspondant au mouvement d'une planète de masse $\beta_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$ autour d'une étoile fixe de masse $m_0 + m_i$ (on note $\mu_i = \mathcal{G}(m_0 + m_i)$). Ce problème est intégrable et les solutions sont des trajectoires coniques (elliptiques dans notre cas) pour chacune des deux planètes. Il est donc naturel d'introduire des coordonnées elliptiques représentant les trajectoires Kepleriennes non-perturbées et d'exprimer la perturbation (\mathcal{H}_1) dans ce système de coordonnées. Pour la planète i , la trajectoire elliptique (non-perturbée) est décrite par (voir figure 2.1) : le demi-grand axe a_i , l'excentricité e_i , l'anomalie vraie ϑ_i et la longitude du périhélie ϖ_i . On note M_i l'anomalie moyenne de la planète i , qui est l'angle décrivant un mouvement circulaire uniforme fictif de même période que la planète.

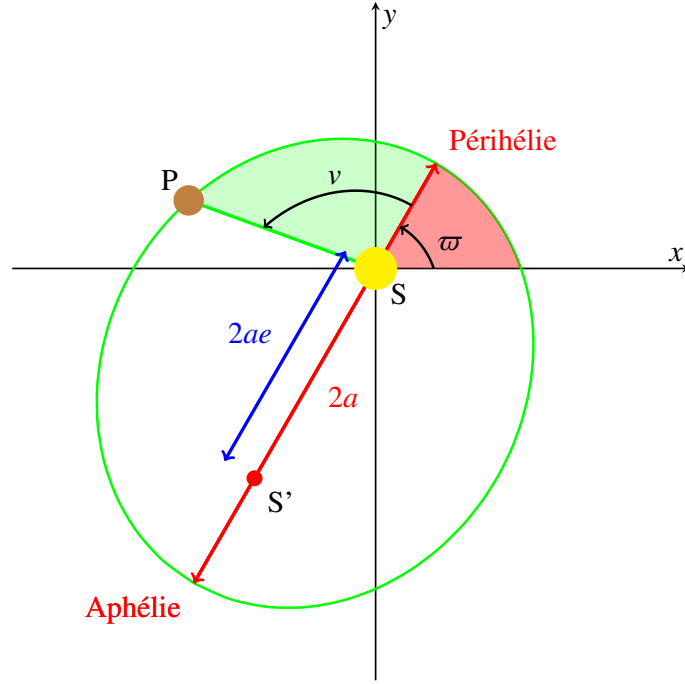


FIGURE 2.1 – Éléments elliptiques osculateurs de l'orbite non-perturbée d'une planète (P) autour de son étoile (S).

Ces coordonnées permettent de décrire le mouvement non-perturbé de la planète bien plus simplement que les coordonnées positions-quantités de mouvement. Cependant elles ne forment pas un système de coordonnées canonique. Pour pallier à ce problème on utilise les coordonnées elliptiques canoniques de Delaunay ($\mathcal{M}_i, \mathcal{L}_i, \varpi_i, \mathcal{G}_i$), avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i &= \beta_i \sqrt{\mu_i \mathcal{G}_i} \\ \mathcal{G}_i &= \mathcal{L}_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2}\end{aligned}$$

\mathcal{G}_i est le moment cinétique orbital de la planète i et \mathcal{L}_i est son moment cinétique circulaire (le moment cinétique qu'elle aurait si l'excentricité était nulle). Dans ce système de coordonnées, le Hamiltonien non-perturbé s'écrit :

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\mathcal{L}_i^2} \quad (2.1)$$

Ainsi, dans le problème Keplerien, toutes les coordonnées sont constantes sauf les anomalies moyennes \mathcal{M}_i , dont on obtient l'évolution en écrivant les équations de Hamilton :

$$\dot{\mathcal{M}}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \mathcal{L}_i} = \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{\mathcal{L}_i^3} = n_i$$

où n_i est appelé le moyen mouvement de la planète i .

Pour connaître l'évolution du système dans le cas perturbé, il faut exprimer la perturbation \mathcal{H}_1 dans les coordonnées de Delaunay. \mathcal{H}_1 ne peut être écrit de manière simple dans ces coordonnées, notamment parce cela nécessite de résoudre l'équation de Kepler (donnant la position d'une planète en fonction du temps) qui n'admet pas de solution explicite simple. On peut cependant développer le Hamiltonien en série de différentes manières. Nous utilisons ici le développement classique en puissance des excentricités qui est valable pour des excentricités faibles. Pour cela, il faut réaliser à nouveau un changement de variables. En effet, les coordonnées

de Delaunay ne sont pas petites lorsque les excentricités ou les inclinaisons sont faibles. On ne peut pas faire un développement directement avec ces variables. On introduit donc les coordonnées elliptiques complexes de Poincaré $(\lambda_i, \Lambda_i, x_i, \bar{x}_i)$, avec :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= M_i + \varpi_i \quad (\text{longitude moyenne}) \\ x_i &= \sqrt{\Lambda_i - G_i} e^{i\varpi_i} = \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_i^2}} e^{i\varpi_i} \end{aligned}$$

Pour de faibles excentricités, x_i est proportionnel à l'excentricité. On note $D_i = x_i \bar{x}_i = \Lambda_i - G_i$ le déficit de moment cinétique de la planète i (cf. Laskar, 2000). Ce déficit est la différence entre le moment cinétique circulaire et le moment cinétique. La perturbation \mathcal{H}_1 est alors développée en série entière des x_i et en série de Fourier des longitudes moyennes λ_i . Les coefficients de ce développement font intervenir les actions Λ_i au travers du rapport des demi-grands axes ($\alpha = a_1/a_2$) et des coefficients de Laplace (e.g. Laskar, 1991). On obtient ainsi le Hamiltonien sous la forme :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2} + \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2, k \in \mathbb{Z}^2} C_{l, \bar{l}, k}(\Lambda) \prod_{i=1}^2 x_i^{l_i} \bar{x}_i^{\bar{l}_i} e^{ik_i \lambda_i} \quad (2.2)$$

La relation de D'Alembert impose, de plus, que seul les monômes vérifiant

$$\sum_{i=1}^2 l_i - \bar{l}_i + k_i = 0$$

ont un coefficient non-nul dans le Hamiltonien.

2.2 Hamiltonien séculaire, problème des petits diviseurs

Dans le cas Keplerien (non-perturbé), les coordonnées elliptiques ne varient pas, à l'exception des longitudes moyennes des planètes qui décrivent le mouvement de révolution autour de l'étoile. Lorsque l'on ajoute la perturbation \mathcal{H}_1 , toutes les coordonnées subissent des variations. Sur le court terme, les variations restent de faible amplitude sauf pour les longitudes moyennes. Cependant, sur le long terme, les autres coordonnées peuvent subir des variations de grande amplitude appelées variations séculaires.

Pour étudier ces variations séculaires, il est utile de moyenner le problème par rapport aux longitudes moyennes (variables rapides). On construit alors la forme normale séculaire à partir du Hamiltonien (2.2) par la méthode des séries de Lie. Cette méthode permet de construire un changement de variables canonique proche de l'identité qui permette de repousser les variations rapides à un ordre plus élevé du rapport des masses (planétaires sur stellaire).

2.2.1 Méthode des séries de Lie

Plaçons-nous, dans un premier temps, dans un cadre plus général, avec un Hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H} = \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon^m \mathcal{H}_m$$

où \mathcal{H}_m est la perturbation d'ordre m du rapport des masses (petit paramètre ϵ). On retrouvera simplement le cas du Hamiltonien planétaire en posant pour tout $m > 1$, $\mathcal{H}_m = 0$. On veut construire un changement de variables $\mathcal{V} = (\lambda, \Lambda, x, \bar{x}) \rightarrow \mathcal{V} = (\lambda, \Lambda, x, \bar{x})$ et un nouvel Hamiltonien \mathcal{H} de sorte que les variations rapides soient repoussées à un ordre arbitrairement élevé du rapport des masses. De même que pour \mathcal{H} , on développe \mathcal{H} en série :

$$\mathcal{H}(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon^m \mathcal{H}_m$$

On introduit alors un Hamiltonien auxiliaire W dont le flot au temps 1 sera le changement de variables recherché :

$$\underline{V} = \mathbf{e}^{L_W} \underline{V} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} L_W^p \underline{V} \quad (2.3)$$

$$\underline{\mathcal{H}} = \mathbf{e}^{L_W} \underline{\mathcal{H}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} L_W^p \underline{\mathcal{H}}$$

où L_W est la dérivée de Lie :

$$L_W f = \{W, f\}$$

et les accolades symbolisent le crochet de Poisson :

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

avec (q_i, p_i) un système de coordonnées canoniques quelconque. À nouveau, on développe W en série :

$$W = \sum_{m=1}^{+\infty} \epsilon^m W_m$$

W n'a pas de terme d'ordre zéro du rapport des masses, ainsi le changement de variables est proche de l'identité. Notons :

$$\underline{\mathcal{H}}^p = L_W^p \underline{\mathcal{H}}$$

qui est d'ordre au moins p et que l'on décompose en :

$$\underline{\mathcal{H}}^p = \sum_{m=p}^{+\infty} \epsilon^m \underline{\mathcal{H}}_m^p$$

Finalement le nouvel Hamiltonien $\underline{\mathcal{H}}$ se décompose en :

$$\underline{\mathcal{H}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\underline{\mathcal{H}}^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{m=p}^{+\infty} \epsilon^m \frac{\underline{\mathcal{H}}_m^p}{p!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon^m \underline{\mathcal{H}}_m$$

D'où, par identification des termes d'ordre m :

$$\underline{\mathcal{H}}_m = \sum_{p=0}^m \frac{\underline{\mathcal{H}}_m^p}{p!}$$

En écrivant $\underline{\mathcal{H}}^p = L_W \underline{\mathcal{H}}^{p-1}$, on obtient les relations de récurrence suivantes pour $1 \leq p \leq m$:

$$\underline{\mathcal{H}}_m^p = \sum_{k=1}^{m-p+1} \{W_k, \underline{\mathcal{H}}_{m-k}^{p-1}\}$$

Et par définition :

$$\underline{\mathcal{H}}^0 = \underline{\mathcal{H}}$$

et

$$\underline{\mathcal{H}}_m^0 = \underline{\mathcal{H}}_m$$

Ceci permet de calculer itérativement les termes d'ordre croissant du Hamiltonien $\underline{\mathcal{H}}$. On obtient pour les premiers ordres les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{H}}_0 &= \underline{\mathcal{H}}_0 \\ \underline{\mathcal{H}}_1 &= \underline{\mathcal{H}}_1 + \{W_1, \underline{\mathcal{H}}_0\} \\ \underline{\mathcal{H}}_2 &= \underline{\mathcal{H}}_2 + \{W_1, \underline{\mathcal{H}}_1\} + \{W_2, \underline{\mathcal{H}}_0\} + \frac{1}{2}\{W_1, \{W_1, \underline{\mathcal{H}}_0\}\}\end{aligned}$$

Ces formules nous donnent l'expression du nouvel Hamiltonien en fonction d'un changement de variables W quelconque. Nous allons maintenant imposer des contraintes sur la forme du Hamiltonien $\underline{\mathcal{H}}$ et chercher le changement de variables W correspondant. Notons tout d'abord que tous les $\underline{\mathcal{H}}_m$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\underline{\mathcal{H}}_m = \{W_m, \underline{\mathcal{H}}_0\} + R_m$$

où R_m ne dépend que des $\underline{\mathcal{H}}_i$ avec $i \leq m$ et des W_i avec $i < m$. La méthode des séries de Lie consiste alors à imposer l'expression de $\underline{\mathcal{H}}_m$ puis à résoudre l'équation suivante, dite homologique, pour obtenir W_m :

$$\{W_m, \underline{\mathcal{H}}_0\} = \underline{\mathcal{H}}_m - R_m \quad (2.4)$$

2.2.2 Forme normale séculaire

Revenons maintenant au cas planétaire. On construit la forme normale séculaire par la méthode des séries de Lie en imposant :

$$\underline{\mathcal{H}}_m = \langle R_m \rangle$$

où $\langle R_m \rangle$ est la moyenne de R_m , c'est-à-dire le terme constant dans la décomposition en série de Fourier de R_m par rapport aux longitudes moyennes (variables rapides) :

$$\begin{aligned}R_m(\underline{\Delta}, \underline{\lambda}, \underline{x}, \bar{\underline{x}}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} R_{m,k}(\underline{\Delta}, \underline{x}, \bar{\underline{x}}) \mathbf{e}^{\mathbf{i}k \cdot \underline{\lambda}} \\ \langle R_m \rangle &= R_{m,0}\end{aligned}$$

Il faut alors résoudre l'équation homologique (cf. équation (2.4)) pour obtenir le changement de variable voulu (W_m) :

$$\{W_m, \underline{\mathcal{H}}_0\} = \langle R_m \rangle - R_m \quad (2.5)$$

Pour cela, on développe W_m en série de Fourier :

$$W_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} W_{m,k}(\underline{\Delta}, \underline{x}, \bar{\underline{x}}) \mathbf{e}^{\mathbf{i}k \cdot \underline{\lambda}}$$

Rappelons que $\underline{\mathcal{H}}_0$ ne dépend que des $\underline{\Delta}_i$ et que l'on note $\underline{n}_i = \frac{\partial \underline{\mathcal{H}}_0}{\partial \underline{\Delta}_i}$ le moyen mouvement dans l'approximation Keplerienne. Le crochet de Poisson $\{W_m, \underline{\mathcal{H}}_0\}$ est donné par :

$$\{W_m, \underline{\mathcal{H}}_0\} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (\mathbf{i}k \cdot \underline{n}) W_{m,k} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k \cdot \underline{\lambda}}$$

En identifiant ce développement de Fourier avec celui de $\langle R_m \rangle - R_m$, on obtient pour tout ordre m et tout $k \neq (0, 0)$:

$$W_{m,k} = \frac{R_{m,k}}{\mathbf{i}k \cdot \underline{n}} \quad (2.6)$$

et on pose $W_{m,0} = 0$. Si on limite le développement à l'ordre un des masses, la forme normale séculaire est simplement le terme constant du développement du Hamiltonien en série de Fourier des longitudes moyennes :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Delta_i^2} + \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2} C_{l, \bar{l}, 0}(\Delta) \prod_{i=1}^2 x_i^{l_i} \bar{x}_i^{\bar{l}_i} \quad (2.7)$$

avec (relation de D'Alembert) :

$$\sum_{i=1}^2 l_i - \bar{l}_i = 0$$

Il n'est alors pas indispensable de résoudre l'équation homologique pour obtenir l'évolution séculaire (moyenne) des excentricités et longitudes des périhélie (variables \underline{x}_i). Cependant, si l'on souhaite revenir aux coordonnées initiales du problème, on doit connaître le Hamiltonien auxiliaire W . Notons tout de même que le changement de variables est construit pour être proche de l'identité, ce qui permet dans bien des cas de s'affranchir de cette étape en première approximation. Enfin, pour la construction de la forme normale séculaire à un ordre m plus élevé, il est indispensable de connaître les W_i pour $i < m$.

Dans cette étude, nous nous limiterons à une forme normale d'ordre un. Le Hamiltonien (2.7) ne dépend pas des Δ_i par construction. Les actions associées Δ_i sont donc constantes et l'on obtient un système à deux degrés de liberté pour les coordonnées \underline{x}_i .

Nous avons, jusqu'ici, passé sous silence le problème dit des petits diviseurs associés aux résonances de moyen mouvement. En effet, la construction du changement de variable W n'est possible que lorsque les diviseurs $k \cdot \underline{n}$ apparaissant dans l'équation (2.6) ne s'annulent pas. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, il n'est plus possible de construire la forme normale séculaire. Il existe alors une combinaison des moyens mouvements Kepleriens des deux planètes qui est proche de zéro : $k \cdot \underline{n} = k_1 n_1 + k_2 n_2 \approx 0$. On parle dans ce cas de résonance de moyen mouvement entre les deux planètes. Le processus de moyennisation utilisé dans le cas séculaire peut être adapté et l'on construit de cette façon la forme normale résonante.

2.3 Hamiltonien résonant

Nous supposons dans cette section que le système est proche d'une résonance de moyen mouvement, de sorte que l'on ait pour un vecteur k donné : $k \cdot \underline{n} \approx 0$. Nous allons construire la forme normale résonante par la même méthode que dans le cas séculaire.

2.3.1 Forme normale résonante

Nous cherchons un changement de coordonnées généré par le Hamiltonien auxiliaire W qui permette de moyenniser le Hamiltonien initial par rapport aux angles rapides. Dans le cas séculaire, toutes les combinaisons des longitudes moyennes peuvent être considérées comme rapides. En revanche, dans le cas résonant, la combinaison $k \cdot \underline{\lambda}$ ainsi que ses harmoniques varient lentement et ne doivent pas être moyennées. On cherche, comme dans le cas séculaire, à résoudre l'équation homologique (2.5) :

$$\{W_m, \mathcal{H}_0\} = \langle R_m \rangle - R_m$$

Cependant la moyenne $\langle R_m \rangle$ n'est plus seulement le terme constant du développement de Fourier de R_m mais intègre tous les termes résonants :

$$\langle R_m \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} R_{m,jk} \mathbf{e}^{i j k \cdot \underline{\lambda}}$$

La partie séculaire correspond au terme $j = 0$ et le reste de la somme contient les termes résonants. La décomposition en série de Fourier du Hamiltonien auxiliaire W_m s'écrit comme dans le cas séculaire :

$$W_{m,k'} = \frac{R_{m,k'}}{\mathbf{i}k' \cdot \underline{n}} \quad \text{pour } k' \neq jk$$

Pour $k' = jk$, on pose $W_{m,k'} = 0$. Le problème du petit diviseur $k \cdot \underline{n}$ ne se pose plus, cependant le Hamiltonien \mathcal{H} contient beaucoup plus de termes que dans le cas séculaire et surtout dépend toujours des longitudes moyennes. Ainsi, les $\underline{\Delta}_i$ ne sont pas des constantes du mouvement, contrairement au cas séculaire. À nouveau, si on limite le développement à l'ordre un des masses, la forme normale résonante est obtenue simplement en ne gardant que les termes de la forme $\mathbf{e}^{\mathbf{i}jk \cdot \underline{\lambda}}$ du développement du Hamiltonien en série de Fourier des longitudes moyennes :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Delta_i^2} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2} C_{l, \bar{l}, jk}(\Delta) \prod_{i=1}^2 x_i^{l_i} \bar{x}_i^{\bar{l}_i} \mathbf{e}^{\mathbf{i}jk \cdot \underline{\lambda}}$$

La relation de D'Alembert impose dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^2 jk_i + l_i - \bar{l}_i = 0$$

D'où :

$$j = \frac{\sum_{i=1}^2 \bar{l}_i - l_i}{k_1 + k_2} \quad (2.8)$$

j doit être un entier relatif, ce qui restreint la somme sur l, \bar{l} . On note $q = k_1 + k_2$, le degré de la résonance. On suppose ici, quitte à changer k en $-k$ que q est positif. De plus, on a supposé que la planète « 1 » était la planète la plus proche de l'étoile, d'où $|k_1| < |k_2|$ (pour que $k \cdot \underline{n} \approx 0$) et $k_1 < 0, k_2 > 0$. D'après la relation de D'Alembert, q est le degré minimal (en les variables x_i, \bar{x}_i) des termes résonants ($j \neq 0$). Le Hamiltonien se simplifie en :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Delta_i^2} + \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2} C_{l, \bar{l}, jk}(\Delta) \prod_{i=1}^2 x_i^{l_i} \bar{x}_i^{\bar{l}_i} \mathbf{e}^{\mathbf{i}jk \cdot \underline{\lambda}} \quad (2.9)$$

où j est donné par l'équation (2.8) en fonction des l_i, \bar{l}_i .

2.3.2 Réductions et intégrales premières

Le Hamiltonien (2.9) possède quatre degrés de liberté puisqu'il dépend des huit coordonnées canoniques : $(\underline{\Delta}_i, \underline{\Delta}_i, x_i, \mathbf{i}\bar{x}_i)$. Toutefois, il est aisé de réduire ce problème à deux degrés de liberté. En effet, un premier degré de liberté peut être éliminé en utilisant l'invariance du problème par rotation qui est associée à la conservation du moment cinétique total. Le second degré de liberté provient de la moyennisation par rapport aux longitudes moyennes. Dans le cas séculaire, le Hamiltonien moyenné ne dépend d'aucune des deux longitudes moyennes des planètes et les deux moments cinétiques circulaires moyens ($\underline{\Delta}_i$) sont donc constants. On obtient ainsi deux nouvelles intégrales premières, et on élimine donc deux degrés de liberté. Le problème séculaire (plan) de deux planètes peut donc être réduit à un seul degré de liberté et est intégrable. Dans le cas résonant, le Hamiltonien dépend toujours des longitudes moyennes mais seulement au travers de la combinaison $k \cdot \underline{\lambda}$. On peut alors éliminer un degré de liberté (au lieu de deux dans le cas séculaire) et obtenir un système à deux degrés de liberté.

Il est possible d'effectuer ces réductions directement à partir des coordonnées elliptiques complexes de Poincaré $(\underline{\lambda}, \underline{\Delta}, \underline{x}, \mathbf{i}\bar{x})$. Cependant, il est plus facile de bien distinguer le rôle de chaque réduction (moment cinétique et moyennisation) en revenant temporairement aux coordonnées actions-angles de Delaunay $(\underline{M}, \underline{\Delta}, \underline{\varpi}, \underline{G})$.

2.3.2.1 Réduction du moment cinétique

La réduction du moment cinétique provient de l'invariance du problème par rotation. Dans les coordonnées de Delaunay, cela se traduit par le fait que le Hamiltonien dépend uniquement de la différence des longitudes des périhélie $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$. On introduit le changement de coordonnées angulaires $(\varpi_1, \varpi_2) \rightarrow (\Delta\varpi, \varpi_2)$ qui est généré par :

$$\begin{pmatrix} \Delta\varpi \\ \varpi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{pmatrix}$$

Les variables d'action canoniquement conjuguées à ces angles sont données par la transformation suivante (transposée de la matrice inverse) :

$$\begin{pmatrix} A_{\Delta\varpi} \\ A_{\varpi_2} \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi le système de coordonnées canoniques $(\underline{M}_i, \Delta_i, \Delta\varpi, \underline{G}_1, \varpi_2, \underline{G} = \underline{G}_1 + \underline{G}_2)$. Le Hamiltonien ne dépend alors que de $\Delta\varpi$ et pas de ϖ_2 . L'action conjuguée à ϖ_2 (\underline{G}) est une quantité conservée (intégrale première). Cette quantité est comme attendu le moment cinétique total : $\underline{G} = \underline{G}_1 + \underline{G}_2$. On obtient finalement un système à trois degrés de liberté : $(\underline{M}_i, \Delta_i, \Delta\varpi, \underline{G}_1)$ dépendant du paramètre (constant) \underline{G} . Notons que cette réduction peut aussi être réalisée dans les variables non-moyennées et que \underline{G} est donc aussi une intégrale première du problème initial (non-moyenné).

2.3.2.2 Réduction due à la moyennisation

Le Hamiltonien moyenné (équation (2.9)) ne dépend pas des valeurs individuelles des longitudes moyennes mais seulement de la combinaison $(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)$ et ses harmoniques. Rappelons la relation définissant les longitudes moyennes : $\lambda_i = \underline{M}_i + \varpi_i$. L'expression du Hamiltonien moyenné dans les coordonnées de Delaunay ne fait donc apparaître que la combinaison $\underline{\sigma} = k_1\underline{M}_1 + k_2\underline{M}_2$ des anomalies moyennes et ses harmoniques. En suivant l'exemple de la réduction du moment cinétique, on réalise le changement de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \underline{\sigma} \\ \underline{M}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{M}_1 \\ \underline{M}_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\sigma}$ et \underline{M}_2 sont canoniquement conjugués à \underline{I} et $\underline{\Gamma}$ définis par :

$$\begin{pmatrix} \underline{I} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/k_1 & 0 \\ -k_2/k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Le Hamiltonien moyenné ne dépend pas de \underline{M}_2 , l'action $\underline{\Gamma} = |k_2/k_1|\underline{\Delta}_1 + \underline{\Delta}_2$ (e.g. Michtchenko & Ferraz-Mello, 2001) est une intégrale première. Contrairement à \underline{G} , $\underline{\Gamma}$ n'est une constante que dans le problème moyen car $\underline{\Gamma}$ exhibe des variations rapides liées aux variations de courte période des longitudes moyennes (ou anomalies moyennes). Finalement le problème est réduit aux deux degrés de liberté suivant : $(\underline{\sigma}, \underline{I} = \underline{\Delta}_1/k_1, \Delta\varpi, \underline{G}_1)$ et paramétré par les intégrales premières \underline{G} et $\underline{\Gamma}$.

2.3.2.3 Coordonnées complexes de Poincaré

Les coordonnées obtenues après les deux réductions (moment cinétique et moyennisation), sont proches de celles de Delaunay et ne sont pas très adaptées à un développement en puissance des excentricités. On leur préférera dans la suite des coordonnées plus proches des variables canoniques complexes de Poincaré. Ces dernières ont en outre l'avantage d'être symétriques par rapport aux deux planètes. On introduit pour cela les

coordonnées angulaires (appelées angles résonants, e.g. Ferraz-Mello et al., 1993) :

$$\sigma_1 = \frac{1}{q}(\sigma - k_2\Delta\varpi) = \frac{1}{q}(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) - \varpi_1 \quad (2.11)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{q}(\sigma + k_1\Delta\varpi) = \frac{1}{q}(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) - \varpi_2 \quad (2.12)$$

avec $q = k_1 + k_2$, le degré de la résonance. Notons que ces angles sont de caractéristique nulle, c'est-à-dire qu'ils respectent la règle de D'Alembert. Les actions canoniquement associées à ces angles sont :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= k_1 I - \underline{G}_1 = \underline{\Lambda}_1 - \underline{G}_1 = \underline{D}_1 \\ \Sigma_2 &= k_2 I + \underline{G}_1 = \underline{\Lambda}_2 - \underline{G}_2 + \underline{G} - \underline{\Gamma} = \underline{D}_2 + \underline{G} - \underline{\Gamma} \end{aligned}$$

Les actions Σ_i ne sont pas symétriques, Σ_1 est le déficit de moment cinétique de la planète 1 (\underline{D}_1), alors que Σ_2 fait intervenir \underline{D}_2 mais aussi \underline{G} et $\underline{\Gamma}$. Il est donc naturel d'introduire le changement de variables $\Sigma_i \rightarrow \underline{D}_i$. Celui-ci doit être complété par un changement des coordonnées angulaires. Les angles σ_i ne sont pas affectés par cette transformation qui ne modifie que les angles conjugués aux variables \underline{G} et $\underline{\Gamma}$. Ces derniers ne sont plus ϖ_2 et \underline{M}_2 mais respectivement θ_G et θ_Γ , définis par :

$$\begin{aligned} \theta_G &= \sigma_2 + \varpi_2 = \frac{1}{q}(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) \\ \theta_\Gamma &= \underline{M}_2 - \sigma_2 = \frac{k_1}{q}(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

Finalement, le système de coordonnées canoniques complet est : $(\theta_G, \underline{G}, \theta_\Gamma, \underline{\Gamma}, \sigma_i, \underline{D}_i)$. Rappelons que le Hamiltonien \mathcal{H} exprimé dans ce système de coordonnées ne fait pas apparaître l'angle θ_G (\underline{G} est une intégrale première) qui est le seul angle de caractéristique non-nulle. Enfin, le Hamiltonien moyenné $\overline{\mathcal{H}}$ ne fait pas apparaître non-plus l'angle θ_Γ ($\underline{\Gamma}$ est une constante).

Les coordonnées résonantes cartésiennes complexes sont alors simplement définies par (e.g. Michtchenko & Ferraz-Mello, 2001) :

$$\underline{x}_i = \sqrt{\underline{D}_i} e^{i\sigma_i}$$

Et le système de coordonnées canonique complet est $(\theta_G, \underline{G}, \theta_\Gamma, \underline{\Gamma}, \underline{x}_i, -i\underline{\bar{x}}_i)$. Ces variables sont très proches des coordonnées elliptiques complexes de Poincaré. En effet, on a :

$$\underline{x}_i = \underline{\bar{x}}_i e^{i\theta_G}$$

Pour obtenir le Hamiltonien résonant dans ces coordonnées, il faut remplacer dans l'expression (2.9) les \underline{x}_i par $\underline{\bar{x}}_i e^{i\theta_G}$. En faisant cette substitution, le Hamiltonien ne doit plus dépendre des longitudes moyennes λ_i . Ceci est garanti par la règle de D'Alembert et le fait que les angles σ_i sont de caractéristique nulle. De plus par symétrie du problème, on a $C_{l,\bar{l},k} = C_{\bar{l},l,-k}$. Le Hamiltonien résonant s'écrit donc :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Delta_i^2} + \sum_{l,\bar{l} \in \mathbb{N}^2} C_{l,\bar{l},jk}(\Delta) \prod_{i=1}^2 \underline{x}_i^{l_i} \underline{\bar{x}}_i^{\bar{l}_i} \quad (2.13)$$

avec

$$j = \frac{\sum_{i=1}^2 \bar{l}_i - l_i}{k_1 + k_2} \in \mathbb{Z}$$

Notons que les moments cinétiques circulaires moyens ($\underline{\Lambda}_i$) apparaissent toujours dans la partie Keplerienne et dans les coefficients $C_{l,\bar{l},jk}$ de la partie perturbative. Cependant, on peut aisément exprimer les $\underline{\Lambda}_i$ en fonction des coordonnées complexes \underline{x}_i et des deux actions \underline{G} et $\underline{\Gamma}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\underline{\Lambda}_1 &= \frac{k_1}{q}(\underline{\mathcal{D}} + \underline{G} - \underline{\Gamma}) \\ \underline{\Lambda}_2 &= \frac{k_2}{q}(\underline{\mathcal{D}} + \underline{G}) + \frac{k_1}{q}\underline{\Gamma}\end{aligned}$$

où $\underline{\mathcal{D}} = \underline{D}_1 + \underline{D}_2 = \underline{x}_1\bar{\underline{x}}_1 + \underline{x}_2\bar{\underline{x}}_2 = \underline{x}_1\bar{\underline{x}}_1 + \underline{x}_2\bar{\underline{x}}_2$, est le déficit de moment cinétique total (cf. Laskar, 2000).

2.3.2.4 Renormalisation

Le Hamiltonien (2.13) dépend de deux paramètres \underline{G} et $\underline{\Gamma}$ au travers des variables $\underline{\Lambda}_i$. Pour étudier la dynamique dans les coordonnées \underline{x}_i , il faut donc fixer la valeur de ces deux constantes. Cependant, il est possible d'éliminer une de ces deux constantes en renormalisant le problème. En effet, il existe une invariance du problème par changement d'échelle. Si l'on divise toutes les actions par la constante $\underline{\Gamma}$ (Delisle et al., 2012) :

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= \frac{\underline{\Lambda}_i}{\underline{\Gamma}} \\ G_i &= \frac{\underline{G}_i}{\underline{\Gamma}} \\ G &= \frac{\underline{G}}{\underline{\Gamma}} = G_1 + G_2 \\ D_i &= \frac{\underline{D}_i}{\underline{\Gamma}} = \Lambda_i - G_i \\ \underline{x}_i &= \frac{\underline{x}_i}{\sqrt{\underline{\Gamma}}} = \sqrt{D_i}\mathbf{e}^{i\sigma_i} \quad (\sigma_i = \underline{\sigma}_i) \\ x_i &= \frac{x_i}{\sqrt{\underline{\Gamma}}} = \sqrt{D_i}\mathbf{e}^{i\varpi_i} \quad (\varpi_i = \underline{\varpi}_i)\end{aligned}$$

les équations de Hamilton restent correctes à condition de diviser aussi le Hamiltonien par $\underline{\Gamma}$:

$$\check{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}}{\underline{\Gamma}}$$

Cependant le Hamiltonien $\check{\mathcal{H}}$ dépend toujours de la valeur de $\underline{\Gamma}$. Pour éliminer totalement ce paramètre, il faut renormaliser l'échelle de temps par un facteur $\underline{\Gamma}^3$:

$$\begin{aligned}t &= \frac{\underline{t}}{\underline{\Gamma}^3} \\ \mathcal{H} &= \underline{\Gamma}^3\check{\mathcal{H}} = \underline{\Gamma}^2\mathcal{H}\end{aligned}$$

Après ces deux renormalisations (échelles d'espace et de temps), le Hamiltonien (\mathcal{H}) ne dépend plus de la constante $\underline{\Gamma}$ et le problème ne dépend plus que d'un paramètre : $G = \underline{G}/\underline{\Gamma}$, le moment cinétique total renormalisé. Pour étudier la dynamique il faudra donc fixer la valeur de ce paramètre. On peut estimer un

ordre de grandeur réaliste pour G en supposant que les planètes sont, dans l'approximation Keplerienne, à la résonance exacte (la combinaison des moyens mouvements Kepleriens est nulle : $k.n = 0$) :

$$\frac{n_{1,0}}{n_{2,0}} = \left| \frac{k_2}{k_1} \right|$$

$$\frac{\Delta_{1,0}}{\Delta_{2,0}} = \eta \left| \frac{k_1}{k_2} \right|^{1/3}$$

avec

$$\eta = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{2/3} \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1} \right)^{1/3}$$

En supposant, de plus, que les planètes ont des excentricités faibles, on a :

$$\underline{G}_0 \approx \underline{\Delta}_{1,0} + \underline{\Delta}_{2,0}$$

et par définition (équation (2.10)) :

$$\Gamma_0 = \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \underline{\Delta}_{1,0} + \underline{\Delta}_{2,0}$$

D'où :

$$G_0 = \frac{\underline{\Delta}_{1,0} + \underline{\Delta}_{2,0}}{\left| \frac{k_2}{k_1} \right| \underline{\Delta}_{1,0} + \underline{\Delta}_{2,0}}$$

$$= \frac{1 + \eta \left| \frac{k_1}{k_2} \right|^{1/3}}{1 + \eta \left| \frac{k_2}{k_1} \right|^{2/3}} \quad (2.14)$$

On utilise cette valeur comme référence pour G et on note :

$$\Delta G = G_0 - G \quad (2.15)$$

2.3.3 Calcul explicite des coefficients du Hamiltonien résonant

Le Hamiltonien renormalisé présente le même aspect que le Hamiltonien (2.13) :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2} + \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2} C_{l, \bar{l}, jk}(\Lambda) \prod_{i=1}^2 \bar{x}_i^{l_i} \bar{\bar{x}}_i^{\bar{l}_i} \quad (2.16)$$

avec

$$\Lambda_1 = \frac{k_1}{q} (\mathcal{D} + G - 1)$$

$$= \Lambda_{1,0} + \frac{k_1}{q} (\mathcal{D} - \Delta G) \quad (2.17)$$

$$\Lambda_2 = \frac{k_2}{q} (\mathcal{D} + G) + \frac{k_1}{q}$$

$$= \Lambda_{2,0} + \frac{k_2}{q} (\mathcal{D} - \Delta G) \quad (2.18)$$

et

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^2 \mathfrak{x}_i \bar{\mathfrak{x}}_i$$

Le rapport des demi-grands axes α , s'écrit alors :

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\mu_2 \beta_2^2 \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \right)^2}{\mu_1 \beta_1^2}$$

Et on note α_0 le rapport à la résonance exacte :

$$\alpha_0 = \frac{\mu_2 \beta_2^2 \left(\frac{\Lambda_{1,0}}{\Lambda_{2,0}} \right)^2}{\mu_1 \beta_1^2}$$

Pour qu'un système soit en résonance, la combinaison des moyens mouvements Kepleriens $k.n$ doit être proche de zéro, ce qui implique que α soit proche de α_0 , donc que les Λ_i soient proches des $\Lambda_{i,0}$ et que \mathcal{D} soit proche de ΔG . Rappelons que $\mathcal{D} = \Lambda_1 + \Lambda_2 - G$ est le déficit de moment cinétique total ; ce n'est pas une constante du mouvement. Par ailleurs, par définition, $\Delta G = \Lambda_{1,0} + \Lambda_{2,0} - G$ est en quelque sorte le déficit de moment cinétique total à la résonance exacte, que l'on pourrait noter $\Delta G = \mathcal{D}_0$. Ce dernier est une constante du mouvement qui nous sert de paramètre. La différence $\mathcal{D} - \Delta G = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$, qui apparaît dans les expressions des Λ_i et de α , est donc petite pour un système résonant. Cette petite quantité sera utilisée pour développer en série le Hamiltonien résonant.

Précisons maintenant la forme de la partie perturbative. Celle-ci se décompose (e.g. Laskar, 1991) en partie directe (venant du potentiel perturbateur) et partie indirecte (venant de l'énergie cinétique) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_{1,d} + \mathcal{H}_{1,i} \\ \mathcal{H}_{1,d} &= -\frac{m_1 \mu_2^2 \beta_2^3}{m_0 \Lambda_2^2} h_{1,d}(\alpha, \mathfrak{x}) \\ \mathcal{H}_{1,i} &= \frac{1}{m_0} \frac{\mu_1 \beta_1^2}{\Lambda_1} \frac{\mu_2 \beta_2^2}{\Lambda_2} h_{1,i}(\alpha, \mathfrak{x}) \\ \mathfrak{x}_i &= \mathfrak{x}_i \sqrt{\frac{2}{\Lambda_i}} = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right)} e^{i\sigma_i} \approx e_i e^{i\sigma_i} \end{aligned}$$

et $h_{1,d}$, $h_{1,i}$ s'écrivent sous forme de séries sur les variables \mathfrak{x}_i , dont les coefficients ne dépendent que de α . Leur calcul est effectué en suivant la procédure décrite dans Laskar (1991). Par exemple, pour la résonance 2:1 ($k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $q = 1$), en développant les séries jusqu'à l'ordre 2 en excentricité (variables \mathfrak{x}_i), on a :

$$\begin{aligned} h_{1,d} &= s^{(0)} + s_1^{(2)} \mathfrak{x}_1 \bar{\mathfrak{x}}_1 + s_2^{(2)} \mathfrak{x}_2 \bar{\mathfrak{x}}_2 + s_{12}^{(2)} (\mathfrak{x}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2 + \mathfrak{x}_2 \bar{\mathfrak{x}}_1) \\ &\quad + r_1^{(1)} (\mathfrak{x}_1 + \bar{\mathfrak{x}}_1) + r_{2,d}^{(1)} (\mathfrak{x}_2 + \bar{\mathfrak{x}}_2) \\ &\quad + r_1^{(2)} (\mathfrak{x}_1^2 + \bar{\mathfrak{x}}_1^2) + r_2^{(2)} (\mathfrak{x}_2^2 + \bar{\mathfrak{x}}_2^2) \\ &\quad + r_{12}^{(2)} (\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + \bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) \\ h_{1,i} &= r_{2,i}^{(1)} (\mathfrak{x}_2 + \bar{\mathfrak{x}}_2) \end{aligned}$$

Notant $b_s^{(j)}$ les coefficients de Laplace, les coefficients s (partie séculaire) et r (partie résonante) sont donnés

par :

$$\begin{aligned}
s^{(0)} &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}(\alpha) \\
s_1^{(2)} &= \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
s_2^{(2)} &= \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
s_{12}^{(2)} &= \frac{3}{8}\alpha b_{3/2}^{(0)}(\alpha) - \frac{1}{4}(1 + \alpha^2)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
r_1^{(1)} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\alpha^2\right)b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}\alpha^{-1} + \frac{7}{12}\alpha + \frac{5}{6}\alpha^3\right)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
r_{2,d}^{(1)} &= \frac{5}{4}\alpha b_{3/2}^{(0)}(\alpha) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha^2\right)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
r_{2,i}^{(1)} &= \frac{1}{2} \\
r_1^{(2)} &= \left(\frac{12}{35}\alpha^{-2} + \frac{71}{140} + \frac{67}{70}\alpha^2 + \frac{138}{35}\alpha^4\right)b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad - \left(\frac{8}{35}\alpha^{-3} + \frac{89}{210}\alpha^{-1} + \frac{263}{336}\alpha + \frac{341}{210}\alpha^3 + \frac{92}{35}\alpha^5\right)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
r_2^{(2)} &= \left(1 + \frac{13}{4}\alpha^2\right)b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad - \left(\frac{2}{3}\alpha^{-1} + \frac{65}{48}\alpha + \frac{13}{6}\alpha^3\right)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\
r_{12}^{(2)} &= -\left(\frac{6}{5}\alpha^{-1} + \frac{69}{40}\alpha + \frac{36}{5}\alpha^3\right)b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\
&\quad + \left(\frac{4}{5}\alpha^{-2} + \frac{29}{20} + \frac{59}{20}\alpha^2 + \frac{24}{5}\alpha^4\right)b_{3/2}^{(1)}(\alpha)
\end{aligned}$$

Rappelons que α est proche de α_0 pour un système résonant, et que la différence peut s'écrire en fonction de $\mathcal{D} - \Delta G$. On peut alors développer l'expression de ces coefficients au voisinage de α_0 et en puissance de $\mathcal{D} - \Delta G$. Notons que \mathcal{D} étant quadratique en excentricité (variables x_i), le développement de ces coefficients ne fait apparaître que des termes de degré pair. De plus, pour un système résonant $\mathcal{D} - \Delta G \ll \mathcal{D}$. Ainsi le développement en puissance de $\mathcal{D} - \Delta G$ peut être effectué à un ordre plus faible que celui en puissance des excentricités.

2.4 Modèle simplifié intégrable des résonances

Le Hamiltonien que l'on a obtenu (paragraphe 2.3) après la réduction du moment cinétique et la moyennisation possède toujours deux degrés de liberté (coordonnées $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$). Ce Hamiltonien n'est, en général,

pas intégrable et le système exhibe des comportements dynamiques complexes, notamment chaotiques. Il est difficile d'étudier en détail un tel système, et en particulier lorsque l'on ajoute des perturbations dissipatives (effet de marée, etc.). Dans le cadre de cette étude, on cherche un modèle simplifié intégrable de deux planètes en résonance, qui représente le mieux possible la dynamique résonante. Cette simplification se fera au prix de la perte d'une partie de la richesse de la dynamique mais elle permettra d'établir des prédictions relativement simples de l'évolution des systèmes résonants en présence de dissipation.

Il existe dans la littérature deux modèles intégrables classiques pour les résonances. Le modèle le plus simple d'une résonance est celui du pendule simple, dont le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{I^2}{2} - \epsilon \cos \theta \quad (2.19)$$

dans les coordonnées action-angle (θ, I) et avec ϵ une constante (faisant intervenir le rapport des masses m_i/m_0) fixée. Le second modèle fondamental des résonances (voir Henrard & Lemaitre, 1983 pour les résonances de degré un et Lemaitre, 1984b pour les résonances de degré plus élevé) est une variante du modèle du pendule simple, qui est souvent plus adaptée à l'étude des résonances de moyen mouvement. Le Hamiltonien correspondant s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{(I - I_0)^2}{2} - \epsilon I^{q/2} \cos q\theta \quad (2.20)$$

où I_0 , et ϵ sont des constantes et q est le degré de la résonance. On cherche donc à se ramener à un Hamiltonien de l'une de ces formes en faisant des approximations les plus raisonnables possible.

Dans le cas des résonances de degré un, et lorsque la partie perturbative du Hamiltonien est développée au plus faible degré possible (degré un) en excentricité, le problème est alors intégrable (voir Sessin & Ferraz-Mello, 1984; Henrard et al., 1986; Wisdom, 1986; Batygin & Morbidelli, 2013a). Il est alors possible de se ramener au cas du Hamiltonien (2.20). Nous allons nous appuyer sur ce cas simple pour généraliser cette construction aux autres résonances.

2.4.1 Résonances de degré un

On considère une résonance de degré $q = k_1 + k_2 = 1$, et on développe la partie perturbative du Hamiltonien au degré un. Le Hamiltonien s'écrit alors simplement :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\Lambda) + S_0(\Lambda) + R_1(\Lambda)(x_1 + \bar{x}_1) + R_2(\Lambda)(x_2 + \bar{x}_2)$$

où \mathcal{K} est la partie Keplerienne donnée par :

$$\mathcal{K}(\Lambda) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2}$$

S_0 est le terme séculaire de degré zéro, et R_1, R_2 les termes résonants de degré un en excentricité. Les coefficients S_0, R_1 et R_2 dépendent des variables Λ_i . Rappelons que les Λ_i s'expriment en fonction de la différence $\mathcal{D} - \Delta G$ (voir équations (2.17), (2.18)), où $\mathcal{D} = \sum_i x_i \bar{x}_i$ et ΔG est un paramètre. Cependant, si l'on développe ces expressions en série des x_i , on n'obtiendra que des termes de degré pair. Dans une approximation de degré un en excentricité, on peut donc considérer ces coefficients comme constants. La partie Keplerienne s'exprime aussi en fonction des moments cinétiques circulaires Λ_i donc en fonction de la différence $\mathcal{D} - \Delta G$. Elle peut aussi être développée en série des x_i mais ce n'est pas indispensable. En ignorant le terme constant (séculaire) S_0 , qui n'influence pas la dynamique, on obtient le Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D} - \Delta G) + R_1(x_1 + \bar{x}_1) + R_2(x_2 + \bar{x}_2)$$

avec R_1 et R_2 des coefficients constants (qui dépendent des masses et de la résonance considérée). En suivant la méthode de Henrard et al. (1986), on introduit alors R et ϕ de sorte que :

$$\begin{cases} R_1 &= R \cos \phi \\ R_2 &= R \sin \phi \end{cases}$$

Et on note R_ϕ la matrice de rotation d'angle ϕ :

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Considérons le changement de coordonnées $x \rightarrow u$ défini par :

$$x = R_\phi u$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, le Hamiltonien se réécrit (Henrard et al., 1986) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D} - \Delta G) + R(u_1 + \bar{u}_1) \quad (2.21)$$

Et le déficit de moment cinétique total s'écrit toujours :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^2 u_i \bar{u}_i \quad (2.22)$$

Le Hamiltonien (2.21), ne dépend de u_2 qu'au travers du produit $u_2 \bar{u}_2$ qui apparaît dans la partie Keplerienne. L'angle associé à u_2 n'intervient donc pas. Passons en coordonnées actions-angles et introduisons I_i , θ_i tels que :

$$u_i = \sqrt{I_i} e^{i\theta_i}$$

Le Hamiltonien (2.21) se réécrit alors simplement :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D} - \Delta G) + 2R \sqrt{I_1} \cos(\theta_1)$$

avec $\mathcal{D} = I_1 + I_2$. Comme \mathcal{H} ne dépend pas de θ_2 , I_2 est une constante du mouvement. Le Hamiltonien ne possède alors plus qu'un degré de liberté et est donc intégrable. De plus, ce Hamiltonien est très proche du second modèle fondamental des résonances de Henrard & Lemaître (1983) (Hamiltonien (2.20)). Il suffit en effet de développer la partie Keplerienne à l'ordre deux en I_1 pour se ramener à cette forme.

Avant de passer au cas des résonances de degré plus élevé, il est important de bien comprendre ce qui se cache derrière la rotation $x = R_\phi u$. Pour cela, étudions brièvement la dynamique dans les variables u_1 , u_2 et en particulier les points fixes du système. La position des points fixes s'obtient en écrivant les équations de Hamilton avec un second membre nul :

$$\dot{u}_i = \mathbf{i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{u}_i} = 0$$

En utilisant les équations (2.21) et (2.22), on obtient :

$$\begin{cases} 0 &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{D}} u_1 + R \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{D}} u_2 \end{cases}$$

On peut d'ores et déjà en déduire que les points fixes du système sont tous en $u_2 = 0$ et que u_1 est un réel. En particulier, le point fixe correspondant au centre de la zone de libration sera dans la direction de u_1 . Le deuxième mode ajoute simplement de la circulation autour du centre de libration. Ainsi, le changement de

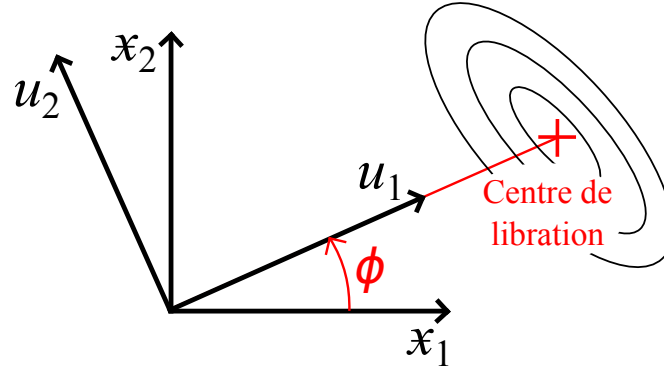


FIGURE 2.2 – Illustration de la rotation des coordonnées $\bar{x} = R_\phi u$ permettant de placer le centre de libration dans la direction du mode u_1 ($u_2 = 0$). On représente ici la transformation dans un plan mais l'espace des phases possède quatre dimensions et les coordonnées \bar{x}_i et u_i sont complexes.

coordonnées permet de concentrer les principales caractéristiques de la dynamique résonante dans le mode u_1 . La figure 2.2 illustre la rotation des coordonnées $\bar{x} = R_\phi u$ qui permet de placer le centre de libration dans la direction de u_1 .

Il est important de noter que si l'on développe le Hamiltonien d'une résonance de degré un à un degré plus élevé en excentricité, la réduction que l'on effectue ici n'est plus valable. De plus, la présence de mouvements chaotiques quand ces termes additionnels sont pris en compte prouve qu'aucune réduction à un problème intégrable n'est possible (voir Wisdom, 1986). De même pour les résonances de degré $q > 1$, il n'est pas possible de réduire le problème à un degré de liberté de manière rigoureuse, même au degré de développement minimal en excentricité (q). On peut cependant s'inspirer de la réduction effectuée dans le cas des résonances de degré un pour chercher un modèle intégrable (nécessairement simplifié) des résonances de degré q . L'approche que nous avons choisie consiste à réaliser une rotation analogue à celle utilisée dans le cas des résonances de degré un, de façon à concentrer les principales caractéristiques de la dynamique résonante sur un mode.

2.4.2 Cas général

Dans le cas d'une résonance d'ordre q , la perturbation doit être développée au minimum au degré q en excentricité (pour que les premiers termes résonants apparaissent). Le Hamiltonien prend alors la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D} - \Delta G) + \mathcal{S}_q(D, \Delta\varpi) + \sum_{k=0}^q R_k(\bar{x}_1^k \bar{x}_2^{q-k} + \bar{x}_1^{k-q} \bar{x}_2^k) \quad (2.23)$$

où \mathcal{S}_q est la partie séculaire tronquée au degré q et qui ne dépend pas des angles σ_i individuellement mais seulement de $\Delta\varpi = \sigma_2 - \sigma_1$. Comme pour les résonances de degré un, au degré minimal de développement, les coefficients R_k (partie résonante) sont constants.

On cherche une rotation des coordonnées permettant de placer le centre de libration de la résonance dans la direction du mode u_1 . On suppose ici que la position du centre de libration est connue. Il faut pour cela résoudre les équations de Hamilton avec un second membre nul (voir le paragraphe 2.5 qui est consacré à l'étude de différentes méthodes de résolution de ces équations). On note $D_{i,ell}$ et $\sigma_{i,ell}$ les coordonnées (actions-angles)

de ce point fixe elliptique. On pose (Delisle et al., 2014) :

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \sqrt{\frac{D_{2,ell}}{D_{1,ell}}} \\ R_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ M_\sigma &= \begin{pmatrix} e^{i\sigma_{1,ell}} & 0 \\ 0 & e^{i\sigma_{2,ell}} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.24)$$

et on introduit le changement de coordonnées canonique :

$$\mathfrak{x} = M_\sigma R_\phi u$$

Ce changement permet de placer le centre de libration suivant la partie réelle (positive) de u_1 (voir figure 2.2). De même que pour les résonances de degré un, on introduit les coordonnées actions-angles (I_i, θ_i) correspondantes :

$$u_i = \sqrt{I_i} e^{i\theta_i}$$

Le Hamiltonien exprimé dans ces coordonnées a exactement la même forme que dans l'équation (2.23) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D} - \Delta G) + \mathcal{S}'_q(I, \theta_2 - \theta_1) + \sum_{k=0}^q R'_k(u_1^k u_2^{q-k} + \bar{u}_1^k \bar{u}_2^{q-k})$$

Les coefficients R'_k ne dépendent que des coefficients R_k et la fonction \mathcal{S}'_q ne dépend que de \mathcal{S}_q (les termes résonants restent résonants et les séculaires restent séculaires). Le déficit total de moment cinétique (Laskar, 2000) est toujours donné par :

$$\mathcal{D} = I_1 + I_2 = u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_2$$

Dans le cas d'une résonance de degré un, l'angle θ_2 n'apparaît plus dans le Hamiltonien, ce qui permet de réaliser la réduction à un problème intégrable. Dans le cas général, θ_2 apparaît toujours, à la fois dans la partie résonante et dans la partie séculaire. Pour aller plus loin nous allons utiliser une hypothèse simplificatrice. Rappelons que par construction, au centre de libration, $u_{1,ell} \in \mathbb{R}^+$, alors que $u_{2,ell} = 0$. Au voisinage de ce point fixe, on aura donc $|u_2| \ll |u_1|$ (ou $I_2 \ll I_1$). On peut développer le Hamiltonien en puissance du rapport $|u_2|/|u_1| = \sqrt{I_2/I_1}$. Ce rapport est un petit paramètre tant que le système est proche du centre de libration. On approxime alors le Hamiltonien par sa partie d'ordre zéro en ce paramètre, c'est-à-dire la partie qui ne dépend que de u_1 et non de u_2 . Ceci est équivalent à imposer $u_2 = 0$ (ou $I_2 = 0$). C'est une hypothèse très forte. Cela implique que $D_2/D_1 \approx \Lambda_2/\Lambda_1(e_2/e_1)^2$ reste bloqué à la valeur $D_{2,ell}/D_{1,ell} = \tan^2 \phi$ prise au centre de libration. C'est une hypothèse raisonnable lorsque le système est proche du centre de libration. Lorsque l'amplitude de libration est importante et que le système s'approche de la séparatrice de la résonance, la dynamique est plus complexe mais on garde ce modèle simplifié comme première approximation. Dans cette approximation le Hamiltonien est bien plus simple et intégrable :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D} - \Delta G) + \mathcal{S}'_q(I_1) + R'_q(u_1^q + \bar{u}_1^q) \quad (2.25)$$

où le déficit total de moment cinétique est donné par $\mathcal{D} = I_1 = u_1 \bar{u}_1$. La partie séculaire \mathcal{S}'_q s'écrit comme un polynôme de degré $[q/2]$ en I_1 :

$$\mathcal{S}'_q = \sum_{k=0}^{[q/2]} S'_k(\Lambda) I_1^k$$

Les coefficients S'_k de ce développement dépendent de la différence $\mathcal{D} - \Delta G$ au travers des moments cinétiques circulaires (Λ) . Cependant, la différence $\mathcal{D} - \Delta G$ est petite devant \mathcal{D} au voisinage de la résonance (cf. paragraphe 2.3.3) et les coefficients dépendent faiblement de cette différence (e.g. Callegari et al., 2004). Dans notre démarche de construction d'un modèle simplifié, on considèrera ces coefficients comme constants.

2.4.3 Développement de la partie Keplerienne

Le Hamiltonien (2.25) est intégrable mais n'a pas exactement la même forme que les Hamiltoniens de référence : problème du pendule (équation (2.19)) ou second modèle fondamental (équation (2.20)). Pour se ramener au cas du second modèle fondamental, il faut développer la partie Keplerienne à l'ordre deux en $\mathcal{D} - \Delta G$:

$$\mathcal{K} = K_0 - K_2(\mathcal{D} - \Delta G)^2$$

Par construction, le coefficient K_1 (terme linéaire en $\mathcal{D} - \Delta G$) est nul. K_0 étant une constante, on peut simplement supprimer ce terme du Hamiltonien sans changer la dynamique. K_2 est donné par :

$$K_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{k_1}{q} \right)^2 n_{1,0} \left(\frac{1}{\Lambda_{1,0}} + \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \frac{1}{\Lambda_{2,0}} \right)$$

où $n_{1,0}$ est le moyen mouvement Keplerien renormalisé à la résonance exacte :

$$n_{1,0} = \frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{\Lambda_{1,0}^3}$$

Rappelons que l'on a $\mathcal{D} = I_1$ (hypothèse $I_2 = 0$). La partie Keplerienne peut donc s'écrire simplement :

$$\mathcal{K} = -K_2(I_1 - \Delta G)^2$$

2.4.4 Forme finale du Hamiltonien simplifié

Pour ne pas alourdir les calculs nous considérons ici une résonance de degré $q < 6$. La partie séculaire doit alors être développée au degré quatre en excentricité (degré deux en I_1). Pour $q \geq 6$, il faudrait prendre en compte les termes en I_1^3 (voire des termes de degré plus élevé) dans la partie séculaire. On obtient le Hamiltonien (pour $q < 6$) :

$$\mathcal{H} = -K_2(I_1 - \Delta G)^2 + S'_1 I_1 + S'_2 I_1^2 + R'_q(u_1^q + \bar{u}_1^q)$$

On pose alors :

$$\delta = \frac{K_2 \Delta G + S'_1 / 2}{K_2 - S'_2} \approx \Delta G$$

de telle sorte que :

$$\mathcal{H} = -(K_2 - S'_2)(I_1 - \delta)^2 + R'_q(u_1^q + \bar{u}_1^q)$$

à une constante (n'ayant aucune influence sur la dynamique) près.

On peut alors faire une dernière renormalisation de ce Hamiltonien pour se ramener au second modèle fondamental des résonances. On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &= \frac{\mathcal{H}}{K_2 - S'_2} \\ R^* &= \frac{R'_q}{K_2 - S'_2} \\ t^* &= (K_2 - S'_2)t \end{aligned}$$

Finalement, le Hamiltonien d'une résonance de degré q s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &= -(I_1 - \delta)^2 + R^*(u_1^q + \bar{u}_1^q) \\ &= -(I_1 - \delta)^2 + 2R^* I_1^{q/2} \cos q\theta_1 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Enfin, on peut se ramener au cas du pendule en notant que I_1 doit être proche de $\delta \approx \Delta G$ au voisinage de la résonance (voir paragraphe 2.3.3). On peut alors approcher I_1 par δ dans la partie perturbative :

$$\mathcal{H}^* \approx -(I_1 - \delta)^2 + 2R^* \delta^{q/2} \cos q\theta_1 \quad (2.27)$$

Cette approximation est correcte dans la limite $\delta^2 \gg R^* \delta^{q/2}$.

2.4.5 Dynamique dans le modèle simplifié

Le Hamiltonien (2.26) a la même forme que celui du second modèle fondamental des résonances. La dynamique associée à cet Hamiltonien est bien connue (Henrard & Lemaitre, 1983; Lemaitre, 1984b). Les points fixes sont obtenus en résolvant l'équation de Hamilton avec un second membre nul :

$$\dot{u}_1 = \mathbf{i} \left(2(\delta - u_1 \bar{u}_1) u_1 + qR^* \bar{u}_1^{q-1} \right) = 0$$

Il est important de noter qu'il y a une différence essentielle entre les résonances de degré un et celles de degré plus élevé. En effet, pour $q > 1$, il y a toujours un point fixe en $u_1 = 0$, alors que dans le cas des résonances du premier degré, ce point fixe n'existe pas. Cherchons les autres points fixes ($u_1 \neq 0$). En dehors de l'origine, les variables action-angle sont bien définies. L'équation de Hamilton se réécrit :

$$2(\delta - I_1) \sqrt{I_1} \mathbf{e}^{i\theta_1} + qR^* I_1^{(q-1)/2} \mathbf{e}^{i(1-q)\theta_1} = 0$$

On peut simplifier $\mathbf{e}^{i\theta_1}$ dans les deux termes et on observe alors que $\mathbf{e}^{iq\theta_1}$ doit être réel (± 1). On a donc $\theta_1 = k\pi/q$ et $\mathbf{e}^{iq\theta_1} = (-1)^k$. D'après la forme du Hamiltonien (2.26), on peut immédiatement remarquer qu'il y a une invariance du problème par rotation d'angle $2\pi/q$. Ainsi l'espace des phases présente nécessairement cette symétrie, et chaque point fixe (sauf en zéro) est répété q fois. On a donc seulement deux groupes de points fixes (k pairs et k impairs). Pour obtenir la position des points fixes il faut donc trouver les racines de :

$$2(\delta - I_1) \sqrt{I_1} + (-1)^k qR^* \left(\sqrt{I_1} \right)^{q-1} = 0$$

Cette équation est polynomiale en $\sqrt{I_1}$ et ses solutions (réelles positives) peuvent être aisément obtenues avec un algorithme de séparation des racines de polynômes, par exemple la méthode de Vincent-Collins-Akritas (voir Vincent, 1834; Collins & Akritas, 1976) s'appuyant sur les règles de signe de Descartes. Une fois les racines obtenues, on vérifie la nature (elliptique ou hyperbolique) du point fixe en linéarisant les équations du mouvement au voisinage de ce point. Notons $u_{1,0}$ la position du point fixe et posons $u_1 = u_{1,0} + v$. Lorsque l'on écrit le Hamiltonien en fonction de v , il n'y a pas de termes de degré un (par définition de $u_{1,0}$) et les premiers termes non-constants apparaissent au degré deux. Le Hamiltonien est donc de la forme :

$$\mathcal{H}^* = av\bar{v} + b(v^2 + \bar{v}^2) + O(v^3)$$

Si $a^2 > 4b^2$, le point fixe est elliptique et si $a^2 < 4b^2$ il est hyperbolique.

Finalement, on peut calculer les excursions maximales de l'action I_1 à l'intérieur de la zone de libration en cherchant à minimiser et maximiser I_1 sous la contrainte que l'énergie soit supérieure à l'énergie du point fixe hyperbolique. Ces extrema sont solutions des équations :

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ \mathcal{H}_{hyp}^* \leq -\delta^2 = \mathcal{H}^*(I_1 = 0) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 0 = -2qR^* I_1^{q/2} \sin(q\theta_1) \\ 0 = -(I_1 - \delta)^2 + 2R^* I_1^{q/2} \cos(q\theta_1) - \mathcal{H}_{hyp}^* \end{cases}$$

Le premier cas est évident et correspond à la situation où $I_1 = 0$ (excentricités nulles) est dans la zone résonante. Dans le deuxième cas, les extrema de I_1 sont obtenus sur la séparatrice de la résonance. On a,

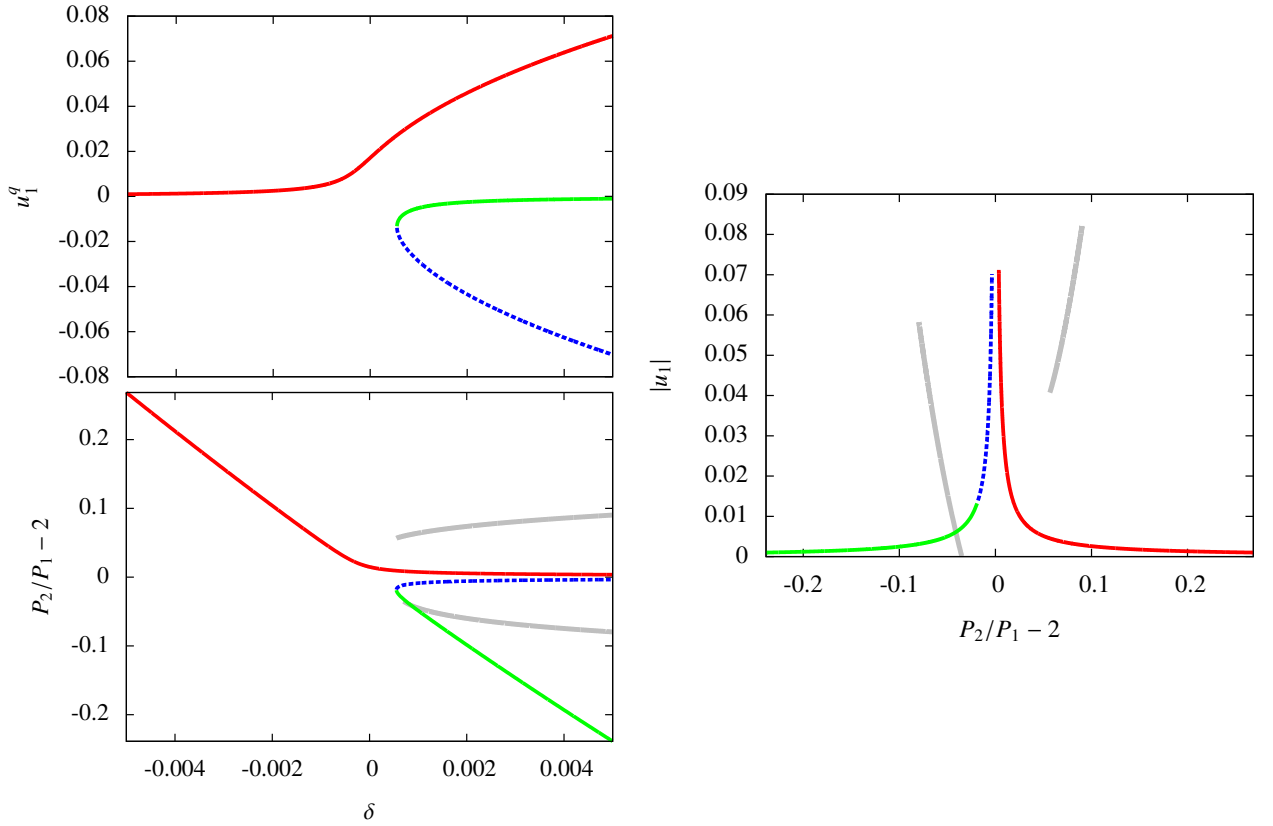


FIGURE 2.3 – Diagramme de bifurcation des points fixes pour une résonance de degré $q = 1$. On a fixé $R^* = 10^{-5}$. On trace u_1^q ($\in \mathbb{R}$) en fonction du paramètre δ (*haut, gauche*), ainsi que le rapport de période P_2/P_1 (pour une résonance 2:1 et avec des masses planétaires égales) en fonction du même paramètre (*bas, gauche*). Enfin on représente la position de ces points fixes dans le plan $P_2/P_1, |u_1|$ (*droite*). Rappelons qu'à faible excentricité, u_1 est proportionnel aux excentricités planétaires. Les courbes en trait plein correspondent aux points fixes elliptiques, celles en pointillés aux points fixes hyperboliques. Les courbes grises correspondent aux séparatrices de la résonance.

comme pour la recherche de la position des points fixes, $\sin(q\theta_1) = 0$ et la deuxième équation est polynomiale en $\sqrt{I_1}$. À nouveau, on fait appel à un algorithme de séparation des racines du polynôme pour trouver les solutions (valeurs extrêmes de I_1 dans la zone résonante). Une fois les valeurs de I_1 et θ_1 connues pour chaque point fixe, on peut en déduire les moments cinétiques circulaires (Λ_i , équations (2.17) et (2.18)) :

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \Lambda_{1,0} + \frac{k_1}{q}(I_1 - \delta) \\ \Lambda_2 &= \Lambda_{2,0} + \frac{k_2}{q}(I_1 - \delta)\end{aligned}$$

Ceci permet de calculer la valeur du rapport de périodes au point fixe (loi de Kepler) :

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\eta \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right)^3$$

avec

$$\eta = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{2/3} \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1} \right)^{1/3}$$

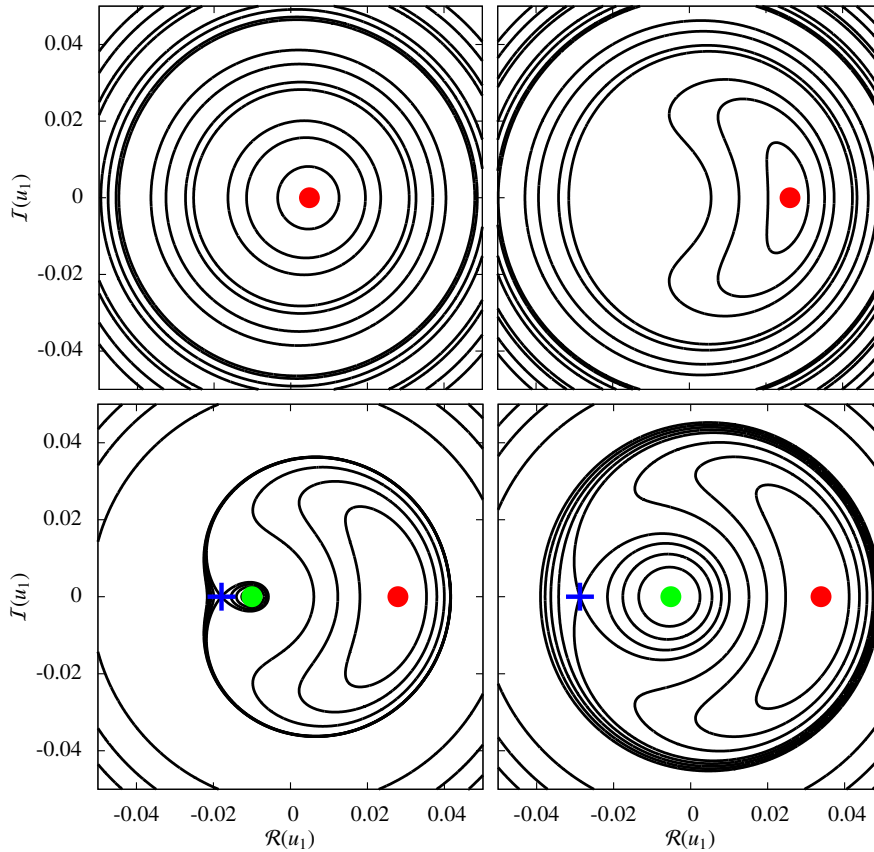


FIGURE 2.4 – Espace des phases d’une résonance de degré $q = 1$. On a fixé $R^* = 10^{-5}$ et $\delta = -10^{-3}$ (haut, gauche), 5×10^{-4} (haut, droite), 6×10^{-4} (bas, gauche) et 10^{-3} (bas, droite). Les points ronds correspondent aux points fixes elliptiques et les croix aux points fixes hyperboliques. Les couleurs sont les mêmes que dans la figure 2.3.

Nous présentons dans les paragraphes suivant l’évolution des points fixes et de l’espace des phases en fonction du paramètre δ pour des résonances de degré un, deux et trois. Rappelons que le coefficient R^* dépend de la résonance considérée et des masses des trois corps. En particulier ce coefficient fait intervenir le rapport des masses (planétaires sur stellaire). On a donc $R^* \ll 1$. Choisir une valeur pour q (degré de la résonance) et pour R^* suffit pour calculer les positions des points fixes suivant I_1, θ_1 . Cependant pour calculer le rapport de périodes P_2/P_1 , il faut choisir une résonance précise (pas seulement le degré) et fixer des masses pour les planètes. Pour illustrer notre modèle nous avons choisi de calculer P_2/P_1 dans le cas des résonances $1 + q:1$ (2:1, 3:1, 4:1) et avec des masses planétaires égales ($m_1 = m_2$) de sorte que $\eta = 1$.

2.4.5.1 Résonance de degré un

La figure 2.3 présente la position des différents points fixes pour une résonance de degré $q = 1$, avec $R^* = 10^{-5}$. Le rapport de périodes est calculé pour une résonance 2:1 avec $m_1 = m_2$. On observe une bifurcation au voisinage de $\delta = 5 \times 10^{-4}$. Avant la bifurcation ($\delta < 5 \times 10^{-4}$), le système ne présente qu’un seul point fixe elliptique (en rouge). L’espace des phases correspondant à cette situation est présenté dans la figure 2.4 (haut, gauche, $\delta = -10^{-3}$). On observe simplement un mouvement de circulation autour de l’unique point fixe. Quand δ tend vers $-\infty$, la position de ce point fixe tend vers $I_1 = 0$ (excentricités nulles), tandis que le rapport de périodes s’éloigne de la valeur résonante (voir figure 2.3). On parle dans ce cas de circulation externe car le rapport de périodes est supérieur à la valeur résonante.

Lorsque l’on s’approche de la bifurcation (figure 2.4 haut, droite, $\delta = 5 \times 10^{-4}$), l’espace des phases

commence à se déformer mais on a toujours un mouvement de circulation autour d'un unique point fixe qui est significativement excentré ($I_1 \neq 0$, excentricités non-nulles, voir figure 2.3). Le rapport des périodes se fige alors à la valeur résonante. À la bifurcation, deux points fixes, un point elliptique (vert) et un point hyperbolique (bleu), apparaissent simultanément et à la même position de l'espace des phases (figure 2.4 bas, gauche, $\delta = 6 \times 10^{-4}$) puis s'éloignent progressivement au fur et à mesure que δ augmente (voir figure 2.3). L'espace des phases (figure 2.4 bas, droite, $\delta = 10^{-3}$) présente alors trois régions distinctes délimitées par deux séparatrices passant par le point hyperbolique (bleu). Autour du point fixe elliptique vert, il apparaît progressivement une zone de circulation interne, dans laquelle le rapport de périodes est inférieur au rapport résonant (figure 2.3). Autour du point fixe elliptique rouge, la zone de circulation externe qui était présente avant la bifurcation devient la zone résonante dans laquelle le rapport de périodes est piégé à la valeur résonante. Enfin une troisième région de l'espace des phases englobe la zone de circulation interne et la zone résonante. On l'appelle zone de circulation externe et le rapport de périodes y est supérieur à la valeur résonante.

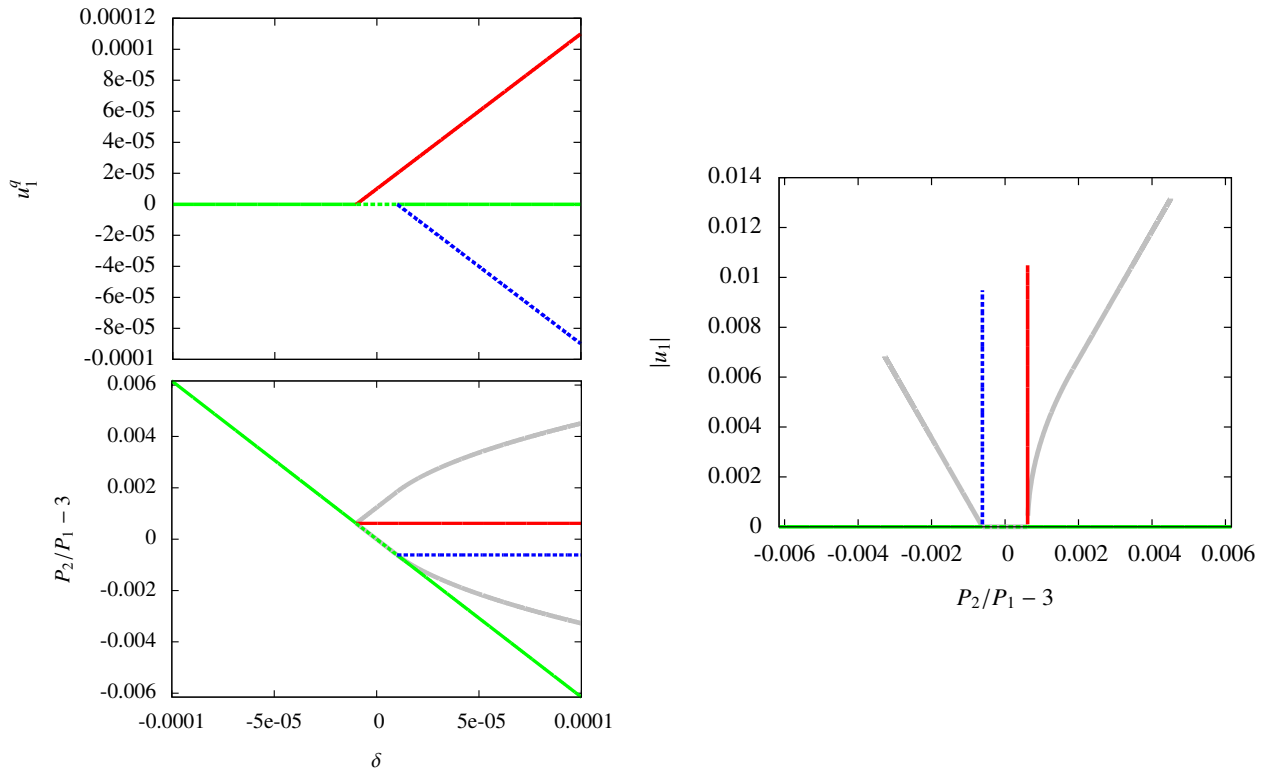


FIGURE 2.5 – Similaire à la figure 2.3 mais pour une résonance de degré $q = 2$ (résonance 3:1 pour le rapport de période).

2.4.5.2 Résonance de degré deux

La figure 2.5 présente la position des différents points fixes pour une résonance de degré $q = 2$, toujours en prenant $R^* = 10^{-5}$. Le rapport de périodes est calculé pour une résonance 3:1 avec $m_1 = m_2$. On donne la position des points fixes suivant $u_1^2 (\in \mathbb{R})$. Chaque point fixe est double, car l'espace des phases présente une symétrie de rotation d'angle $\pi = 2\pi/q$. On observe deux bifurcations successives au voisinage de $\delta = -10^{-5}$ et $\delta = 10^{-5}$. Pour $\delta < -10^{-5}$, le système ne présente qu'un seul point fixe elliptique (en vert) qui est exactement en 0 (excentricités nulles) contrairement au cas des résonances de degré un. C'est une différence fondamentale entre les résonances de degré un et celle de degré plus élevé qui joue un rôle important lorsque des processus dissipatifs agissent sur le système. L'espace des phases correspondant à cette situation est présenté dans la figure 2.6 (gauche, $\delta = -5 \times 10^{-5}$). Comme dans le cas des résonances de degré un, on observe des trajectoires

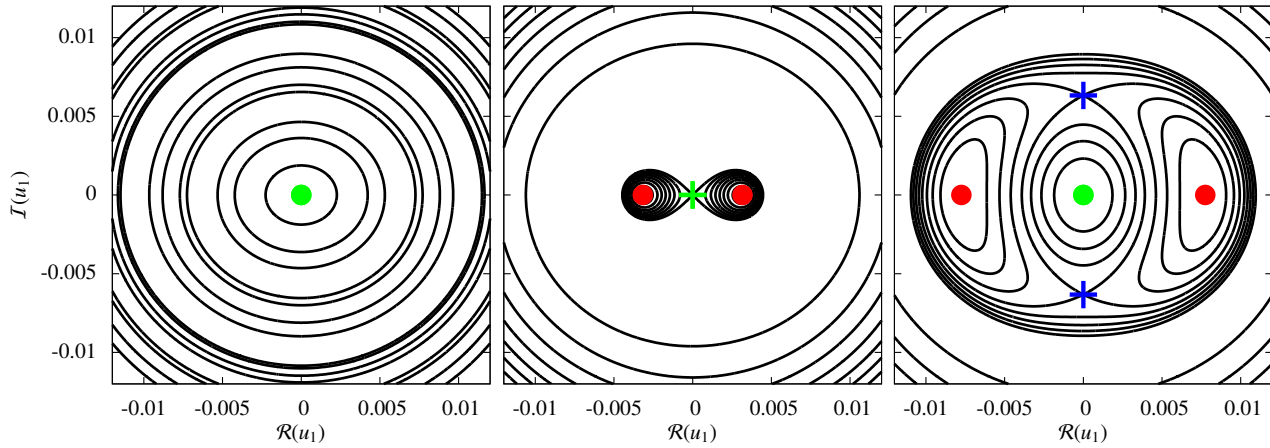


FIGURE 2.6 – Similaire à la figure 2.4 mais pour une résonance de degré $q = 2$. On a fixé $R^* = 10^{-5}$ et $\delta = -5 \times 10^{-5}$ (gauche), 0 (milieu) et 5×10^{-5} (droite). Les couleurs sont les mêmes que dans la figure 2.5.

de circulation autour de l'unique point fixe et le rapport de périodes s'éloigne de la valeur résonante quand $\delta \rightarrow -\infty$ (voir figure 2.5). On parle donc de circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2|/|k_1|$).

À la première bifurcation ($\delta \approx -10^{-5}$), le point fixe en zéro (vert) devient instable (hyperbolique) et deux nouveaux points fixes elliptiques (rouges) apparaissent à l'origine et s'écartent progressivement de façon symétrique ($\theta_1 = 0, \pi$). L'espace des phases correspondant (figure 2.6 milieu, $\delta = 0$) présente trois régions délimitées par deux séparatrices passant par le point fixe hyperbolique en zéro. Deux régions résonantes apparaissent autour des deux points fixes elliptiques rouges et la zone de circulation externe subsiste et englobe les deux zones résonantes. À la deuxième bifurcation ($\delta \approx 10^{-5}$), le point fixe central (vert) devient à nouveau elliptique et deux nouveaux points hyperboliques (bleus) apparaissent en zéro et divergent symétriquement ($\theta_1 = \pm\pi/2$). L'espace des phases (figure 2.6 droite, $\delta = 5 \times 10^{-5}$) présente toujours les deux régions résonantes et la région de circulation externe autour mais une nouvelle région de circulation interne apparaît au centre, autour du point fixe elliptique vert.

2.4.5.3 Résonance de degré trois

La figure 2.7 présente la position des différents points fixes pour une résonance de degré $q = 3$, avec $R^* = 10^{-5}$. Le rapport de périodes est calculé pour une résonance 4:1 avec $m_1 = m_2$. Les différents espaces des phases que l'on peut rencontrer en fonction de la valeur de δ sont tracés sur la figure 2.8. Pour les résonances de degré trois, la symétrie de rotation est d'angle $2\pi/3$ et chaque point fixe (sauf en zéro) est triple. Comme dans le cas des résonances de degré deux (et contrairement à celles de degré un), le point fixe vert (figures 2.7 et 2.8) est toujours en zéro (excentricités nulles).

Notons que pour une même valeur de R^* (même ordre de grandeur du rapport des masses planétaires sur stellaire), plus le degré de la résonance est élevé et plus les bifurcations de l'espace des phases apparaissent pour des valeurs de δ petites ($\delta \sim 10^{-3}$ pour $q = 1$, $\delta \sim 10^{-5}$ pour $q = 2$ et $\delta \sim 10^{-10}$ pour $q = 3$) et donc à excentricités faibles et rapport de périodes proche du rapport résonant.

2.4.5.4 Différence fondamentale des résonances de degré un

Les bifurcations et espaces des phases des résonances de degré deux et plus sont relativement similaires. En revanche les résonances de degré un ont des caractéristiques très particulières. Le point fixe central (circulation) n'est jamais exactement en zéro (excentricités nulles). De plus, au moment de la bifurcation, le point fixe elliptique rouge passe de centre de la zone de circulation externe à centre de la zone résonante (centre de libration de la résonance). Ainsi, si le paramètre δ évolue sous l'action de la dissipation, un système peut passer de la zone de circulation externe à la zone résonante sans franchir la séparatrice. Ce mécanisme n'est

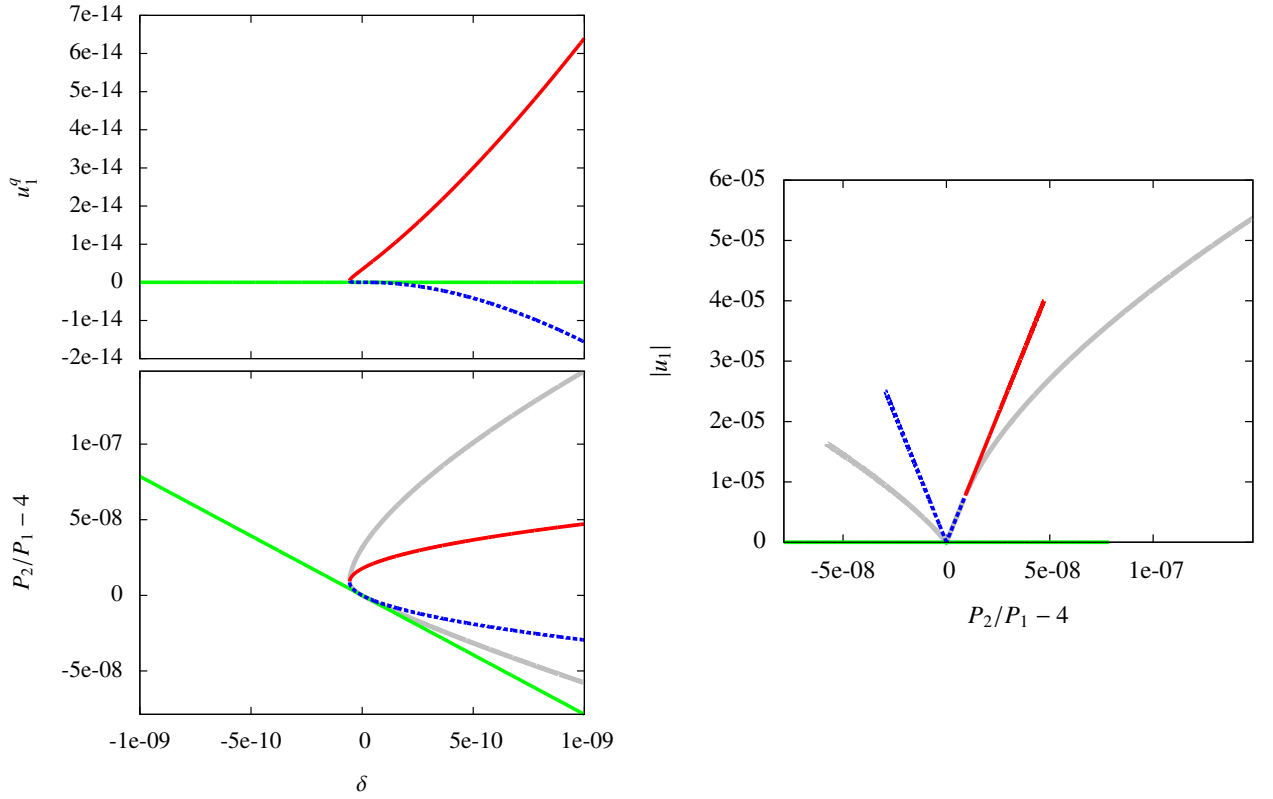


FIGURE 2.7 – Similaire à la figure 2.3 mais pour une résonance de degré $q = 3$ (résonance 4:1 pour le rapport de période).

pas possible dans le cas des résonances d'ordre plus élevé car au moment de la bifurcation, la zone résonante est de dimension nulle. *En résumé, pour les résonances de degré un, la séparatrice de la résonance disparaît quand les excentricités deviennent faibles (voir figure 2.3, droite), alors que pour les résonances de degré plus élevé, la séparatrice se maintient jusqu'aux excentricités nulles (voir figures 2.5 et 2.7, droite).*

2.5 Recherche de la position du centre de libration

Pour construire un modèle simplifié intégrable des résonances, nous avons besoin de connaître la position du centre de libration de la résonance dans le modèle à deux degrés de liberté (voir paragraphe 2.4). Le centre de libration est un point fixe de ce problème à deux degrés de liberté. Pour obtenir sa position (dans les variables x_i) il faut résoudre les équations de Hamilton avec un second membre nul :

$$\dot{x}_i = \mathbf{i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{x}_i} = 0$$

où le point correspond à une dérivée temporelle réalisée avec le temps renormalisé t et \mathcal{H} est le Hamiltonien résonant (cf. équation (2.16)). On obtient ainsi un système de deux équations complexes à deux inconnues complexes, ce qui est équivalent à un système de quatre équations réelles à quatre inconnues réelles.

Il existe plusieurs méthodes permettant de résoudre ces équations. Si le Hamiltonien (2.16) est développé à un degré faible en x_i , il est possible de résoudre analytiquement le système. L'avantage d'une résolution purement analytique est que l'on obtient l'ensemble des racines du système (points fixes). Cependant, cela nécessite de manipuler des équations polynomiales qui deviennent rapidement volumineuses lorsqu'on augmente le degré de développement du Hamiltonien (en excentricité). Il est aussi possible de rechercher numériquement des solutions de ce système. Les algorithmes de résolution numérique de systèmes d'équations (e.g.

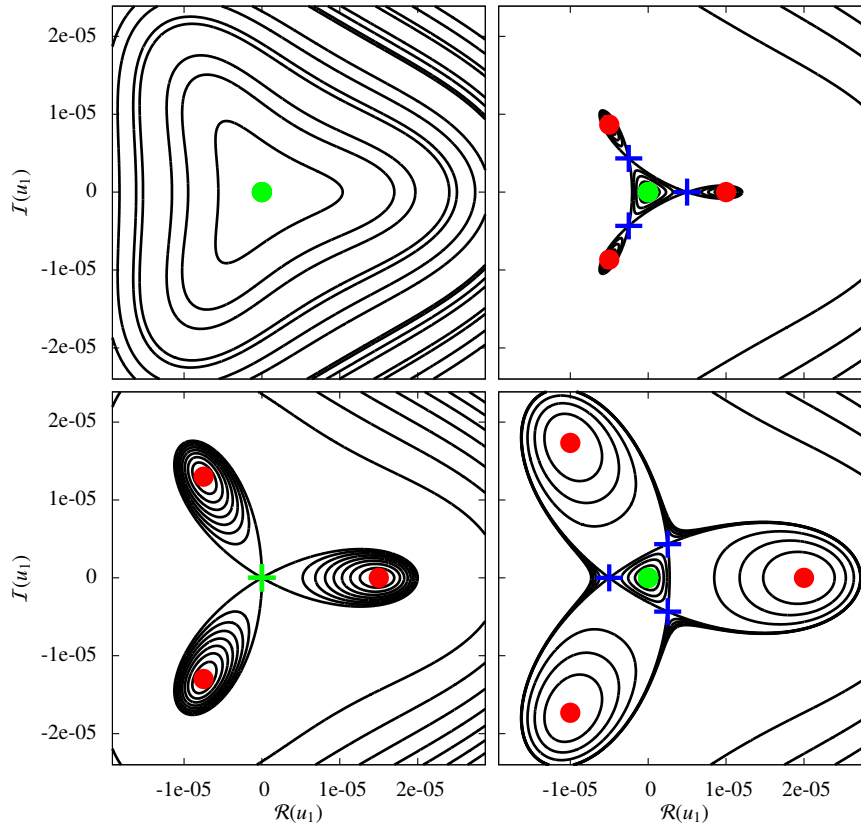


FIGURE 2.8 – Similaire à la figure 2.4 mais pour une résonance de degré $q = 3$. On a fixé $R^* = 10^{-5}$ et $\delta = -10^{-10}$ (haut, gauche), -5×10^{-11} (haut, droite), 0 (bas, gauche) et 10^{-10} (bas, droite). Les couleurs sont les mêmes que dans la figure 2.7.

méthode de Newton) convergent généralement vers une seule racine. Si le système admet plusieurs points fixes (racines des équations de Hamilton), il est nécessaire de relancer l'algorithme plusieurs fois et avec des conditions initiales différentes pour les obtenir toutes. Cette démarche est limitée par le fait qu'on ne connaît pas a priori le nombre de racines et qu'on n'est donc jamais certain de les avoir toutes obtenues. La recherche numérique peut aussi être couplée à une évaluation numérique du Hamiltonien moyen (e.g. Beaugé et al., 2006; Michtchenko et al., 2006). L'avantage de cette méthode purement numérique est qu'elle reste valable pour des excentricités importantes car le Hamiltonien n'est pas développé en puissance des excentricités. Enfin, une autre manière d'obtenir la position du point fixe est de chercher numériquement les orbites périodiques du problème complet (non-moyenné, e.g. Hadjidemetriou, 2002; Antoniadou & Voyatzis, 2014).

Nous présentons ici la recherche analytique des points fixes au degré minimal de développement du Hamiltonien, ainsi que la méthode de moyennisation numérique permettant d'obtenir la position des points fixes pour des excentricités plus importantes.

2.5.1 Recherche analytique

Lorsque le Hamiltonien résonant (2.16) est développé à un degré faible en excentricité, il est possible de manipuler les quatre équations polynomiales réelles pour obtenir un système équivalent plus simple à résoudre. Il existe différents algorithmes permettant de réaliser cette simplification. Certains algorithmes, comme l'algorithme de Buchberger (s'appuyant sur les bases de Gröbner, Buchberger, 1965, 2006), généralisent d'une certaine manière la méthode du pivot de Gauss et construisent une représentation triangulaire du système, c'est-à-dire un système de quatre équations équivalent au système de départ mais dont la première équation ne dépend que de la première variable, la deuxième des deux premières variables, etc. Nous utilisons ici un

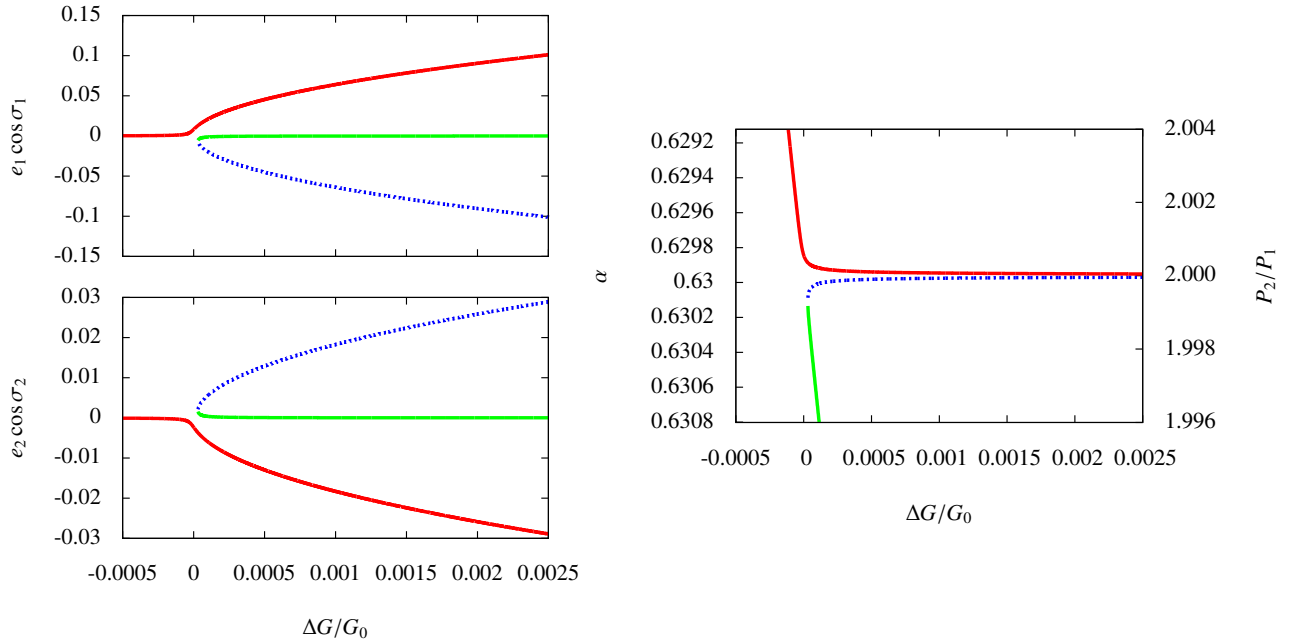


FIGURE 2.9 – Position des points fixes d’une résonance 2:1 (degré un) avec $m_0 = M_\odot$ et $m_1 = m_2 = M_\oplus$. La partie perturbative du Hamiltonien est développée au degré un en excentricité et les points fixes sont obtenus par une méthode analytique (cf. paragraphe 2.5.1). On trace $e_i \cos \sigma_i$ (gauche) et le rapport de période P_2/P_1 ainsi que le rapport des demi-grands axes α (droite) au niveau des points fixes en fonction du paramètre ΔG . On a $\sin \sigma_i = 0$ pour tous les points fixes. Les courbes en trait plein correspondent aux points fixes elliptiques, celles en pointillés aux points fixes hyperboliques. On obtient exactement les mêmes résultats qu’avec le modèle analytique simplifié (figures 2.3 et 2.4), comme expliqué dans le paragraphe 2.5.1, mais ici on a gardé deux degrés de liberté et l’espace des phases est à quatre dimensions.

algorithme de résolution par la construction de la « Rational Univariate Representation » (RUR) du système (Rouillier, 1999). Cette représentation consiste en une équation polynomiale ne dépendant que d’une variable auxiliaire et quatre équations donnant les expressions des quatre inconnues comme des polynômes en la variable auxiliaire. Pour résoudre le système il suffit alors de chercher les solutions de la première équation en utilisant un algorithme de séparation des racines (utilisant la règle des signes de Descartes). Les différentes étapes de ce calcul sont réalisées en utilisant la fonction *RootFinding[Isolate]* de *Maple* qui renvoie l’ensemble des solutions du système polynomial avec une précision arbitraire.

Nous appliquons ici cette méthode de recherche des racines pour le Hamiltonien développé au degré minimal pour les résonances 2:1 ($q = 1$) et 3:1 ($q = 2$) avec $m_0 = M_\odot$, et $m_1 = m_2 = M_\oplus$. Remarquons que pour les résonances de degré un (comme la résonance 2:1) et lorsque le Hamiltonien est développé au degré un, nous avons déjà trouvé la position des points fixes. En effet, au paragraphe 2.4.1 (voir aussi Henrard et al., 1986) nous avons montré qu’en réalisant le changement de coordonnées $\mathbf{x} = R_\phi u$, avec $\tan \phi = R_2/R_1$, tous les points fixes du système sont dans la direction de u_1 ($u_2 = 0$). Puis, au paragraphe 2.4.5.1 nous avons obtenu la position des points fixes suivant u_1 . La figure 2.9 présente la position des points fixes pour la résonance 2:1 et la figure 2.10 la position des points fixes pour la résonance 3:1. Dans le cas de la résonance 2:1 (figure 2.9), les bifurcations sont, comme attendu, les mêmes que celles obtenues dans le modèle simplifié des résonances. Dans le cas de la résonance 3:1 (figure 2.10), les bifurcations de l’espace des phases sont similaires à celles obtenues avec le modèle simplifié mais on observe quatre bifurcations successives (quatre couples de points fixes) au lieu de deux dans le modèle simplifié (figure 2.5). Le degré de liberté supplémentaire ajoute donc de la complexité à la structure de l’espace des phases.

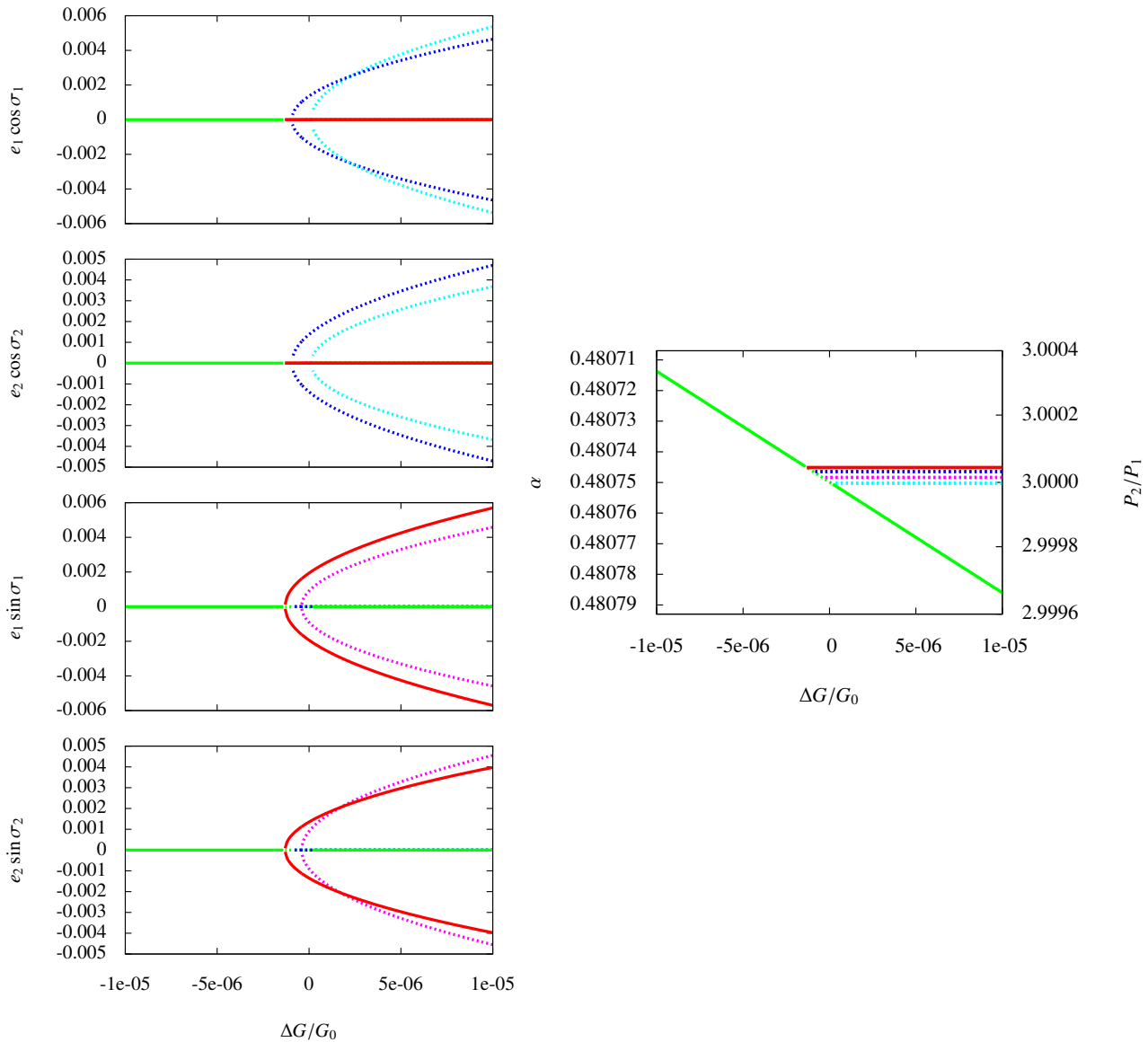


FIGURE 2.10 – Similaire à la figure 2.9 mais pour une résonance 3:1 (degré deux). La partie perturbative du Hamiltonien est développée au degré deux en excentricité. On obtient le même type de structure de l'espace des phases qu'avec le modèle analytique simplifié (figures 2.5 et 2.6). Cependant ici on a quatre bifurcations successives avec la naissance de quatre paires de points fixes au lieu de deux paires de points fixes dans le modèle simplifié. Les deux premiers points fixes (la première paire) sont elliptiques et correspondent au centre de libration de la résonance. Les trois autres paires sont des points fixes hyperboliques. La structure de l'espace des phases du problème à deux degrés de liberté est donc plus complexe que dans le modèle analytique simplifié à un degré de liberté.

2.5.2 Recherche numérique

La recherche numérique des points fixes du problème (e.g. Beaugé et al., 2006; Michtchenko et al., 2006) permet de déterminer la position du centre de libration de manière plus précise et en particulier pour des excentricités importantes. En utilisant une méthode purement numérique, il n'est plus nécessaire de développer le Hamiltonien en puissance des excentricités. On reprend la forme non-développée de la partie perturbative du Hamiltonien en fonction des coordonnées positions-quantités de mouvement héliocentriques (para-

graphe 2.1) :

$$\mathcal{H}_1 = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0}$$

On conserve la partie Keplerienne sous la forme (cf. équation (2.1)) :

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2}$$

Si l'on fixe les valeurs des coordonnées elliptiques de Delaunay $(M_i, \Lambda_i, \varpi_i, G_i)$ on peut calculer les positions \mathbf{r}_i et quantités de mouvement $\tilde{\mathbf{r}}_i$ correspondantes en résolvant numériquement l'équation de Kepler. Ceci permet alors de calculer numériquement le Hamiltonien à la position $(M_i, \Lambda_i, \varpi_i, G_i)$. Pour réaliser ce calcul, il faut déterminer la valeur des huit coordonnées de Delaunay (quatre degrés de liberté). Pour une résonance $k_1:k_2$, on cherche à calculer le Hamiltonien moyenné en un point de coordonnées actions-angles (D_i, σ_i) (deux degrés de liberté) et pour une valeur du paramètre G fixée. On calcule les actions Λ_i, G_i à partir des valeurs de G et des actions D_i , en utilisant les équations (2.17) et (2.18). Les équations (2.11) et (2.12) permettent de calculer $\Delta\varpi$ et $\sigma = -k_1 M_1 + k_2 M_2$ en fonction des σ_i . L'invariance par rotation du problème (conservation du moment cinétique) implique que la valeur obtenue lors de l'évaluation numérique du Hamiltonien ne dépend que de la différence des longitudes des périhélie $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$. On peut donc fixer arbitrairement $\varpi_1 = \Delta\varpi$ et $\varpi_2 = 0$ pour effectuer le calcul. Enfin, il faut échantillonner les valeurs de M_1 et M_2 en maintenant $-k_1 M_1 + k_2 M_2 = \sigma$. On échantillonne donc M_1 entre 0 et $2k_2\pi$ et on pose $M_2 = (\sigma + k_1 M_1)/k_2$ qui varie entre σ/k_2 et $\sigma/k_2 + 2k_1\pi$. On calcule alors la moyenne de la partie perturbative \mathcal{H}_1 sur l'ensemble des valeurs des M_i . Ceci revient à sélectionner l'ensemble des termes faisant apparaître les harmoniques de l'angle résonant σ dans la décomposition de Fourier de \mathcal{H}_1 . La partie Keplerienne peut être calculée directement à partir des Λ_i sans utiliser de moyennisation numérique. On obtient alors le Hamiltonien moyenné numériquement en tout point (D_i, σ_i) . Pour obtenir la position des points fixes, il faut chercher les points solutions des équations de Hamilton avec second-membre nul :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial D_i} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma_i} = 0 \end{cases}$$

Ces dérivées partielles sont calculée numériquement avec la même méthode que le Hamiltonien moyenné. On utilise la méthode de Newton-Raphson (e.g. Press et al., 1986) pour chercher les zéros du système d'équations.

La figure 2.11 compare la position du centre de libration obtenue avec cette méthode numérique et la position obtenue avec la méthode analytique (voir paragraphe 2.5.1) pour une résonance 2:1 et avec $m_0 = M_\odot$, et $m_1 = m_2 = M_\oplus$. On trace la position du centre de libration dans le plan e_1, e_2 . Avec la méthode analytique au degré un, on observe que la position du centre de libration suit une droite dans le plan e_1, e_2 . Ceci provient du fait qu'au niveau du point fixe, on a $e_2/e_1 \propto |x_2/x_1| = \tan \phi = R_2/R_1 = cte$ (cf. paragraphe 2.4.1). La position du point fixe donnée par la méthode numérique suit approximativement cette droite pour $e_1 \lesssim 0.05$. Au delà, les deux courbes diffèrent significativement et la direction du point fixe n'est plus constante d'après la méthode numérique. La transformation $x \rightarrow u$ permettant de construire le modèle analytique simplifié n'est donc pas constante et dépend du paramètre ΔG . Cependant, dans la suite on gardera l'approximation d'un changement de coordonnées constant tel qu'on l'obtient avec le modèle de degré un. La figure 2.12 compare la position du centre de libration obtenue avec les deux méthodes pour une résonance 3:1 (avec $m_0 = M_\odot$, et $m_1 = m_2 = M_\oplus$). Les conclusions sont les mêmes que pour la résonance 2:1. La méthode analytique donne une droite dans le plan e_1, e_2 , ce qui est une bonne approximation de la position obtenue numériquement pour $e_1 \lesssim 0.1$. Au delà, l'approximation du changement de coordonnées constant n'est plus correcte. Michtchenko et al. (2006) présente une étude numérique très complète de la position des points fixes pour les principales résonances de moyen mouvement et pour différentes valeurs du rapport des masses planétaires m_2/m_1 . D'après les résultats

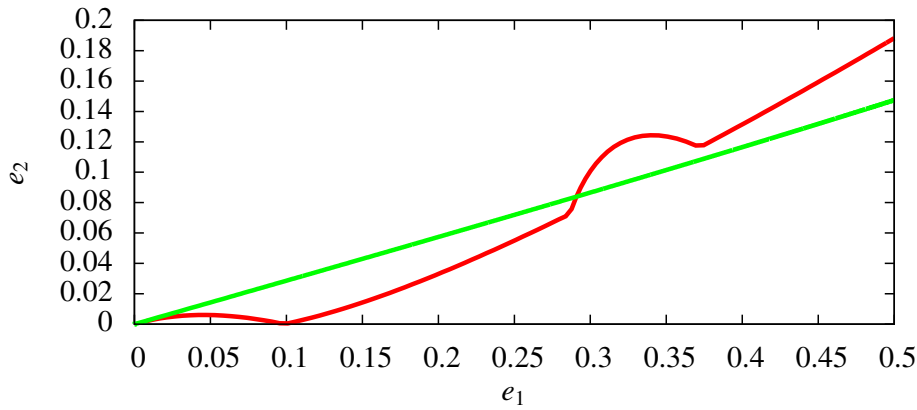


FIGURE 2.11 – Position du centre de libration dans le plan e_1, e_2 d’une résonance 2:1 (degré un) avec $m_0 = M_\odot$ et $m_1 = m_2 = M_\oplus$. On compare la position obtenue avec le modèle analytique développé au degré un (vert, cf. paragraphe 2.5.1) et celle obtenue avec la méthode de moyennisation numérique (rouge, cf. paragraphe 2.5.2). Le modèle analytique de degré un donne une bonne approximation de la position du point fixe pour $e_1 \lesssim 0.05$. Au delà les deux courbes sont significativement différentes. En particulier, le modèle analytique de degré un donne une droite dans le plan e_1, e_2 ce qui n’est pas le cas avec la méthode de moyennisation numérique (pour $e_1 \gtrsim 0.05$).

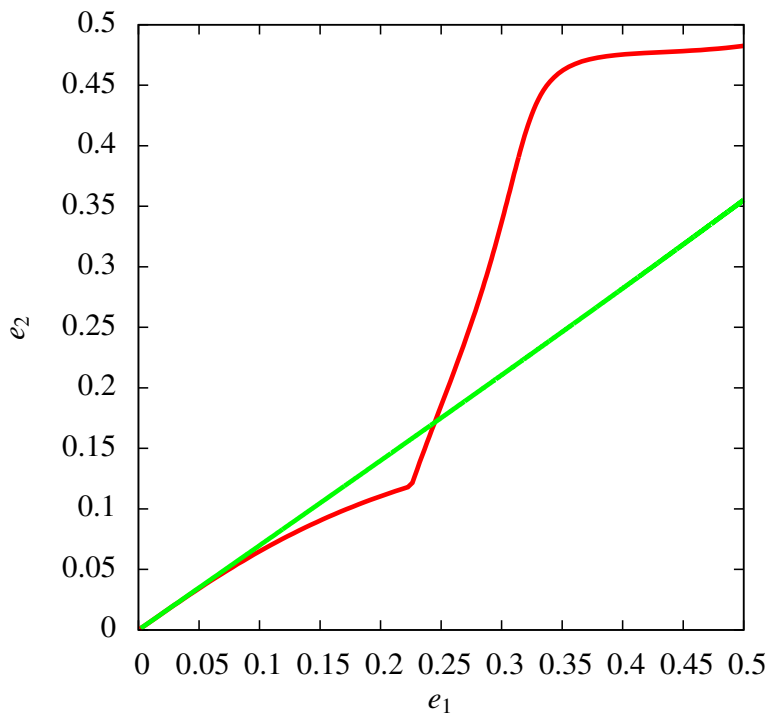


FIGURE 2.12 – Similaire à la figure 2.11 mais pour une résonance 3:1 (degré deux). Comme pour la résonance 2:1 (degré un), le modèle analytique donne une droite dans le plan e_1, e_2 . Les deux méthodes (analytique et numérique) sont en accord pour $e_1 \lesssim 0.1$. Au delà, la position du point fixe donnée par la méthode numérique ne suit plus une droite et s’écarte de l’approximation obtenue avec le modèle analytique.

de cette étude, on constate que pour des excentricités modérées l’hypothèse d’une direction constante du centre de libration (changement de coordonnées constant) peut être utilisée en première approximation. Le cas le moins favorable semble être celui de la résonance 2:1 (cf. figure 2.11) pour lequel la déviation par rapport à cette approximation apparaît pour des excentricités relativement faibles.

Chapitre 3

Étude de la dynamique en présence de dissipation

3.1 Dissipation et sortie des résonances

Les phénomènes dissipatifs (effet de marée, migration, etc.) ont souvent des échelles de temps longues (des millions voire milliards d'années) par rapport à la dynamique conservative. Sur une échelle de temps relativement courte, l'évolution d'un système dissipatif reste très proche de celle du cas conservatif et l'étude de la dynamique conservative nous sert de référence pour l'étude du cas dissipatif. Cependant sur le long terme, plusieurs effets de la dissipation doivent être pris en compte. L'effet le plus évident est que les intégrales premières du problème conservatif ne sont plus des constantes lorsque l'on ajoute de la dissipation. Ainsi, sur le long terme, l'espace des phases va changer au fur et à mesure que les intégrales premières (en particulier le paramètre $\delta \approx \Delta G$ du modèle) changent. Différents auteurs ont modélisé l'évolution de systèmes dissipatifs au voisinage des résonances (notamment dans le cas du problème restreint) par une évolution lente (hypothèse adiabatique, e.g. Henrard, 1982) des paramètres du modèle. Ce type de modèle permet d'étudier les phénomènes de capture en résonance de moyen-mouvement (e.g. Henrard & Lemaître, 1983; Beauge & Ferraz-Mello, 1993, 1994; Jancart & Lemaître, 2001) ainsi que les mécanismes de sortie des résonances et de franchissement des séparatrices (e.g. Gonczi et al., 1982; Lemaître, 1984a; Titemore & Wisdom, 1990; Malhotra & Dermott, 1990).

En plus de ce changement de l'espace des phases, la dissipation agit sur les variables d'action du problème conservatif (D_i ou I_i dans notre cas). Pour un système en résonance, cela se traduit principalement par un spiralement de la trajectoire, soit vers le centre de libration, soit au contraire vers la séparatrice de la résonance. Les échelles de temps régissant l'évolution de l'espace des phases (au travers des intégrales premières) et le spiralement (évolution des variables d'action) sont a priori du même ordre de grandeur (celui du phénomène dissipatif considéré) et sont toutes les deux longues devant l'échelle de temps de la dynamique conservative. Il faut donc tenir compte de ces deux composantes pour comprendre l'évolution d'un système en présence de dissipation.

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet de la dissipation (principalement de l'effet de marée) sur un système initialement en résonance. Nous nous attachons particulièrement à répertorier les différents scénarii de sortie de la résonance à cause de cette dissipation. Cette étude est motivée en grande partie par les statistiques obtenues par la mission *Kepler* au voisinage des résonances (voir Lissauer et al., 2011; Fabrycky et al., 2012, ainsi que le paragraphe 1.1). Avant de présenter en détail notre modélisation analytique de la dissipation dans les systèmes résonants, il est intéressant d'avoir une intuition des différentes évolutions possible de ces systèmes. Nous listons ici les principales étapes de notre raisonnement :

1. L'effet de marée généré par l'étoile dans les planètes a tendance à amortir les excentricités des planètes. Dans notre modèle simplifié des résonances (voir notamment les figures 2.3, 2.5 et 2.7) u_1 est proportionnel aux excentricités planétaires (à faibles excentricités) et va donc être amorti par l'effet de marée.

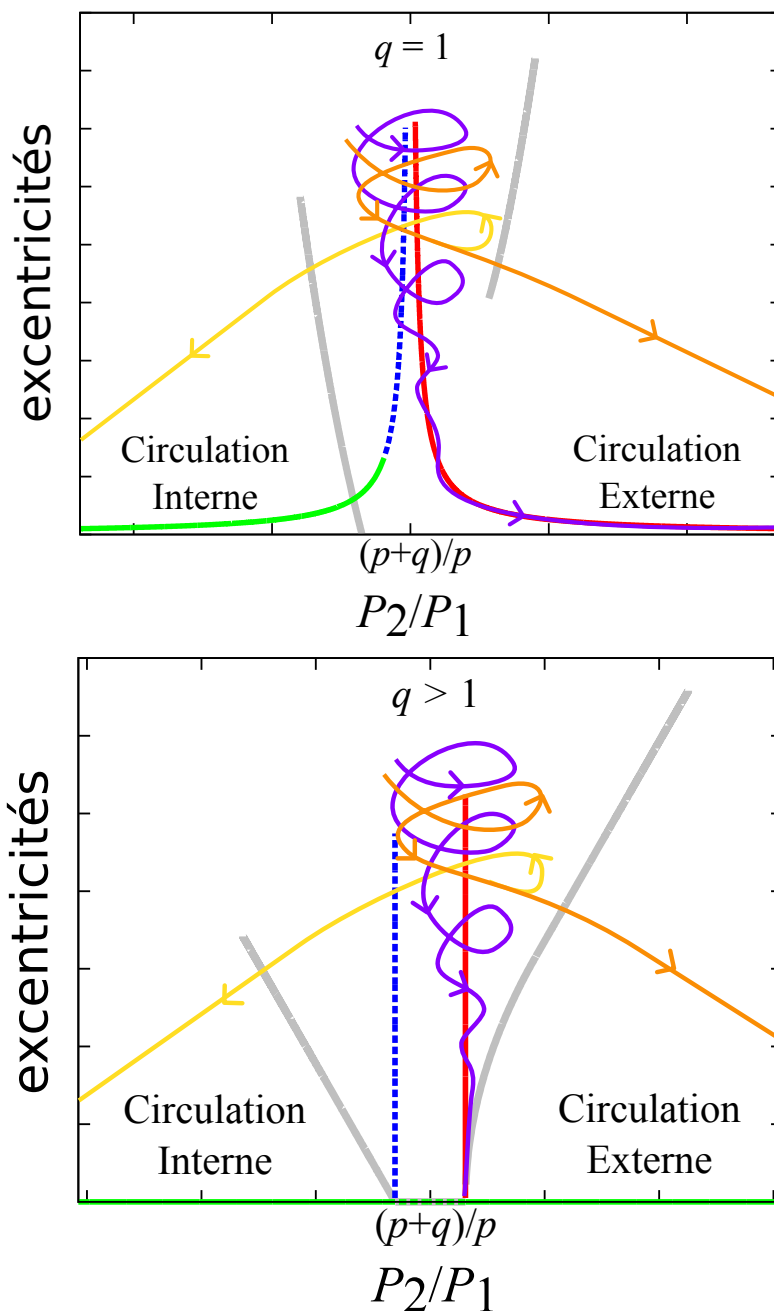


FIGURE 3.1 – Schéma illustrant les différentes possibilités d'évolution pour un système en résonance de degré un (*haut*) ou plus (*bas*) subissant de l'effet de marée dans les planètes. La courbe violette correspond à une amplitude de libration décroissante. Pour une résonance de degré $q > 1$ (*bas*), le système reste en résonance jusqu'à ce que les excentricités soient complètement amorties. Pour une résonance de degré un (*haut*), la séparatrice de la résonance disparaît à excentricités faibles, le système suit le point fixe rouge et sort de la résonance vers la zone de circulation externe. Les courbes jaunes et oranges correspondent à une amplitude de libration croissante. Quelque soit la résonance, si l'amplitude initiale est suffisante, le système atteint la séparatrice et sort de la résonance, soit vers la zone de circulation interne (jaune) soit vers la zone de circulation externe (orange).

Dans les figures 2.3 droite, 2.5 droite et 2.7 droite, le système va se déplacer vers le bas (excentricités nulles) à cause de l'effet de marée tout en oscillant autour du centre de libration de la résonance (courbe rouge). De plus, suivant l'importance de la dissipation subie par chacune des planètes, l'amplitude de libration dans la résonance peut soit augmenter auquel cas le système peut atteindre la séparatrice de la résonance avant que les excentricités ne soient complètement amorties, soit diminuer auquel cas le système s'approche de plus en plus du centre de libration (courbe rouge) et suit son évolution. La figure 3.1 illustre les différentes possibilités d'évolution d'un système initialement en résonance et subissant de l'effet de marée dans les planètes pour les résonances de degré un et celles de degré plus élevé. L'évolution d'un système dont l'amplitude de libration est décroissante (en violet dans la figure 3.1) est différente dans le cas des résonances de degré un et dans le cas des résonances de degré plus élevé. Pour les résonances de degré un, la séparatrice de la résonance disparaît à faibles excentricités et le rapport de périodes augmente tandis que les excentricités continuent de diminuer. Pour les autres résonances, le rapport de périodes reste fixé à la valeur résonante et la séparatrice ne disparaît pas.

2. L'évolution de l'amplitude de libration dans la résonance est déterminante dans l'évolution des systèmes subissant de l'effet de marée et elle dépend de l'importance de la dissipation dans la planète interne relativement à la dissipation dans la planète externe (voir Delisle et al., 2014, ainsi que le paragraphe 3.3). Notant T_1 et T_2 les échelles de temps caractéristiques de la dissipation dans les planètes (respectivement interne et externe), il existe une valeur critique τ_c du rapport $\tau = T_1/T_2$ en dessous de laquelle l'amplitude de libration est croissante (courbes jaunes et oranges dans la figure 3.1) et au dessus de laquelle l'amplitude décroît (courbes violettes dans la figure 3.1). Plus la dissipation est importante dans la planète interne (par rapport à la dissipation dans la planète externe), plus l'amplitude de libration croît rapidement. Au contraire, plus la dissipation est importante dans la planète externe, plus l'amplitude de libration décroît rapidement.
3. Lorsque l'amplitude de libration croît, le système peut franchir la séparatrice de la résonance alors que les excentricités sont encore importantes. Les planètes ne sont alors plus piégées en résonance et le rapport de périodes n'est plus figé à la valeur résonante. L'évolution du rapport de périodes est à nouveau régie par le rapport des temps caractéristiques de dissipation dans les deux planètes (τ). Supposons dans un premier temps que seule la planète interne subisse de la dissipation. Son excentricité, ainsi que son demi-grand axe diminuent. Les deux planètes n'étant plus piégées en résonance, le demi-grand axe de la planète externe n'est pas affecté. Les deux planètes s'écartent donc l'une de l'autre et le rapport de périodes augmente (courbes oranges dans la figure 3.1). Au contraire, lorsque la dissipation est concentrée dans la planète externe, le demi-grand axe de celle-ci diminue tandis que celui de la planète interne est constant et le rapport de périodes diminue (courbes jaunes dans la figure 3.1). Il existe une deuxième valeur critique τ_α du rapport $\tau = T_1/T_2$ en dessous de laquelle le rapport de périodes croît et au dessus de laquelle il décroît.

Ces différents raisonnements que l'on justifie analytiquement dans la suite de ce chapitre sont résumés dans la proposition suivante :

Proposition 1.

- Si $\tau > \tau_c$, l'amplitude de libration décroît, le système se rapproche du centre de libration au fur et à mesure que les excentricités sont amorties.
 - Si $q = 1$ (résonance de degré un, i.e. 2:1, 3:2, etc.), la séparatrice de la résonance disparaît à excentricités faibles et le rapport de périodes augmente pendant que les excentricités continuent de diminuer. Le système finit en circulation externe, c'est-à-dire en dehors de la résonance et avec $P_2/P_1 > |k_2/k_1|$.
 - Si $q > 1$ (résonance de degré deux ou plus, i.e. 3:1, 5:2, etc.), le système reste en résonance et les excentricités sont amorties. Le rapport de périodes final est proche de la valeur nominale ($P_2/P_1 \approx |k_2/k_1|$).
- Si $\tau < \tau_c$, l'amplitude de libration croît, le système se rapproche de plus en plus de la séparatrice en même temps que les excentricités diminuent. Si l'amplitude initiale est faible, les excentricités seront amorties avant que le système n'atteigne la séparatrice. Dans ce cas, l'évolution est similaire au cas précédant ($\tau > \tau_c$). Si l'amplitude initiale est suffisante, le système franchit la séparatrice alors que les excentricités sont encore importantes. Le système sort donc de la résonance et le rapport de périodes n'est plus figé à la valeur résonante.
 - Si $\tau < \tau_\alpha$, le rapport de périodes P_2/P_1 augmente. Le système finit en circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$).
 - Si $\tau > \tau_\alpha$, le rapport de périodes P_2/P_1 diminue. Le système finit en circulation interne ($P_2/P_1 < |k_2/k_1|$).

Dans le paragraphe 3.2 nous étudions l'évolution des intégrales premières donc de l'espace des phases en fonction de la dissipation subie par le système. Puis (paragraphe 3.3), nous nous intéressons à l'évolution de l'amplitude de libration d'un système résonant subissant de la dissipation. Finalement (paragraphe 3.4), nous étudions l'évolution ultérieure des systèmes une fois qu'ils sont sortis de la résonance.

3.2 Évolution des intégrales premières et de l'espace des phases

Pour évaluer l'impact de la dissipation sur le paramètre ΔG du modèle, il faut revenir à sa définition (équation (2.15)) :

$$\Delta G = G_0 - G$$

avec

$$G = \frac{G}{\Gamma} = \frac{\Delta_1 \sqrt{1 - e_1^2} + \Delta_2 \sqrt{1 - e_2^2}}{\left| \frac{k_2}{k_1} \right| \Delta_1 + \Delta_2} \quad (3.1)$$

$$\Delta_i = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}$$

et G_0 est une constante qui ne dépend que des masses des planètes et de k_1, k_2 (voir équation (2.14)). Notant $\dot{a}_{i|d}$, $\dot{e}_{i|d}$ l'effet instantané sur les demi-grands axes et excentricités planétaires d'un phénomène dissipatif quelconque, l'effet sur le paramètre ΔG est alors donné par :

$$\Delta \dot{G}|_d = -\dot{G}|_d = - \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial a_i} \dot{a}_{i|d} + \frac{\partial G}{\partial e_i} \dot{e}_{i|d} \right)$$

En utilisant la définition de G (équation (3.1)), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta\dot{G}|_d = -\dot{G}|_d = & \Lambda_1 \frac{e_1^2}{\sqrt{1-e_1^2}} \left(\frac{\dot{e}_1}{e_1} \right) \Big|_d \\ & + \Lambda_2 \frac{e_2^2}{\sqrt{1-e_2^2}} \left(\frac{\dot{e}_2}{e_2} \right) \Big|_d \\ & + \frac{1}{2} \Lambda_1 \Lambda_2 \left(\left| \frac{k_2}{k_1} \right| \sqrt{1-e_2^2} - \sqrt{1-e_1^2} \right) \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) \Big|_d \end{aligned} \quad (3.2)$$

qui ne dépend que de l'évolution du rapport des demi-grands axes $\alpha = a_1/a_2$. Dans ces expressions, les points représentent au choix des dérivées par rapport au temps « réel » t ou bien par rapport au temps renormalisé t . Dans la suite, sauf indication contraire, on utilisera des dérivées par rapport au temps réel. En effet, le temps renormalisé n'a d'intérêt que pour éliminer complètement le paramètre Γ des équations du mouvement conservatif et caractériser le plus simplement possible l'évolution à court terme du système (dissipation lente). Pour étudier l'évolution du système sur le long terme et en particulier l'évolution de la structure de l'espace des phases, il est plus intéressant de connaître l'évolution temporelle réelle du paramètre ΔG ou des autres coordonnées.

L'équation (3.2) est une formule très générale qui permet de traiter toute dissipation affectant les excentricités et/ou demi-grands axes des planètes. Dans cette étude, nous nous intéressons principalement à l'effet de marée mais on peut appliquer cette formule au cas de la migration de planètes dans un disque protoplanétaire.

3.2.1 Migration dans le disque protoplanétaire

Dans le cas d'une migration des planètes à faibles excentricités, le terme dominant dans l'équation (3.2) est celui en $\dot{\alpha}/\alpha$. Or, pour de faibles excentricités, on a :

$$\left| \frac{k_2}{k_1} \right| \sqrt{1-e_2^2} - \sqrt{1-e_1^2} \approx \left| \frac{k_2}{k_1} \right| - 1 > 0$$

Ainsi, $\Delta\dot{G}|_d$ est du signe de $\dot{\alpha}/\alpha|_d$. Dans le cas d'une migration convergente des planètes, i.e. lorsque α croît (vers 1), ΔG croît. Dans les diagrammes 2.3, 2.5 et 2.7 (gauche), le système se déplace de la gauche vers la droite et passe d'un espace des phases non-résonant (un seul point fixe, circulation externe) à un espace des phases résonants. Le système peut alors se faire piéger en résonance. Au contraire, si la migration est divergente (α décroît), le paramètre décroît. On se déplace de la droite vers la gauche dans les diagrammes 2.3, 2.5 et 2.7, et le système passe d'un espace des phases résonant à un espace des phases non-résonant. Comme cela a été montré par Henrard & Lemaître (1983), le piégeage en résonance n'est possible que dans le cas de la migration convergente.

3.2.2 Effet de marée dans les planètes

Nous nous intéressons ici à l'effet de marée généré par l'étoile dans les planètes. Cet effet affecte à la fois les demi-grands axes et les excentricités des planètes. Le principal effet est un amortissement des excentricités, qui s'écrit (au premier ordre en excentricité) :

$$\frac{\dot{e}_i}{e_i} \Big|_d \approx -\frac{1}{T_i}$$

L'échelle de temps T_i de cet amortissement dépend du demi-grand axe a_i de la planète et de sa structure interne (rayon, nature, etc.). L'expression de T_i dépend du modèle choisi pour l'effet de marée (Q constant,

Δt constant, etc.). Par exemple, si l'on prend un modèle à Δt constant (Singer, 1968; Mignard, 1979), on aura (e.g. Bonfils et al., 2013) :

$$T_i = \frac{2}{21} \frac{\beta_i a_i^8}{\Delta t_i k_{2,i} \mathcal{G} m_0^2 R_i^5} \quad (3.3)$$

où Δt_i , $k_{2,i}$, R_i sont respectivement le temps de déphasage, le second nombre de Love et le rayon de la planète i . Les raisonnements présentés dans cette étude sont très généraux et s'appliquent indifféremment aux différentes variantes du modèle d'effet de marée. Nous n'utiliserons donc une loi précise (Δt constant en l'occurrence) que pour les applications numériques.

L'effet sur les demi-grands axes se déduit simplement de celui sur les excentricités en constatant que le moment cinétique orbital de chacune des planètes n'est pratiquement pas affecté par la dissipation. En effet, dans le cas de l'effet de marée engendré par l'étoile dans les planètes, il peut y avoir des échanges de moment cinétique entre le spin d'une planète et son orbite. Cependant, le moment cinétique de spin de la planète étant négligeable devant le moment cinétique orbital, ce dernier n'est que très faiblement altéré. Notons que si l'on considérait l'effet de marée généré par les planètes dans l'étoile, ce raisonnement ne serait plus valable. En effet, le moment cinétique de spin de l'étoile n'est pas négligeable et les moments cinétiques orbitaux des planètes seraient donc affectés par la dissipation. Revenons au cas de l'effet de marée dans les planètes, l'évolution des demi-grands axes s'écrit (à l'ordre dominant en excentricité) :

$$\left. \frac{\dot{a}_i}{a_i} \right|_d \approx 2e_i \dot{e}_i|_d \approx -2e_i^2 \frac{1}{T_i} \quad (3.4)$$

Ainsi, à faible excentricité, la décroissance des demi-grands axes est beaucoup plus lente que celle des excentricités. Pour évaluer l'évolution de la constante ΔG , on pourrait à nouveau utiliser l'expression générale (3.2). Cependant, il est plus judicieux d'utiliser le fait que le moment cinétique de chacune des planètes n'est pas affecté par la dissipation et donc que le moment cinétique total (non-renormalisé) n'est pas affecté (\underline{G} est constant). L'évolution du moment cinétique renormalisé $G = \underline{G}/\underline{\Gamma}$ est alors donné par :

$$\left. \frac{\dot{G}}{G} \right|_d = - \left. \frac{\dot{\Gamma}}{\Gamma} \right|_d$$

En utilisant l'équation (3.4) et la définition de $\underline{\Gamma}$ (équation (2.10)), on obtient aisément :

$$\Delta \dot{G}|_d = -\dot{G}|_d \approx -G \left(\left| \frac{k_2}{k_1} \right| e_1^2 \frac{\Lambda_1}{T_1} + e_2^2 \frac{\Lambda_2}{T_2} \right) \quad (3.5)$$

On en déduit que, sous l'action de l'effet de marée dans les planètes, le paramètre ΔG décroît (comme dans le cas de la migration divergente des planètes). L'effet de marée dans les planètes a donc tendance à faire sortir les planètes des résonances (déplacement de la droite vers la gauche dans les diagrammes 2.3, 2.5 et 2.7). Cependant, comme l'évolution du paramètre ΔG est proportionnelle au carré des excentricités des planètes (équation (3.5)), lorsque les excentricités tendent vers zéro, l'évolution par effet de marée est de plus en plus lente.

3.3 Évolution de l'amplitude de libration

La connaissance du sens (et de la vitesse) de l'évolution du paramètre ΔG est primordiale pour comprendre l'évolution d'un couple de planètes résonantes en présence de dissipation. Elle permet en effet d'étudier l'évolution de l'espace des phases et en particulier les bifurcations (naissance ou disparition de la zone résonante, etc.). Cependant, pour décider si un système résonant sous l'action de la dissipation va avoir tendance à franchir la séparatrice de la résonance ou bien au contraire à spiraler vers le centre de libration, il faut

étudier l'effet de la dissipation sur les variables résonantes x_i (ou de manière équivalente sur les actions D_i). Il ne faut toutefois pas oublier que la dissipation agit simultanément sur ces coordonnées et sur le paramètre ΔG . Ainsi, la séparatrice de la résonance, et l'ensemble de l'espace des phases évoluent en même temps que la trajectoire même du système au sein de cet espace. L'amplitude de libration doit donc être définie relativement à la taille de la résonance (séparatrice). Dans le modèle à deux degrés de liberté (quatre dimensions), la séparatrice de la résonance est une hypersurface de dimension trois. Le problème est non-intégrable et les trajectoires conservatives ne sont en général pas périodiques (elles sont quasi-périodiques, voire chaotiques). La question de savoir si (et si oui, quand) le système va franchir la séparatrice de la résonance est alors complexe. Pour éviter ces difficultés, on ne considère que le modèle simplifié et intégrable des résonances (paragraphe 2.4). Dans ce cas, le système ne possède qu'un degré de liberté (deux dimensions), la séparatrice est une courbe du plan, les trajectoires conservatives sont périodiques. Dans ce cadre on définira plus aisément l'amplitude de libration dans la résonance. On suppose donc que la dynamique conservative est décrite par le Hamiltonien (2.27) :

$$\mathcal{H}^* = -(I_1 - \delta)^2 + 2R^* \delta^{q/2} \cos q\theta_1 \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta &\approx \Delta G \\ u_i &= \sqrt{I_i} e^{i\theta_i} \\ u_1 &= \cos \phi x_1 e^{-i\sigma_{1,ell}} + \sin \phi x_2 e^{-i\sigma_{2,ell}} \\ u_2 &= -\sin \phi x_1 e^{-i\sigma_{1,ell}} + \cos \phi x_2 e^{-i\sigma_{2,ell}} \approx 0 \\ x_i &= \sqrt{D_i} e^{i\sigma_i} \end{aligned}$$

Rappelons que les variables D_i sont les déficits de moment cinétique de chacune des planètes ($D_i = \Lambda_i - G_i$), et que l'angle ϕ est défini de telle sorte que le centre de libration de la résonance est dans la direction de u_1 ($u_2 = 0$) :

$$\tan \phi = \sqrt{\frac{D_{2,ell}}{D_{1,ell}}}$$

On suppose ici, en première approximation, que ϕ , ainsi que les angles $\sigma_{i,ell}$ sont constants (la direction du centre de libration est considérée comme constante, cf. paragraphe 2.5). A l'ordre dominant en excentricité, l'effet de marée dans les planètes induit une décroissance des variables cartésiennes x_i suivant la même loi que les excentricités :

$$\dot{x}_i|_d \approx -\frac{x_i}{T_i}$$

On en déduit alors que :

$$\dot{u}_1|_d \approx -\frac{u_1}{T_d} \quad (3.7)$$

ou encore

$$\dot{I}_1|_d \approx -2\frac{I_1}{T_d} \quad (3.8)$$

avec

$$T_d = \frac{T_1 T_2}{\sin^2 \phi T_1 + \cos^2 \phi T_2}$$

Enfin, l'évolution du paramètre $\delta \approx \Delta G$ est donnée par l'équation (3.5) que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\dot{\delta}|_d \approx \dot{\Delta G}|_d \approx -2G \left(\left| \frac{k_2}{k_1} \right| \frac{x_1 \bar{x}_1}{T_1} + \frac{x_2 \bar{x}_2}{T_2} \right)$$

Notons

$$\tau = \frac{T_1}{T_2} \quad (3.9)$$

$$\gamma_1 = 2 \left| \frac{k_2}{k_1} \right| G \quad (3.10)$$

$$\gamma_2 = 2G < \gamma_1 \quad (3.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi \tau} \gamma_1 + \frac{\tan^2 \phi \tau}{1 + \tan^2 \phi \tau} \gamma_2 \quad (3.12)$$

Avec ces nouvelles notations, l'évolution de δ s'écrit simplement :

$$\dot{\delta}|_d \approx -\gamma \frac{u_1 \bar{u}_1}{T_d} = -\gamma \frac{I_1}{T_d} \quad (3.13)$$

Remarquons que γ décroît avec τ , puisque $\gamma_1 > \gamma_2$. Lorsque $\tau = T_1/T_2 \rightarrow 0$, la dissipation est beaucoup plus importante dans la planète 1 que dans la planète 2, et on a $\gamma \rightarrow \gamma_1$. Au contraire, quand $\tau \rightarrow +\infty$, la dissipation est plus importante dans la deuxième planète et $\gamma \rightarrow \gamma_2$. G , qui apparaît dans les définitions de γ_1 et γ_2 , peut être approximé par G_0 , la valeur du moment cinétique renormalisé à la résonance exacte et à excentricités nulles. Rappelons que l'on a (équation (2.14)) :

$$G_0 = \frac{1 + \eta \left| \frac{k_1}{k_2} \right|^{1/3}}{1 + \eta \left| \frac{k_2}{k_1} \right|^{2/3}}$$

avec

$$\eta = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1} \right)^{1/3}$$

Ainsi, G_0 varie entre $|k_1/k_2|$ pour $m_1 \gg m_2$ et 1 pour $m_1 \ll m_2$. On en déduit que :

$$\gamma_1 \in \left[2, 2 \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \right] \quad (3.14)$$

$$\gamma_2 \in \left[2 \left| \frac{k_1}{k_2} \right|, 2 \right] \quad (3.15)$$

dans l'approximation $G \approx G_0$. Finalement, on définit l'amplitude (relative) de libration dans l'île de résonance par (voir annexe A) :

$$A = \sin^2 \left(\frac{q\theta_{1,max}}{2} \right) = \frac{\mathcal{H}_{ell}^* - \mathcal{H}^*}{\mathcal{H}_{ell}^* - \mathcal{H}_{hyp}^*} \quad (3.16)$$

avec $\theta_{1,max}$ la valeur maximale de l'angle résonant au cours d'une libration. L'évolution de cette amplitude de libration est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2. *En supposant que la dynamique conservative est régie par le Hamiltonien (3.6) et que la dissipation affecte le système comme décrit par les équations (3.8) et (3.13), l'amplitude de libration (A, équation (3.16)) suit (voir la démonstration en annexe A) :*

$$\dot{A}|_d \approx \frac{A}{T_d} \left(\left(1 + \frac{q}{4} \right) \gamma - 2 \right) \quad (3.17)$$

Il existe donc une valeur critique de γ :

$$\gamma_c = \frac{8}{4 + q} \quad (3.18)$$

Pour $\gamma < \gamma_c$, l'amplitude de libration diminue au cours du temps, le système évolue de plus en plus proche du point fixe (centre de libration). Pour $\gamma > \gamma_c$, au contraire, l'amplitude augmente et le système s'approche de plus en plus de la séparatrice. En fonction des excentricités et de l'amplitude de libration initiales, le système peut éventuellement franchir la séparatrice et sortir de la résonance.

Il est utile de comparer γ_c avec les encadrements obtenus pour γ_1 et γ_2 . De (3.14) et (3.18) on déduit aisément que $\gamma_c < 2 < \gamma_1$ quels que soient les masses des planètes. En revanche, γ_2 peut être supérieur ou inférieur à γ_c suivant les masses des planètes et la résonance considérée (k_1, k_2). Si $\gamma_2 > \gamma_c$, quel que soit le rapport $\tau = T_1/T_2$ des temps caractéristiques de dissipation, on a toujours $\gamma > \gamma_c$ et donc une augmentation de l'amplitude de libration. En revanche, si $\gamma_2 < \gamma_c$, une valeur critique de τ apparaît :

$$\tau_c = \frac{\gamma_1 - \gamma_c}{\gamma_c - \gamma_2} \cot^2 \phi \quad (3.19)$$

Pour $\tau > \tau_c$, on a $\gamma < \gamma_c$ et l'amplitude A décroît. Pour $\tau < \tau_c$, $\gamma > \gamma_c$ et l'amplitude croît. En manipulant les équations (3.14) et (3.18), on obtient

$$\gamma_2 > \gamma_c \Leftrightarrow |k_1|^{2/3} k_2^{1/3} + \eta(|k_1| - 4) > 0$$

En particulier, si $|k_1| \geq 4$ ou bien $m_1 \ll m_2$, l'amplitude croît toujours.

Pour appliquer ces raisonnements à un système planétaire donné, il faut déterminer le paramètre τ_c (défini à l'équation (3.19)). On obtient une formule de τ_c plus facilement exploitable en remplaçant dans l'équation (3.19) les expressions de γ_1 (3.10), γ_2 (3.11), γ_c (3.18) et ϕ (2.24) :

$$\tau_c \approx L \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 \frac{4 + |k_2|(1 + L)}{4L - |k_1|(1 + L)} \quad (3.20)$$

avec

$$L = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \approx \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\alpha} \approx \frac{m_1}{m_2} \left| \frac{k_1}{k_2} \right|^{1/3}$$

et le rapport e_1/e_2 est évalué au centre de libration de la résonance. Il faut donc connaître la position du centre de libration (point fixe) pour calculer τ_c .

3.4 État final d'un système résonant sous l'action de l'effet de marée

Pour achever de démontrer la classification de la proposition 1, il reste à étudier l'évolution du rapport de périodes dans les deux cas de figure que nous avons distingués (amplitude croissante ou décroissante suivant la valeur de τ).

Dans le cas d'une amplitude décroissante ($\tau > \tau_c$), le système s'approche de plus en plus du centre de libration (en rouge dans les figures 2.3 à 2.8). Simultanément, l'espace des phases est affecté par la dissipation et le centre de libration correspond à des excentricités de plus en plus faibles (figures 2.3, 2.5 et 2.7). La fin du processus dépend du degré de la résonance. Pour les résonances de degré un, lorsque les excentricités des planètes deviennent suffisamment faibles, la séparatrice de la résonance disparaît (figures 2.3, 2.4 et 3.1 haut). Il n'y a alors plus qu'un unique point fixe et le système circule (circulation externe) autour de celui-ci. La position du point fixe tend vers des excentricités nulles et simultanément le rapport de périodes des planètes (P_2/P_1) au point fixe augmente. Ainsi, au fur et à mesure que la dissipation agit, les planètes s'écartent de plus en plus de la résonance (P_2/P_1 croît) tandis que leurs excentricités sont amorties (courbe violette dans la

figure 3.1 haut). Pour les résonances de degré plus élevé, la séparatrice ne disparaît pas à excentricité faible (figures 2.5-2.8 et 3.1 bas). L'amplitude de libration étant décroissante, le système reste en résonance et le rapport de périodes reste proche de la valeur résonante (courbe violette dans la figure 3.1 bas). Notons que notre description de l'évolution de l'amplitude de libration n'est plus valable pour les excentricités très faibles (hypothèse $\delta^2 \gg R^* \delta^{q/2}$). Il est donc possible que le système finisse par franchir la séparatrice de la résonance une fois les excentricités très amorties. Cependant, les excentricités étant déjà faibles, l'évolution ultérieure sera lente et le système restera dans le voisinage très proche de la résonance.

Dans le cas d'une amplitude croissante ($\tau < \tau_c$), si l'amplitude initiale et/ou les excentricités initiales sont très faibles, le système n'atteint pas la séparatrice de la résonance avant l'amortissement complet des excentricités. On se retrouve alors dans un cas de figure similaire à celui d'une amplitude décroissante et les conclusions sont les mêmes. Si l'amplitude initiale est suffisante, le système franchit la séparatrice, les planètes ne sont alors plus piégées en résonances et les demi-grands axes (ou les périodes) évoluent séparément sous l'action de la dissipation. On peut estimer l'évolution du rapport des demi-grands axes $\alpha = a_1/a_2$ après que le système a franchi la séparatrice en utilisant l'équation (3.4). On obtient :

$$\left. \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right|_d \approx 2 \left(\frac{e_2^2}{T_2} - \frac{e_1^2}{T_1} \right)$$

Notons

$$\tau_\alpha = \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 \quad (3.21)$$

Si $\tau = T_1/T_2 < \tau_\alpha$, le rapport α diminue et le rapport des périodes P_2/P_1 augmente (les planètes s'éloignent l'une de l'autre, courbes oranges dans la figure 3.1). Au contraire, si $\tau > \tau_\alpha$, le rapport α augmente et P_2/P_1 diminue (les planètes se rapprochent, courbes jaunes dans la figure 3.1). La définition de la valeur critique τ_α (équation (3.21)) fait apparaître le rapport des excentricités des planètes (e_1/e_2). Comme pour τ_c , on peut estimer τ_α en prenant la valeur de ce rapport au centre de libration de la résonance.

3.5 Conclusions

Nous avons étudié dans ce chapitre les différents scénarii possible pour l'évolution de deux planètes en résonance soumises à l'effet de marée. Les raisonnements exposés dans les paragraphes 3.2, 3.3 et 3.4 justifie la classification présentée à la proposition 1. Nous avons montré que suivant laquelle des planètes (interne ou externe) dissipe le plus, l'évolution du système peut être très différente. Plus précisément, nous avons extrait deux valeurs critiques (τ_c et τ_α) du rapport des temps de dissipation dans chacune des deux planètes ($\tau = T_1/T_2$) qui permettent de caractériser simplement l'évolution du système. Rappelons que plus τ est grand, plus la dissipation dans la planète externe (2) est forte par rapport à la dissipation dans la planète interne (1). Les deux valeurs critiques τ_c et τ_α sont données par les équations (3.20) et (3.21) et dépendent du rapport des excentricités e_1/e_2 au centre de libration de la résonance.

Notons que le cas de figure le plus courant est d'avoir une dissipation bien plus importante dans la planète interne. En effet, la dissipation par effet de marée a une dépendance importante par rapport à la distance à l'étoile (voir par exemple l'équation (3.3)). Ainsi on peut s'attendre à avoir le plus souvent $\tau \ll \tau_c, \tau_\alpha$, c'est-à-dire une augmentation de l'amplitude de libration et une sortie de la résonance en circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$) si l'amplitude initiale est suffisante. Cependant, la distance à l'étoile n'est pas le seul facteur entrant en compte. Ainsi la nature et le rayon des deux planètes jouent aussi un rôle important et peuvent compenser l'influence de la distance. Plus précisément, il est généralement admis qu'une planète rocheuse dissipe plus fortement qu'une planète gazeuse. Ainsi, si la planète externe est rocheuse et la planète interne gazeuse, la dissipation pourra être plus importante dans la planète externe malgré sa plus grande distance à l'étoile. On pourra alors obtenir tous les autres scénarii envisagés dans la liste ci-dessus.

Remarquons que l'on ne connaît en général pas toutes les caractéristiques des planètes. En particulier la densité et la nature (rocheuse, gazeuse, etc.) des planètes ne sont que rarement connues. En revanche, les périodes orbitales sont souvent les éléments les plus précisément déterminés. Tout l'intérêt de la classification que l'on a obtenue ici (proposition 1) est de pouvoir inverser le raisonnement. En effet, pour un système de deux planètes proches d'une résonance, en comparant le rapport des périodes P_2/P_1 à la valeur nominale $|k_2/k_1|$, on distingue aisément le cas de planètes en résonance ($P_2/P_1 \approx |k_2/k_1|$), en circulation interne ($P_2/P_1 < |k_2/k_1|$) ou externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$). Cette information permet d'éliminer une partie des scénarii que l'on a envisagé et ainsi de contraindre la valeur de $\tau = T_1/T_2$ (en fonction de τ_c et τ_a). On peut ainsi obtenir des contraintes sur la nature des planètes. Dans le chapitre suivant, nous illustrons les différents cas de figures que l'on a énuméré dans ce récapitulatif et obtenons des contraintes importantes sur la nature des planètes de certains systèmes connus.

Chapitre 4

Applications

Ce chapitre présente différentes applications de notre modèle d'évolution des planètes en résonance en présence de dissipation de marée. Pour illustrer les prédictions du modèle, en particulier en ce qui concerne la nature des planètes, nous avons sélectionné quelques systèmes détectés proches de résonances de moyen mouvement de différents ordres. Afin de tester la validité du modèle et des prédictions, nous avons réalisé des simulations numériques de ces systèmes en présence de dissipation de marée. Les résultats obtenus pour des résonances d'ordres un, deux et trois sont présentés dans le paragraphe 4.1. Le paragraphe 4.2 présente une étude détaillée du problème mentionné en introduction (paragraphe 1.1) du manque de planètes en résonance et de l'excès de planètes en circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$) dans les données de la mission *Kepler*.

4.1 Contraintes sur la structure interne des planètes

D'après les conclusions du paragraphe 3.5, les systèmes les plus intéressants pour obtenir des contraintes sur la nature des planètes sont ceux observés en circulation interne ($P_2/P_1 < |k_2/k_1|$). Nous avons donc cherché de tels systèmes dans la base de donnée exoplanet.eu (Schneider et al., 2011). Une étude de la dynamique orbitale d'un système nécessite d'avoir une estimation des masses des planètes et de l'étoile. Cet impératif restreint grandement le nombre de candidats car pour de nombreuses planètes seul le rayon est connu (méthode des transits) et la masse n'est pas déterminée. Enfin, les contraintes que l'on peut obtenir sont spécifiques à un système donné car elles dépendent de la résonance considérée, des masses des planètes, des excentricités au centre de libration, etc. Nous avons appliqué notre modèle à trois systèmes proches des résonances 3:1 (degré 2, paragraphe 4.1.1), 5:2 (degré 3, paragraphe 4.1.2) et 2:1 (degré 1, paragraphe 4.1.3).

4.1.1 Application à GJ 163b, c (résonance 3:1, degré 2)

4.1.1.1 Le système détecté

L'étoile GJ 163 est une naine de type M autour de laquelle trois planètes ont été détectées (Bonfils et al., 2013) par la méthode des vitesses radiales. Le tableau 4.1 récapitule les principales caractéristiques du système. Les deux planètes intérieures sont proches de la résonance 3:1 et ont un rapport de périodes de 2.97. Ces deux planètes sont donc en circulation interne ($P_2/P_1 < 3$). La planète la plus proche de l'étoile a une masse minimale ($m \sin i$) estimée à $10.7 M_{\oplus}$, et la deuxième à une masse minimale de $7.3 M_{\oplus}$. Les rayons des deux planètes ne sont pas connus car le système n'a été détecté qu'en vitesse radiale. On ne connaît pas la densité ni la nature (rocheuse ou gazeuse) de ces corps. Cependant, d'après les masses des planètes, il semble raisonnable de supposer que la planète interne est gazeuse tandis que la deuxième pourrait être gazeuse ou rocheuse (voir Bonfils et al., 2013).

TABLE 4.1 – Paramètres orbitaux du système GJ 163 (Bonfils et al., 2013). L'étoile a une masse de $0.4 \pm 0.04 M_{\odot}$. Les planètes b et c (en gras) ont un rapport de période de 2.97, proche de la résonance 3:1.

Paramètre	[unité]	b	c	d
$m \sin i$	$[M_{\oplus}]$	10.661	7.263	22.072
P	[jours]	8.633	25.645	600.895
a	[UA]	0.06069	0.12540	1.02689
e		0.0106	0.0094	0.3990

4.1.1.2 Scenario de formation du système

Le système GJ 163 est très proche de la résonance 3:1. On peut bien sûr imaginer que cette proximité est le fruit du hasard mais il semble plus probable que le système ait été piégé en résonance dans le passé et qu'il se soit ensuite progressivement décalé. Le piégeage en résonance du système peut notamment survenir lors de la migration des planètes dans le disque protoplanétaire avant que ce dernier ne disparaisse (voir paragraphe 1.3.1). Nous étudions ici la possibilité que le système soit sorti de la résonance à cause de l'effet de marée dans les planètes. D'après la classification de la proposition 1, la seule possibilité pour que le système finisse en circulation interne ($P_2/P_1 < 3$) est que le rapport des échelles de temps de dissipation dans les deux planètes $\tau = T_1/T_2$ soit compris entre les deux valeurs critiques $\tau_{\alpha} < \tau < \tau_c$. Les valeurs de τ_c et τ_{α} sont données par les équations (3.20) et (3.21). Pour les applications numériques nous utilisons le modèle d'effet de marée avec temps de déphasage constant (Singer, 1968; Mignard, 1979). On peut alors retranscrire les critères obtenus sur τ en des critères sur le rapport des temps de déphasage $\Delta t_2/\Delta t_1$ en utilisant les expressions des T_i (équation (3.3)) :

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1}{\alpha^8} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{k_{2,1}}{k_{2,2}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^5 \tau \approx \frac{1}{\alpha^8} \frac{m_2}{m_1} \kappa \tau \quad (4.1)$$

avec

$$\kappa = \frac{k_{2,1}}{k_{2,2}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^5 \quad (4.2)$$

et

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2}$$

Le rapport des excentricités e_1/e_2 au centre de libration est nécessaire pour calculer τ_c et τ_{α} . En utilisant le modèle analytique le plus simple (degré deux, voir paragraphe 2.5) on obtient $e_1/e_2 \approx 1.1$. Le critère $\tau > \tau_{\alpha}$ implique que $\Delta t_2/\kappa \Delta t_1 \gtrsim 300$ et le critère $\tau < \tau_c$ implique $\Delta t_2/\kappa \Delta t_1 \lesssim 1450$. Le scenario de formation des planètes GJ 163b, c que l'on a décrit est donc possible si :

$$300 \lesssim \frac{\Delta t_2}{\kappa \Delta t_1} \lesssim 1450 \quad (4.3)$$

Pour obtenir des contraintes sur le rapport $\Delta t_2/\Delta t_1$ il nous faut estimer le coefficient κ (équation (4.2)). On peut supposer que les nombres de Love des deux planètes sont du même ordre de grandeur. En effet, dans le Système Solaire, le nombre de Love de la Terre est de 0.29 (Kozai, 1968), celui de Jupiter 0.379, et Saturne 0.341 (Gavrilov & Zharkov, 1977). En revanche, le rapport des rayons des deux planètes, élevé à la puissance cinq, a un effet plus important. Pour obtenir une estimation du rapport des rayons (qui sont inconnus), on utilise une loi empirique obtenue par Weiss et al. (2013) qui relie les rayons et les masses des planètes :

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{0.53} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{0.06} \quad (4.4)$$

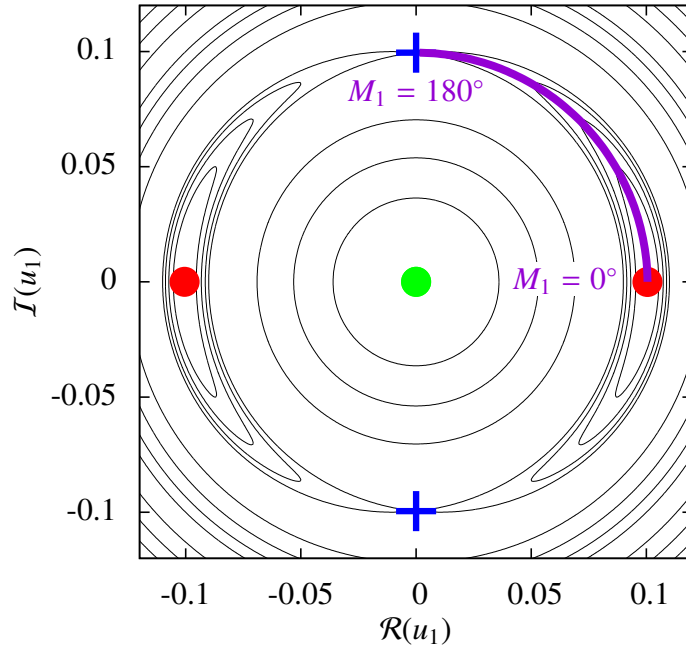


FIGURE 4.1 – Schéma illustrant les conditions initiales utilisées dans les simulations numériques de GJ 163 (résonance 3:1). M_1 varie entre 0° (centre de libration) et 180° (séparatrice de la résonance) suivant la courbe violette.

En utilisant cette estimation pour GJ 163b, c, on obtient :

$$\kappa \approx \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^5 \approx 2.2 \quad (4.5)$$

Finalement, on peut estimer le rapport des temps de déphasage des deux planètes à partir des valeurs de l'équation (4.3) :

$$650 \lesssim \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \lesssim 3200 \quad (4.6)$$

Ceci implique que la planète externe dissipe beaucoup plus fortement que la planète interne. On peut donc en conclure que le scénario de formation du système envisagé ici n'est possible que si la planète b (interne) est gazeuse (dissipation faible) et la planète c (externe) est rocheuse (dissipation forte). Ces contraintes sont compatibles avec les masses minimales des planètes. Notons que la masse minimale ($m \sin i$) de la planète c est de l'ordre de $7 M_\oplus$. Le fait que cette planète soit rocheuse pourrait impliquer que sa masse ne soit pas beaucoup plus élevée que cette valeur minimale et que son inclinaison soit donc proche de 90° . Cependant, la découverte récente de la planète Kepler-10c présentant une masse de $17 M_\oplus$ pour un rayon de $2.35 R_\oplus$ et qui est donc solide (Dumusque et al., 2014) remet en cause une telle conclusion et laisse une marge importante pour l'inclinaison et la masse réelle de GJ 163c.

4.1.1.3 Simulations numériques

Pour vérifier la validité de nos raisonnements et des contraintes obtenues sur la dissipation dans les deux planètes, nous avons réalisé des simulations numériques de l'évolution des deux planètes en présence de dissipation par effet de marée. Nous intégrons les équations du mouvement du problème complet (simulations N-corps avec dissipation) en utilisant un programme développé par Alexandre Correia (voir Correia et al., 2011). La dissipation par effet de marée est modélisée en utilisant un modèle linéaire à Δt constant (Singer, 1968; Mignard, 1979). L'intégrateur ODEX (e.g., Hairer et al., 2010) est utilisé pour intégrer les équations du

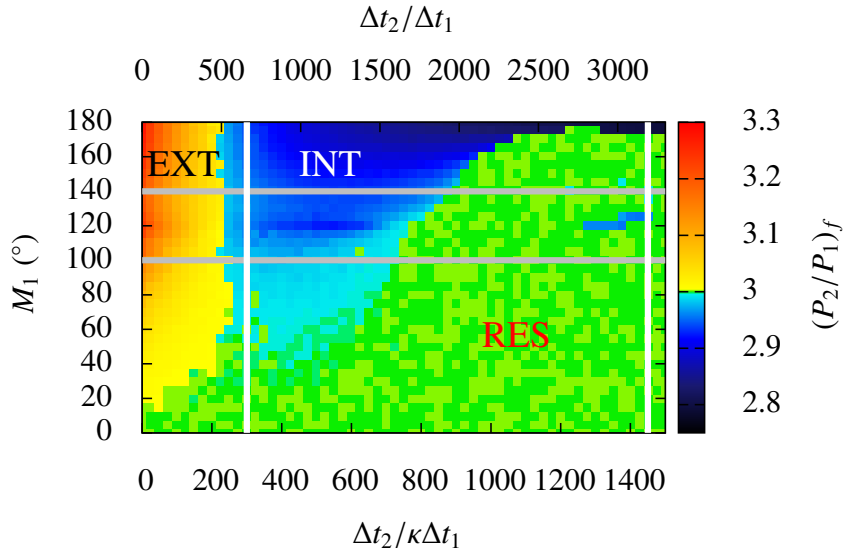


FIGURE 4.2 – Rapport de période des planètes GJ 163b, c (résonance 3:1) à la fin des simulations en fonction du rapport des temps de déphasage dans les deux planètes ($\Delta t_2/\Delta t_1$) et de l’amplitude initiale de libration dans la résonance (M_1). Le coefficient κ qui apparaît sur l’axe inférieur de la figure ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$) est défini par $\kappa = k_{2,1}/k_{2,2}(R_1/R_2)^5$ et n’est pas connu pour le système GJ 163. Il peut être estimé en utilisant la relation empirique entre rayons et masses des planètes obtenue par Weiss et al. (2013) : $\kappa \approx 2.2$ (voir équation (4.5)). L’axe supérieur de la figure ($\Delta t_2/\Delta t_1$) est ajusté en utilisant cette valeur de κ . L’amplitude de libration dans la résonance est déterminée par la valeur de M_1 (voir figure 4.1). Lorsque l’on a $M_1 = 0^\circ$, le système démarre au centre de libration de la résonance, lorsque $M_1 = 180^\circ$ il démarre à la séparatrice. Le temps de déphasage dans la planète interne est fixé à $\Delta t_1 = 10^7$ s dans toutes les simulations. Cette valeur n’est pas réaliste mais elle permet d’accélérer les simulations. Ainsi, le système est intégré pendant 0.1 Ma ce qui correspond approximativement à 10 Ga pour une valeur plus réaliste de Δt_1 (100 s). De plus, on néglige ici l’effet de la troisième planète présente dans le système. Nous avons testé la validité de ces deux approximations sur un ensemble restreint de simulations (voir figure 4.3). Les deux lignes horizontales grises correspondent aux conditions initiales utilisées pour cette vérification (figure 4.3). Les deux lignes verticales blanches donnent l’intervalle du rapport des temps de déphasage $\Delta t_2/\Delta t_1$ obtenu avec le modèle analytique pour que le système finisse en circulation interne (équations (4.3) et (4.6)).

mouvement. Nous avons choisi les éléments elliptiques initiaux des planètes de façon à ce que le système soit initialement dans la résonance. Nous avons effectué un grand nombre de simulations en faisant varier l’amplitude initiale de libration dans la résonance et le rapport des temps de déphasage $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$. L’amplitude initiale est produite en faisant varier l’anomalie moyenne de la planète intérieure tandis que tous les autres éléments elliptiques correspondent au centre de libration. Pour $M_1 = 0^\circ$, le système est initialement au centre de libration tandis que pour $M_1 = 180^\circ$, il commence à la séparatrice. La figure 4.1 donne une vision schématique de ces conditions initiales. Les excentricités initiales des planètes sont fixées à environ 0.16 et 0.11 (pour être proches du centre de libration), les périhélie des planètes sont anti-alignés et $M_2 = 0^\circ$. Nous avons fixé $a_1 = 0.062$ UA de sorte que lorsque les excentricités sont complètement amorties ($e_1 = 0$), le système finit approximativement à sa position actuelle ($a_1 \approx 0.0607$ UA).

Le temps de déphasage Δt dépend de la composition de la planète considérée et peut être relié au facteur de qualité Q par la relation $Q \approx 1/(n\Delta t)$ (avec n le moyen mouvement de la planète, e.g. Bonfils et al., 2013). Les planètes gazeuses ont des facteurs de qualité de dissipation de l’ordre de $Q \sim 10^3 - 10^4$, tandis que pour les planètes rocheuses on a $Q \sim 10 - 100$. Ces valeurs du facteur de qualité correspondent à un temps de déphasage de l’ordre de $\Delta t \sim 10 - 100$ s pour les planètes gazeuses et $\Delta t \sim 10^3 - 10^4$ s pour les rocheuses. Puisque la planète interne est probablement gazeuse, son temps de déphasage devrait être de

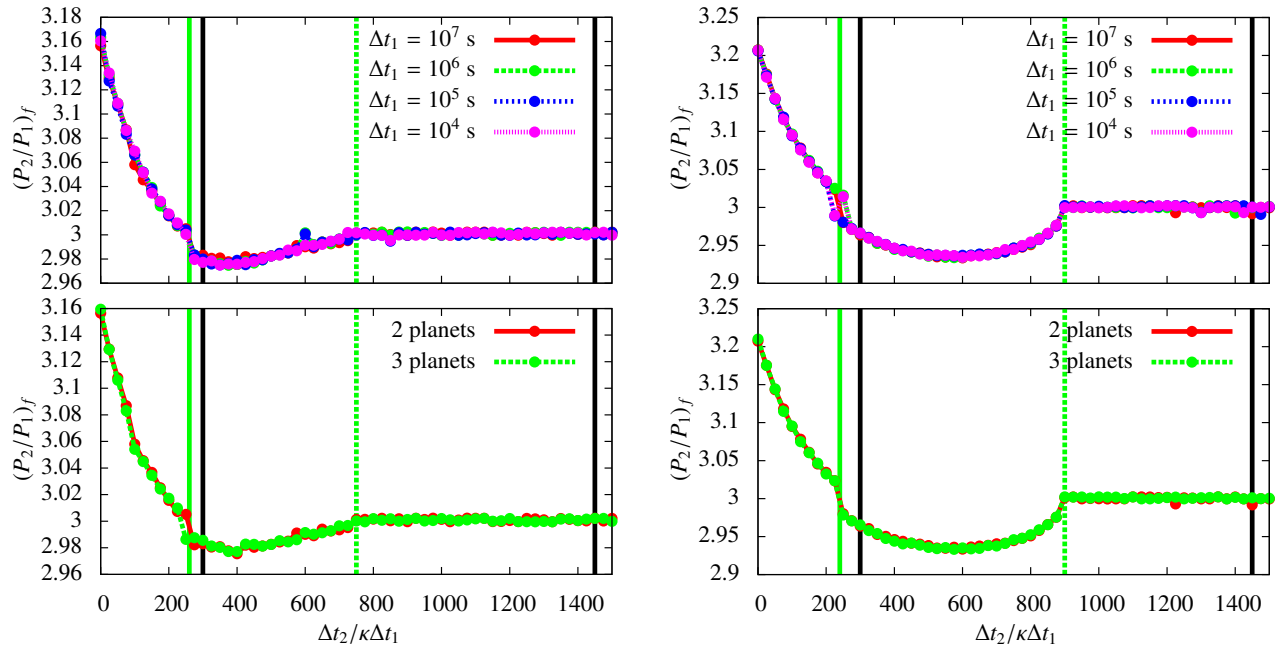


FIGURE 4.3 – Vérification de l’impact des deux approximations utilisées pour la figure 4.2 : accélération des simulations numériques en augmentant les temps de déphasage dans les planètes et absence de la troisième planète détectée dans le système (Bonfils et al., 2013). On trace le rapport final de période des planètes GJ 163b, c (résonance 3:1) en fonction du rapport des temps de déphasages ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$). L’amplitude initiale de libration dans la résonance est fixée par $M_1 = 100^\circ$ (gauche) et 140° (droite). Ces conditions initiales correspondent aux deux lignes grises de la figure 4.2. On compare les résultats obtenus avec $\Delta t_1 = 10^7, 10^6, 10^5$ et 10^4 s (haut) et des temps d’intégration de respectivement 0.1, 1, 1 et 100 Ma, ce qui est approximativement équivalent à 10 Ga pour une valeur plus réaliste de Δt_1 (100 s). On compare aussi les résultats des intégrations à deux et trois planètes (bas) avec $\Delta t_1 = 10^7$ s. Lorsque l’on modifie la valeur de Δt_1 , on observe seulement de petites variations mais pas d’effet systématique dans un sens. De même la troisième planète ne semble pas perturber fortement les résultats. Le trait plein vert marque la limite entre les simulations pour lesquelles le système finit en circulation externe et celles pour lesquelles on obtient une circulation interne. Il est placé à $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 = 260$ pour les simulations avec $M_1 = 100^\circ$ (graphiques de gauche) et à 240 pour $M_1 = 140^\circ$ (graphiques de droite). Le trait pointillé vert marque la limite entre circulation interne et résonance. Il est placé à 750 (gauche) et 900 (droite). Les traits verticaux noirs marque les mêmes limites obtenues avec le modèle analytique (équation (4.3)).

l’ordre de $\Delta t_1 \sim 10 - 100$ s. Cependant, pour accélérer les simulations, nous avons utilisé un temps de déphasage plus élevé. Comme expliqué par Bonfils et al. (2013), l’échelle de temps de l’évolution du système est approximativement inversement proportionnelle à Δt .

La figure 4.2 donne le rapport de périodes final du système en fonction du rapport des temps de déphasage et de l’amplitude initiale de libration. Pour cette figure nous avons pris $k_2 = 0.5$ pour les deux planètes, $\Delta t_1 = 10^7$ s (5 ordres de grandeur au dessus de la valeur attendue) et intégré le système sur 0.1 Ma, ce qui correspond en principe à 10 Ga avec $\Delta t_1 = 100$ s. À titre de comparaison, l’âge du système est estimé à 1 – 10 Ga (Bonfils et al., 2013). Pour vérifier que cette approximation n’altère pas significativement nos résultats nous avons réalisé des simulations pour un nombre réduit de conditions initiales avec $\Delta t_1 = 10^7, 10^6, 10^5$ et 10^4 s (respectivement 5, 4, 3 et 2 ordres de grandeur au dessus de la valeur attendue) et sur respectivement 0.1, 1, 10 et 100 Ma (équivalent à 10 Ga avec $\Delta t_1 = 100$ s). La figure 4.3 montre les résultats obtenus avec ces différentes échelles de temps ainsi que les résultats obtenus en ajoutant la troisième planète détectée dans le système (voir Bonfils et al., 2013, et tableau 4.1). Aucune de ces deux approximations ne

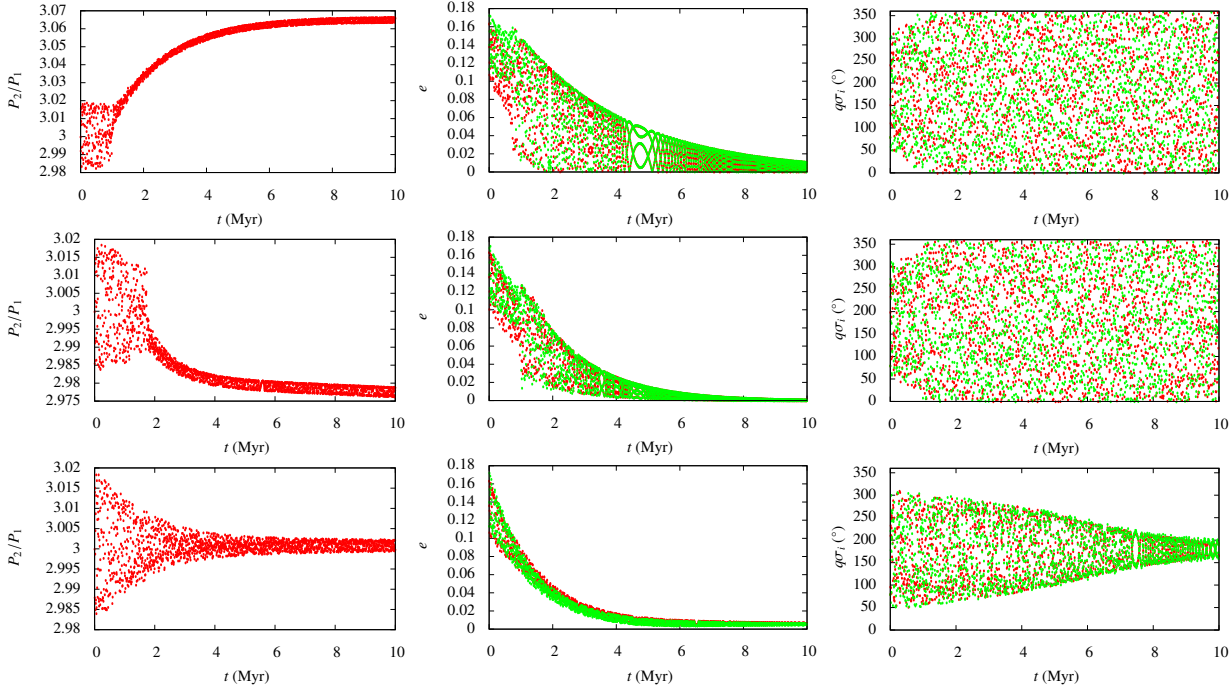


FIGURE 4.4 – Évolution du rapport de période (*gauche*), des excentricités (*milieu*), et des angles résonants (*droite*) de GJ 163b et c. L’amplitude initiale de libration est fixée à $M_1 = 100^\circ$ et le rapport des temps de déphasage est fixé à $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 = 100$ (*haut*, sortie de la résonance en circulation externe), 400 (*milieu*, sortie de la résonance en circulation interne), et 1000 (*bas*, système restant en résonance). Dans les colonnes du *milieu* et de *droite*, les points rouges correspondent à la planète b (interne, 1) et les points vers à la planète c (externe, 2). Le temps est donné en Ma, mais on a fixé $\Delta t_1 = 10^5$ s dans toutes ces simulations. Pour une dissipation plus réaliste ($\Delta t_1 = 100$ s), le temps devrait être lu en Ga.

semble impacter significativement les résultats des simulations. Dans la figure 4.2, on observe bien les trois états finaux prévus par le modèle analytique (circulation externe/interne et résonance). La figure 4.4 montre l’évolution temporelle du rapport de périodes, des excentricités et des angles résonants pour trois simulations numériques correspondant à ces trois états finaux possibles. La limite entre circulation externe (en rouge/jaune dans la figure 4.2) et circulation interne (en bleu dans la figure 4.2) correspond à un rapport de temps de déphasage de l’ordre de $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \approx 250$. Cette valeur est relativement proche de la valeur théorique obtenue à l’équation (4.3) (300). La limite entre circulation interne et résonance (en vert dans la figure 4.2) dépend fortement de l’amplitude initiale de libration. Lorsque l’amplitude initiale de libration est faible ($M_1 \lesssim 20^\circ$) le système reste toujours en résonance. Lorsque l’amplitude initiale est importante (M_1 proche de 180°), la limite entre les zones de circulation interne et de résonance tend vers $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \approx 1100$. Cette valeur est légèrement inférieure mais du même ordre de grandeur que la prévision théorique (1450, équation (4.3)). Cette limite théorique correspond à la limite entre une amplitude de libration croissante et une amplitude décroissante. Pour $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 = 1450$, l’amplitude reste constante. Pour $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 > 1450$, le système se rapproche de plus en plus du centre de libration et ne sort donc jamais de la résonance. Enfin, plus $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$ est petit devant 1450, plus l’amplitude de libration croît rapidement. Si le système a initialement une amplitude de libration faible, il faut que l’amplitude croisse rapidement pour pouvoir atteindre la séparatrice de la résonance avant que les excentricités des planètes ne soient complètement amorties. Ainsi la limite $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 = 1450$ est une borne supérieure correspondant au cas où le système commencerait au voisinage de la séparatrice et où une très faible augmentation de l’amplitude de libration suffirait pour la franchir. Ce phénomène explique bien la dépendance observée (figure 4.2) de la limite entre les systèmes finissant en circulation interne et ceux finissant en circulation externe par rapport à l’amplitude initiale de libration. Notons que si l’on avait choisi

des excentricités initiales des planètes plus petites, l'amplitude aurait eu moins de temps pour croître et il aurait donc fallu des amplitudes initiales plus importantes pour pouvoir sortir de la résonance. Au contraire, avec des excentricités initiales plus importantes, une plus faible amplitude initiale serait suffisante pour sortir de la résonance avant que les excentricités ne soient complètement amorties. La valeur de l'amplitude initiale n'a donc de sens que lorsqu'elle est accompagnée des valeurs initiales des excentricités.

On peut remarquer que pour $M_1 \approx 120^\circ$, quelques systèmes que l'on pouvait s'attendre à observer en résonance se sont retrouvés en circulation interne à la fin de la simulation (points bleus dans la zone verte de la figure 4.2). Ceci s'explique par la présence de la séparatrice de la résonance séculaire à l'intérieur de la résonance de moyen mouvement. Des résonances de ce type ont déjà été étudiées en détail dans le cas des résonances de moyen mouvement 2:1 et 3:2 par Callegari et al. (2004, 2006). Comme décrit dans ces études, la fréquence séculaire (qui domine l'évolution de $\Delta\varpi$) chute à zéro au voisinage de cette séparatrice et l'angle $\Delta\varpi$ libre dans des directions opposées de part et d'autre de la séparatrice. Notre modèle analytique simplifié des résonances ne peut pas prédire ce type de comportement qui est révélé par l'intégration numérique du problème complet. Cependant, ce modèle permet de prévoir et de comprendre les principales caractéristiques de la dynamique résonante en présence de dissipation. De manière plus spécifique au système GJ 163, les simulations numériques confirment la principale conclusion obtenue grâce à notre modèle simplifié : si les planètes GJ 163b et c étaient initialement en résonance (3:1) et ont atteint leur rapport de périodes actuel (2.97) à cause de la dissipation par effet de marée, la planète externe a subi une dissipation beaucoup plus forte que la planète interne. Ceci impliquerait que la planète externe soit rocheuse et la planète interne gazeuse.

4.1.2 Application à GJ 581b, c (résonance 5:2, degré 3)

La méthode développée pour l'étude du système GJ 163 est très générale et s'applique à toute résonance et notamment les résonances d'ordres plus élevés. Pour illustrer la généralité de ces raisonnements, nous présentons ici une étude similaire dans le cas du système GJ 581 et pour une résonance de degré trois (5:2).

L'étoile GJ 581 est aussi une naine de type M. Le nombre de planètes détectées autour de cette étoile a été sujet à controverse. La plupart des études s'accordent sur la présence de quatre planètes, et les deux planètes (b et c) qui nous intéressent ici sont incontestées. Nous avons reproduit les paramètres orbitaux de ces quatre planètes tels qu'ils sont donnés par Forveille et al. (2011) dans le tableau 4.2. Les planètes b et c (voir Bonfils et al., 2005; Udry et al., 2007; Mayor et al., 2009; Forveille et al., 2011) ont un rapport de périodes de 2.4, et sont donc proches de la résonance 5:2. Elles sont, comme pour GJ 163 en circulation interne ($P_2/P_1 < 5/2$). La planète interne (b) a une masse minimale ($m \sin i$) d'environ $15.9M_\oplus$ et est probablement gazeuse, la planète externe a une masse minimale d'environ $5.3M_\oplus$ et pourrait être rocheuse ou gazeuse. Rappelons que les inclinaisons ne sont pas connues et que les masses réelles pourraient être plus importantes.

TABLE 4.2 – Paramètres orbitaux du système GJ 581 (Forveille et al., 2011). L'étoile a une masse de $0.31 \pm 0.02M_\odot$. Les planètes b et c (en gras) ont un rapport de période de 2.4, proche de la résonance 5:2.

Paramètre	[unité]	e	b	c	d
$m \sin i$	$[M_\oplus]$	1.95	15.86	5.34	6.06
P	[jours]	3.14945 ± 0.00017	5.36865 ± 0.00009	12.9182 ± 0.0022	66.64 ± 0.08
a	[UA]	0.028	0.041	0.073	0.22
e		0.32 ± 0.09	0.031 ± 0.014	0.07 ± 0.06	0.25 ± 0.09

De la même manière que pour le système GJ 163, en appliquant les critères du paragraphe 3.5, on obtient un encadrement du rapport des temps de déphasage $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \in [3, 52]$, en utilisant $e_1/e_2 \approx 0.25$ (valeur obtenue en calculant numériquement la position du centre de libration, voir paragraphe 2.5). Il peut sembler surprenant que l'intervalle obtenu pour GJ 581 soit significativement (un ordre de grandeur) en dessous de celui obtenu pour GJ 163 ($[300, 1450]$, voir équation (4.3)). Ceci est probablement dû au fait que le rapport des excentricités des planètes est sensiblement inférieur dans le cas de GJ 581 ($e_1/e_2 \approx 0.25$ contre 1.1 pour

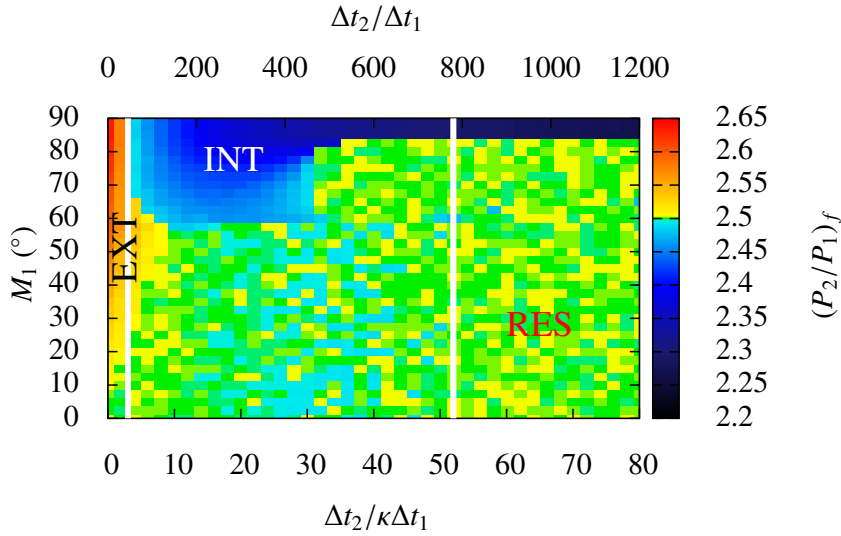


FIGURE 4.5 – Identique à la figure 4.2 mais pour les planètes GJ 581b, et c (résonance 5:2). Le paramètre κ n'est pas connu non-plus pour ces planètes mais en utilisant la loi empirique de Weiss et al. (2013), on obtient l'estimation $\kappa \approx 15$ (voir équation (4.7)). Notons que M_1 varie seulement entre 0° (centre de libration) et 90° (séparatrice), parce que la combinaison résonante est $5M_2 - 2M_1$ (facteur 2 devant M_1).

GJ 163). Ce rapport d'excentricité apparaît élevé au carré dans l'estimation du rapport des temps de déphasage, ce qui explique l'ordre de grandeur de différence entre les deux systèmes. Pour la plupart des résonances, à faibles excentricités, e_1/e_2 décroît avec le rapport des masses m_1/m_2 (pour GJ 163, on a $m_1/m_2 \approx 1.5$, et pour GJ 581 $m_1/m_2 \approx 3$). À nouveau, on peut estimer la valeur du coefficient κ afin d'obtenir des contraintes directement sur le rapport $\Delta t_2/\Delta t_1$. En utilisant la loi empirique de Weiss et al. (2013) (voir équation (4.2)) on obtient :

$$\kappa \approx \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^5 \approx 15 \quad (4.7)$$

La contrainte sur les temps de déphasage devient $\Delta t_2/\Delta t_1 \in [45, 800]$. Cet ordre de grandeur est raisonnable si la planète interne est gazeuse et la planète externe rocheuse. Le coefficient κ calculé ici est significativement supérieur à celui calculé pour GJ 163 (2.2) car le rapport m_1/m_2 est plus important dans le cas de GJ 581. Ceci compense en partie l'écart observé entre les deux systèmes pour l'encadrement de $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$.

La figure 4.5 donne les résultats de simulations numériques similaires à celles réalisées pour GJ 163 (figure 4.2). Le rapport de périodes final est donné en fonction du rapport des temps de déphasage dans les deux planètes ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$) et de l'amplitude initiale de dissipation dans la résonance (M_1). Les autres éléments elliptiques des planètes sont fixés de sorte que pour $M_1 = 0^\circ$ le système soit au centre de libration de la résonance. Pour $M_1 = 90^\circ$, le système est sur la séparatrice. Les excentricités initiales des planètes sont 0.05 (planète interne) et 0.2 (planète externe). Les périhélie sont anti-alignés et $M_2 = -36^\circ$. Le demi-grand axe de la planète interne est fixé à $a_1 = 0.042$ de sorte que quand les excentricités sont totalement amorties les planètes soient approximativement à leur position actuelle ($a_1 \approx 0.041$). On intègre le système pendant 5×10^4 ans avec $\Delta t_1 = 10^7$ s. À nouveau, les nombres de Love des deux planètes sont fixés à $k_2 = 0.5$. L'âge du système est estimé à 8 Ga, nos simulations correspondent donc à $\Delta t_1 \sim 10 - 100$ s (planète interne gazeuse) sur cette durée. Les résultats des simulations sont en accord avec les prédictions du modèle analytique (voir figure 4.5). On constate dans les deux cas que le rapport de temps de déphasage doit être de l'ordre de $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 300$ ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \sim 20$) pour reproduire la configuration actuelle du système par dissipation de marée dans des planètes initialement en résonance. Ce résultat suggère à nouveau que la planète interne est gazeuse et la planète externe rocheuse. Notons que les figures 4.2 et 4.5 présentent la même structure conformément aux prédictions du modèle.

4.1.3 Application à Kepler 18c, d (résonance 2:1, degré 1)

D'après nos conclusions du paragraphe 3.5 (voir notamment la figure 3.1), le cas des résonances de degré un est différent des autres résonances. En effet, lorsque l'amplitude de libration décroît, les planètes en résonance de degré un ont tendance à sortir de la résonance vers la zone de circulation externe, alors que celles en résonances de degré plus élevé restent en résonance. Ainsi, si on laisse agir la dissipation de marée suffisamment longtemps, aucun système en résonance de degré un ne devrait subsister. Cependant, pour les planètes suffisamment éloignées de leur étoile, la dissipation de marée est lente et les planètes peuvent rester en résonance sur des échelles de temps dépassant l'âge de l'univers. Pour illustrer cette singularité des résonances de degré un, nous présentons ici une étude du système Kepler-18 (résonance 2:1). Kepler-18 est une étoile similaire au Soleil autour de laquelle trois planètes ont été détectées (Cochran et al., 2011) par la mission *Kepler* (méthode des transits) et confirmées par la méthode des vitesses radiales. Les paramètres orbitaux obtenus par Cochran et al. (2011) sont reproduits dans le tableau 4.3. Les deux planètes externes (c et d) sont proches de la résonance 2:1 mais en circulation interne ($P_2/P_1 \approx 1.94$). Les masses de ces deux planètes ont été déterminées en combinant la méthode des vitesses radiales et celle de la variation des temps de transit (TTV). Elles sont respectivement de $17.3 M_\oplus$ (c) et $16.4 M_\oplus$ (d) tandis que les rayons sont de $5.5 R_\oplus$ et $7 R_\oplus$. Ces planètes sont donc légèrement moins massives que Neptune mais leur densités (respectivement 0.59 et 0.27 g cm^3) sont significativement plus faibles, ce qui laisse supposer qu'elles possèdent une importante composante gazeuse (Cochran et al., 2011). Les temps de déphasage dans ces deux planètes sont donc probablement de l'ordre de $\Delta t \sim 10 - 100 \text{ s}$. La connaissance du rayon des deux planètes permet d'obtenir des critères directement sur le rapport $\Delta t_2/\Delta t_1$, sans le facteur κ qui apparaissait dans les cas précédents. En supposant des nombres de Love équivalents pour les deux planètes, et en utilisant $e_1/e_2 \approx 3.3$ (valeur obtenue avec le modèle analytique le plus simple, voir paragraphe 2.5), on obtient l'encadrement $\Delta t_2/\Delta t_1 \in [125, 550]$ pour reproduire la configuration actuelle du système à partir de planètes résonantes subissant de la dissipation de marée.

TABLE 4.3 – Paramètres orbitaux du système Kepler 18 (Cochran et al., 2011). L'étoile a une masse de $0.972 \pm 0.042 M_\odot$. Les planètes c et d (en gras) ont un rapport de période de 1.94, proche de la résonance 2:1. Les excentricités des planètes ont été fixées à zéro pour cet ajustement (Cochran et al., 2011). Pour les planètes c et d, l'ajustement des TTV permet de déduire que les excentricités sont très faibles ($e < 10^{-3}$, voir Cochran et al., 2011).

Paramètre	[unité]	b	c	d
m	$[M_\oplus]$	6.9 ± 3.4	17.3 ± 1.9	16.4 ± 1.4
R	$[R_\oplus]$	2.00 ± 0.10	5.49 ± 0.26	6.98 ± 0.33
P	[jours]	3.504725 ± 0.000028	7.64159 ± 0.00003	14.85888 ± 0.00004
a	[UA]	0.0447 ± 0.0006	0.0752 ± 0.0011	0.1172 ± 0.0017

La figure 4.6 donne les résultats de simulations numériques réalisées dans le cas de Kepler 18. À nouveau, on donne le rapport de périodes final en fonction du rapport des temps de déphasage dans les deux planètes ($\Delta t_2/\Delta t_1$) et de l'amplitude initiale de dissipation dans la résonance (M_1). Les conditions initiales de la simulations sont telles que pour $M_1 = 0^\circ$, le système est au centre de libration de la résonance. Pour $M_1 = 180^\circ$, le système est sur la séparatrice. Les excentricités initiales des planètes sont respectivement 0.26 (c) et 0.06 (d). Les périhélie sont alignés, $M_2 = 180^\circ$ et $a_1 = 0.0752 \text{ UA}$. Dans toutes les simulations, on a fixé $\Delta t_1 = 10^6 \text{ s}$ et $k_2 = 0.5$ pour les deux planètes, et le système est intégré sur 10^5 ans . L'âge du système étant estimé à 10 Ga (Cochran et al., 2011), nos simulations sont grossièrement équivalentes à prendre $\Delta t_1 \approx 10 \text{ s}$ sur cette échelle de temps. Sur la figure 4.6, on observe que les deux planètes finissent en circulation interne lorsque $\Delta t_2/\Delta t_1 \in [30, 160]$ alors que le modèle analytique donne $[125, 550]$. On a donc un facteur 4 (environ) entre les deux résultats. Cette différence s'explique probablement par l'approximation faite dans le modèle que le rapport des excentricités des deux planètes reste constant tout au long de l'évolution du système. D'une part,

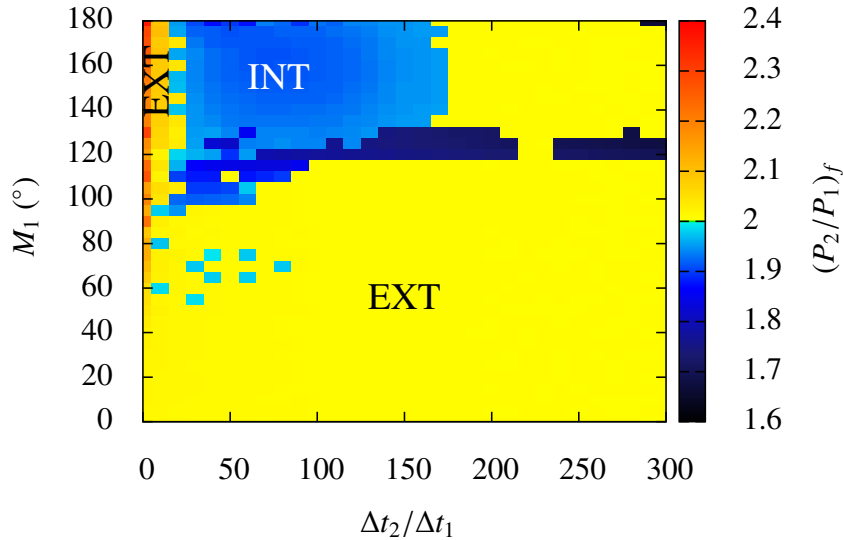


FIGURE 4.6 – Identique à la figure 4.2 mais pour les planètes Kepler 18c et d (résonance 2:1). Pour des systèmes en résonance de degré un, comme c'est le cas ici, les planètes ne peuvent pas rester en résonance (absence de points verts dans le graphique), contrairement aux systèmes en résonance de degré plus élevé (figures 4.2 et 4.5). L'intervalle théorique du rapport des temps de déphasage pour obtenir un système en circulation interne (zone bleue) est de $\Delta t_2/\Delta t_1 \in [125, 550]$, soit un facteur 4 au dessus de l'intervalle obtenu ici (simulations numériques). Cette différence importante peut s'expliquer par l'approximation faite que le rapport des excentricités reste constant tout au long de l'évolution du système (voir paragraphe 4.1.3).

la position du centre de libration de la résonance évolue à cause de la dissipation et le rapport des excentricités au niveau de ce centre de libration n'est pas constant (cf. paragraphe 2.5). Comme nous l'avons noté au paragraphe 2.5, le cas de la résonance 2:1 est particulièrement défavorable pour la validité de cette hypothèse. De plus, lorsque l'amplitude de libration devient importante, le rapport des excentricités ne reste pas fixé à sa valeur au centre de libration et peut subir d'importantes oscillations (cf. paragraphe 2.4.2). Enfin, le rapport des excentricités des planètes apparaît au carré dans les estimations analytiques du rapport des temps de déphasage (équations (3.20) et (3.21)). Ainsi, une erreur d'un facteur 2 sur le rapport des excentricités peut expliquer le facteur 4 obtenu sur le résultat final. Notons tout de même que bien que l'intervalle de $\Delta t_2/\Delta t_1$ obtenu par le modèle analytique ne soit pas correct, l'ordre de grandeur obtenu n'est pas complètement absurde (facteur 4 de différence). De plus, le scénario envisagé a bien lieu et le modèle analytique permet de mieux comprendre les mécanismes en jeu. Conformément aux prédictions du modèle, tous les systèmes finissent par sortir de la résonance (pas de points verts dans la figure 4.6). Ceci ne se produit que dans le cas des résonances de degré un (voir paragraphe 3.5), et on observe bien dans les figures 4.2 (degré deux) et 4.5 (degré trois) des systèmes qui restent en résonance. La figure 4.7 montre l'évolution temporelle du rapport de périodes, des excentricités et des angles résonants pour trois simulations numériques correspondant aux différents scénarii de sortie de la résonance. Finalement, on peut remarquer sur la figure 4.6 une ligne plus sombre pour $M_1 \approx 120^\circ$. Comme dans le cas de GJ 163b et c, ces conditions initiales particulières correspondent à la séparatrice de la résonance séculaire à l'intérieur de la résonance de moyen mouvement et notre modèle analytique simplifié (paragraphe 2.4) ne peut pas prévoir ce type de comportement qui est révélé par l'intégration numérique du problème complet.

En ce qui concerne les planètes Kepler-18c et d, le rapport de périodes observé actuellement peut être reproduit par un scénario de sortie de la résonance 2:1 due à la dissipation de marée, à condition que $\Delta t_2/\Delta t_1 \in [30, 160]$. Notons que la planète interne est plus dense que la planète externe (densités de 0.59 et 0.27 g cm³) et notre résultat suggère une dissipation plus forte (d'un facteur 30 au minimum) dans la planète externe. Ce résultat semble a priori contre-intuitif mais la dissipation par effet de marée est un phénomène complexe qui

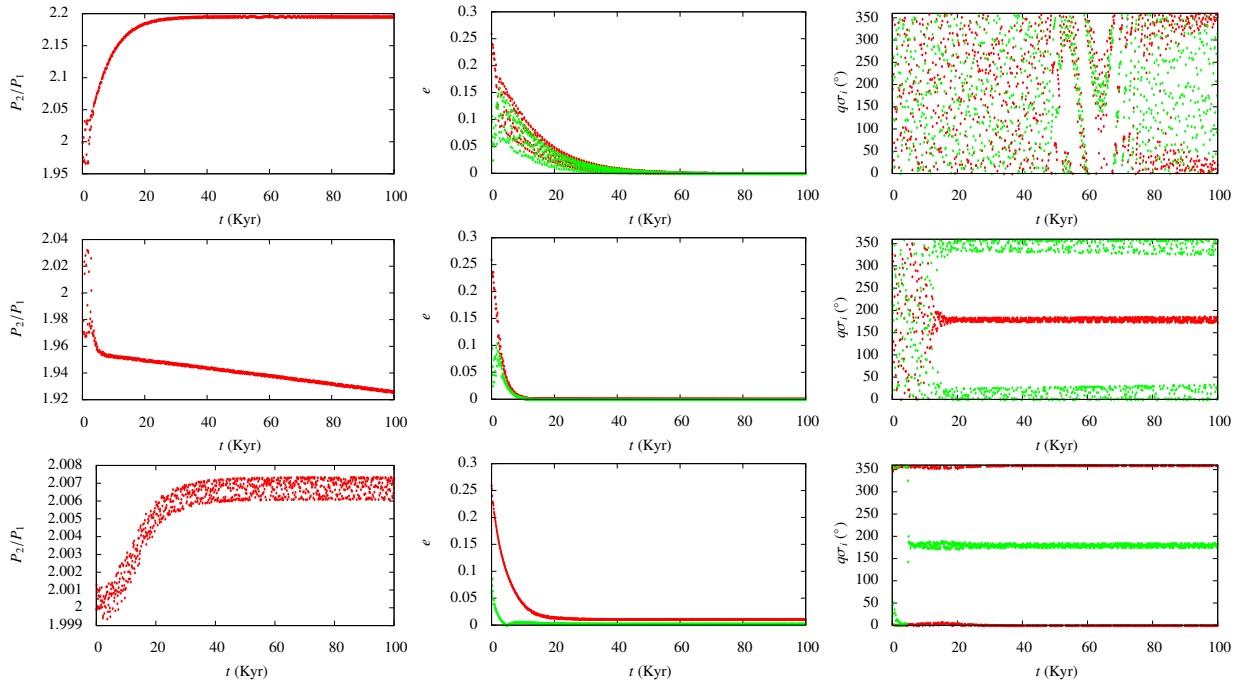


FIGURE 4.7 – Évolution du rapport de période (*gauche*), des excentricités (*milieu*), et des angles résonants (*droite*) de Kepler-18c et d. L'amplitude initiale de libration est fixée à $M_1 = 140^\circ$ (*haut* et *milieu*) et $M_1 = 0^\circ$ (*bas*). Le rapport des temps de déphasage est fixé à $\Delta t_2/\Delta t_1 = 0$ (*haut*, sortie de la résonance à excentricités élevées et en circulation externe), 100 (*milieu*, sortie de la résonance à excentricités élevées et en circulation interne), et 200 (*bas*, sortie de la résonance à excentricités faibles et en circulation externe). Dans les colonnes du *milieu* et de *droite*, les points rouges correspondent à la planète b (interne, 1) et les points vers à la planète c (externe, 2). Le temps est donné en Ka, mais on a fixé $\Delta t_1 = 10^6$ s dans toutes ces simulations. Pour une dissipation plus réaliste ($\Delta t_1 = 10 - 100$ s), 1 Ka (lu sur la figure) serait équivalent à 10-100 Ma. Notons que dans les trois simulations, bien que le système soit systématiquement sorti de la résonance à la fin de la simulation, les angles résonants sont en libration. Dans le cas de la sortie à excentricités faibles (*bas*), les angles restent en libration tout au long de la simulation tandis que dans les cas de sortie à excentricités élevées (*haut* et *milieu*), les angles se mettent à librer à la fin de la simulation lorsque les excentricités des planètes sont très fortement amorties. Ce comportement contre-intuitif des angles résonants s'explique aisément (voir annexe B).

ne dépend pas seulement de la densité moyenne des planètes et une telle différence reste envisageable.

4.2 Distribution des rapports de périodes et dissipation

4.2.1 Statistiques de la mission *Kepler*

La mission *Kepler* a ouvert la possibilité de réaliser des études statistiques sur un nombre considérable de planètes. En particulier, le nombre important de planètes détectées dans des systèmes multiples permet de tester les modèles de formation et d'évolution des systèmes planétaires. En utilisant les résultats de la mission *Kepler*, Lissauer et al. (2011) puis Fabrycky et al. (2012) (avec un plus grand nombre de systèmes) ont montré que peu de paires de planètes sont observées en résonance de moyen mouvement de degré un (2:1, 3:2) alors qu'un excès significatif de systèmes sont détectés avec un rapport de périodes proche mais légèrement supérieur au rapport résonant (voir paragraphe 1.1, figure 1.1). La figure 4.8 présente la distribution du rapport de périodes de paires de planètes au voisinage des résonances 2:1 et 3:2. Nous utilisons ici la liste des KOI

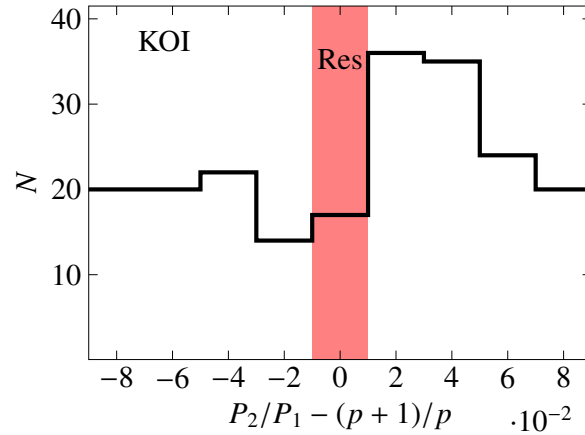


FIGURE 4.8 – Distribution du rapport de périodes de paires de planètes au voisinage des résonances 2:1 et 3:2 (degré un). Les distributions autour des deux résonances sont cumulées afin d’avoir un échantillon de systèmes plus important. Ces statistiques sont obtenues à partir du catalogue des KOI sur la période Q1-Q16 (voir Batalha et al., 2013). L’origine de l’axe des abscisses marquée par la bande rouge est la résonance exacte. Les valeurs négatives correspondent à la circulation interne ($P_2/P_1 < (p+1)/p$) et les valeurs positives à la circulation externe ($P_2/P_1 > (p+1)/p$). On observe un excès important de systèmes en circulation externe, avec $P_2/P_1 - (p+1)/p \approx 0.02$.

(Kepler Objects of Interest) obtenue sur la période Q1-Q16 de la mission *Kepler* (Batalha et al., 2013). Ce catalogue contient à la fois les planètes *Kepler* confirmées et un grand nombre de planètes candidates qui sont en attente d’une confirmation. Il est à noter que même si elles ne sont pas confirmées, les planètes candidates faisant partie d’un système multiple (celles qui nous intéressent ici) ont très peu de chance d’être des faux-positifs (Lissauer et al., 2012). Conformément aux résultats de Lissauer et al. (2011) et Fabrycky et al. (2012), on constate qu’il y a un excès de systèmes en circulation externe (à droite des résonances dans la figure 4.8, et avec $P_2/P_1 - |k_2/k_1| \approx 0.02$). Lissauer et al. (2011) et Fabrycky et al. (2012) ont de plus montré que l’excès est statistiquement significatif.

Différents scénarii ont été envisagés pour expliquer ces résultats statistiques (voir paragraphe 1.1). Nous nous intéressons ici plus en détail au scénario impliquant l’effet de marée. L’idée de ce scénario est que lorsque le disque protoplanétaire était encore présent, les planètes ont subi une phase de migration pendant laquelle un nombre conséquent de paires de planètes se sont retrouvées en résonance. Une fois le disque protoplanétaire disparu, ces systèmes ont évolué pendant des centaines de millions voire des milliards d’années sous l’action de l’effet de marée. Les planètes seraient alors sorties des résonances à cause de la dissipation par effet de marée et se seraient retrouvées en circulation externe. Ce scénario a d’abord été envisagé par Papaloizou & Terquem (2010) et Papaloizou (2011) puis étudié dans le cadre des systèmes *Kepler* par différents auteurs (Lithwick & Wu, 2012; Delisle et al., 2012, 2014; Batygin & Morbidelli, 2013b; Lee et al., 2013).

Le principal argument qui a été opposé à cette théorie est que l’effet de marée a une dépendance très forte à la distance à l’étoile. Ainsi, l’explication peut être valable pour des planètes proches de leur étoile mais pas pour les systèmes plus lointains. Rein (2012) a montré que l’excès de planètes en circulation externe est présent aussi bien pour les systèmes dont la planète interne a une période de moins de cinq jours (systèmes proches) que pour les systèmes dont la planète interne a une période de plus de cinq jours (systèmes lointains). En utilisant un seuil à dix jours, Baruteau & Papaloizou (2013) arrivent aux mêmes conclusions. Les deux études éliminent donc la possibilité que l’excès de planètes en circulation externe soit simplement expliqué par l’effet de marée et ils proposent donc d’autres mécanismes (interactions avec le disque protoplanétaire) qui n’ont pas la même dépendance en la distance à l’étoile que l’effet de marée. En reproduisant une étude similaire à celles de Rein (2012) et Baruteau & Papaloizou (2013) avec un catalogue de planètes plus récent (KOI Q1-Q16, Batalha et al., 2013), nous obtenons des résultats en contradiction avec ceux de ces auteurs. La

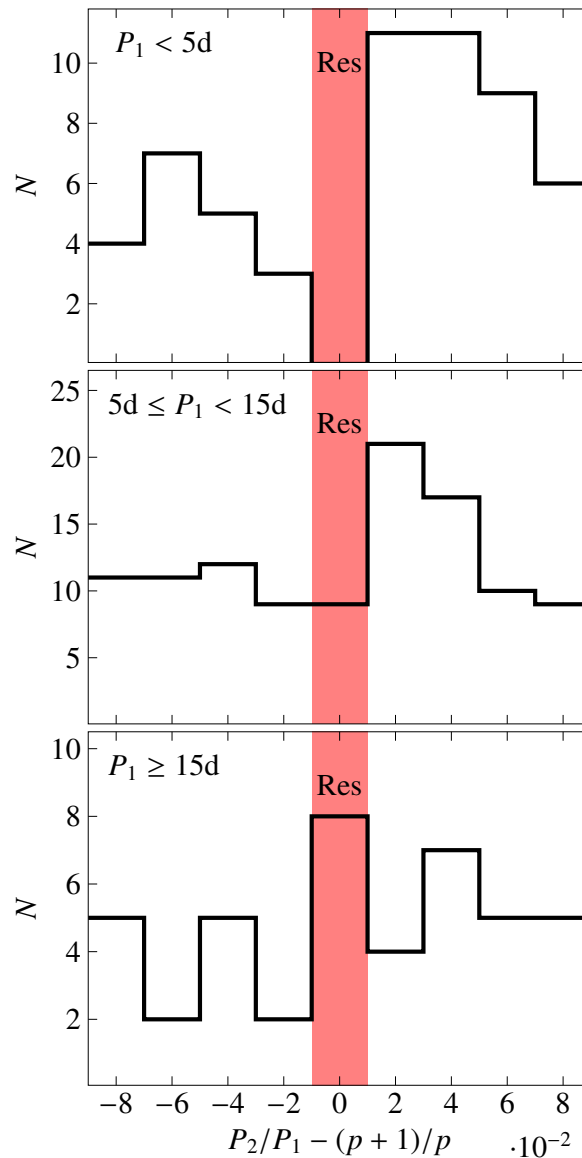


FIGURE 4.9 – Semblable à la figure 4.8 mais l'échantillon est séparé en trois groupes en fonction de la période de la planète interne (P_1) : $P_1 < 5j$ (*haut*), $5j \leq P_1 < 15j$ (*milieu*), $P_1 \geq 15j$ (*bas*). Pour les systèmes les plus proches de leur étoile (*haut*), on observe un excès important de paires de planètes en circulation externe ($P_2/P_1 > (p+1)/p$) et aucun système dans la bande centrale rouge ($P_2/P_1 - (p+1)/p \approx 0$). Pour le groupe intermédiaire (*milieu*), l'excès de système en circulation externe est toujours visible mais moins marqué et un nombre significatif de planètes sont observées dans la bande centrale. Enfin, pour les systèmes les plus éloignés (*bas*), le nombre de planètes dans la bande centrale est légèrement supérieur au nombre de planètes en circulation externe.

figure 4.9 présente la distribution du rapport de périodes de paires de planètes au voisinage des résonances 2:1 et 3:2 en fonction de la période de la planète interne (P_1). Nous avons divisé l'échantillon en trois groupes :

1. les systèmes proches, tels que $P_1 < 5j$,
2. les systèmes intermédiaires, tels que $5j \leq P_1 < 15j$,
3. les systèmes lointains, tels que $P_1 \geq 15j$,

Sur la figure 4.9, on remarque que pour les groupes 1 et 2, il apparaît un excès de systèmes en circulation externe (i.e. avec un rapport de périodes plus grand que le rapport résonant). Cet excès semble particulièrement

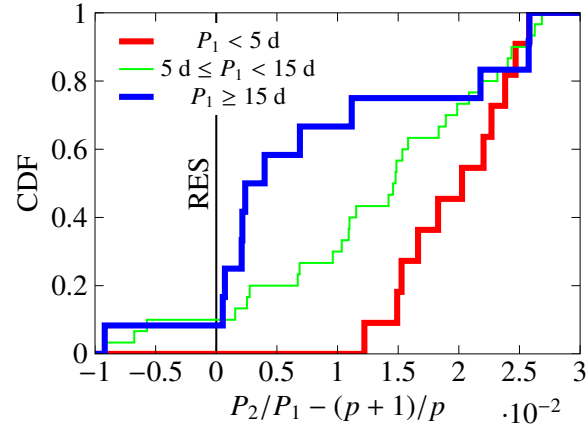


FIGURE 4.10 – Distributions cumulatives du rapport de périodes de paires de planètes au voisinage des résonances 2:1 et 3:2 (les statistiques des deux résonances sont accumulées) pour les trois groupes définis dans la figure 4.9 (voir aussi le paragraphe 4.2.1). Les conclusions sont similaires à celles de la figure 4.9 : pour les systèmes les plus éloignés (en bleu) on observe une accumulation de paires de planètes en résonance, alors que pour les systèmes les plus proches (en rouge) cette accumulation est décalée vers des rapports de périodes plus élevés. La distribution de rapports de périodes des systèmes intermédiaires (en vert) est bien intermédiaire entre les deux distributions extrêmes (bleue et rouge). Ceci implique un effet progressif de la distance des planètes à leur étoile sur la distribution des rapports de périodes. Un test de Kolmogorov-Smirnov (voir paragraphe 4.2.1) donne une probabilité de 0.08% pour les distributions extrêmes (bleue et rouge), de 10% pour les distributions bleue et verte et de 3.5% pour les distributions verte et rouge.

marqué pour les systèmes les plus proches de leur étoile (groupe 1). Notons qu’aucun de ces systèmes proches (groupe 1) n’est observé dans la bande centrale rouge qui correspond à un rapport de période proche du rapport résonant ($P_2/P_1 \approx (p+1)/p$). Pour les systèmes plus éloignés (groupes 2 et 3), un nombre significatif de paires de planètes sont observées dans cette bande centrale. De plus, pour les systèmes lointains (groupe 3), le nombre de systèmes détectés dans la bande centrale est comparable (voire légèrement plus élevé) au nombre de systèmes détectés en circulation externe.

La figure 4.10 présente les distributions cumulatives de rapport de périodes pour les trois mêmes groupes. L’intervalle de rapport de périodes choisi pour cette figure ($P_2/P_1 - (p+1)/p \in [-10^{-2}, 3 \times 10^{-2}]$) correspond à la bande centrale (rouge) et la bande située à sa droite dans les histogrammes de la figure 4.9. Les conclusions sont similaires à celles de la figure 4.9 et l’utilisation de distributions cumulatives (figure 4.10) permet de montrer que les différences observées entre les histogrammes de la figure 4.9 ne sont pas dues au choix de la taille et de la position des bandes. Afin de vérifier que ces différences sont statistiquement significatives, nous avons utilisé le test de Kolmogorov-Smirnov. Ce test permet d’évaluer la probabilité d’obtenir des distributions empiriques au moins aussi différentes que celles que nous avons obtenues en supposant qu’elles sont issues de tirages aléatoires suivant une même loi de probabilité (distribution intrinsèque). On obtient une probabilité de 0.08% pour les deux groupes extrêmes (1 et 3). Il est donc très peu probable que les distributions intrinsèques de rapports de périodes soient les mêmes pour ces deux groupes et que les différences que nous avons observées ne soient dues qu’au hasard. Lorsque l’on compare les systèmes intermédiaires (groupe 2) aux deux autres (1 et 3), les différences sont moins marquées et les probabilités sont donc plus élevées : 3.5% pour les groupes 1 et 2 et 10% pour les groupes 2 et 3.

On peut conclure de ces différentes observations que la distance des planètes à leur étoile joue bien un rôle dans la répartition des rapports de périodes. Les systèmes les plus proches ($P_1 < 5j$) ne sont jamais détectés en résonance et sont souvent observés en circulation externe alors que pour les systèmes les plus lointains ($P_1 \geq 15j$), les deux populations (résonance et circulation externe) sont comparables avec un léger excès (probablement non-significatif) de systèmes en résonance. Ces constats renforcent donc l’hypothèse

d'une évolution par effet de marée de systèmes initialement en résonance. On peut penser qu'avant de subir la dissipation due à l'effet de marée pendant des centaines de millions voire des milliards d'années, les systèmes proches de leur étoile présentaient une distribution de rapports de périodes similaire à celle des systèmes plus lointains. En particulier, il y avait probablement un nombre significatif de systèmes piégés en résonance. Les systèmes lointains ont ensuite très peu évolué sous l'action de l'effet de marée. En revanche les systèmes les plus proches ont probablement subi une intense dissipation à cause de cet effet. D'après notre modèle (voir paragraphes 3.5, 4.1.3 et figure 4.6), un système initialement dans une résonance de degré n finira le plus souvent en circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$) comme cela est observé dans les statistiques. En effet, le seul scénario pour lequel le système ne finit pas en circulation externe (zone bleue dans la figure 4.6) est le cas où $\tau = T_1/T_2$ est compris entre les deux valeurs critiques (τ_α et τ_c) et où l'amplitude de libration initiale est importante. Dans ce cas, le système finira en circulation interne ($P_2/P_1 < |k_2/k_1|$). Cependant, le plus souvent, la dissipation dans la planète interne est beaucoup plus efficace ($\tau \ll \tau_c$, τ_α , à gauche et en jaune/rouge dans la figure 4.6). On a alors deux scénarii possibles suivant l'amplitude initiale de libration qui mènent tous les deux à la circulation externe :

- Si l'amplitude de libration est initialement faible, le système n'atteint jamais la séparatrice. Les planètes restent en résonance jusqu'à ce que la séparatrice de la résonance disparaisse (à excentricités faibles). Le rapport de périodes se met alors à augmenter lentement et le système finit donc en circulation externe.
- Si l'amplitude de libration initiale est importante, le système croise la séparatrice alors que les excentricités sont encore élevées. Les deux planètes ne sont alors plus piégées en résonance. Comme la dissipation est plus importante dans la planète interne, le rapport de périodes se met à augmenter rapidement tandis que l'excentricité de la planète interne est amortie. À nouveau le système termine sa course en circulation externe.

Dans la suite nous étudions ces deux scénarii de sortie de la résonance.

4.2.2 Scénario de sortie à excentricités faibles

Le scénario de sortie de la résonance à excentricités faibles est le premier mécanisme impliquant l'effet de marée qui ait été envisagé pour expliquer les statistiques *Kepler* (voir Lithwick & Wu, 2012; Delisle et al., 2012; Batygin & Morbidelli, 2013b). Il avait été décrit au préalable par Papaloizou & Terquem (2010) et Papaloizou (2011). Dans ce scénario, l'amplitude de libration dans la résonance est supposée initialement suffisamment faible pour que le système ne croise jamais la séparatrice de la résonance et reste toujours dans le voisinage du centre de libration. Lorsque le système atteint la bifurcation de l'espace des phases et que la séparatrice de la résonance disparaît, le système se retrouve en circulation externe et le rapport de périodes se met à augmenter de plus en plus lentement au fur et à mesure que les excentricités diminuent.

On s'intéresse ici à l'évolution asymptotique du système et en particulier au rapport de périodes. Dans le régime d'excentricités très faibles ($\delta < 0$), on peut approximer le Hamiltonien (2.26) par :

$$\mathcal{H}^* \approx 2\delta I_1 + R^*(u_1 + \bar{u}_1)$$

où l'on a éliminé les termes d'ordre 4 (en I_1^2) de la partie Keplerienne. La position de l'unique point fixe (elliptique) est alors donnée par :

$$u_{1,ell} = -\frac{R^*}{2\delta}$$

Notons $u_1 = u_{1,ell} + v$, avec $v = \sqrt{v}e^{iv}$. Le Hamiltonien s'écrit simplement :

$$\mathcal{H}^* = 2\delta V$$

à une constante près qui n'influence pas la dynamique. L'évolution conservative est donc simplement donnée par :

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \\ v(t) &= v_0 + 2\delta t \\ v(t) &= v_0 e^{2i\delta t} \end{aligned}$$

et

$$u_1(t) = u_{1,ell} + v_0 e^{2i\delta t}$$

Le système circule autour du point fixe $u_{1,ell}$ qui est légèrement excentré. Calculons l'évolution de l'amplitude V de la circulation autour de ce point fixe sous l'action de l'effet de marée. L'évolution du paramètre δ est toujours donnée par (équation (3.13)) :

$$\dot{\delta}|_d = -\gamma \frac{I_1}{T_d}$$

D'où :

$$\dot{u}_{1,ell}|_d = \gamma \frac{I_1}{\delta} \frac{u_{1,ell}}{T_d}$$

Et l'effet de la dissipation sur u_1 est donné par (équation (3.7)) :

$$\dot{u}_1|_d = -\frac{u_1}{T_d}$$

On a :

$$\dot{v}|_d = -\frac{v}{T_d} - \gamma \frac{I_1}{\delta} \frac{u_{1,ell}}{T_d}$$

Et :

$$\dot{V}|_d = \dot{v}|_d \bar{v} + v \dot{\bar{v}}|_d = -\frac{u_1 \bar{v} + \bar{u}_1 v}{T_d} - \gamma \frac{I_1}{\delta} \frac{u_{1,ell} \bar{v} + \bar{u}_{1,ell} v}{T_d}$$

L'évolution moyenne de V (au cours d'une circulation) est :

$$\langle \dot{V}|_d \rangle = -2 \frac{V}{T_d} - 2\gamma \frac{I_{1,ell}}{\delta} \frac{V}{T_d} = -2 \frac{V}{T_d} \left(1 + \gamma \frac{I_{1,ell}}{\delta} \right) = -2 \frac{V}{T_d} \left(1 - 2\gamma \frac{I_{1,ell}^{3/2}}{R^*} \right)$$

De plus :

$$\langle \dot{I}_{1,ell}|_d \rangle = 2\gamma \frac{I_{1,ell} + V I_{1,ell}}{\delta} \frac{I_{1,ell}}{T_d} = -4 \frac{I_{1,ell}}{T_d} \gamma \frac{(I_{1,ell} + V) \sqrt{I_{1,ell}}}{R^*}$$

Il est intéressant de comparer V et $I_{1,ell}$ car lorsque $V > I_{1,ell}$ on observera une circulation de l'angle θ_1 alors que si $V < I_{1,ell}$, θ_1 libre. Comme cela est expliqué dans la description du second modèle fondamental des résonances (Henrard & Lemaitre, 1983), la différence entre ces deux cas de figure est purement géométrique et absolument pas dynamique. Il n'y a pas de séparatrice entre les deux régimes et dans les deux cas le système circule autour de l'unique point fixe (elliptique). Notant $A = V/I_{1,ell}$, on a :

$$\left. \frac{\dot{A}}{A} \right|_d = -\frac{2}{T_d} \left(1 - 2\gamma(2+A) \frac{I_{1,ell}^{3/2}}{R^*} \right)$$

Dans la limite de très faibles excentricités, on a donc :

$$\left. \frac{\dot{A}}{A} \right|_d \approx -\frac{2}{T_d}$$

ce qui signifie que l'amplitude V diminue relativement à la position du point fixe $I_{1,ell}$. Ainsi, l'angle θ_1 restera toujours en libration même une fois que le rapport de périodes est loin de la valeur résonante. Ce phénomène a été observé dans les simulations numériques (voir Papaloizou & Terquem, 2010; Papaloizou, 2011; Lithwick & Wu, 2012; Delisle et al., 2012; Batygin & Morbidelli, 2013b, ainsi que la figure 4.7). La libration des angles résonants en dehors de la résonance est un phénomène contre-intuitif et différents auteurs ont qualifié ces systèmes de résonants. L'annexe B est consacrée à l'étude de cette libration apparente. On montre qu'un modèle séculaire permet de décrire parfaitement ce phénomène purement géométrique et que ces systèmes ne sont pas en résonance d'un point de vue dynamique.

Pour l'évolution à long terme du système, on peut supposer l'amplitude V négligeable devant $I_{1,ell}$, c'est-à-dire qu'on suppose que le système est exactement au point fixe. On a donc $I_1 = I_{1,ell}$ et :

$$\dot{I}_{1d} = -4 \frac{\gamma}{R^*} \frac{I_1^{5/2}}{T_d}$$

D'où :

$$I_1(t) = \left(6 \frac{\gamma}{R^*} \frac{t}{T_d} + C \right)^{-2/3}$$

où C est une constante d'intégration que l'on peut négliger pour l'évolution à long terme. Les excentricités des planètes (proportionnelles à u_1) subissent donc un amortissement de la forme $e_i \propto t^{-1/3}$. L'évolution du paramètre δ suit une loi en $\delta \propto -t^{1/3}$ et le rapport de périodes évolue suivant :

$$\frac{P_2}{P_1} - \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \propto t^{1/3}$$

Cette loi d'évolution du rapport de périodes est conforme aux résultats de Papaloizou (2011) et Lithwick & Wu (2012).

En réalisant une série de simulations numériques avec différentes conditions initiales, Lee et al. (2013) ont montré que le temps nécessaire pour un système en résonance 2:1 ou 3:2 pour atteindre $\left| \frac{P_2}{P_1} - \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \right| \approx 0.03$, comme cela est observé pour les systèmes *Kepler*, est de l'ordre de $t \gtrsim 50T_1$, avec T_1 le temps caractéristique de la dissipation dans la planète interne (équation (3.3)). En fonction des conditions initiales, le temps nécessaire peut même atteindre $t \sim 1000T_1$. Pour beaucoup de systèmes, ce scénario n'est pas réaliste car le temps ainsi estimé dépasse l'âge de l'univers (voir Lee et al., 2013).

4.2.3 Scénario de sortie à excentricités importantes

4.2.3.1 Scénario

Les résultats de Lee et al. (2013) semblent en contradiction avec l'hypothèse d'une distribution de rapport de périodes principalement influencée par l'effet de marée puisque l'échelle de temps nécessaire pour que cet effet reproduise la bonne distribution est trop longue. Il n'en reste pas moins que les statistiques effectuées sur les systèmes *Kepler* (figures 4.9 et 4.10) montrent une influence significative de la distance à l'étoile sur la distribution des rapports de périodes, ce qui va dans le sens d'un mécanisme impliquant la dissipation par effet de marée. Cette apparente contradiction peut être résolue si l'on suppose que de nombreux systèmes initialement en résonance ont franchi la séparatrice de la résonance alors que les excentricités des planètes étaient encore importantes. Avant d'étudier plus en détail l'évolution du rapport des périodes une fois que les planètes sont sorties de la résonance, donnons quelques arguments montrant que ce scénario est vraisemblable. Le premier argument est que pour la plupart des systèmes la dissipation dans la planète interne est plus importante que dans la planète externe ($\tau \ll \tau_c, \tau_a$) car l'effet de marée a une dépendance importante en la distance à l'étoile. Ceci implique que l'amplitude de libration dans la résonance augmente à cause de l'effet

de marée ($\tau < \tau_c$), et que si le système sort de la résonance, le rapport de périodes augmente ($\tau < \tau_\alpha$). De plus, Goldreich & Schlichting (2014) ont montré que pendant la phase de migration des planètes dans le disque protoplanétaire, de nombreuses planètes piégées en résonances voient leur amplitude de libration augmenter à cause des interactions dissipatives avec le disque. Ainsi, lorsque le disque disparaît, les planètes qui sont en résonance peuvent avoir une amplitude de libration importante qui est ensuite amplifiée par l'effet de marée. On peut donc raisonnablement penser qu'une portion importante de systèmes initialement (au moment de la disparition du disque) en résonance avaient une amplitude de libration initiale suffisante pour franchir la séparatrice de la résonance alors que les excentricités des planètes étaient encore importantes.

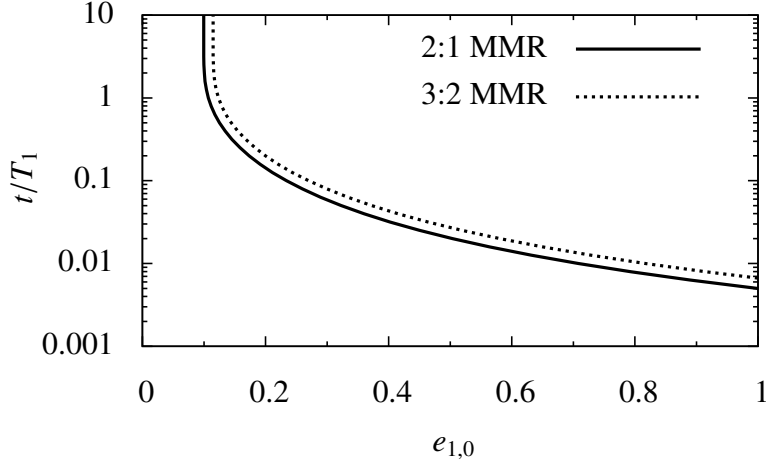


FIGURE 4.11 – Temps nécessaire pour reproduire l'écart à la résonance observé dans les statistiques *Kepler* ($P_2/P_1 - |k_2/k_1| = 0,03$) en fonction de l'excentricité de la planète interne lorsque le système sort de la résonance ($e_{1,0}$). Cette valeur est calculée en utilisant l'équation (4.9). Elle doit être comparée avec l'estimation faite par Lee et al. (2013) qui envisage un scénario de sortie de la résonance à faibles excentricités ($t/T_1 \gtrsim 50 - 1000$).

4.2.3.2 Échelle de temps

Considérons maintenant le temps nécessaire pour un système sortant de la résonance avec des excentricités $e_{1,0}$ et $e_{2,0}$ pour atteindre un rapport de périodes compatible avec les statistiques *Kepler* ($P_2/P_1 - |k_2/k_1| \approx 0.02 - 0.03$). On s'intéresse à l'évolution du système juste après qu'il a franchi la séparatrice de la résonance. Le rapport de périodes n'est alors plus figé à la valeur résonante et évolue sous l'action de la dissipation de marée. Si l'on néglige la dissipation dans la planète externe, l'évolution du rapport de périodes est donnée par (voir équation (3.4)) :

$$\frac{\dot{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}} = 3 \frac{e_1^2}{T_1} \quad (4.8)$$

Pour ne pas alourdir les calculs, on néglige les interactions séculaires entre les planètes et on suppose que l'excentricité e_1 suit une loi exponentielle $e_1 = e_{1,0} e^{-t/T_1}$. En utilisant cette loi exponentielle dans l'équation (4.8), on obtient :

$$\log(\mathcal{P}/\mathcal{P}_0) = \frac{3}{2} e_{1,0}^2 (1 - e^{-2t/T_1}) \quad (4.9)$$

avec $\mathcal{P}_0 = |k_2/k_1| = (p+1)/p$ le rapport de périodes initial. L'équation (4.9) permet d'estimer le temps nécessaire pour que le rapport de périodes atteigne la valeur observée dans les statistiques *Kepler* ($\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \approx 0.03$). La figure 4.11 donne ce temps en fonction de l'excentricité $e_{1,0}$ au moment de la sortie de la résonance. On constate que pour des excentricités modérées $e_{1,0} \gtrsim 0.15$, le système atteint le rapport de période voulu

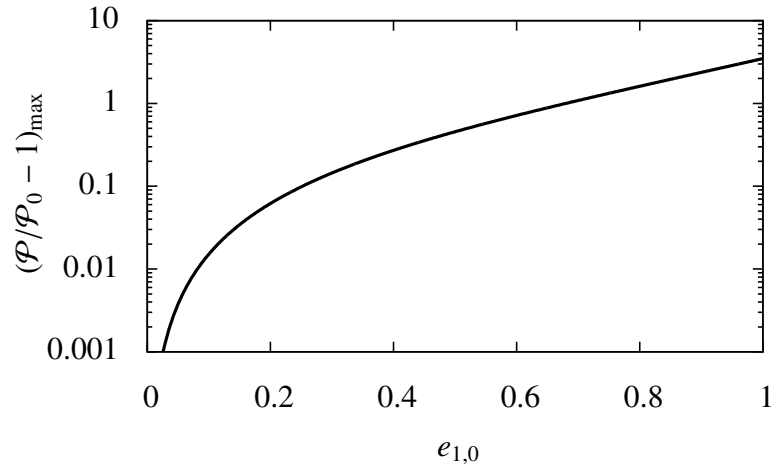


FIGURE 4.12 – Distance maximale à la résonance du rapport de période $\mathcal{P} = P_2/P_1$ (dans la limite $t \rightarrow \infty$ et en suivant l'équation (4.10)) en fonction de l'excentricité de la planète interne lorsque le système sort de la résonance ($e_{1,0}$).

sur un temps de l'ordre de $t/T_1 \sim 0.01 - 0.1$ qui est beaucoup plus court que pour le scénario de sortie à excentricités faibles ($t/T_1 \sim 50 - 1000$, Lee et al., 2013). On obtient donc un gain de 3 à 5 ordres de grandeur avec ce nouveau scénario. Sur la figure 4.7 on peut visualiser cette différence d'efficacité entre les deux scénarii envisagés en comparant l'évolution du rapport de périodes dans les deux simulations (figure 4.7 haut, gauche et bas, gauche). On observe sur la figure 4.11 une asymptote verticale pour $e_{1,0} \approx 0.1$. Ceci est dû au fait qu'avec le mécanisme décrit ici, lorsque les excentricités deviennent faibles, le rapport de périodes n'évolue plus. On peut calculer le rapport de périodes maximal atteint par le système après un temps infini :

$$\mathcal{P} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{P}_0 e^{3/2 e_{1,0}^2} \quad (4.10)$$

Ce rapport de périodes maximal est tracé dans la figure 4.12 en fonction de l'excentricité $e_{1,0}$. On observe que pour $e_{1,0} \lesssim 0.1$, le rapport de périodes s'arrête d'évoluer avant d'atteindre la distance voulue (0.03), ce qui explique l'asymptote observée dans la figure 4.11. Notons que lorsque les excentricités deviennent très faibles et que le mécanisme décrit ici ne fonctionne plus, le rapport de périodes continue d'augmenter mais en suivant le régime décrit dans le scénario de sortie à excentricité faibles (paragraphe 4.2.2). L'asymptote verticale observée dans la figure 4.11 correspond donc au seuil de transition entre les deux mécanismes d'évolution du rapport de périodes.

Finalement, l'ensemble des deux mécanismes permet d'expliquer qu'un grand nombre de planètes proches de leur étoile se trouvent aujourd'hui en circulation externe. Le problème de l'échelle de temps soulevé par Lee et al. (2013) est résolu à condition de supposer qu'un nombre significatif de systèmes soient sortis de la résonance avec des excentricités non-négligeables ($e_{1,0} \gtrsim 0.15$).

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Un des résultats les plus surprenant de la mission *Kepler* est le faible nombre de paires de planètes observées en résonance de moyen mouvement alors qu'un excès de systèmes sont détectés au voisinage des résonances 2:1 et 3:2 (degré un) en circulation externe (rapport de périodes légèrement plus élevé que 2 ou 3/2). La recherche d'un scénario de formation de ces systèmes en circulation externe a motivé une grande partie des développements effectués dans cette thèse. Nous envisageons dans cette étude un scénario dans lequel un nombre important de planètes se sont retrouvées en résonance à l'issue de la phase de migration dans le disque protoplanétaire. Puis, en subissant de la dissipation par effet de marée, ces planètes seraient sorties de la résonance pour finir en circulation externe. Ceci expliquerait les statistiques obtenues par la mission *Kepler*. Pour étudier en détail ce mécanisme, nous avons mis en place un modèle analytique hamiltonien des résonances de moyen mouvement $(p + q):p$ de tout ordre $q \geq 1$ et avons cherché à obtenir une approximation la plus simple possible de la dynamique en résonance. Nous construisons pour cela un Hamiltonien intégrable (un degré de liberté). Bien entendu, le modèle simplifié ne permet pas de retracer toute la complexité de la dynamique des planètes en résonance et notamment les résonances secondaires et les comportements chaotiques. Cependant, il permet d'établir des critères analytiques simples sur la dissipation de marée subie par les planètes pour prévoir l'évolution sur le long terme (plusieurs milliards d'années) du système. Le principal paramètre qui influence cette évolution est l'équilibre entre la dissipation dans les deux planètes. Suivant la valeur du rapport des temps caractéristiques de la dissipation dans les deux planètes ($\tau = T_1/T_2$), le système peut rester en résonance ou bien sortir de la résonance, soit avec un rapport de périodes plus grand que le rapport résonant (circulation externe) soit avec un rapport plus petit (circulation interne).

À l'inverse, pour un système donné, observé au voisinage d'une résonance de moyen mouvement, la connaissance du rapport de périodes (en comparaison du rapport de périodes à la résonance exacte) permet de distinguer les trois cas de figure précédents (résonance, circulation interne ou externe) et donc de contraindre la dissipation que subissent les planètes. En appliquant ce raisonnement à GJ 163b, c (résonance 3:1) et GJ 581b, c (résonance 5:2) on en déduit que pour ces deux systèmes la planète interne est gazeuse (dissipation lente) et la planète externe rocheuse (dissipation rapide). Pour le système Kepler-18c, d (résonance 2:1), les conclusions sont moins claires. Les masses et rayons des deux planètes laissent penser que toutes deux ont une importante composante gazeuse. Les contraintes obtenues sur la dissipation dans ces planètes impliquent que la planète externe dissipe plus rapidement (un ordre de grandeur environ) que la planète interne alors que cette dernière est plus dense. On observe un bon accord entre estimations analytiques et simulations numériques pour GJ 163 et GJ 581. En revanche pour Kepler-18, les estimations analytiques du rapport des temps de déphasage $\Delta t_2/\Delta t_1$ sont sous-estimée d'un facteur 4 environ par rapport aux résultats numériques. La principale cause d'erreur dans le modèle analytique provient de la réduction à un degré de liberté. En effet, afin de simplifier au maximum le modèle, on suppose que le rapport des excentricités des deux planètes e_1/e_2 reste constant tout au long de l'évolution du système et on estime ce rapport au niveau du centre de libration de la résonance. D'une part, la direction du centre de libration, et en particulier le rapport e_1/e_2 en ce point, évolue au fur et à mesure que la dissipation agit sur le système. De plus, le rapport des excentricités ne reste

proche de sa valeur au centre de libration que tant que le système reste au voisinage de ce centre de libration (amplitude de libration faible). Lorsque l'amplitude de libration dans la résonance est plus importante et que le système s'approche de la séparatrice, les excentricités subissent d'importantes oscillations et le rapport des excentricités n'est plus constant. Notons tout de même, que dans les trois cas (GJ 163, GJ 581 et Kepler-18), le modèle simplifié prévoit correctement les différents scénarii d'évolution et les états finaux du système en fonction de la dissipation dans les planètes. Ce modèle analytique doit donc être considéré comme un moyen de comprendre et analyser les mécanismes en jeu dans l'évolution des systèmes résonants en présence de dissipation de marée. Les simulations numériques tiennent compte de toute la complexité de la dynamique résonante et permettent d'obtenir des contraintes plus précises sur la dissipation dans les planètes.

En ce qui concerne les statistiques de la mission *Kepler*, nous avons montré que la distribution du rapport de périodes au voisinage des résonances 2:1 et 3:2 dépend fortement de la distance des planètes à l'étoile. Pour les systèmes proches ($P_1 < 5$ j), il n'y a aucune paire de planètes détectées en résonance et on observe un excès important de systèmes en circulation externe (rapport de périodes plus grand que 2 ou 3/2). Pour les systèmes éloignés ($P_1 > 15$ j), il n'y a pas d'excès notable de systèmes en circulation externe et on observe un léger excès de systèmes résonants. Ces résultats sont parfaitement compatibles avec une évolution des systèmes par effet de marée. En effet, la dissipation de marée décroît rapidement avec la distance à l'étoile et on peut penser que les distributions de rapport de périodes des systèmes proches et des systèmes lointains étaient semblables avant que la dissipation de marée n'agisse. En particulier, il est probable qu'un nombre conséquent de systèmes proches étaient en résonance à l'issue de la phase de migration des planètes dans le disque protoplanétaire et qu'ils sont sortis de la résonance à cause de l'effet de marée. Deux scénarii de sortie sont alors possibles suivant l'amplitude initiale de libration dans la résonance. Les systèmes dont l'amplitude initiale était faible sont sortis de la résonance avec des excentricités faibles et leur rapport de périodes a évolué très lentement. Les systèmes dont l'amplitude initiale de libration était importante ont pu sortir de la résonance avec des excentricités non-négligeables et leur rapport de périodes a pu évoluer bien plus rapidement (gain de 3-5 ordres de grandeur sur l'échelle de temps). Lee et al. (2013) ont montré que de nombreux systèmes détectés par la mission *Kepler* en circulation externe n'ont pas pu atteindre leur configuration actuelle sur un temps raisonnable (âge de l'univers) en sortant de la résonance à excentricités faibles. Le scénario de sortie à excentricités élevées permet de résoudre cette incompatibilité apparente des échelles de temps. Finalement, les deux scénarii permettent ensemble d'expliquer les observations en ne faisant appel à aucun autre phénomène dissipatif que l'effet de marée.

Plusieurs évolutions dans la suite de cette étude sont envisageables. D'une part, il serait intéressant de reprendre la même étude dans le cas d'autres formes de dissipation et en particulier pour les interactions entre les planètes et le disque protoplanétaire et entre les planètes et les planétésimaux. L'étude de Goldreich & Schlichting (2014) considère ce type d'interaction (disque-planètes) mais seulement dans le cas restreint circulaire ce qui n'est pas réaliste lorsque l'on considère deux planètes. D'autre part, nous avons obtenu des contraintes intéressantes sur la dissipation et la nature des planètes de trois systèmes (GJ 163, GJ 581, Kepler-18). Il serait intéressant d'appliquer plus systématiquement notre modèle à l'ensemble des systèmes observés proches de résonances pour obtenir des contraintes sur ces systèmes. Ceci pose quelques difficultés car la réalisation de simulations numériques reste nécessaire pour obtenir des contraintes précises sur la dissipation dans les planètes (voir notamment le cas de Kepler-18).

Annexe A

Évolution de l'amplitude de libration

Le but de cette annexe est de prouver la proposition 2. Rappelons les hypothèses. On suppose que la dynamique conservative de deux planètes en résonance peut être représentée par le Hamiltonien (modèle du pendule) à un degré de liberté suivant (équation (3.6)) :

$$\mathcal{H}^* = -(I_1 - \delta)^2 + 2R^* \delta^{q/2} \cos q\theta_1$$

On suppose de plus que le système subit une dissipation lente comparée à la dynamique conservative et qui induit un amortissement de l'action I_1 (équation (3.8)) ainsi que du paramètre δ (équation (3.13)) :

$$\begin{aligned} \dot{I}_1|_d &= -2 \frac{I_1}{T_d} \\ \dot{\delta}|_d &= -\gamma \frac{I_1}{T_d} \end{aligned}$$

On cherche alors l'évolution de l'amplitude de libration dans la résonance. Notons :

$$I_1 = \delta + \epsilon$$

On a :

$$\mathcal{H}^* = -\epsilon^2 + 2R^* \delta^{q/2} \cos q\theta_1$$

Les équations de Hamilton donne (dans le cas conservatif) :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -2\epsilon \\ \dot{\epsilon} &= 2qR^* \delta^{q/2} \sin q\theta_1 \end{aligned}$$

On en déduit que le point fixe elliptique (centre de libration) se trouve en $q\theta_{1,ell} = 0$ et $\epsilon_{ell} = 0$. L'énergie correspondante est : $\mathcal{H}_{ell}^* = 2R^* \delta^{q/2}$. Le point fixe hyperbolique (séparatrice) est en $q\theta_{1,hyp} = \pi$ et $\epsilon_{hyp} = 0$ et a pour énergie $\mathcal{H}_{hyp}^* = -2R^* \delta^{q/2}$. On note $\Delta\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ell}^* - \mathcal{H}_{hyp}^* = 4R^* \delta^{q/2}$. On peut alors réécrire le Hamiltonien sous la forme :

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_{ell}^* - \epsilon^2 - \Delta\mathcal{H} \sin^2 \left(\frac{q\theta_1}{2} \right)$$

Pour une trajectoire conservative donnée, le maximum de θ_1 est atteint lorsque la dérivée s'annule ($\dot{\theta}_1 = -2\epsilon = 0$). On a alors :

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_{ell}^* - \Delta\mathcal{H} \sin^2 \left(\frac{q\theta_{1,max}}{2} \right)$$

On définit alors naturellement l'amplitude (relative) de libration comme :

$$A = \frac{\mathcal{H}_{ell}^* - \mathcal{H}^*}{\Delta\mathcal{H}} = \sin^2\left(\frac{q\theta_{1,max}}{2}\right) = \frac{\epsilon^2}{\Delta\mathcal{H}} + \sin^2\left(\frac{q\theta_1}{2}\right)$$

Avec cette définition, l'amplitude est nulle au centre de la résonance ($\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_{ell}^*$ et $q\theta_{1,max} = 0$) et elle vaut 1 à la séparatrice ($\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_{hyp}^*$ et $q\theta_{1,max} = \pi$). Nous cherchons maintenant l'effet de la dissipation décrite par les équations (3.8) et (3.13) sur l'amplitude A . On a :

$$\begin{aligned}\dot{I}_1|_d &= -2\frac{I_1}{T_d} = -\frac{2}{T_d}(\delta + \epsilon) \\ \dot{\delta}|_d &= -\gamma\frac{I_1}{T_d} = -\frac{\gamma}{T_d}(\delta + \epsilon) \\ \dot{\epsilon}|_d &= \dot{I}_1|_d - \dot{\delta}|_d = \frac{\gamma - 2}{T_d}(\delta + \epsilon) \\ \Delta\dot{\mathcal{H}}|_d &= -\frac{q}{2}\frac{\gamma}{T_d}\Delta\mathcal{H}\left(1 + \frac{\epsilon}{\delta}\right)\end{aligned}$$

Ceci permet d'en déduire l'évolution instantanée de l'amplitude A due à la dissipation :

$$\begin{aligned}\dot{A}|_d &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon^2}{\Delta\mathcal{H}}\right)|_d \\ &= \frac{2\epsilon\dot{\epsilon}|_d}{\Delta\mathcal{H}} - \frac{\epsilon^2\dot{\Delta\mathcal{H}}|_d}{\Delta\mathcal{H}^2} \\ &= \frac{1}{T_d\Delta\mathcal{H}}\left(2\epsilon(\gamma - 2)(\delta + \epsilon) + \epsilon^2\frac{q}{2}\gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{\delta}\right)\right) \\ &= \frac{2}{T_d\Delta\mathcal{H}}\left((\gamma - 2)\delta\epsilon + \left(1 + \frac{q}{4}\right)\gamma - 2\right)\epsilon^2 + \frac{q}{4}\gamma\frac{\epsilon^3}{\delta}\end{aligned}$$

Pour obtenir l'évolution de l'amplitude sur le long terme, il faut moyenner cette dérivée instantanée sur une libration complète. Par symétrie du problème par rapport à $\epsilon = 0$, les termes en ϵ et ϵ^3 (puissances impaires de ϵ) sont de moyenne nulle. Il ne reste donc à calculer que la moyenne de ϵ^2 au cours d'une libration, et l'évolution de l'amplitude est simplement donnée par :

$$\langle \dot{A}|_d \rangle = \frac{2 \langle \epsilon^2 \rangle}{T_d\Delta\mathcal{H}} \left(\left(1 + \frac{q}{4}\right)\gamma - 2 \right)$$

Ceci permet déjà de connaître le signe de l'évolution de l'amplitude, ce qui est notre principal objectif. On peut cependant calculer explicitement la moyenne de ϵ^2 et ainsi obtenir l'énoncé exact de la proposition 2 :

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \left(\int_0^{\theta_{1,max}} \frac{\epsilon^2}{|\dot{\theta}_1|} d\theta_1 \right) / \left(\int_0^{\theta_{1,max}} \frac{1}{|\dot{\theta}_1|} d\theta_1 \right)$$

avec

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -2\epsilon \\ \epsilon^2 &= \Delta\mathcal{H}\left(\sin^2\left(\frac{q\theta_{1,max}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{q\theta_1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Les deux intégrales que nous devons calculer peuvent s'écrire à partir des intégrales elliptiques. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^2 \rangle &= \Delta\mathcal{H} \left(A + \frac{E(\sqrt{A})}{K(\sqrt{A})} - 1 \right) \\ &\approx \frac{\Delta\mathcal{H}A}{2} \end{aligned}$$

avec K et E les intégrales elliptiques complètes respectivement de première et deuxième espèces. Finalement, on obtient :

$$\langle \dot{A}|_d \rangle \approx \frac{A}{T_d} \left(\left(1 + \frac{q}{4} \right) \gamma - 2 \right)$$

Annexe B

Libration des angles résonants et évolution séculaire

Cette annexe présente une étude de l'évolution séculaire de systèmes proches d'une résonance de moyen mouvement de degré un et à excentricités faibles. On montre ici, à l'aide d'un modèle séculaire, que lorsque les modes propres séculaires sont suffisamment amortis (par exemple par l'effet de marée), les angles de la résonance de degré un la plus proche se mettent naturellement à librer. Ceci s'applique particulièrement dans le cas du scénario de sortie de la résonance à excentricités faibles (paragraphe 4.2.2) une fois que la séparatrice de la résonance a disparu. Nous avons montré au paragraphe 4.2.2 que l'amplitude de circulation autour du point fixe diminue au fur et à mesure que les excentricités sont amorties et que ceci implique que l'angle θ_1 (et donc les angles résonants σ_i) reste en libration après que le système a quitté la résonance et s'en est éloigné. Cette libration apparente qui a été observée dans les simulations numériques (voir Papaloizou & Terquem, 2010; Papaloizou, 2011; Lithwick & Wu, 2012; Delisle et al., 2012; Batygin & Morbidelli, 2013b, ainsi que la figure 4.7), est un effet purement géométrique qui peut prêter à confusion. Il est important d'insister sur le fait que d'un point de vue dynamique, le système n'est plus en résonance lorsque la séparatrice a disparu. Pour mieux comprendre cette libration apparente des angles résonants, on peut utiliser le modèle séculaire pour décrire l'évolution du système une fois qu'il a quitté la résonance. On reprend donc la méthode décrite au paragraphe 2.2.2 et on construit le Hamiltonien séculaire au premier ordre des masses (équation (2.7)) :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Delta_i^2} + \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2} C_{l, \bar{l}, 0}(\Delta) \prod_{i=1}^2 \bar{x}_i^{l_i} x_i^{\bar{l}_i}$$

Où les variables \bar{x}_i sont les coordonnées complexes de Poincaré classiques :

$$\bar{x}_i = \sqrt{\Delta_i - G_i} e^{i\varpi_i} = \sqrt{\Delta_i} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_i^2}} e^{i\varpi_i}$$

Rappelons que les demi-grands axes (les variables Δ_i) sont des constantes du problème moyen (mais pas du problème complet). À faible excentricité, on peut limiter le développement en \bar{x}_i au degré deux (premier ordre non-nul). On obtient alors le modèle classique de Laplace-Lagrange et l'évolution des variables \bar{x}_i est simplement décrite par une combinaison de modes propres :

$$\bar{x}_i = P_{i,j} e^{ig_j t}$$

La dissipation de marée a pour effet d'amortir les amplitudes de ces modes propres (e.g. Laskar et al., 2012) et de faire tendre le système vers le point fixe en $\bar{x}_i = 0$ (excentricités nulles). Cette description correspond à l'évolution des variables moyennes (\underline{V}). Revenons maintenant aux coordonnées initiales du problème (variables \underline{V}). Le changement de coordonnées qui permet d'obtenir le Hamiltonien séculaire s'écrit (équation (2.3)) :

$$\underline{V} = \underline{V} + \{W, \underline{V}\}$$

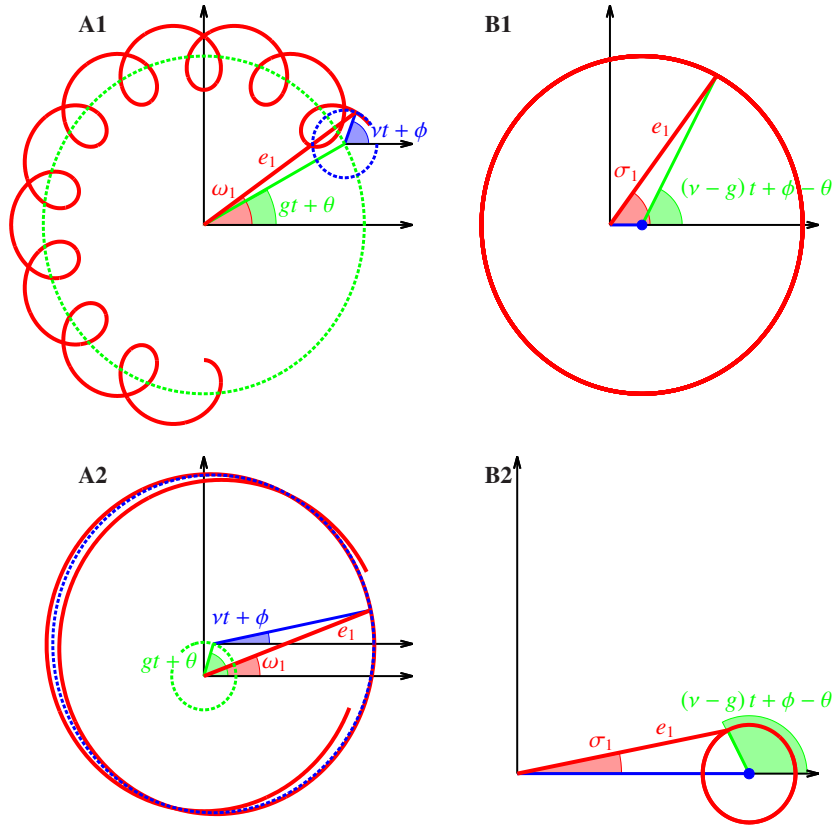


FIGURE B.1 – Illustration de la libration artificielle des angles résonants. On trace l'évolution des variables complexes $e_1 e^{i\varpi_1}$ (A1, A2) et $e_1 e^{i\sigma_1}$ (B1, B2) dans le cas de modes propres séculaires importants (A1, B1) et dans le cas de modes propres sévèrement amortis (A2, B2). Par souci de simplicité, on suppose qu'il n'y a qu'un seul mode propre séculaire (de fréquence g), mais le raisonnement serait le même sans cette hypothèse. Nous supposons également qu'il n'y a qu'un seul terme de courte période, correspondant à la résonance d'ordre un la plus proche, et dont la fréquence est $\nu = (p + 1)n_2 - pn_1$. La contribution séculaire est tracée en vert dans tous les graphiques alors que la contribution du terme de courte période est tracée en bleu. Les courbes rouges correspondent à la somme des deux contributions. Quand l'amplitude du mode propre séculaire est importante, le terme de courte période apporte seulement de petites perturbations autour de l'évolution séculaire de l'argument de périhélie ϖ_1 (A1) et de l'angle résonant σ_1 (B1) qui circule. Lorsque le mode propre est amorti, l'évolution de ϖ_1 (A2) et σ_1 (B2) est dominée par le terme de fréquence ν . L'amplitude de ce terme de courte période ne change pas entre A1, B1 et A2, B2 (l'échelle des graphiques est modifiée pour plus de lisibilité), mais dans B2, σ_1 entre en libration parce que le centre de circulation (marquée d'un point bleu dans B1, B2) n'est pas en zéro.

ce qui se traduit par :

$$\underline{\lambda}_i = \lambda_i + \frac{\partial W}{\partial \Delta_i}$$

$$\underline{\Lambda}_i = \Lambda_i - \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$$

$$\underline{x}_i = x_i - \mathbf{i} \frac{\partial W}{\partial \bar{x}_i}$$

avec (équation (2.6))

$$W = \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2, k \neq (0,0)} \frac{C_{l, \bar{l}, k}(\Delta)}{\mathbf{i}(n_1 k_1 + n_2 k_2)} x_1^{l_1} \bar{x}_1^{\bar{l}_1} x_2^{l_2} \bar{x}_2^{\bar{l}_2} e^{\mathbf{i}(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)}$$

On a donc pour les variables x_i :

$$x_1 = x_1 - \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2, k \neq (0,0)} \frac{C_{l, \bar{l}, k}(\Delta)}{n_1 k_1 + n_2 k_2} x_1^{l_1} \bar{x}_1^{\bar{l}_1 - 1} x_2^{l_2} \bar{x}_2^{\bar{l}_2} e^{\mathbf{i}(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} \quad (\text{B.1})$$

$$x_2 = x_2 - \sum_{l, \bar{l} \in \mathbb{N}^2, k \neq (0,0)} \frac{C_{l, \bar{l}, k}(\Delta)}{n_1 k_1 + n_2 k_2} x_1^{l_1} \bar{x}_1^{\bar{l}_1} x_2^{l_2} \bar{x}_2^{\bar{l}_2 - 1} e^{\mathbf{i}(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} \quad (\text{B.2})$$

Le plus souvent, ce changement de coordonnées des variables moyennes aux variables initiales du problème n'ajoute que de petites corrections (de courte période) aux termes séculaires dominants. Cependant, dans le cas où les modes propres séculaires sont très faibles, les termes de courte période peuvent dominer. Supposons que l'on soit dans le cas extrême de modes propres nuls ($x_i = 0$). Les seuls termes des équations (B.1) et (B.2) qui ne s'annulent pas sont ceux qui correspondent aux résonances de degré un :

$$x_1 = - \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{C_{(0,0),(1,0),(-p,p+1)}(\Delta)}{(p+1)n_2 - pn_1} e^{\mathbf{i}((p+1)\lambda_2 - p\lambda_1)}$$

$$x_2 = - \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{C_{(0,0),(0,1),(-p,p+1)}(\Delta)}{(p+1)n_2 - pn_1} e^{\mathbf{i}((p+1)\lambda_2 - p\lambda_1)}$$

Lorsque le système considéré est proche de l'une de ces résonances de degré un, le petit diviseur associée à cette résonance est plus petit que ceux des autres résonances et c'est donc le terme correspondant à cette résonance qui domine l'évolution des x_i . On a alors :

$$\tilde{x}_1 \approx - \frac{C_{(0,0),(1,0),(-p,p+1)}(\Delta)}{(p+1)n_2 - pn_1} e^{\mathbf{i}((p+1)\lambda_2 - p\lambda_1)}$$

$$\tilde{x}_2 \approx - \frac{C_{(0,0),(0,1),(-p,p+1)}(\Delta)}{(p+1)n_2 - pn_1} e^{\mathbf{i}((p+1)\lambda_2 - p\lambda_1)}$$

avec $p+1:p$ la résonance de degré un la plus proche du système. Ainsi, les longitudes des périhélie des planètes (arguments des variables x_i) sont données par :

$$\varpi_i \approx (p+1)\lambda_2 - p\lambda_1 + \epsilon_i$$

avec $\epsilon_i = 0$ ou π suivant les signes des coefficients C . Contrairement aux longitudes des périhélie, les longitudes moyennes restent dominées par l'évolution des variables moyennes ($\lambda_i \approx \lambda_i$). Finalement, si l'on reconstitue les angles résonants, on a :

$$\varrho_i = (p+1)\lambda_2 - p\lambda_1 - \varpi_i \approx -\epsilon_i = cte$$

On observe donc bien une libration des angles résonants, même si le système n'est pas en résonance. L'évolution du système une fois sorti de la résonance est parfaitement décrite par un modèle séculaire, à condition de revenir aux variables initiales du problème et de réintroduire les termes de courte période. Bien que les angles ϱ_i soient en libration, on n'a pas de lien de commensurabilité entre les fréquences fondamentales du système ($(p+1)n_2 - pn_1 - g_i \neq 0$) car les longitudes des périhélie ne sont plus dominées par les fréquences séculaires g_i . La libration artificielle des angles résonants observée dans la figure 4.7 est donc uniquement due au fait que les modes propres séculaires sont amortis. La figure B.1 donne une illustration de ce phénomène.

Annexe C

Articles

Ce chapitre présente les différents articles rédigés pendant ma thèse. Les trois premiers articles concernent la dissipation par effet de marée dans les systèmes en résonance et leur contenu est en grande partie repris dans le corps de la thèse. Le dernier article est issu d'un travail que j'ai commencé en Master et terminé au début de ma thèse et qui concerne les astéroïdes de la famille de Vesta. Tous ces articles sont publiés dans la revue *Astronomy & Astrophysics*, excepté le troisième qui a été soumis récemment comme lettre à l'éditeur dans le même journal.

C.1 Dissipation in planar resonant planetary systems

Cet article étudie le scénario de sortie des résonances de degré un à excentricités faibles notamment dans l'optique d'expliquer les statistiques de rapport de périodes obtenues par la mission *Kepler* (voir paragraphe 4.2.2). On construit un modèle conservatif des résonances à deux degrés de liberté (non-intégrable) et on cherche les points fixes du problème qui servent de repères pour l'étude de l'évolution du système en présence de dissipation (paragraphe 2.3 et 2.5). Le modèle est paramétré par une unique constante du problème conservatif (le moment cinétique total renormalisé G , voir paragraphe 2.3.2.4). L'évolution de ce paramètre lorsque l'on tient compte de la dissipation permet de prévoir l'évolution du système et en particulier la capture ou la sortie de la résonance (paragraphe 3.2). On obtient une formule générale pour l'évolution de G qui peut prendre en compte toute forme de dissipation (cf. équation (3.2)). Lorsque les planètes subissent une migration convergente, on montre conformément à la littérature que les planètes peuvent être capturées en résonances. Lorsque la dissipation par effet de marée dans les planètes est prédominante, le système a tendance à sortir de la résonance vers la zone de circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$). Ce phénomène produit donc naturellement un excès de planètes proches des résonances de degré un mais en circulation externe (voir paragraphe 4.2.2). De plus, nous nous attachons dans cet article à étudier l'état final des systèmes une fois le rapport de périodes significativement supérieur au rapport résonant. En effet, plusieurs études (e.g. Papaloizou & Terquem, 2010; Papaloizou, 2011; Lithwick & Wu, 2012; Batygin & Morbidelli, 2013b) ont montré que les angles résonants continuent de librer tout au long de l'évolution du système, y compris lorsque le rapport de périodes est loin du rapport résonant. Cette libration des angles résonants peut prêter à confusion, et différents auteurs ont qualifié ces systèmes de résonants. Nous montrons ici que cette libration est un effet purement géométrique et non dynamique, dû à l'amortissement des modes propres séculaires (voir annexe B). De plus, un modèle purement séculaire permet d'expliquer naturellement ce phénomène. On en conclut que ces systèmes sont non-résonants.

A&A 546, A71 (2012)
 DOI: [10.1051/0004-6361/201220001](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220001)
 © ESO 2012

**Astronomy
&
Astrophysics**

Dissipation in planar resonant planetary systems

J.-B. Delisle¹, J. Laskar¹, A. C. M. Correia^{1,2}, and G. Boué^{1,3}

¹ Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
 e-mail: delisle@imcce.fr

² Department of Physics, I3N, University of Aveiro, Campus Universitário de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal

³ Centro de Astrofísica, Universidade do Porto, Rua das Estrelas, 4150-762 Porto, Portugal

Received 12 July 2012 / Accepted 25 August 2012

ABSTRACT

Close-in planetary systems detected by the *Kepler* mission present an excess of period ratios that are just slightly larger than some low order resonant values. This feature occurs naturally when resonant couples undergo dissipation that damps the eccentricities. However, the resonant angles appear to librate at the end of the migration process, which is often believed to be an evidence that the systems remain in resonance. Here we provide an analytical model for the dissipation in resonant planetary systems valid for low eccentricities. We confirm that dissipation accounts for an excess of pairs that lie just aside from the nominal period ratios, as observed by the *Kepler* mission. In addition, by a global analysis of the phase space of the problem, we demonstrate that these final pairs are non-resonant. Indeed, the separatrices that exist in the resonant systems disappear with the dissipation, and remains only a circulation of the orbits around a single elliptical fixed point. Furthermore, the apparent libration of the resonant angles can be explained using the classical secular averaging method. We show that this artifact is only due to the severe damping of the amplitudes of the eigenmodes in the secular motion.

Key words. celestial mechanics – planets and satellites: general – planetary systems

1. Introduction

Dissipation due to tidal interactions is a possible mechanism that explains the abundance of planetary systems that lie near but not at exact mean-motion commensurability. [Papaloizou & Terquem \(2010\)](#) (in the case of three planets Laplace resonances) and [Papaloizou \(2011\)](#) (for two planets resonances) showed that planets that have been temporarily locked in resonance due to differential migration could have their period ratios to depart from strict commensurability due to the circularization of their orbits by tidal interactions with the star. More recently, [Batygin & Morbidelli \(2012\)](#) and [Lithwick & Wu \(2012\)](#) use similar effects to explain the excess of systems of two planets that lie near resonances but with planets slightly farther from each other than the nominal mean-motion commensurability ratio.

One of the most intriguing features that is common in these different studies is the observation that resonant angles continue to librate far from exact commensurability and the authors leave unanswered the question of determining if these systems are in resonance or not. It seems important to clarify this point and to understand why resonant angles can librate so far from exact commensurability.

Our analysis is based on the study of the phase space of two planets in mean-motion resonance (MMR) in the conservative case (without any dissipation). This is the object of Sect. 2. We pay a particular attention to apsidal corotation resonances (ACR) which play a major role in the dynamics of these systems and in the understanding of the topology of the phase space. ACR have been extensively studied both in the asteroidal restricted problem (e.g. [Ferraz-Mello et al. 1993](#)) and the planetary problem (e.g. [Hadjidemetriou 2002](#); [Michtchenko et al. 2006](#)).

Most of the studies on the subject have been made using numerical (or semi-analytical) models that remain valid for arbitrary values of the eccentricities but which do not always provide a global picture of the dynamics. In the present study we are only concerned in the dynamics at low eccentricities since our aim is to understand the motion at the end of the circularization process. A completely analytical model is thus well suited in this case. Analytical studies of planetary MMR have already been done up to degree two in eccentricities in the cases of the 2:1 ([Callegari et al. 2004](#)) and the 3:2 ([Callegari et al. 2006](#)) MMR.

The dissipative case (studied in Sect. 3) is modeled using the conservative case as a basis and very simple and general prescriptions for the dissipation. Our study is mainly aimed at understanding the impact of tides on the dynamics of resonant planets pairs and, in this case, we follow the prescriptions introduced by [Papaloizou \(2011\)](#). However we show that the differential migration process that allows a resonant locking of both planets can also be accounted for in our model. This process has already been widely studied (e.g. [Lee & Peale 2002](#); [Ferraz-Mello et al. 2003](#); [Lee 2004](#); [Beaugé et al. 2006](#)), and is also considered in [Papaloizou & Terquem \(2010\)](#); [Papaloizou \(2011\)](#). Eventually, we treat this perturbation of the conservative case by following the lines of [Laskar et al. \(2012\)](#).

In Sect. 4 we show that the final state of the resonant systems that undergo a circularization process is very well characterized by the secular normal form. We explain, with the secular problem, why resonant angles appear to librate even far from resonances.

Finally, we present in Sect. 5 the results of two numerical simulations that confirm and illustrate the different mechanisms that we highlight with our analytical model.

2. Dynamics of two resonant planets in the conservative case

2.1. Model

We study in this section the case of two planets orbiting a star in the same plane and without any dissipative force. This problem is usually referred to as the planar planetary three body problem. We note with a subscript 1 the internal planet and 2 the external one. The star is referred to as body 0. Masses are noted m_i . For both planets we define: $\mu_i = \mathcal{G}(m_0 + m_i)$, and $\beta_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$, where \mathcal{G} is the gravitational constant. We note a_i the semi-major axis of planet i , and e_i its eccentricity.

We use Delaunay canonical pairs of astrometric coordinates for both planets. The actions are the circular angular momentum and the angular momentum of both planets:

$$\hat{\Lambda}_i = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}, \quad (1)$$

$$\hat{G}_i = \hat{\Lambda}_i \sqrt{1 - e_i^2} = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i (1 - e_i^2)}. \quad (2)$$

The associated angles are the mean anomalies (M_i) and the arguments of periastron (ω_i) of both planets.

The Hamiltonian of the system reads, in these coordinates:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0(\hat{\Lambda}) + \hat{\mathcal{H}}_1(\hat{\Lambda}, \hat{G}, M, \omega), \quad (3)$$

where $\hat{\mathcal{H}}_0$ is the Keplerian part and $\hat{\mathcal{H}}_1$ is the perturbative part due to planet-planet interactions taking into account both direct and indirect effects. The Keplerian part depends only on $\hat{\Lambda}_i$ ($i = 1, 2$):

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2 \hat{\Lambda}_i^2}. \quad (4)$$

Whereas the perturbative part depends on all eight Delaunay coordinates. We do not need to express the explicit form of $\hat{\mathcal{H}}_1$ at this point but it could be seen as a Fourier series of all four angles (with coefficients depending on actions).

At first sight, we have to deal with a four degrees of freedom differential system. However, we will now introduce two well-known transformations which will reduce this problem to two degrees of freedom. The first reduction makes use of the total angular momentum conservation and is always valid. The second one corresponds to an averaging of the equations of motion and is only valid near a specified MMR. More precisely, it is only valid far from all other MMR.

2.1.1. Conservation of the total angular momentum

In the Delaunay coordinates system, the total angular momentum conservation ($\hat{G} = \hat{G}_1 + \hat{G}_2$) is equivalent to the fact that the Hamiltonian depends only on the value of the difference of arguments of periastron: $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ and not on individual values of both angles. The reduction resulting from the conservation of the angular momentum is performed by using the coordinates $\Delta\omega, \omega_2$ instead of ω_1, ω_2 . These two new angles are respectively canonically conjugated to the actions \hat{G}_1, \hat{G} . Therefore, the system of coordinates ($M_1, \hat{\Lambda}_1, M_2, \hat{\Lambda}_2, \Delta\omega, \hat{G}_1, \omega_2, \hat{G}$) is canonical and with these coordinates, ω_2 does not appear anymore in the expression of the Hamiltonian. \hat{G} is a first integral of the equations of motion. We can thus study the three degrees of freedom system constituted of ($M_1, \hat{\Lambda}_1, M_2, \hat{\Lambda}_2, \Delta\omega, \hat{G}_1$) and consider \hat{G} as a parameter of this system.

2.1.2. Averaging the Hamiltonian near a MMR

We now suppose that the system is near a mean-motion commensurability of the form $(p + q):p$, that is:

$$-p\dot{M}_1 + (p + q)\dot{M}_2 \approx 0. \quad (5)$$

We may then introduce the argument of the $(p + q):p$ MMR:

$$\sigma = -\frac{p}{q}M_1 + \left(1 + \frac{p}{q}\right)M_2, \quad (6)$$

such as $\dot{\sigma} \approx 0$.

We then construct the resonant normal form to the first order of the planets masses (with respect to the stellar mass) by averaging over all rapid angles, i.e. all combinations of the mean anomalies that are not harmonics of σ . By doing this averaging we need to introduce a new set of variables which corresponds to the averaged problem. The change of coordinates is close to identity so we can identify both sets of coordinates in first approximation. Strictly speaking the transformation to the initial set of coordinates reintroduces high frequencies (e.g. [Morbidelli 2002](#)). Before constructing the normal form, we introduce the change of variables:

$$\hat{I} = -\frac{q}{p}\hat{\Lambda}_1, \quad (7)$$

$$\Gamma = \left(1 + \frac{q}{p}\right)\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2, \quad (8)$$

and we consider the canonical set of coordinates: $(\sigma, \hat{I}, M_2, \Gamma, \Delta\omega, \hat{G}_1)$. With this set of coordinates, the resonant normal form is obtained by averaging over M_2 . Thus, by definition, M_2 does not appear anymore in the averaged Hamiltonian, and Γ is a first integral of the averaged motion. Therefore, the system is reduced to a two degrees of freedom problem with four canonical coordinates: $(\sigma, \hat{I}, \Delta\omega, \hat{G}_1)$ and two parameters: \hat{G} and Γ . However this set of coordinates is not very well suited for the study of low-eccentricities systems and it is a lot more convenient to introduce rectangular canonically conjugated variables similar to Poincaré variables.

2.1.3. Rectangular coordinates

We first introduce the two resonant angles which correspond to both planets (e.g. [Ferraz-Mello et al. 1993](#)):

$$\sigma_1 = \sigma - \left(1 + \frac{p}{q}\right)\Delta\omega = -\frac{p}{q}\lambda_1 + \left(1 + \frac{p}{q}\right)\lambda_2 - \omega_1, \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \sigma - \frac{p}{q}\Delta\omega = -\frac{p}{q}\lambda_1 + \left(1 + \frac{p}{q}\right)\lambda_2 - \omega_2, \quad (10)$$

where $\lambda_i = M_i + \omega_i$ is the mean longitude of planet i . We complete this change of variables with the canonically conjugated actions:

$$\hat{I}_1 = -\frac{p}{q}\hat{I} - \hat{G}_1 = \hat{\Lambda}_1 - \hat{G}_1, \quad (11)$$

$$\hat{I}_2 = \left(1 + \frac{p}{q}\right)\hat{I} + \hat{G}_1 = \hat{\Lambda}_2 - \hat{G}_2 + \hat{G} - \Gamma. \quad (12)$$

Note that, since \hat{G} and Γ are constants of the motion, we can redefine the action \hat{I}_2 as:

$$\hat{I}_2 = \hat{\Lambda}_2 - \hat{G}_2, \quad (13)$$

without any change for \hat{I}_1, σ_1 and σ_2 .

The associated rectangular coordinates are then:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\hat{I}_i} e^{i\sigma_i}. \quad (14)$$

2.1.4. Elimination of the first integral Γ

The dynamics of our two degrees of freedom system should depend on the value of both first integrals: Γ and \hat{G} . However, it is possible to eliminate the dependency in Γ by dividing all actions by its value:

$$\Lambda_i = \frac{\hat{\Lambda}_i}{\Gamma}, \quad (15)$$

$$G_i = \frac{\hat{G}_i}{\Gamma}, \quad (16)$$

$$G = \frac{\hat{G}}{\Gamma} = G_1 + G_2, \quad (17)$$

$$I_1 = \frac{\hat{I}_1}{\Gamma} = \Lambda_1 - G_1, \quad (18)$$

$$I_2 = \frac{\hat{I}_2}{\Gamma} = \Lambda_2 - G_2, \quad (19)$$

$$x_i = \frac{\hat{x}_i}{\sqrt{\Gamma}}. \quad (20)$$

With these renormalized variables, Hamilton equations are still valid if the Hamiltonian is also divided by Γ :

$$\check{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\mathcal{H}}}{\Gamma}. \quad (21)$$

However, the Hamiltonian $\check{\mathcal{H}}$, and thus the dynamics, still depends on the value of Γ . The complete elimination of Γ is achieved by renormalizing both energy and time scales:

$$\mathcal{H} = \Gamma^3 \check{\mathcal{H}} = \Gamma^2 \hat{\mathcal{H}}, \quad (22)$$

$$\tau = \frac{t}{\Gamma^3}. \quad (23)$$

It can be verified that \mathcal{H} does not depend anymore on Γ and Hamilton's equations now reads:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = -i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{x}_i}. \quad (24)$$

This means that the value of Γ does not influence the dynamics of the system except by changing the scales of distance, time and energy (respectively by a factor of Γ^2 , Γ^3 and $1/\Gamma^2$). With this renormalization, we reduced the number of parameters of our system from two (\hat{G} , Γ) to one ($G = \hat{G}/\Gamma$).

2.1.5. Explicit form of the Hamiltonian

We need to express the Hamiltonian \mathcal{H} as a function of x_i ($i = 1, 2$) and G . Let us start with the Keplerian part. The renormalized Keplerian part (\mathcal{H}_0) has the same form as $\hat{\mathcal{H}}_0$ (see Eq. (4)) if we replace $\hat{\Lambda}_i$ with Λ_i . Moreover, Λ_i are simple functions of x_i and G :

$$\Lambda_1 = -\frac{p}{q}(G + \mathcal{D} - 1), \quad (25)$$

$$\Lambda_2 = 1 - \left(1 + \frac{q}{p}\right)\Lambda_1 = \left(1 + \frac{p}{q}\right)(G + \mathcal{D}) - \frac{p}{q}, \quad (26)$$

where \mathcal{D} is the (renormalized) angular momentum deficit (AMD, e.g. Laskar 2000) defined by:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^2 x_i \bar{x}_i \quad (= \Lambda_1 + \Lambda_2 - G). \quad (27)$$

Therefore, the Keplerian part is obtained by substituting Λ_i values in the expression of \mathcal{H}_0 . This expression is then expanded to a given degree in eccentricities (i.e. to a given power in x_i variables). Note that the Keplerian part is now expressed as a power series of eccentricities even if it only depends on semi-major axes in Delaunay coordinates system. It should be remarked that x_i variables only appear in the Keplerian part with \mathcal{D} (which is of degree two and symmetrical for both planets). As a consequence the Keplerian part only contains terms of even degree in eccentricities.

For the perturbative part, we use the expansion method presented in Laskar & Robutel (1995) and implemented in the algebraic manipulator TRIP (Gastineau & Laskar 2011). The Poincaré coordinates used in Laskar & Robutel (1995), noted x , and x' , are related to our rectangular coordinates with the relations:

$$x = \bar{x}_1 e^{i\sigma_0}, \quad (28)$$

$$x' = \bar{x}_2 e^{i\sigma_0}, \quad (29)$$

with:

$$\sigma_0 = -\frac{p}{q}\lambda_1 + \left(1 + \frac{p}{q}\right)\lambda_2. \quad (30)$$

Laskar & Robutel (1995) method is aimed at computing the perturbative part of the Hamiltonian in power series of x , x' , and in Fourier series of the mean longitudes λ_1 , λ_2 (with coefficients depending on $\hat{\Lambda}_i$). The averaging method described in Sect. 2.1.2 consists in selecting in this expansion the terms that do not depend upon combinations of the mean longitudes other than σ_0 (and its harmonics).

Then it is straightforward to express \mathcal{H}_1 as a function of x_i and G , by substituting x , x' and $\hat{\Lambda}_i$ by their values and renormalizing by Γ . We obtain a power series of x_i with coefficients depending on G .

The ratio between the perturbative and the Keplerian parts is of the order of the mass ratio between the planets and the star. To be consistent, the Keplerian part must be expanded to a higher degree in eccentricities than the perturbative part.

As an example, for a first order resonance (of the form $(p+1):p$), the Hamiltonian expanded to the fourth degree in eccentricities for the Keplerian part and to the second degree for the perturbation (noted degree 4-2) has the form:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & K^{(2)}\mathcal{D} + K^{(4)}\mathcal{D}^2 \\ & + S^{(0)}\mathcal{D} + S_1^{(2)}x_1\bar{x}_1 + S_2^{(2)}x_2\bar{x}_2 + S_{12}^{(2)}(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) \\ & + R_1^{(1)}(x_1 + \bar{x}_1) + R_2^{(1)}(x_2 + \bar{x}_2) \\ & + R_1^{(2)}(x_1^2 + \bar{x}_1^2) + R_2^{(2)}(x_2^2 + \bar{x}_2^2) + R_{12}^{(2)}(x_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2), \end{aligned} \quad (31)$$

where all coefficients (K , S , R) depends on G and on the masses, and K stands for Keplerian terms, S for secular terms and R for resonant terms (see Appendix A for a description of their computation). For a resonance of order two (or more), the expression would be similar but there would not be resonant terms of the degree one. These terms are very important in the dynamics since they introduce constant terms (non-zero right-hand side) in Hamilton's equations (Eq. (24)). When there are no first degree terms (resonance of order two or more), $x_i = 0$ ($i = 1, 2$) is always a fixed point. On the contrary, for first order resonances, this fixed point does not exist and an initially circular system will not stay circular. Note that since the Hamiltonian is expanded as series of eccentricities, this model is only valid for low eccentricities.

A&A 546, A71 (2012)

2.2. Study of the dynamics

2.2.1. Energy levels

We consider a first order resonance and construct the resonant normal form developed up to degree 4 for the Keplerian part and to first degree for the perturbation (noted degree 4-1). For given values of the masses of the three bodies, a given mean-motion commensurability $(p+q):p$, and a given value of G , we are able to compute the needed coefficients K , S and R . We can then look at the energy levels of this Hamiltonian. Since our problem has two degrees of freedom and four dimensions, we cannot have a global view of these energy levels but we can represent them on section planes. Figure 1 shows the energy levels, represented in different section planes (see the legend), in the case of the 2:1 MMR with a star mass of $m_0 = m_\odot$ (solar mass), planets masses of $m_1 = m_2 = m_\oplus$ (Earth's mass), and with $G = G_0(1-10^{-4})$. G_0 is the value of the total circular angular momentum at nominal resonance. At nominal resonance, the exact commensurability of mean-motions induces the relation:

$$\frac{n_{1,r}}{n_{2,r}} = 1 + \frac{q}{p} = \left(\frac{\Lambda_{2,r}}{\Lambda_{1,r}}\right)^3 \eta^3, \quad (32)$$

$$\eta = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{2/3} \frac{\beta_1}{\beta_2} = \left(\frac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1}\right)^{1/3} \frac{m_1}{m_2}. \quad (33)$$

Together with the relation $\left(1 + \frac{q}{p}\right)\Lambda_{1,r} + \Lambda_{2,r} = 1$ (see Eq. (26)), this imposes the values $\Lambda_{1,r}$ and $\Lambda_{2,r}$ at nominal resonance:

$$\Lambda_{1,r} = \left[\left(1 + \frac{q}{p}\right) + \left(1 + \frac{q}{p}\right)^{1/3} \eta^{-1} \right]^{-1}, \quad (34)$$

$$\Lambda_{2,r} = \left[1 + \left(1 + \frac{q}{p}\right)^{2/3} \eta \right]^{-1}, \quad (35)$$

G_0 is then given by:

$$G_0 = \Lambda_{1,r} + \Lambda_{2,r} = \left\{ 1 + \frac{q}{p} \left[1 + \left(1 + \frac{q}{p}\right)^{1/3} \eta^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (36)$$

In Fig. 1, we distinguish three areas in the different section planes (except in the plane $(\sin \sigma_1, \sin \sigma_2)$ on the top right of the graph). There are two zones of circulation: internal circulation for low eccentricities and external circulation for high eccentricities. Between these two circulation areas, we observe a libration zone (banana-shaped level curves) separated from both circulation areas by two separatrices. Fixed points of the system (see next section) are marked with colored dots (for stable ones) and crosses (for unstable ones). The red dot corresponds to the libration center in Fig. 1, bottom-left.

Figure 2 shows the energy levels on the section plane defined by $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$ for increasing values of the parameter G and for the 2:1 and the 3:2 MMR. The masses are the same as for Fig. 1 ($m_0 = m_\odot$, $m_1 = m_2 = m_\oplus$). Figure 2, C1 is the same as Fig. 1, bottom-left. When G decreases (Figs. 2, A1, B1), the libration area moves to higher eccentricities and the internal circulation area takes more space. On the contrary, for higher values of G (Figs. 2, D1 to F1), the internal circulation and the libration areas tend to shrink and eventually completely disappear leaving only the external circulation area.

We observe the same evolution for the 3:2 MMR (Figs. 2, A2 to F2) and it seems that this behavior is common to all first order MMR.

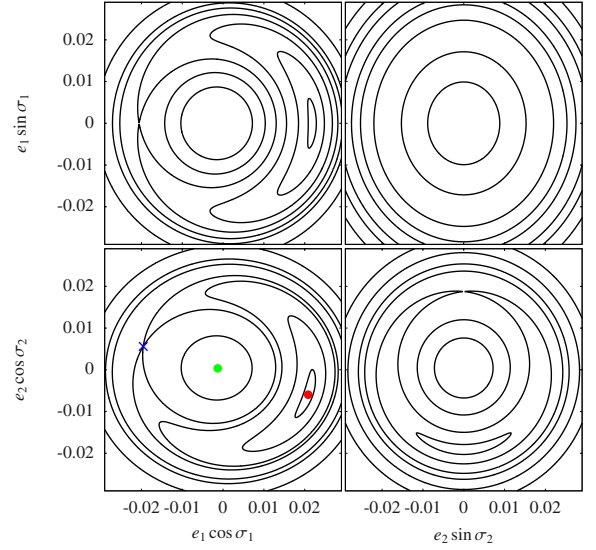


Fig. 1. 2:1 resonance energy levels in section planes defined by: $e_2 = 0$ (top left), $\cos \sigma_1 = \cos \sigma_2 = 0$ (top right), $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$ (bottom left), and $e_1 = 0$ (bottom right). Stable ACR solutions are highlighted with colored dots (red and green). Unstable ones are highlighted with colored crosses (blue). The star mass is given by $m_0 = m_\odot$ and planets masses by $m_1 = m_2 = m_\oplus$. The constant G is set to $G = G_0(1-10^{-4})$. The Hamiltonian is developed up to degree 4-1.

Even if these section planes give an insight on the nature of the motion, it is important to keep in mind that the real motion occurs on the total four dimensional phase space and that these sections cannot provide a global picture of the dynamics. The easiest way to have a good insight on the global structure of the phase space is to look at the positions and natures of the fixed points of the system. These fixed points are commonly referred to as apsidal corotation resonances or ACR (e.g. Ferraz-Mello et al. 1993).

2.2.2. Fixed points

The positions of the fixed points are obtained solving Hamilton's equations (Eq. (24)). For instance, at degree 4-2 (Eq. (31)):

$$0 = \left(K^{(2)} + 2K^{(4)}\mathcal{D} + S^{(0)} + S_1^{(2)} \right) x_1 + S_{12}^{(2)} x_2 + 2R_1^{(2)} \bar{x}_1 + R_{12}^{(2)} \bar{x}_2 + R_1^{(1)}, \quad (37)$$

$$0 = S_{12}^{(2)} x_1 + \left(K^{(2)} + 2K^{(4)}\mathcal{D} + S^{(0)} + S_2^{(2)} \right) x_2 + R_{12}^{(2)} \bar{x}_1 + 2R_2^{(2)} \bar{x}_2 + R_2^{(1)}. \quad (38)$$

This imply to solve a system of four polynomial real equations (real and imaginary parts of Eqs. (37), (38)) with four real unknowns (real and imaginary parts of x_1, x_2). We solve it using the *Maple RootFinding[Isolate]* function (see Rouillier 1999). Then, for each solution, we linearize the equations of motion around the fixed point in order to compute the eigenvalues and to distinguish between elliptic (purely imaginary eigenvalues) and hyperbolic (nonzero real parts) fixed points.

Degree 4-1

Figure 3 shows the positions and nature of ACR solutions as functions of G , in case of the 2:1 MMR with the same masses

J.-B. Delisle et al.: Dissipation in planar resonant planetary systems

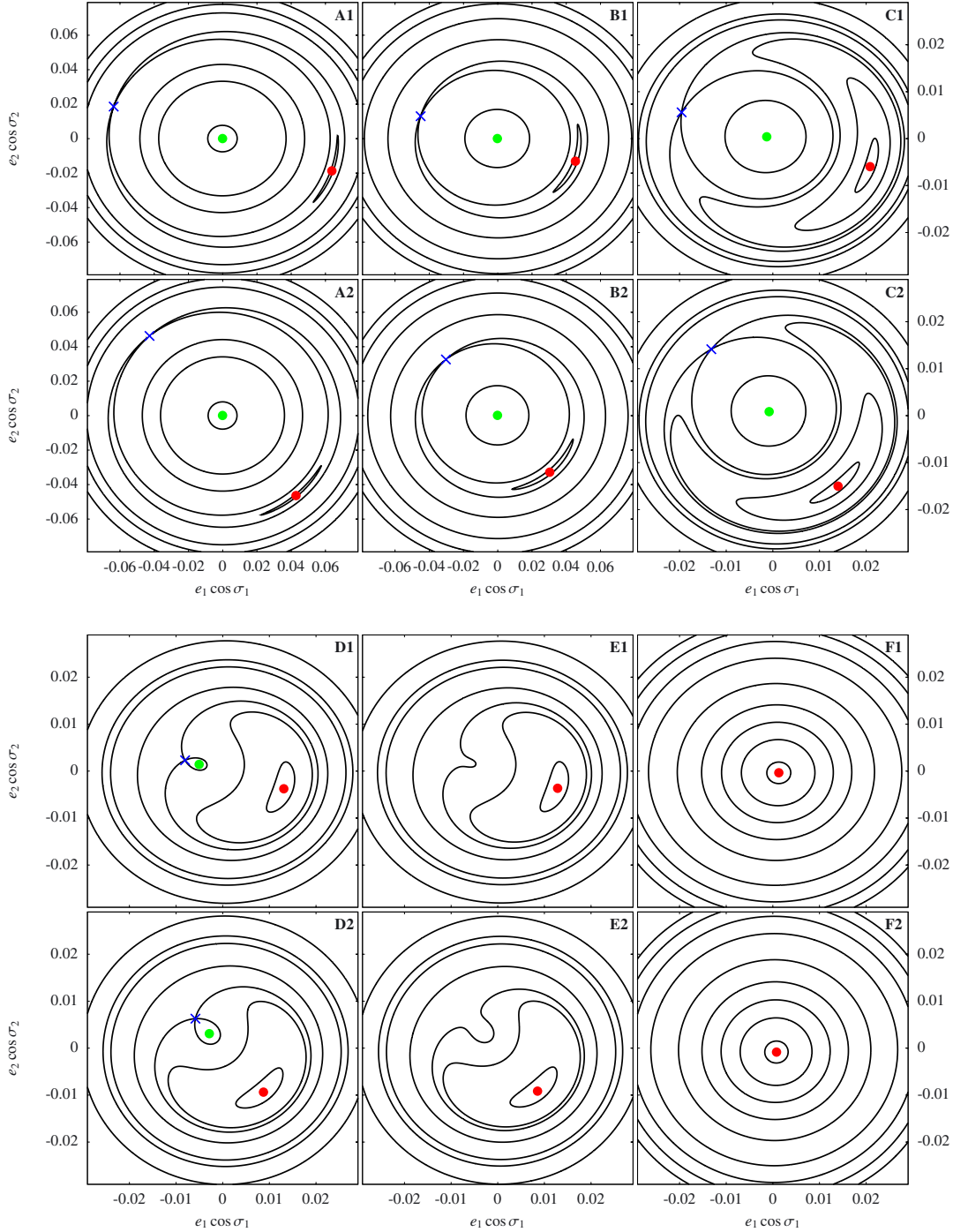


Fig. 2. Energy levels sections in the plane defined by $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$ for the 2:1 resonance (A1 to F1), and the 3:2 resonance (A2 to F2). The constant $G/G_0 - 1$ is set to -10^{-3} (A1, A2), -5×10^{-4} (B1, B2), -10^{-4} (C1, C2), -3.2×10^{-5} (D1, D2), -3×10^{-5} (E1, E2), and $+10^{-3}$ (F1, F2). Stable ACR solutions are highlighted with colored dots (red and green). Unstable ones are highlighted with colored crosses (blue). The star mass is given by $m_0 = m_\odot$ and planets masses by $m_1 = m_2 = m_\oplus$. The Hamiltonian is developed up to degree 4-1. Note that the scales are different for graphs A1, A2, B1, and B2 than for other graphs.

than before. The Hamiltonian is still developed up to degree 4-1. In this figure, continuous lines represent stable fixed points and dashed lines represent unstable ones. The choice of colors is consistent with Figs. 1 and 2. We gave the positions of ACR only

in the directions $e_1 \cos \sigma_1$ and $e_2 \cos \sigma_2$ because all ACR solutions that we found have $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$. On the left of Fig. 3 (lowest values of G), there are two elliptic and one hyperbolic ACR. This corresponds to the situation of Figs. 1 and 2,

A&A 546, A71 (2012)

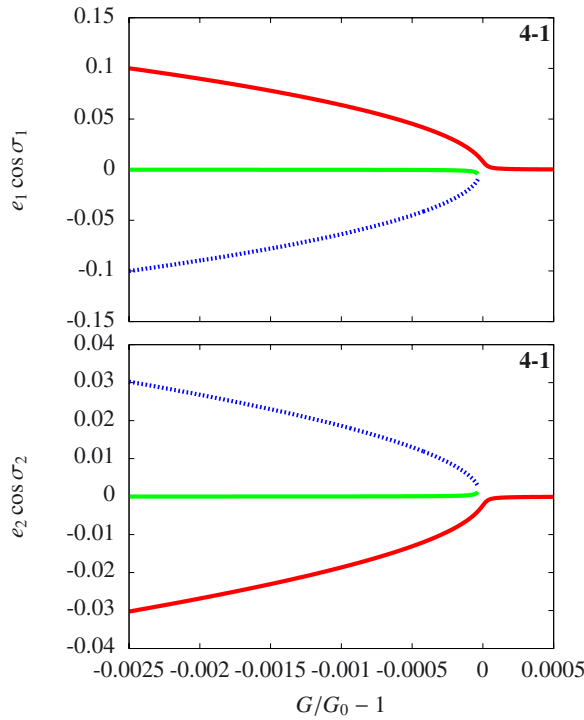


Fig. 3. 2:1 ACR positions as functions of G . The star mass is given by $m_0 = m_\odot$ and planets masses by $m_1 = m_2 = m_\oplus$. The Hamiltonian is developed up to degree 4-1. Elliptic (stable) ACR are plotted using continuous lines whereas hyperbolic (unstable) ACR are plotted using dashed lines. At this degree of development, all ACR have $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$.

A1 to D1. The red elliptic ACR corresponds to the center of the libration area. The green one corresponds to the center of the internal circulation area. The blue hyperbolic ACR corresponds to the crossing of internal and external separatrices.

Around $G = G_0$, we observe a bifurcation and the green and the blue ACR disappear whereas the red one remains the only one to survive and it stay stable. This corresponds to the situation observed in Fig. 2, E1, F1 and which cannot be considered as a resonant situation.

In order to have a better view of the spatial positions of these ACR we plotted in Fig. 4 the semi-major axes ratio of ACR solutions as functions of G . We observe that the center of libration corresponds to values of α lower than the nominal resonant value. This is equivalent to values of P_2/P_1 greater than the nominal resonant value (2). It means that planets are farther away from each other than the nominal resonance distance. On the contrary, the hyperbolic ACR and the center of the internal resonant area correspond to higher values of α , thus two planets closer to each other than the nominal resonance distance.

Note that when the system moves away from the semi-major axes nominal resonant ratio, both elliptic ACR solutions tend to zero eccentricities (Figs. 3 and 4).

Higher degrees of development

In order to evaluate the upper bound of the eccentricities for which the situation that we described is realistic we compare the results obtained for increasing degree of development of the Hamiltonian. If the global structure of the phase space remains

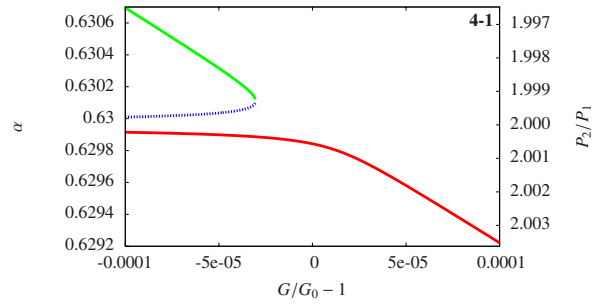


Fig. 4. 2:1 ACR positions in the plane (G, α) in the same conditions as for Fig. 3.

the same for higher degrees and the number, natures and positions of ACR seem to converge we can consider that our model is realistic.

We realized different tests in order to compare the structure of the phase space for different degrees. It seems that the degree of development of the Keplerian part is not significantly affecting the structure of the phase space as long as we keep the first four degrees terms. The main effect of the subsequent terms is to slightly shift the structures. However, the degree of development of the perturbative part is more important.

Figures 5, and 6 show the ACR positions of the 2:1 MMR as functions of G in the same case than before but with a resonant Hamiltonian developed up to degree 4-2, 4-3, and 4-4. Figure 5 show the ACR positions in the directions of $\cos \sigma_i$, and Fig. 6 show them in the directions of $\sin \sigma_i$. We only plot the degree 4-2 in Fig. 6 because at degrees 4-3, and 4-4, all ACR solutions have $\sin \sigma_i = 0$.

We see that around $G = G_0$ the structure of the phase space remains the same as for degree 4-1. However, the presence of degree two terms induces a significant change in the position of the libration center in the direction $e_2 \cos \sigma_2$. This shift is also observed at degrees 4-3 and 4-4. For $G < G_0(1 - 2 \times 10^{-3})$ a more complex structure appears at degree 4-2 with two new fixed points that diverge from the libration center in the direction of $\sin \sigma_i$. Note that this structure disappears at degrees 4-3 and 4-4. We thus interpret this structure as an artifact due to a too low degree of development. Between degree 4-3 and degree 4-4 there are no significant changes in the structure of the phase space but the degree 4-4 brings small corrections to the positions of ACR solutions. We thus conclude that for the small eccentricities considered here, the structure would no change qualitatively if we consider higher degrees of development.

Moreover, the structure of the phase space at higher eccentricities is not important for the following discussion since we are interested in the very end of a tidal circularization process of a resonant system when planets have low eccentricities.

The same analysis can be done for any first order MMR. For instance, Figs. 7, and 8 show the ACR positions of the 3:2 MMR in the same conditions (masses, etc.) as previously and with a Hamiltonian developed up to degree 4-1 (Fig. 7), 4-2, 4-3, and 4-4 (Fig. 8). The structure of the phase space is very similar at low eccentricities. As for the 2:1 resonance, at degree 4-2, some complex structures appear for low values of the parameter G . However these structures are completely different between degrees 4-2, 4-3, and 4-4 so they should also be consider as artifacts. For $G > G_0(1 - 1.5 \times 10^{-3})$ the structure of the phase space is the same between degrees 4-3 and 4-4, and is very similar to the structure observed for the 2:1 MMR. This should not

J.-B. Delisle et al.: Dissipation in planar resonant planetary systems

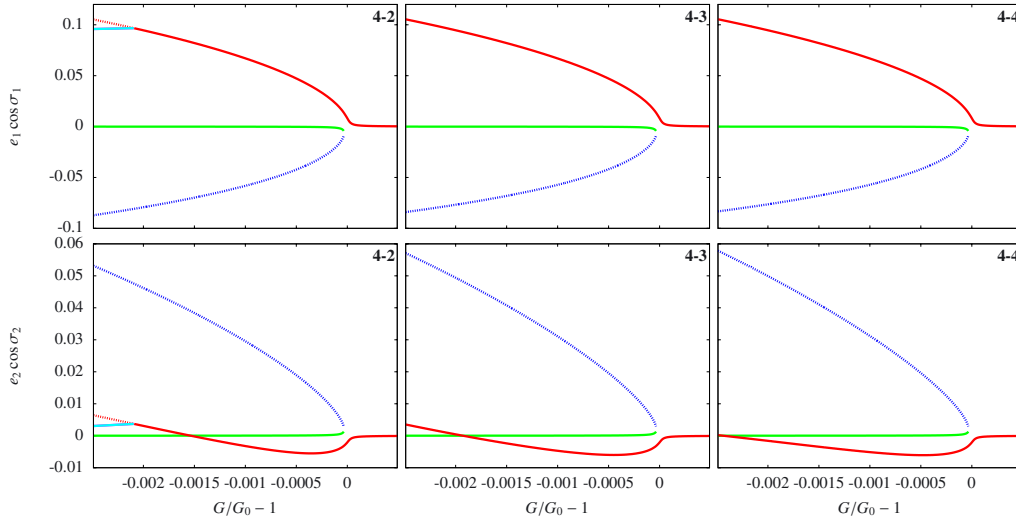


Fig. 5. 2:1 ACR positions in the directions of $\cos \sigma_i$ as functions of G . The conditions are the same as for Fig. 3 but the Hamiltonian is developed up to degree 4-2 (left), 4-3 (center), 4-4 (right). At degrees 4-3 and 4-4, all ACR have $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$. For the degree 4-2, the positions of ACR in the directions of $\sin \sigma_i$ are plotted in Fig. 6.

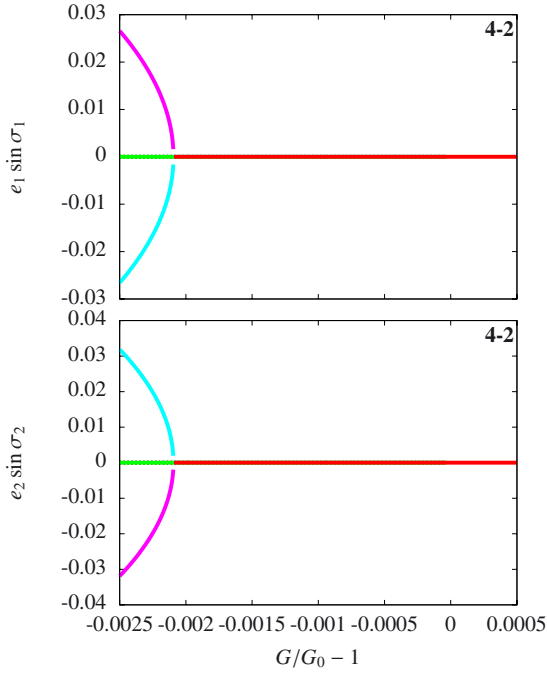


Fig. 6. 2:1 ACR positions in the directions of $\sin \sigma_i$ as functions of G . The conditions are the same as for Fig. 3 but the Hamiltonian is developed up to degree 4-2.

change much if we consider higher degrees of development and this structure seems to be common to all first order MMR.

3. Dynamics of two resonant planets with dissipation

In this section we consider the case of two planets in resonance in the presence of a dissipative force (tidal effect with the star, planet-disk interactions, etc.). In this case, \dot{G} and $\dot{\Gamma}$ are no longer

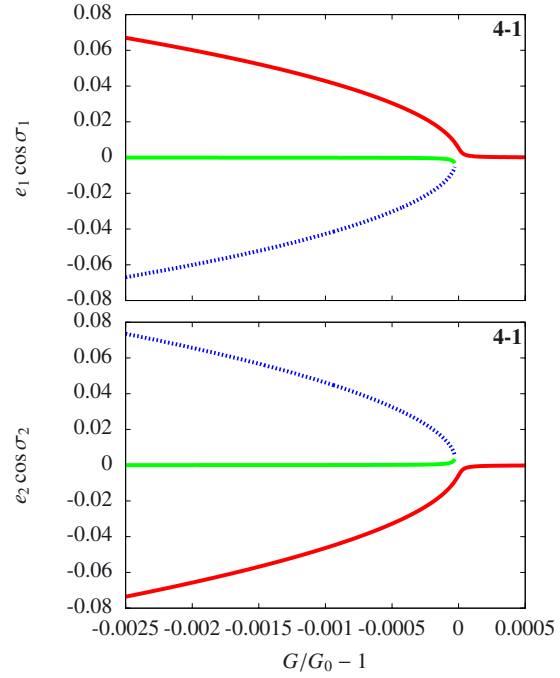


Fig. 7. 3:2 ACR positions as functions of G . The star mass is given by $m_0 = m_\odot$ and planets masses by $m_1 = m_2 = m_\oplus$. The Hamiltonian is developed up to degree 4-1. Elliptic (stable) ACR are plotted using continuous lines whereas hyperbolic (unstable) ACR are plotted using dashed lines. At this degree of development, all ACR have $\sin \sigma_1 = \sin \sigma_2 = 0$.

constants of the motion. However, if the dissipative force is sufficiently weak, their evolution is slow and we can apply the adiabatic invariant theory (see Henrard 1982; Henrard & Lemaître 1983). This means that the short term evolution of the system is still close to the one observed in the conservative case. On the long term, the dissipation affects the constants \dot{G} and $\dot{\Gamma}$ and thus

A&A 546, A71 (2012)

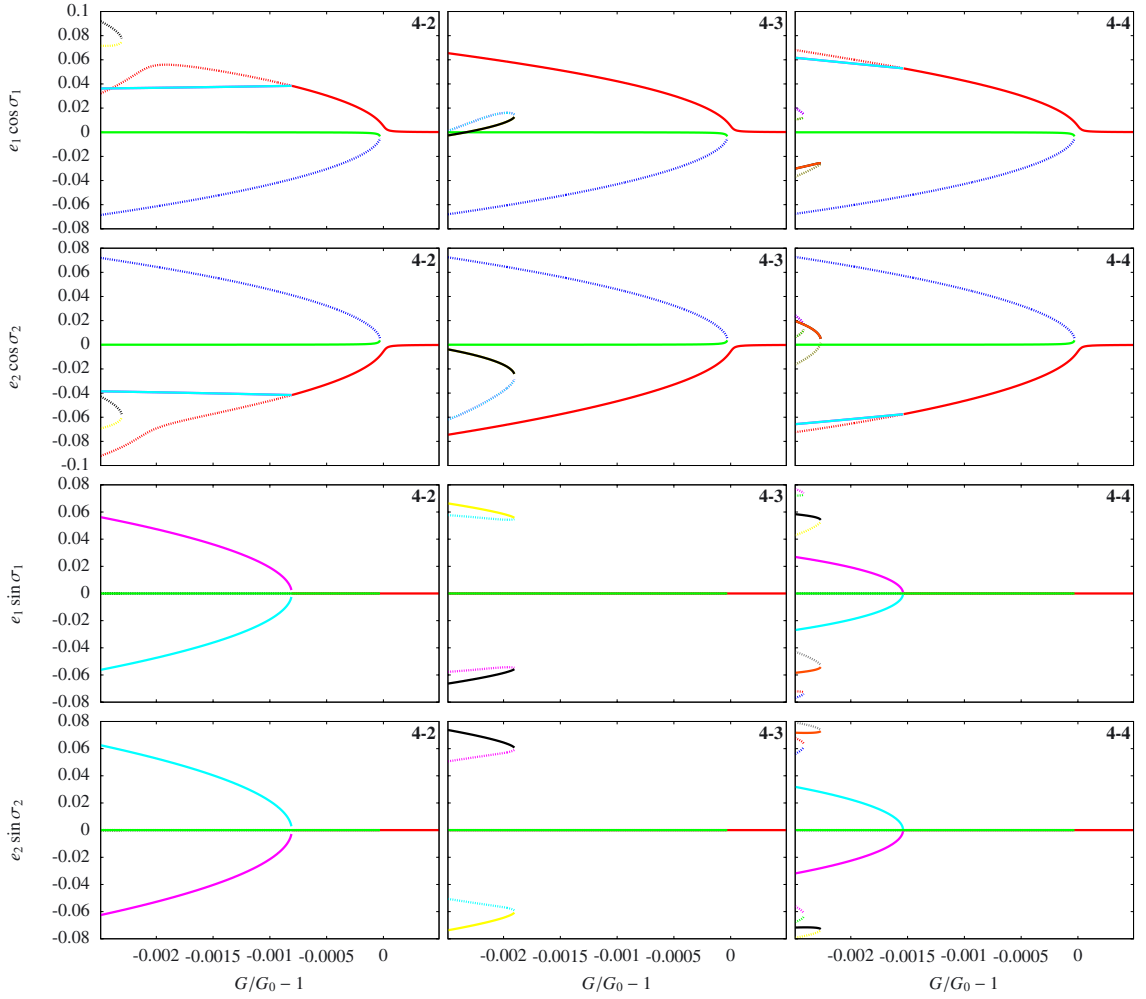


Fig. 8. 3:2 ACR positions as functions of G in the same conditions as for Fig. 7 but the Hamiltonian is developed up to degree 4-2 (left), 4-3 (center), 4-4 (right).

the parameter G . When G evolves, the phase space of the system evolves as presented in the previous section.

Depending on the type of dissipation, G can either increase or decrease. Its evolution depends on how the dissipation affects the eccentricities and the semi-major axes of both planets. More precisely, the derivative of G is given by:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} \Big|_d &= -\Lambda_1 \frac{e_1^2}{\sqrt{1-e_1^2}} \left(\frac{\dot{e}_1}{e_1} \right) \Big|_d \\ &\quad - \Lambda_2 \frac{e_2^2}{\sqrt{1-e_2^2}} \left(\frac{\dot{e}_2}{e_2} \right) \Big|_d \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda_1 \Lambda_2 \left(\sqrt{1-e_1^2} - \left(1 + \frac{q}{p} \right) \sqrt{1-e_2^2} \right) \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) \Big|_d, \end{aligned} \quad (39)$$

where $(\dot{e}_i/e_i)|_d$, $(\dot{\alpha}/\alpha)|_d$ are given by the dissipation model and Λ_i are the renormalized (by Γ) actions.

3.1. Migration

In the case of a strong migration of the planets and with low eccentricities, the dominant term in Eq. (39) is the third one which

depend on the semi-major axes ratio evolution. For low eccentricities we have:

$$\sqrt{1-e_1^2} - \left(1 + \frac{q}{p} \right) \sqrt{1-e_2^2} \sim -\frac{q}{p} < 0. \quad (40)$$

Thus, if the planets undergo convergent migration ($(\dot{\alpha}/\alpha)|_d > 0$), G should decrease and if the migration is divergent, G should increase. As it is already known (see [Henrard & Lemaître 1983](#)), a resonant capture can occur only if the migration is convergent and the resonance is crossed with a decreasing parameter G .

3.2. Tidal circularization

3.2.1. Evolution of the parameter G

In the case of circularization of the orbits due to tides raised on the planets by the star, the angular momentum of each planet is almost conserved and the dissipation in eccentricities reads to lower order in eccentricities (see [Papaloizou 2011](#)):

$$\frac{de_i}{dt} \Big|_d = -\frac{e_i}{t_{c,i}}, \quad (41)$$

where $t_{c,i}$ is a damping constant (see Eq. (82)). Since the angular momentum of each planet remains unaffected by the dissipation, the semi-major axes compensate the eccentricities decreases. The evolution of semi-major axes then reads to lowest order in eccentricities:

$$\left. \frac{da_i}{dt} \right|_d = 2a_i e_i \left. \frac{de_i}{dt} \right|_d = -2e_i^2 \frac{a_i}{t_{c,i}}. \quad (42)$$

In this case, the easiest way to compute how the dissipation affects the constant G is not to use Eq. (39) but to go back to the definition of G . Since $G = \hat{G}/\Gamma$ and \hat{G} is conserved, we have:

$$\left. \left(\frac{\hat{G}}{G} \right) \right|_d = - \left. \left(\frac{\hat{\Gamma}}{\Gamma} \right) \right|_d. \quad (43)$$

From Eq. (42) we deduce the impact of the circularization process on $\hat{\Lambda}_i$ (to lowest order in eccentricities):

$$\left. \frac{d\hat{\Lambda}_i}{dt} \right|_d = -e_i^2 \frac{\hat{\Lambda}_i}{t_{c,i}}. \quad (44)$$

Therefore, the evolution of Γ is given by:

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_d = - \left(1 + \frac{q}{p} \right) e_1^2 \frac{\hat{\Lambda}_1}{t_{c,1}} - e_2^2 \frac{\hat{\Lambda}_2}{t_{c,2}} < 0. \quad (45)$$

And the evolution of G is governed by:

$$\left. \frac{dG}{dt} \right|_d = G \left(\left(1 + \frac{q}{p} \right) e_1^2 \frac{\Lambda_1}{t_{c,1}} + e_2^2 \frac{\Lambda_2}{t_{c,2}} \right) > 0. \quad (46)$$

It results that, in the case of tidal circularization of the orbits, G slowly increases with time (dominant term of order 2 in eccentricities). Looking at Figs. 3 to 8, the position of the system on these graphs will slowly migrate from the left to the right, and eventually, the system will pass through the bifurcation (around $G = G_0$). The only remaining ACR solution is the one that corresponds to the libration center but the separatrix of the resonance and the resonant area disappear. The motion around the only remaining fixed point is elliptic and this fixed point is quickly decreasing to zero eccentricities. Thus, the motion should be very well approximated by the secular problem (using a complete averaging instead of the partial one introduced to obtain the resonant normal form). Looking at Fig. 4, we see that the remaining ACR depart from exact commensurability with a lower value of α (and higher value of P_2/P_1) than the nominal resonance value. This corresponds to planets farther away from each other than the nominal resonant distance. Therefore, as noticed by Papaloizou & Terquem (2010) the long-term effect of the tidal circularization is a repulsion of both planets. This is why Batygin & Morbidelli (2012) and Lithwick & Wu (2012) invoke this process to explain the excess of *Kepler* systems whose planets are just slightly further away from each other than nominal resonances.

3.2.2. Motion around the libration center

The dissipation strongly affects the eccentricities (dominant terms of order one in Eq. (41)) whereas the constants Γ (or G) are only slightly affected (dominant terms of order two in Eqs. (45), (46)). Thus, we can consider that the damping of eccentricities happens on a shorter time scale than the evolution of Γ and G . These quantities can thus still be considered as constants (in first

approximation) when we take into account the damping of eccentricities in the equations of motion (adiabatic invariant theory). From Eq. (41), we deduce:

$$\left. \frac{dx_i}{d\tau} \right|_d = - \frac{x_i}{\tau_{c,i}}, \quad (47)$$

with $\tau_{c,i} = \frac{t_{c,i}}{\Gamma^3}$.

Now, suppose that the system lie in the vicinity of the libration center of a first order MMR whose position is noted x_i^0 ($i = 1, 2$). Let us define the vector \mathbf{x} as:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

We can linearize the equations of motion (of the conservative case) around the fixed elliptic point \mathbf{x}^0 :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \approx iA_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0). \quad (49)$$

Equations of motion of the dissipative problem are thus simply given (to first order in eccentricities) by:

$$\dot{\mathbf{x}} \approx iA_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) - \delta B \mathbf{x}, \quad (50)$$

with (Eq. (47)):

$$\delta B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_{c,1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_{c,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{c,1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{c,2}} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Thus:

$$\dot{\mathbf{x}} = (iA - \delta B) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^1), \quad (52)$$

with

$$\mathbf{x}^1 = (iA - \delta B)^{-1} iA \mathbf{x}^0 = (\mathbf{I} + iA^{-1} \delta B)^{-1}. \quad (53)$$

Since δB is a perturbation of iA , we can make the approximation (to first order):

$$(\mathbf{I} + iA^{-1} \delta B)^{-1} \approx (\mathbf{I} - iA^{-1} \delta B). \quad (54)$$

Hence:

$$\mathbf{x}^1 \approx (\mathbf{I} - iA^{-1} \delta B) \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0 - iA^{-1} \delta B \mathbf{x}^0. \quad (55)$$

The dynamics around the libration center is thus modified by the dissipation in two different ways. First, the position of the fixed point is slightly changed by the offset $A^{-1} \delta B \mathbf{x}^0$ in the imaginary directions (see Eq. (55)). Secondly, the matrix giving the motion around the fixed point is modified (see Eq. (52)).

Noting $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^1$, we can apply directly the method described in Laskar et al. (2012) to \mathbf{y} . This method highlights the effects of the perturbation on the eigenvectors (i.e. the diagonalizing linear transformation) and on the eigenvalues of the system. If we note S_0 the diagonalizing matrix and $D_0 = \text{diag}(g_1, g_2, -g_1, -g_2)$ the diagonalized matrix of the conservative case such as:

$$\mathbf{y} = S_0 \mathbf{u}, \quad (56)$$

$$D_0 = S_0^{-1} A S_0, \quad (57)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = iD_0 \mathbf{u}, \quad (58)$$

A&A 546, A71 (2012)

where \mathbf{u} is the vector of eigenmodes and g_1, g_2 are the eigenvalues. The diagonalizing matrix and the diagonalized matrix in the dissipative case are given by:

$$S = S_0(I + i\delta S_1), \quad (59)$$

$$D = iD_0 - \delta D_1. \quad (60)$$

The small change δS_1 of the eigenvectors (see [Laskar et al. 2012](#)) does not introduce a major change in the dynamics but can be seen as a corrective term as well as the correction on the position of the fixed point. However, the perturbation δD_1 of the eigenvalues is much more important. Noting $\delta D_1 = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2)$, we have:

$$\gamma_i = (S_0^{-1} \delta B S_0)_{ii}, \quad (61)$$

and these coefficients are real and positive. Finally the diagonalized equations of motion now read:

$$\dot{\mathbf{u}} = \text{diag}(ig_1 - \gamma_1, ig_2 - \gamma_2, -ig_1 - \gamma_1, -ig_2 - \gamma_2)\mathbf{u}. \quad (62)$$

Thus, the dissipation introduces negative real parts ($-\gamma_i$) in the eigenvalues of the system. Therefore, all the eigenmodes will be damped on time scales given by these coefficients and the fixed point is no more elliptic but attractive. The main short-term effect of the dissipation is to induce an attraction of the system toward the libration center.

To sum up, the tidal circularization process induce two main effects for planets that are initially resonant. On the short-term, planets tend to reach the stable ACR solution corresponding to the libration center and whose position is slightly modified by the dissipative terms. On the long-term, planets tend to leave the resonance by moving away from each other (the parameter G increases and the planets follow the stable ACR outside of the resonance).

Note that, even outside of the resonance, the attractive ACR solution continues to exist and is not exactly at zero eccentricities. We will focus in the next section on the behavior of the resonant angles outside the resonances.

4. Secular motion at very low eccentricities

In this section we consider a conservative system of two planets around a star (on the same plane) that are far from any resonance and which have very low eccentricities. More precisely, we suppose that eccentricities have already been damped by the dissipation and we study the dynamics of the system after the dissipation process. We are in the field of application of the secular normal form. We start our study with the Poincaré rectangular astrometric coordinates: $(\lambda_i, \Lambda_i, y_i, -i\bar{y}_i)$ for each planet ($i = 1, 2$) (e.g. [Laskar & Robutel 1995](#)). Note that, for the simplicity of notations, we omit the hats even if these variables are not renormalized anymore by Γ . y_1, y_2 are the usual Poincaré rectangular coordinates that are noted x, x' in [Laskar & Robutel \(1995\)](#):

$$y_i = \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_i^2}} e^{i\omega_i} = \tilde{x}_i e^{i\sigma_0}. \quad (63)$$

The Hamiltonian can be developed in power series of y_i, \bar{y}_i and in Fourier series of the mean longitudes λ_i :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\Lambda) + \mathcal{H}_1(\lambda, \Lambda, y, \bar{y}), \quad (64)$$

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{k,m,\bar{m}} h_{k,m,\bar{m}}(\Lambda) y_1^{m_1} \bar{y}_1^{m_1} y_2^{m_2} \bar{y}_2^{m_2} e^{i(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)}, \quad (65)$$

where the D'Alembert rule reads:

$$k_1 + k_2 + m_1 + m_2 - \bar{m}_1 - \bar{m}_2 = 0, \quad (66)$$

and the coefficients $h_{k,m,\bar{m}}$ are functions of Λ_1, Λ_2 which can be expressed in terms of Laplace coefficients (see [Laskar & Robutel 1995](#)).

To first order of the planets masses, the secular normal form is obtained by averaging the perturbative part of the Hamiltonian over the mean longitudes. This is performed by introducing a change of coordinates close to the identity. Let us note $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\Lambda}_i, \tilde{y}_i, -i\tilde{\bar{y}}_i)$ the new coordinates, $\tilde{\mathcal{H}}$ the new Hamiltonian, and W_1 the generating Hamiltonian of the transformation. By definition, if we note \mathcal{H}_0 and \mathcal{H}_1 the Keplerian part and the first order part (in planets masses) of the new Hamiltonian, the transformation reads (to first order in planets masses):

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0, \quad (67)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_1 + \{W_1, \mathcal{H}_0\}, \quad (68)$$

where the Poisson brackets are noted with braces. The secular normal form (at the first order) is obtained by imposing:

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_1 + \{W_1, \mathcal{H}_0\} = \langle \mathcal{H}_1 \rangle. \quad (69)$$

Equation (69) is commonly called the homological equation and its solution is given by:

$$W_1 = \sum_{k \neq (0,0), m, \bar{m}} \frac{h_{k,m,\bar{m}}(\tilde{\Lambda})}{i(n_1 k_1 + n_2 k_2)} \tilde{y}_1^{m_1} \tilde{\bar{y}}_1^{m_1} \tilde{y}_2^{m_2} \tilde{\bar{y}}_2^{m_2} e^{i(k_1 \tilde{\lambda}_1 + k_2 \tilde{\lambda}_2)}, \quad (70)$$

where n_1, n_2 are the unperturbed Keplerian mean-motions of the planets.

By construction the secular Hamiltonian reads to first order of the masses:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0(\tilde{\Lambda}) + \sum_{m,\bar{m}} h_{(0,0),m,\bar{m}}(\tilde{\Lambda}) \tilde{y}_1^{m_1} \tilde{\bar{y}}_1^{m_1} \tilde{y}_2^{m_2} \tilde{\bar{y}}_2^{m_2}. \quad (71)$$

$\tilde{\Lambda}_1$ and $\tilde{\Lambda}_2$ are constants of the motion (first integrals) and $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$ is a stable fixed point around which the equations of motion can be linearized (Lagrange-Laplace theory). The change of variables is constructed to be close to the identity, but the reversion to the initial set of coordinates reintroduces short period terms. This reversion reads up to the first order in planets masses:

$$\lambda_i = \tilde{\lambda}_i + \{W_1, \tilde{\lambda}_i\} = \tilde{\lambda}_i + \frac{dW_1}{d\tilde{\Lambda}_i}, \quad (72)$$

$$\Lambda_i = \tilde{\Lambda}_i + \{W_1, \tilde{\Lambda}_i\} = \tilde{\Lambda}_i - \frac{dW_1}{d\tilde{\lambda}_i}, \quad (73)$$

$$y_i = \tilde{y}_i + \{W_1, \tilde{y}_i\} = \tilde{y}_i + i \frac{dW_1}{d\tilde{y}_i}, \quad (74)$$

In general, this reversion to the original set of variables only introduces small corrections to the dominant secular terms. But if secular eigenmodes are totally damped (i.e. $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$), the only terms that are nonzero in the expressions of y_1, y_2 are those corresponding to first order mean-motion commensurabilities:

$$y_1 = i \frac{dW_1}{d\tilde{y}_1} = \sum_p \frac{h_{(-p,p+1),(0,0),(1,0)}(\tilde{\Lambda})}{n_2(p+1) - n_1 p} e^{i((p+1)\tilde{\lambda}_2 - p\tilde{\lambda}_1)}, \quad (75)$$

$$y_2 = i \frac{dW_1}{d\tilde{y}_2} = \sum_p \frac{h_{(-p,p+1),(0,0),(0,1)}(\tilde{\Lambda})}{n_2(p+1) - n_1 p} e^{i((p+1)\tilde{\lambda}_2 - p\tilde{\lambda}_1)}. \quad (76)$$

Now, if we consider a system which is near a first order mean-motion commensurability $(p+1):p$ but still outside it, the divisor $(p+1)n_2 - pn_1$ is smaller than the others (but not considerably small) and the corresponding term dominates the evolution of y_1 and y_2 . Thus y_1 and y_2 are of the form:

$$y_1 \approx \frac{h_{(-p,p+1),(0,0),(1,0)}(\tilde{\Lambda})}{n_2(p+1) - n_1p} e^{i((p+1)\tilde{\lambda}_2 - p\tilde{\lambda}_1)}, \quad (77)$$

$$y_2 \approx \frac{h_{(-p,p+1),(0,0),(0,1)}(\tilde{\Lambda})}{n_2(p+1) - n_1p} e^{i((p+1)\tilde{\lambda}_2 - p\tilde{\lambda}_1)}. \quad (78)$$

In terms of arguments of periastron (see Eq. (63)), this means that:

$$\omega_i \approx (p+1)\tilde{\lambda}_2 - p\tilde{\lambda}_1 + \epsilon_i, \quad (79)$$

where $\epsilon_i = 0$ or π , depending on the sign of the amplitudes in Eqs. (77), (78). Of course, in this situation the resonant angles $\sigma_1 = (p+1)\lambda_2 - p\lambda_1 - \omega_1$ and $\sigma_2 = (p+1)\lambda_2 - p\lambda_1 - \omega_2$ will librate (around 0 or π). Figure 9 illustrates this phenomenon of artificial libration. It is important to notice that contrary to the resonant case, $(p+1)\lambda_2 - p\lambda_1$ and ω_i are dominated by short periods (high frequencies). In the resonant case, we always have $(p+1)n_2 - pn_1 \approx 0$, thus $(p+1)\lambda_2 - p\lambda_1$ has a long period and ω_i are dominated by secular eigenmodes, which also have long periods. This is the reason why the classical secular averaging is valid in this case.

Thus, in the case of very low eccentricities, when eigenmodes are almost completely damped by dissipation (Fig. 9, A2, B2), the fact that the resonant angles are librating (Fig. 9, B2) does not mean that the system is resonant. It is just a geometrical effect due to the fact that the circulation center is not at zero. More precisely, the amplitude of the considered argument (Eqs. (77), (78)) is larger than the amplitude of the proper mode.

5. Numerical simulation

In order to confirm the different behaviors of resonant systems with dissipation that we highlighted in Sect. 3, we ran two numerical simulations, one in the case of the 3:2 MMR and the other for the 2:1 MMR.

5.1. Simulation S1, 3:2 MMR

The first numerical simulation concerns the two innermost planets of the GJ581 system which are near the 3:2 MMR (e.g. Papaloizou 2011). Our simulation is comparable to the one presented in Papaloizou (2011). The star mass is $m_0 = 0.31 m_\odot$, and planets masses are set to $m_1 = 1.94 m_\oplus$ and $m_2 = 15.64 m_\oplus$. The initial semi-major axes are set to $a_1 = 0.11$ AU and $a_2 = 0.15$ AU. Initial eccentricities are set to $e_1 = 0.01$, and $e_2 = 0.001$. At the beginning of the simulation both planets undergo a migration process due to interactions with a disk. We adopted the same migration time scale as Papaloizou (2011):

$$t_{\text{mig},i} = 4.375 \times 10^5 \frac{m_\oplus}{m_i} \text{ yr}. \quad (80)$$

Because the outer planet is more massive, its migration is more efficient and the system undergo a convergent migration. During this migration phase the time scale of the circularization is set to be 100 times shorter than the migration time scale (see Lee & Peale 2002):

$$t_{c,i} = \frac{t_{\text{mig},i}}{100}. \quad (81)$$

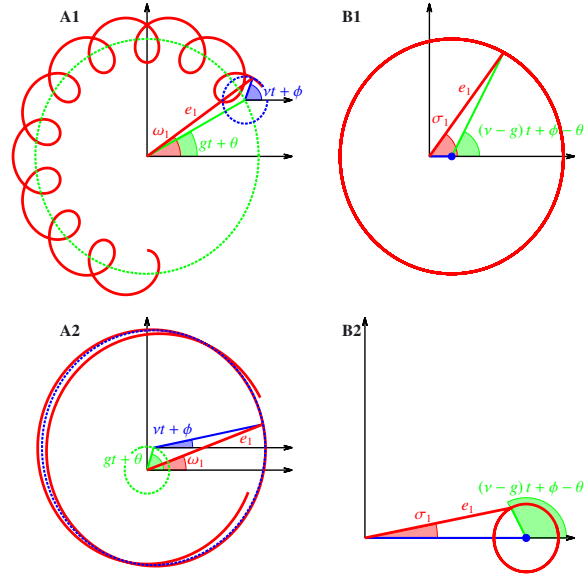


Fig. 9. Illustration of the artificial libration of the resonant angles. We plot the evolution of the complex variables $e_1 e^{i\omega_1}$ (A1, A2) and $e_1 e^{i\sigma_1}$ (B1, B2) in the case of a strong secular eigenmode (A1, B1) and in the case of a severely damped one (A2, B2). For the sake of simplicity, we suppose that there is only one secular eigenmode (of frequency g), but the reasoning would be the same with more. We also suppose that there is only one high frequency term, corresponding to the nearest first order resonance, and whose frequency is $\nu = (p+1)n_2 - pn_1$. The secular contribution is plotted in green in all graphs whereas the high frequency term contribution is plotted in blue. The red curves correspond to the sums of both contributions. When there is a strong secular eigenmode, the high frequency term only brings small perturbations around the secular evolution of the argument of periastron ω_1 (A1) and the resonant angle σ_1 (B1) which circulates. When the eigenmode is damped, the evolution of ω_1 (A2) and σ_1 (B2) are dominated by the high frequency ν . The amplitude corresponding to ν does not change between A1, B1 and A2, B2 (the scale changes) but in B2 σ_1 appears to librate because the circulation center (marked with a blue dot in B1, B2) is not at zero.

At $t = 10$ kyr, the migration stops (the disk is gone) and the only dissipative force that remains is the tidal interaction with the star. The timescale of this circularization process is given by (still following Papaloizou 2011):

$$t_{c,i} = 4.65 \times 10^4 \left(\frac{m_\odot}{m_0} \right)^{(3/2)} \left(\frac{m_\oplus}{m_i} \right)^{(2/3)} \left(\frac{20a_i}{1 \text{ AU}} \right)^{6.5} Q' \text{ yr}, \quad (82)$$

where Q' is a parameter of the tidal dissipation model. Q' is set to 1.5 in this simulation in order to reduce the computation time required to see the effect of the circularization (see Papaloizou 2011). A realistic value would be several order of magnitude greater. This means that the time scale of the evolution of the system during the circularization process in our simulation is much shorter than the realistic one. We perform a direct n-body integration of the system using the ODEX integrator (see Hairer et al. 2010), with the dissipative force acting on each planet given by:

$$\mathbf{F}_d = -\frac{1}{t_{\text{mig},i}} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \frac{2}{r_i^2 t_{c,i}} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i \right) \mathbf{r}_i. \quad (83)$$

Figure 10 shows the evolution of semi-major axes, and eccentricities of both planets as well as the evolution of the parameter G

A&A 546, A71 (2012)

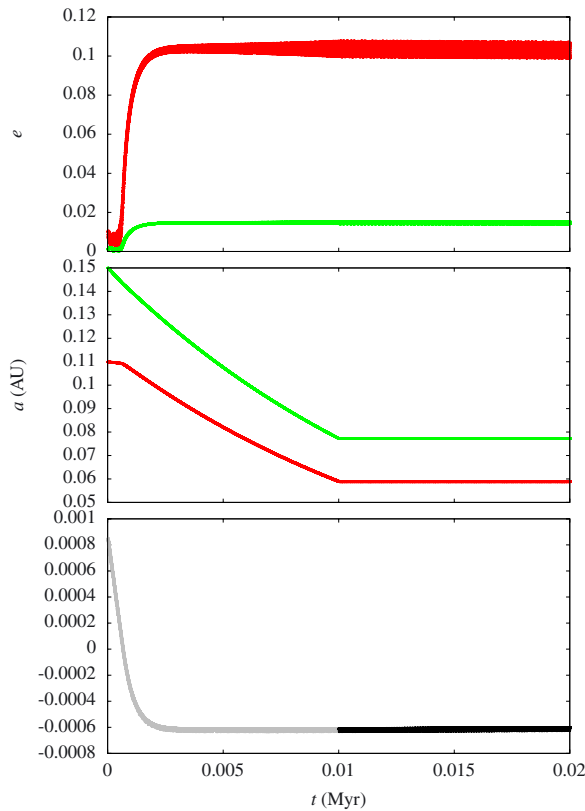


Fig. 10. Evolution of eccentricities (*top*), semi-major axes (*middle*), and the parameter G (*bottom*) during the first 20 kyr of simulation S 1. The red curves correspond to planet 1. The green curves correspond to planet 2. The gray part of the G curve (*bottom*) corresponds to the migration phase whereas the black part corresponds to the tidal circularization phase.

at the beginning of the simulation (up to 20 kyr). During the first 10 kyr of the simulation, the planets undergo convergent migration and G decreases (Fig. 10, bottom in gray). The system enters very quickly in the 3:2 resonance and we can see in Fig. 10, middle, that the semi-major axes stay locked in the resonant ratio. As explained by Lee & Peale (2002), the eccentricities are excited by the resonance until they reach an equilibrium state that depends on the strength of the circularization process which comes with the migration (Fig. 10, top).

At $t = 10$ kyr, the migration stops and the only remaining dissipative force is the tidal circularization of the orbits. The long term evolution of G is shown in Fig. 11. As expected, we see in Fig. 11 that the effect of the tidal circularization is an increase of G that eventually exceed G_0 . The increase is slower and slower, and at the end of the simulation G is almost constant.

We can follow the evolution of the system on graphs similar to those of Sect. 2. Figure 12 gives the positions of 3:2 ACR solutions for the system considered in the simulation (masses), superimposed over the successive positions of the system on these graphs. The colors of the fixed points are the same as in Sect. 2. In particular, the center of libration of the resonant area is plotted in red. The gray dots corresponds to positions of the system during the first 10 kyr (migration phase), whereas the black dots corresponds to the circularization phase. Since G decreases during the migration phase (in gray) the system goes from the right

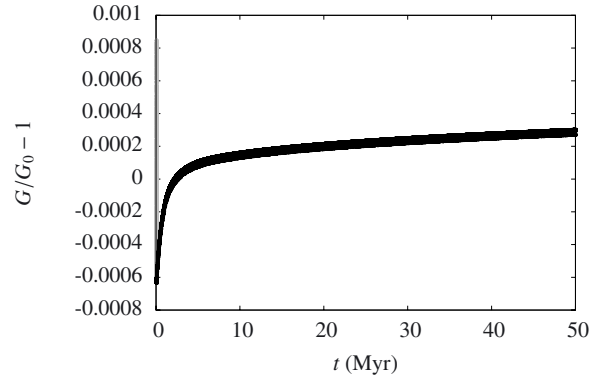


Fig. 11. Long term evolution of the parameter G during simulation S 1.

to the left of the graphs. On the contrary, during the tidal circularization phase (in black) G increases and the system goes from the left to the right of the graphs.

At the very beginning of the simulation, the system is not yet in the resonance. In Fig. 12, the system lies at the right of the bifurcation and there is only one fixed point. The phase space is similar to the one of Figs. 2, E2, F2. Then, due to the convergent migration (gray dots) the system passes through the bifurcation and the phase space looks like the one of Figs. 2, A2 to D2. The system undergo oscillations around the libration center (red dot). Finally, due to the circularization process (black dots), the system passes a second time through the bifurcation. Thus, the system leaves the resonance and the phase space is again similar to Figs. 2, E2, F2.

We see in Fig. 12 that the system follows very well the ACR solution corresponding to the libration center both during the migration and the circularization phases. We also see that the tidal dissipation induces a decrease of the amplitude of oscillations around this fixed point. This corresponds to the expected damping of eigenmodes around the libration center (Sect. 3).

Figure 13 shows the evolution of the semi-major axes ratio (and period ratios) as a function of G for the simulation and for the fixed points of our model. We see that during the migration process (in gray), the semi-major axes ratio (α) increases until it reaches the resonant ratio. During this migration phase, α does not oscillate much, but when the system enters the resonance, α begins to oscillate around the libration center position. During the circularization process (in black), the system follows the libration center position, the oscillations are damped and the semi-major axes ratio decreases (the period ratios increases). Thus the system quits the resonance with a period ratios larger than the resonant one, as expected.

Note that when G increases, the eccentricities quickly tend to zero (Fig. 12) and the circularization process is less and less effective. This is why G increases slower and slower (Fig. 11). This means that the system cannot depart very far away from the MMR on a finite time (see Appendix B for an estimation of the asymptotic evolution of G). This is even more true for a real system, since in this simulation the circularization process is several order of magnitude more efficient than in reality. This mechanism explains why *Kepler* systems lie just slightly farther away from the MMR.

Figure 14 shows the evolution of the resonant angle σ_1 (in red) and the difference of periastrons $\Delta\omega = \sigma_2 - \sigma_1$ (in green). We see that both resonant angles and $\Delta\omega$ librate during the whole simulation even if the system is outside the resonance at the end

J.-B. Delisle et al.: Dissipation in planar resonant planetary systems

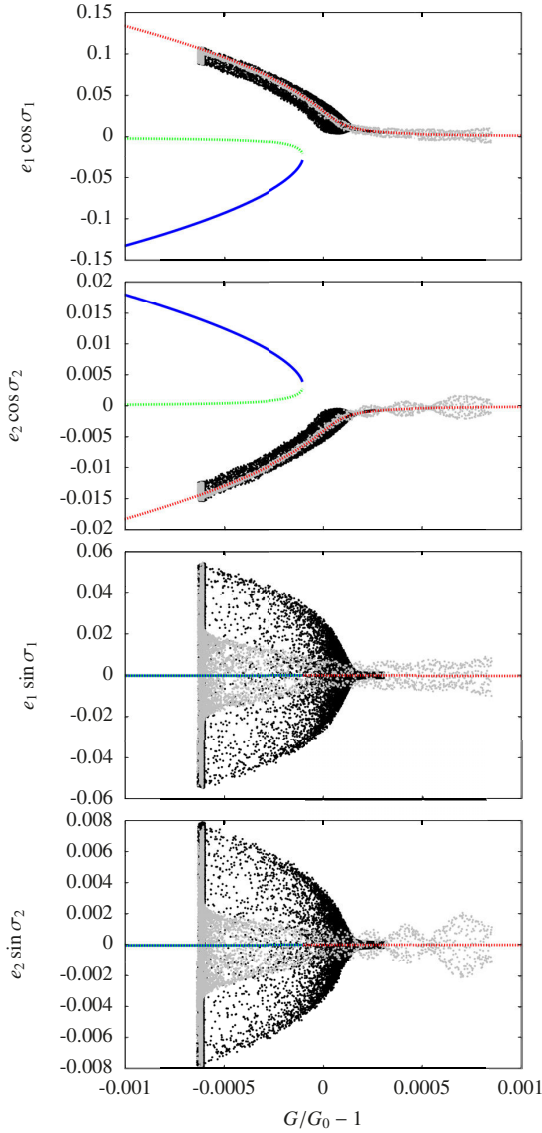


Fig. 12. Superposition of the successive positions of the system in simulation *S1* over the 3:2 ACR positions as functions of G . ACR positions are computed using our model with the parameters of the considered system (masses). The colors of ACR are consistent with graphs of Sect. 2 but we inverted continuous and dashed lines in order to improve the visibility of the simulation dots. The gray dots correspond to the migration phase and go from the right to the left of the graph whereas the black ones correspond to the tidal circularization phase and go from the left to the right.

of the simulation (see Figs. 12 and 13). σ_1 librates around 0, while σ_2 and $\Delta\omega$ librate around π . This could have also been deduced from Fig. 12.

5.2. Simulation *S2*, 2:1 MMR

We also ran a simulation of the same system but in the case of the 2:1 MMR. The masses of the star and the planets are the same but initial semi-major axes are set to $a_1 = 0.11$ AU, and $a_2 = 0.18$ AU. Initial eccentricities are set to $e_1 = 0.002$,

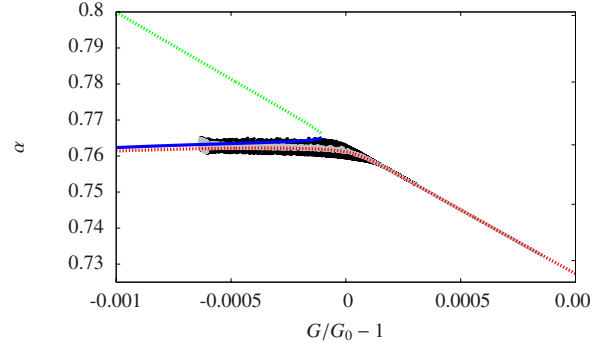


Fig. 13. Superposition of the successive positions of the system in simulation *S1* over the 3:2 ACR positions in the plane (G, α) . ACR positions are computed using our model with the parameters of the considered system (masses). The colors of ACR are consistent with graphs of Sect. 2 but we inverted continuous and dashed lines in order to improve the visibility of the simulation dots. The gray dots correspond to the migration phase and go from the right to the left of the graph whereas the black ones correspond to the tidal circularization phase and go from the left to the right.

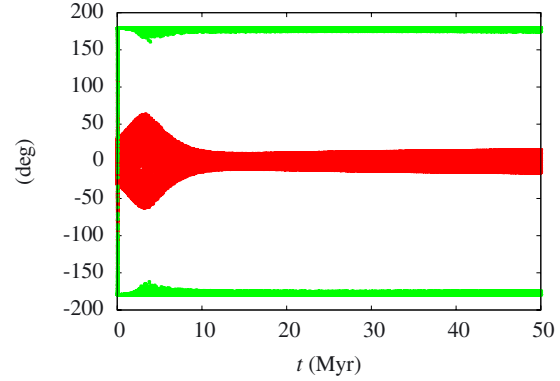


Fig. 14. Evolution of the resonant angle σ_1 (red) and the difference of periastrons $\Delta\omega = \sigma_2 - \sigma_1$ (green) in simulation *S1*.

and $e_2 = 0$. All other parameters are the same as for the first simulation.

Figure 15 shows the evolution of eccentricities, semi-major axes and G during the first 20 kyr of the simulation. Their behaviors are very similar to those of the simulation *S1* (Fig. 10). Note that as for the resonance 3:2, G decreases during the migration phase (in gray). We plot in Fig. 16 the long term evolution of G which increases due to the circularization process. Figures 17 and 18 show the superposition of the fixed points of our model with the successive positions of the system. Figure 17 gives the eccentricities as functions of G and Fig. 18 gives the semi-major axes ratio (as well as the period ratios) as a function of G . As for the 3:2 resonance, in the case of the 2:1 resonance, the system begins outside the resonance (on the right of the graphs) and the phase space corresponds to the situation of Figs. 2, E1, F1. Due to the convergent migration of planets the system goes from the right to the left (gray dots) and passes through the bifurcation following the red ACR solution. At this point the phase space is similar to those of Figs. 2, A1 to D1. During the circularization phase, the system goes from the left to the right in Figs. 17, 18 (black dots). The system passes again at the bifurcation and leaves the resonance (phase space of Figs. 2, E1, F1). Shortly

A&A 546, A71 (2012)

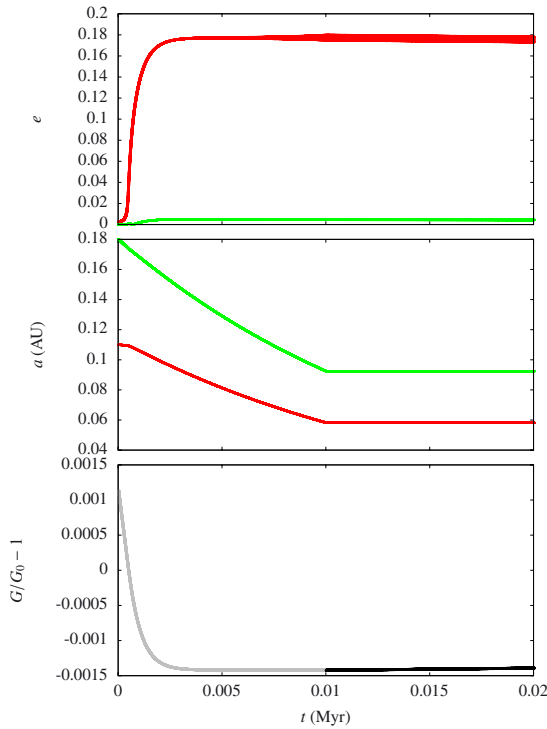


Fig. 15. Evolution of the eccentricities (*top*) the semi-major axes (*middle*) and the parameter G (*bottom*) during the first 20 kyr of simulation S2. The red curves correspond to planet 1. The green curves correspond to planet 2. The gray part of the G curve (*bottom*) corresponds to the migration phase whereas the black part corresponds to the tidal circularization phase.

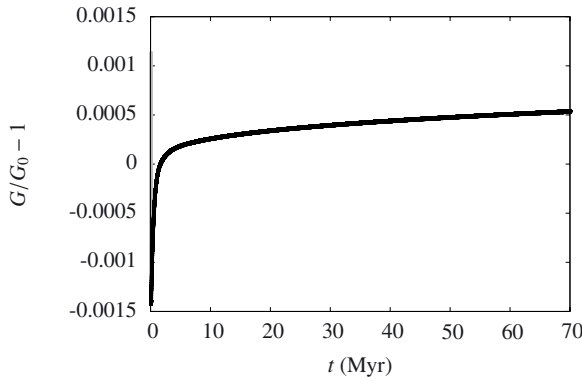


Fig. 16. Long term evolution of the parameter G during simulation S2.

after the system quitted the resonance, the amplitude of oscillations around the fixed point suddenly increases in the direction of e_2 . This is due to the crossing of a 2:1 resonance between the two proper modes of the motion around the fixed point (see Appendix C for more details). However the dissipation damps again the oscillations after this event and the system keeps following the ACR solution.

We observe in Fig. 19 that the first resonant angle σ_1 keeps librating around 0 during the whole simulation whereas $\Delta\omega$ and σ_2 circulate almost all the time. More precisely, during the first 0.5 Myr of the simulation, $\Delta\omega$ and σ_2 librate around 0. Then, these angles circulate during a short laps of time around

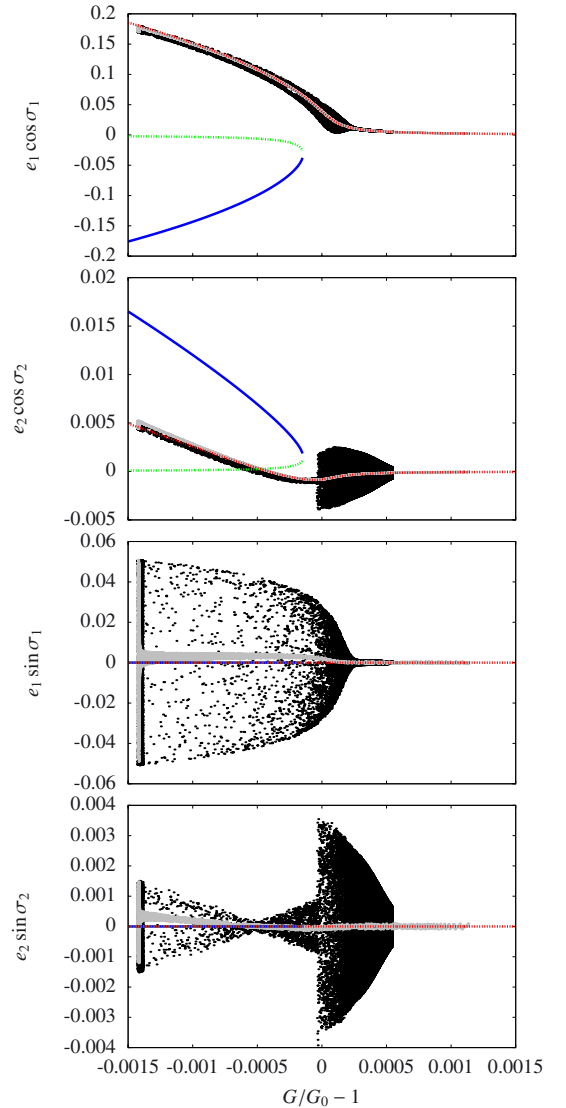


Fig. 17. Superposition of the successive positions of the system in simulation S2 over the 2:1 ACR positions as functions of G . ACR positions are computed using our model with the parameters of the considered system (masses). The colors of ACR are consistent with graphs of Sect. 2 but we inverted continuous and dashed lines in order to improve the visibility of the simulation dots. The gray dots correspond to the migration phase and go from the right to the left of the graph whereas the black ones correspond to the tidal circularization phase and go from the left to the right.

$t = 0.5$ Myr. After this event, they begin to librate around π . Actually, the system is still in resonance and oscillates around the libration center but the position of this fixed point crosses the value $e_2 = 0$ for $G/G_0 - 1 = 5 \times 10^{-4}$ (see Fig. 17) around $t = 0.5$ Myr. The dynamics does not change and this event is only geometrical. Thus, even if the system is clearly in the resonance area, very close the the libration center, we observe a circulation of σ_2 . Around $t = 1.4$ Myr, $\Delta\omega$ and σ_2 begin to circulate (Fig. 19). This corresponds to the crossing of the resonance (see Appendix C) that we observe in Fig. 17. This event increases the amplitude of oscillations around the fixed point and due to

J.-B. Delisle et al.: Dissipation in planar resonant planetary systems

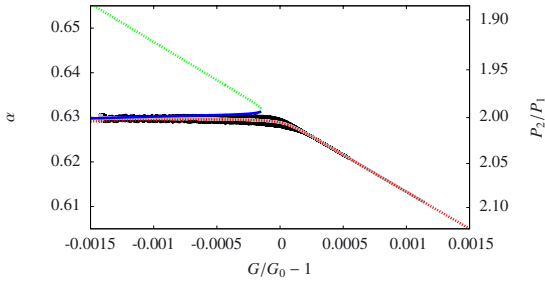


Fig. 18. Superposition of the successive positions of the system in simulation S2 over the 2:1 ACR positions in the plane (G, α) . ACR positions are computed using our model with the parameters of the considered system (masses). The colors of ACR are consistent with graphs of Sect. 2 but we inverted continuous and dashed lines in order to improve the visibility of the simulation dots. The gray dots correspond to the migration phase and go from the right to the left of the graph whereas the black ones correspond to the tidal circularization phase and go from the left to the right.

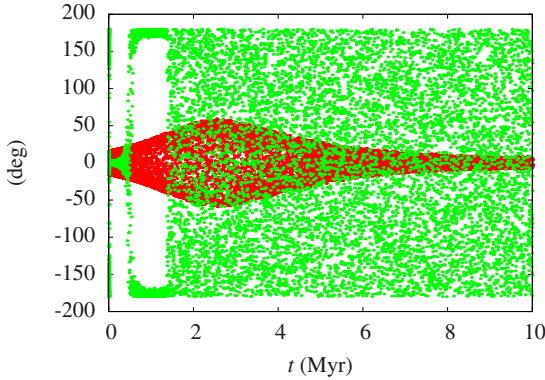


Fig. 19. Evolution of the resonant angle σ_1 (red) and the difference of periastrons $\Delta\omega = \sigma_2 - \sigma_1$ (green) during the first 10 Myr of simulation S2.

this higher amplitude the system passes through $e_2 = 0$ at each oscillation. This is why we observe a circulation of $\Delta\omega$ and σ_2 .

Note that both simulations show that it is possible to observe an oscillation of the resonant angles outside of resonances (σ_1 and σ_2 for S1, and only σ_1 for S2). On the opposite, in simulation S2 we observe a circulation of σ_2 when the libration center position crosses the axis $e_2 = 0$ while the system is clearly inside the resonance and oscillates very close to the libration center. Therefore, it appears that resonant angles have to be considered with great caution and cannot always be used to distinguish between truly dynamical effects and simple geometrical effects.

6. Conclusion

In this work, we presented a study of planar resonant planetary systems in the conservative case and in presence of a dissipative force. Our main interest was to understand the dynamics at the end of a circularization process in resonant systems. We used a completely analytical model developed in power series of eccentricities which is well suited for the study of these low eccentricity systems. Before introducing the dissipative force in the model we characterized the dynamics in the conservative case. In particular, we highlighted the fact that apsidal corotation resonances (ACR) are a powerful tool to understand the global

dynamics of a system. Then, we showed that the introduction of a dissipative force¹ in a resonant system has two main effects. On the short-term, the system is attracted toward the libration center if it initially relies in its vicinity. On the long-term, the system tends to follow this ACR solution outside the resonance and both planets tend to move away from each other. These two mechanisms are well illustrated and confirmed by the results of two simulations (one for the 2:1 MMR and the other for the 3:2 MMR) of the innermost planets of the GJ581 (see Sect. 5). Since the ACR solution do not correspond to zero eccentricities even far from the resonance, it is possible to have resonant angles to oscillate outside of resonances. However, we showed that in this case the motion is completely characterized by the secular problem and that the fact that resonant angles appear to librate only means that the secular eigenmodes are (almost) totally damped. The important fact is that the nature of the motion is the same as when the eigenmodes are not damped and the separatrix of the resonance does not exist anymore in this region of the phase space. Thus, it is inappropriate to consider such systems as resonant ones.

Acknowledgements. We thank Philippe Robutel for helpful discussions. This work has been supported by PNP-CNRS, CS of Paris Observatory, PICS05998 France-Portugal program, the European Research Council/European Community under the FP7 through a Starting Grant, and Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Portugal (grants PTDC/CTE-AST/098528/2008 and PEst-C/CTM/LA0025/2011).

Appendix A: Computation of the Hamiltonian coefficients

In this section we explain in more details the computations of coefficients K , S , and R of the resonant normal form (Eq. (31)) up to any order.

The Keplerian part is given by:

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2}, \quad (\text{A.1})$$

with:

$$\Lambda_1 = -\frac{p}{q}(G + \mathcal{D} - 1), \quad (\text{A.2})$$

$$\Lambda_2 = 1 - \left(1 + \frac{q}{p}\right)\Lambda_1 = \left(1 + \frac{p}{q}\right)(G + \mathcal{D}) - \frac{p}{q}. \quad (\text{A.3})$$

K coefficients are thus simply given by the Taylor series of $1/(1+x)^2$ where $x = \mathcal{D}/(G-1)$ for the inner planet and $x = \mathcal{D}/(G-p/(p+q))$ for the outer one.

For the perturbation, the first step is to determine which inequalities $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$ have to be computed. The secular part is given by the inequality $k_1 = k_2 = 0$. The resonant terms are given by inequalities $k_1 = -kp$, $k_2 = k(p+q)$, with $-d/q \leq k \leq d/q$ where d is the chosen degree of development. Each inequality is computed as a power series of x_1, x_2 by using the algorithm presented in Laskar & Robutel (1995). For instance, in the case of the 2:1 resonance, the perturbative part of the Hamiltonian reads:

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{m_1}{m_0} \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{\Lambda_2^2} \mathcal{H}_{1,d} + \frac{\mu_1 \beta_1^2 \mu_2 \beta_2^2}{\Lambda_1 \Lambda_2} \mathcal{H}_{1,i}, \quad (\text{A.4})$$

¹ We consider here tidal effects, but it is clear that other mechanisms could result as well in similar dissipative effects.

A&A 546, A71 (2012)

where $\mathcal{H}_{1,d}$ is the direct part of the development, and $\mathcal{H}_{1,i}$ is the indirect part. The direct part is given by:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{1,d} = & s^{(0)} + s_1^{(2)} X_1 \bar{X}_1 + s_2^{(2)} X_2 \bar{X}_2 + s_{12}^{(2)} (X_1 \bar{X}_2 + X_2 \bar{X}_1) \\ & + r_1^{(1)} (X_1 + \bar{X}_1) + r_{2,d}^{(1)} (X_2 + \bar{X}_2) \\ & + r_1^{(2)} (X_1^2 + \bar{X}_1^2) + r_2^{(2)} (X_2^2 + \bar{X}_2^2) \\ & + r_{12}^{(2)} (X_1 X_2 + \bar{X}_1 \bar{X}_2),\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

and the indirect part reads:

$$\mathcal{H}_{1,i} = r_{2,i}^{(1)} (X_2 + \bar{X}_2), \quad (\text{A.6})$$

where we note $X_i = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_i}} \hat{x}_i = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_i}} x_i$ (see [Laskar & Robutel 1995](#)). The coefficients S , R of Eq. (31) correspond to coefficients s , r appearing in Eqs. (A.5), (A.6) but with a renormalization due to the use of x_1 , x_2 instead of X_1 , X_2 and the factors in front of the direct and indirect parts in Eq. (A.4). s , r coefficients can be expressed as functions of α and Laplace coefficients ($b_s^{(j)}(\alpha)$):

$$\begin{aligned}s^{(0)} &= \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha) \\ s_1^{(2)} &= \frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ s_2^{(2)} &= \frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ s_{12}^{(2)} &= \frac{3}{8} \alpha b_{3/2}^{(0)}(\alpha) - \frac{1}{4} (1 + \alpha^2) b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ r_1^{(1)} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \alpha^2\right) b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} \alpha^{-1} + \frac{7}{12} \alpha + \frac{5}{6} \alpha^3\right) b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ r_{2,d}^{(1)} &= \frac{5}{4} \alpha b_{3/2}^{(0)}(\alpha) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \alpha^2\right) b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ r_{2,i}^{(1)} &= \frac{1}{2} \\ r_1^{(2)} &= \left(\frac{12}{35} \alpha^{-2} + \frac{71}{140} + \frac{67}{70} \alpha^2 + \frac{138}{35} \alpha^4\right) b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\ &\quad - \left(\frac{8}{35} \alpha^{-3} + \frac{89}{210} \alpha^{-1} + \frac{263}{336} \alpha + \frac{341}{210} \alpha^3 + \frac{92}{35} \alpha^5\right) b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ r_2^{(2)} &= \left(1 + \frac{13}{4} \alpha^2\right) b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} \alpha^{-1} + \frac{65}{48} \alpha + \frac{13}{6} \alpha^3\right) b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ r_{12}^{(2)} &= -\left(\frac{6}{5} \alpha^{-1} + \frac{69}{40} \alpha + \frac{36}{5} \alpha^3\right) b_{3/2}^{(0)}(\alpha) \\ &\quad + \left(\frac{4}{5} \alpha^{-2} + \frac{29}{20} + \frac{59}{20} \alpha^2 + \frac{24}{5} \alpha^4\right) b_{3/2}^{(1)}(\alpha).\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

As for the Keplerian part, we substitute Λ_1 and Λ_2 by their power series in \mathcal{D} each time they appear in the expression of \mathcal{H}_1 . For the Laplace coefficients we first need to develop them in power series around the nominal resonant semi-major axes ratio which is defined by:

$$\alpha_r = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{1/3} \left(\frac{p}{p+q}\right)^{2/3}. \quad (\text{A.8})$$

A71, page 16 of 17

Then the deviation $\delta\alpha = \alpha - \alpha_r$, to the nominal value is substituted by its power series in \mathcal{D} . Of course the degrees of development of all these series are adjusted in order to be consistent with the desired degree in eccentricities (d).

Appendix B: Asymptotic evolution of G

In this section we show how to estimate the asymptotic evolution of G . This allows to determine the position of the system in our graphs as a function of time. We have seen that the evolution of G during the tidal circularization phase is slower and slower. Moreover, the escape from the resonance is very quick and the evolution of the system after this escape is very slow. Thus, the initial position of the system in the resonance does not influence much its final position (outside the resonance) after a long time.

The evolution of G during the circularization phase is governed by Eq. (46). Since G remains very close to G_0 , and Λ_i stay very close to $\Lambda_{i,r}$, we can substitute these values in the expression of \dot{G} . However, e_i cannot be considered as constants since the ACR solution tends to zero eccentricities when G increases. Thus we have to compute e_i as functions of $\delta G = G - G_0$ with the help of Eqs. (37), (38). In the asymptotic evolution, eccentricities are very low and the ACR position can be well approximated with lowest order terms :

$$0 \approx K^{(2)} x_1 + R_1^{(1)}, \quad (\text{B.1})$$

$$0 \approx K^{(2)} x_2 + R_2^{(1)}. \quad (\text{B.2})$$

Thus the ACR solution is simply given by:

$$x_1 = -\frac{R_1^{(1)}}{K^{(2)}}, \quad (\text{B.3})$$

$$x_2 = -\frac{R_2^{(1)}}{K^{(2)}}, \quad (\text{B.4})$$

and e_i are given by:

$$e_i \approx \sqrt{\frac{2}{\Lambda_{i,r}}} x_i. \quad (\text{B.5})$$

$K^{(2)}$, $R_1^{(1)}$, and $R_2^{(1)}$ are functions of G but $R_1^{(1)}$, and $R_2^{(1)}$ are almost constants and can be approximated with their values for $G = G_0$ (see Appendix A):

$$R_1^{(1)} \approx -\frac{m_1 \mu_2^2 \beta_2^3}{m_0 \Lambda_{2,r}^2} \sqrt{\frac{2}{\Lambda_{1,r}}} r_1^{(1)}(\alpha_r), \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}R_2^{(1)} \approx & -\frac{m_1 \mu_2^2 \beta_2^3}{m_0 \Lambda_{2,r}^2} \sqrt{\frac{2}{\Lambda_{2,r}}} r_{2,d}^{(1)}(\alpha_r) \\ & + \frac{\mu_1 \beta_1^2 \mu_2 \beta_2^2}{\Lambda_{1,r} \Lambda_{2,r}} \sqrt{\frac{2}{\Lambda_{2,r}}} r_{2,i}^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

On the contrary, in first approximation $K^{(2)}$ is proportional to δG :

$$K^{(2)} \approx -3 \left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{\Lambda_{1,r}^4} + \left(1 + \frac{p}{q}\right)^2 \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{\Lambda_{2,r}^4} \right] \delta G. \quad (\text{B.8})$$

Finally, this means that:

$$e_i \propto \frac{1}{\delta G}, \quad (\text{B.9})$$

and

$$\delta\dot{G} = \dot{G} \propto \frac{1}{\delta G^2}. \quad (\text{B.10})$$

The asymptotic evolution of G is thus given by:

$$\delta G \propto t^{1/3}. \quad (\text{B.11})$$

The eccentricities evolve as:

$$e_i \propto t^{-1/3}. \quad (\text{B.12})$$

The semi-major axes ratio asymptotic evolution is governed by:

$$\delta\alpha \propto \delta G \propto t^{1/3}. \quad (\text{B.13})$$

We thus find the same asymptotic law ($t^{1/3}$) as Papaloizou (2011), and Lithwick & Wu (2012).

Appendix C: 2:1 resonance between proper modes around the ACR solution in S2

In this section we present a brief analysis of the event happening in S2 around $t = 1.4$ Myr (Fig. 17). We interpret the increase of the amplitude of oscillations in the direction of e_2 as a consequence of the crossing of the 2:1 resonance between both proper modes around the ACR solution. The linear equations of motion around the fixed point (see Eq. (58)) correspond to degree two terms in the diagonalized Hamiltonian:

$$\mathcal{H}_{\text{diag},2} = -g_1 u_1 \bar{u}_1 - g_2 u_2 \bar{u}_2. \quad (\text{C.1})$$

The resonance appears in this Hamiltonian at degree three with the term of the form:

$$\rho (u_1 \bar{u}_2^2 + \bar{u}_1 u_2^2), \quad (\text{C.2})$$

where ρ is a constant depending on the parameters and initial conditions. Let us note $u_i = \sqrt{U_i} e^{i\nu_i}$. We can average over all other angles than the resonant one ($\nu_1 - 2\nu_2$) with a similar procedure than the one used in Sect. 2. The system is then reduced to one degree of freedom and we have a new constant of the (averaged) motion:

$$U = 2U_1 + U_2. \quad (\text{C.3})$$

The energy levels curves for the values of the constants G and U taken by the system of simulation S2 at the moment of the event (around $t = 1.4$ Myr) are shown in Fig. C.1 superimposed with the trajectory of the system. We see that before the event, the proper mode 2 is almost totally damped compared to proper mode 1 (red dots in Fig. C.1), whereas just after the event, this proper mode gained some amplitude (green dots in Fig. C.1) and the system follows very well the expected motion. The resonant angle $\nu_1 - 2\nu_2$ does not enter in libration in the simulation S2 but this may be due to the very strong dissipation present in this simulation and which induces an evolution of the constant G quicker than expected for a real system. Thus the frequencies g_1 , g_2 and the phase space evolve very quickly and the system crosses the resonance before it has time to enter in the libration area. The important

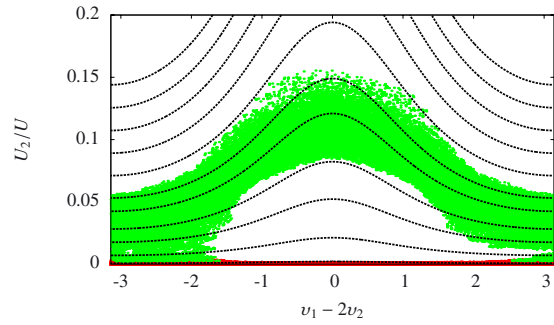


Fig. C.1. Superposition of the trajectory of the system S2 during the event (around $t = 1.4$ Myr) with the energy levels curves of the 2:1 resonance between both proper modes around the ACR solution. The successive positions of the system just before the event are marked with red dots while the positions of the system just after the event are marked with green dots.

fact is that due to the crossing of the resonance, the proper mode 2 increases its amplitude while the proper mode 1 amplitude's decreases ($U = 2U_1 + U_2$ stays constant). However, since the proper mode 1 has initially a much higher amplitude, this decrease is imperceptible. Moreover, since the diagonalizing matrix is dominated by diagonal terms, the evolution of e_1 is dominated by the proper mode 1 and the evolution of e_2 by the proper mode 2. Thus, e_1 is only weakly affected by the event while e_2 is strongly affected.

References

- Batygin, K., & Morbidelli, A. 2012, ApJ, accepted [arXiv:1204.2791]
 Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, MNRAS, 365, 1160
 Callegari, N., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2004, Celest. Mech. Dyn. Astron., 89, 201
 Callegari, N., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2006, Celest. Mech. Dyn. Astron., 94, 381
 Ferraz-Mello, S., Tsuchida, M., & Klafke, J. C. 1993, Celest. Mech. Dyn. Astron., 55, 25
 Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., & Michtchenko, T. A. 2003, Celest. Mech. Dyn. Astron., 87, 99
 Gastineau, M., & Laskar, J. 2011, TRIP 1.1.12, TRIP reference manual, IMCCE, Paris Observatory, <http://www.imcce.fr/trip/>
 Hadjidemetriou, J. D. 2002, Celest. Mech. Dyn. Astron., 83, 141
 Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. 2010, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (Springer)
 Henrard, J. 1982, in NATO ASIC Proc. 82: Applications of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics, ed. V. Szebehely, 153
 Henrard, J., & Lemaître, A. 1983, Celest. Mech., 30, 197
 Laskar, J. 2000, Phys. Rev. Lett., 84, 3240
 Laskar, J., & Robutel, P. 1995, Celest. Mech. Dyn. Astron., 62, 193
 Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, A&A, 538, A105
 Lee, M. H. 2004, ApJ, 611, 517
 Lee, M. H., & Peale, S. J. 2002, ApJ, 567, 596
 Lithwick, Y., & Wu, Y. 2012, ApJ, 756, 11
 Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Ferraz-Mello, S. 2006, Celest. Mech. Dyn. Astron., 94, 411
 Morbidelli, A. 2002, Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics
 Papaloizou, J. C. B. 2011, Celest. Mech. Dyn. Astron., 111, 83
 Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 2010, MNRAS, 405, 573
 Rouillier, F. 1999, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 9, 433

C.2 Resonance breaking due to dissipation in planar planetary systems

Cet article étudie le scénario de sortie à excentricités élevées pour les résonances de degré quelconque. On construit un modèle conservatif simplifié des résonances qui est intégrable (un degré de liberté, voir paragraphe 2.4). Ce modèle simplifié ne permet pas de retracer toutes les subtilités de la dynamique en résonance mais permet d'établir des critères analytiques simples sur la dissipation de marée subie par les planètes pour connaître l'évolution du système. On cherche en particulier à estimer l'évolution de l'amplitude de libration dans la résonance (paragraphe 3.3). Ceci permet de savoir si le système a tendance à s'approcher de plus en plus du centre de libration de la résonance ou bien au contraire à s'approcher de la séparatrice pour la franchir et sortir de la résonance. Ce comportement dépend principalement de l'équilibre entre la dissipation dans la planète interne et la dissipation dans la planète externe (cf. proposition 1). Lorsque la dissipation dans la planète interne domine, l'amplitude de libration croît et le système peut sortir de la résonance. Plus la dissipation dans la planète interne est importante, plus l'amplitude de libration croît rapidement. Lorsque la dissipation dans la planète externe domine, l'amplitude de libration décroît et le système s'approche de plus en plus du centre de la résonance. On obtient une expression analytique simple de la valeur critique (τ_c) du rapport des temps caractéristiques de dissipation dans les planètes ($\tau = T_1/T_2$) qui sépare ces deux régimes (voir équation (3.20)). Lorsqu'un système franchit la séparatrice et sort de la résonance, une deuxième valeur critique de τ (τ_α , voir équation (3.21)) permet de prévoir le sens d'évolution du rapport des périodes. Lorsque la dissipation dans la première planète domine, le rapport de périodes P_2/P_1 augmente alors que lorsque c'est la deuxième planète qui dissipe le plus, le rapport de périodes diminue. Une application de ces critères aux systèmes GJ 163 (planètes b et c, résonance 3:1, voir paragraphe 4.1.1) et GJ 581 (b et c, 5:2, voir paragraphe 4.1.2) permet d'établir des contraintes sur la dissipation dans ces planètes. Ces contraintes donnent des indications sur la nature des planètes. Dans les deux systèmes considérés, le scénario de formation envisagé implique une composition gazeuse (dissipation faible) pour la planète interne et rocheuse (dissipation forte) pour la planète externe. Enfin, on envisage un scénario de formation des systèmes *Kepler* proches des résonances 2:1 et 3:2 par dissipation de marée et sortie de la résonance à excentricités élevées (cf. paragraphe 4.2.3). Ce scénario produit le même excès de systèmes en circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$) que le scénario de sortie à excentricité faible mais sur une échelle de temps bien plus courte (3-5 ordres de grandeur).

Resonance breaking due to dissipation in planar planetary systems

J.-B. Delisle¹, J. Laskar¹, and A. C. M. Correia^{1,2}

¹ ASD, IMCCE-CNRS UMR 8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
 e-mail: delisle@imcce.fr

² Departamento de Física, I3N, Universidade de Aveiro, Campus Universitário de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal

Received 19 February 2014 / Accepted 25 April 2014

ABSTRACT

We study the evolution of two planets around a star, in mean-motion resonance and undergoing tidal effects. We derive an integrable analytical model of mean-motion resonances of any order which reproduce the main features of the resonant dynamics. Using this simplified model, we obtain a criterion showing that, depending on the balance of the tidal dissipation in both planets, their final period ratio may stay at the resonant value, increase above, or decrease below the resonant value. Applying this criterion to the two inner planets orbiting GJ 163, we deduce that the current period ratio (2.97) could be the outcome of dissipation in the 3:1 MMR provided that the innermost planet is gaseous (slow dissipation) while the second one is rocky (faster dissipation). We perform N -body simulations with tidal dissipation to confirm the results of our analytical model. We also apply our criterion on GJ 581b, c (5:2 MMR) and reproduce the current period ratio (2.4) if the inner planet is gaseous and the outer is rocky (as in the case of GJ 163). Finally, we apply our model to the *Kepler* mission's statistics. We show that the excess of planets pairs close to first-order MMRs but in external circulation, i.e., with period ratios $P_{\text{out}}/P_{\text{in}} > (p+1)/p$ for the resonance $(p+1):p$, can be reproduced by tidal dissipation in the inner planet. There is no need for any other dissipative mechanism, provided that these systems left the resonance with non-negligible eccentricities.

Key words. celestial mechanics – planets and satellites: general

1. Introduction

It has been shown that planets in first-order mean-motion resonances (MMRs) that undergo tidal dissipation, naturally leave the resonant configuration by moving away from each other (Papaloizou & Terquem 2010; Papaloizou 2011; Lithwick & Wu 2012; Delisle et al. 2012; Batygin & Morbidelli 2013b). The tidal dissipation first induces a decrease of both eccentricities (as expected) and the system initially stays in resonance. However, when eccentricities reach low values, the ratio between the orbital periods of the outer planet and the inner one begins to increase (diverging orbits) as the eccentricities continue to decrease. If the timescale of the dissipation is sufficiently short (compared to the age of the system), the period ratio can significantly depart from the resonant value.

It is important to note that during this process, the system never crosses the resonance separatrix. The separatrix simply disappears at low eccentricities, and the system ends up with a period ratio $P_{\text{out}}/P_{\text{in}}$ greater than the resonant value (e.g., Delisle et al. 2012). However, if the amplitude of libration in the resonance becomes sufficiently high, the system may cross the separatrix before it disappears and may end up either in the internal or the external circulation areas (e.g., Novak et al. 2003; Goldreich & Schlichting 2014). External circulation refers to the configuration where planets are close to a MMR $(p+q):p$, but with a period ratio greater than the resonant value ($P_{\text{out}}/P_{\text{in}} > (p+q)/p$). On the contrary, internal circulation refers to the configuration $P_{\text{out}}/P_{\text{in}} < (p+q)/p$.

In this study, we obtain a simple criterion for the dissipation undergone by planetary systems in a MMR of any order to end up in the resonant area, the internal, or the external circulations areas. In Sect. 2 we present a method for obtaining a

simple integrable model for resonances of any order. In Sect. 3 we consider the evolution of the dynamics under dissipation. We focus on the evolution of the amplitude of libration in the resonance depending on the balance of dissipation in both planets. In Sect. 4 we apply our reasoning to the GJ 163 (3:1 MMR) and GJ 581 (5:2 MMR) planetary systems. Finally, in Sect. 5 we discuss the impact of resonance breaking induced by tides on the *Kepler* mission's multi-planetary systems statistics.

2. An integrable simplified model of resonances

In order to obtain simple criteria on the dissipation we need an analytical model of MMRs that is as simple as possible and that still captures the main characteristics of the resonant dynamics. In particular, the model should be integrable (one degree of freedom). For first-order resonances, this integrable approximation is easily obtained (see Sessin & Ferraz-Mello 1984; Henrard et al. 1986; Wisdom 1986; Batygin & Morbidelli 2013a). However, for higher order resonances, the situation is more complex and we need to make some simplifying hypotheses.

First, we introduce our notations and the classical method for obtaining a non-integrable Hamiltonian model for any MMR. Then, we reproduce the well-known method used to obtain an integrable model for first-order resonances as a template for higher order resonances.

2.1. Hamiltonian of a $(p+q):p$ MMR

We refer to the star as body 0, to the inner planet as body 1, and to the outer planet as body 2. Noting the masses of the

A&A 566, A137 (2014)

three bodies m_i , we introduce for both planets $\mu_i = \mathcal{G}(m_0 + m_i)$ and $\beta_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$, where \mathcal{G} is the gravitational constant. Let \mathbf{r}_i be the position vectors of the planets with respect to the star and $\tilde{\mathbf{r}}_i$ the canonically conjugated momenta (in astrometric coordinates, see [Laskar & Robutel 1995](#)). As usual in the literature, semi-major axes are noted a_i , eccentricities e_i , mean longitudes λ_i , and longitudes of periastron ϖ_i . It should be noted that we only consider the planar case in this study. The Hamiltonian of the three-body problem reads

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{K}} + \hat{\mathcal{H}}_1, \quad (1)$$

where $\hat{\mathcal{K}}$ is the Keplerian part (star-planets interactions) and $\hat{\mathcal{H}}_1$ is the perturbative part (planet-planet interactions). The Keplerian part is given by

$$\hat{\mathcal{K}} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2 \hat{\Lambda}_i^2}, \quad (2)$$

where $\hat{\Lambda}_i$ is the circular angular momentum of planet i ,

$$\hat{\Lambda}_i = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}. \quad (3)$$

The perturbative part can be decomposed in direct and indirect interactions,

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \hat{\mathcal{U}}_1 + \hat{\mathcal{T}}_1 \quad (4)$$

$$\hat{\mathcal{U}}_1 = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} \quad (5)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0}, \quad (6)$$

with $\Delta_{12} = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$. This perturbation can be expressed as a function of elliptical orbital elements by expanding it in Fourier series of the angles λ_i , ϖ_i (e.g., [Laskar & Robutel 1995](#)).

For a given MMR $(p+q):p$ between both planets, the corresponding combination of the mean longitudes undergoes slow variations

$$(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \approx 0, \quad (7)$$

whereas other (non-resonant) combinations of these angles circulate rapidly. The long-term evolution of the orbits is accurately described by the averaged Hamiltonian over the non-resonant combinations of the mean longitudes.

By performing this averaging and the classical angular momentum reduction, one obtains a two degrees of freedom problem (e.g., [Delisle et al. 2012](#)) and two constants of motion. The first constant of motion is the total angular momentum,

$$\hat{G} = \hat{G}_1 + \hat{G}_2 = \hat{\Lambda}_1 \sqrt{1 - e_1^2} + \hat{\Lambda}_2 \sqrt{1 - e_2^2}. \quad (8)$$

The second, which comes from the averaging, is a combination of the circular angular momenta (or semi-major axes, e.g., [Michtchenko & Ferraz-Mello 2001](#)),

$$\Gamma = \frac{p+q}{p} \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2. \quad (9)$$

As shown in [Delisle et al. \(2012\)](#), the constant Γ can be used as a scaling factor and does not influence the dynamics of the system except by changing the scales of the problem (in space, energy,

and time). The elimination of Γ is achieved by performing the following change of coordinates (see [Delisle et al. 2012](#))

$$\Lambda_i = \frac{\hat{\Lambda}_i}{\Gamma} \quad (10)$$

$$G_i = \frac{\hat{G}_i}{\Gamma} \quad (11)$$

$$G = \frac{\hat{G}}{\Gamma} = G_1 + G_2 \quad (12)$$

$$\mathcal{H} = \Gamma^2 \hat{\mathcal{H}} \quad (13)$$

$$t = \frac{\hat{t}}{\Gamma^3}, \quad (14)$$

while angle coordinates are unchanged. Using these new coordinates, the dynamics of the system depends on only one parameter, G , the renormalized angular momentum.

The remaining two degrees of freedom can be represented by both resonant angles,

$$\sigma_i = -\frac{p}{q} \lambda_1 + \frac{p+q}{q} \lambda_2 - \varpi_i, \quad (15)$$

and both deficits of angular momentum ([Laskar 2000](#)), which are canonically conjugated to the resonant angles,

$$I_i = \Lambda_i - G_i. \quad (16)$$

We can also introduce rectangular coordinates,

$$x_i = \sqrt{I_i} e^{i\sigma_i}. \quad (17)$$

It should be noted that for small eccentricities, $|x_i| \propto e_i$. The averaged Hamiltonian takes the form

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(I_i) + \mathcal{S}(I_i, \Delta\varpi) + \mathcal{R}(I_i, \sigma_i), \quad (18)$$

where \mathcal{S} is the secular part of the Hamiltonian depending on the difference of longitudes of periastron ($\Delta\varpi = \sigma_2 - \sigma_1$), but not on mean longitudes of the planets, and \mathcal{R} is the resonant part. These two parts can be expanded as power series of eccentricities (more precisely of x_i). The method used to obtain these expansions is presented in [Laskar & Robutel \(1995\)](#); [Delisle et al. \(2012\)](#).

The Keplerian part can be expressed as a function of the momenta I_i by substituting the expressions of Λ_i in Eq. (2),

$$\Lambda_1 = \frac{p}{q} [1 - (G + \mathcal{D})] \quad (19)$$

$$\Lambda_2 = \frac{p+q}{q} (G + \mathcal{D}) - \frac{p}{q}, \quad (20)$$

with \mathcal{D} the total angular momentum deficit ([Laskar 2000](#)),

$$\mathcal{D} = I_1 + I_2 = \sum_{i=1}^2 x_i \bar{x}_i. \quad (21)$$

The secular part contains terms of degree two and more in eccentricities while the resonant part contains terms of degree q and more. Thus, the simplest model of the resonance should take into account at least those terms of order q in eccentricities in the perturbative part,

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D}) + \mathcal{S}_q(I_i, \Delta\varpi) + \sum_{k=0}^q R_k (x_1^k x_2^{q-k} + \bar{x}_1^k \bar{x}_2^{q-k}), \quad (22)$$

where \mathcal{S}_q is the secular part truncated at degree q and R_k are constant coefficient (see [Delisle et al. 2012](#)).

This problem is much simpler than the initial four degrees of freedom problem. However, in general it is still non-integrable since it presents two degrees of freedom.

2.2. First-order resonances

For a first-order MMR (such as the 2:1 or 3:2 resonances) the simplest Hamiltonian reads

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D}) + R_1(x_1 + \bar{x}_1) + R_0(x_2 + \bar{x}_2), \quad (23)$$

where there are no secular terms since they only appear at degree two. It is well known that the Hamiltonian (23) is integrable (see Sessin & Ferraz-Mello 1984; Henrard et al. 1986; Wisdom 1986; Batygin & Morbidelli 2013a). Introducing R and ϕ such that

$$R_1 = R \cos(\phi) \quad (24)$$

$$R_0 = R \sin(\phi) \quad (25)$$

and the new coordinates u_1, u_2 such that

$$x = R_\phi u, \quad (26)$$

with R_ϕ the rotation matrix

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (27)$$

the Hamiltonian (23) reads

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D}) + R(u_1 + \bar{u}_1), \quad (28)$$

with

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^2 u_i \bar{u}_i. \quad (29)$$

In these coordinates, the Hamiltonian (28) does not depend on the angle associated with u_2 but only on the action $u_2 \bar{u}_2$ which is thus a new constant of motion of the system. We are then left with only one degree of freedom (u_1, \bar{u}_1) and the problem is integrable.

However, if one introduces second-order terms in the Hamiltonian of a first-order MMR, this simplification no longer occurs. It does not occur either, in the case of higher order MMRs, even at the minimal degree of development of the Hamiltonian. Moreover, the presence of chaotic motion proves that no reduction to an integrable system is possible (see Wisdom 1986).

For those higher order MMRs, we have to make some additional hypothesis and/or to neglect some terms in the Hamiltonian in order to obtain an integrable system that still captures most of the characteristics of the resonant motion. Nevertheless, we can get some inspiration from the method described for first-order resonances. The main idea of this method is to perform a rotation of coordinates and introduce some kinds of proper modes of the motion (u_i). This rotation is chosen such that the fixed point corresponding to the center of libration of the resonance lies in the direction of the first mode (i.e., $u_1 \neq 0, u_2 = 0$ at the libration center). Thus, all the resonant dynamics is concentrated in the first mode. The second mode only adds some circulation around the libration center.

The aim of our method for higher order resonance is to obtain a similar rotation that concentrates the main characteristics of the resonant motion in one mode. Of course, we will have to make some simplifications and the model will not be able to reproduce the chaotic motion that is observed in the numerical simulations.

2.3. Higher order resonances

We now consider a resonance $(p+q):p$ of order $q > 1$ and the Hamiltonian (22). The position of the center of libration can be obtained by solving Hamilton's equations with zero as the right-hand member (e.g., Delisle et al. 2012),

$$\dot{x}_i = i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{x}_i} = 0. \quad (30)$$

Let $I_{i,\text{ell}}, \sigma_{i,\text{ell}}$ be the coordinates of this libration center. We then introduce the angle ϕ such that

$$\tan \phi = \sqrt{\frac{I_{2,\text{ell}}}{I_{1,\text{ell}}}} \quad (31)$$

and the diagonal matrix M_σ with $(M_\sigma)_{i,i} = e^{i\sigma_{i,\text{ell}}}$. It can easily be checked that the canonical change of coordinates

$$x = M_\sigma R_\phi u \quad (32)$$

puts the libration center in the direction of u_1 ($u_2 = 0$). We introduce the action-angle coordinates D_i, θ_i such that $u_i = \sqrt{D_i} e^{i\theta_i}$. The new Hamiltonian has exactly the same form as the Hamiltonian (22),

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D}) + S'_q(D_i, \theta_2 - \theta_1) + \sum_{k=0}^q R'_k \left(u_1^k u_2^{q-k} + \bar{u}_1^k \bar{u}_2^{q-k} \right), \quad (33)$$

where we still have $\mathcal{D} = D_1 + D_2 = u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_2$. In the case of first-order resonances, the angle θ_2 no longer appears in the Hamiltonian, but here we still have a dependency on θ_2 in the secular and the resonant parts. In order to go further we need a simplifying approximation. We note that by construction, at the libration center, we have $D_{2,\text{ell}} = 0$ while $D_{1,\text{ell}} \neq 0$. Close to this elliptic fixed point, D_2 is negligible compared to D_1 . The Hamiltonian (33) can be expanded in a power series of $\sqrt{D_2/D_1}$, which is a small parameter as long as the system is close to the center of libration. We approximate this Hamiltonian with the zeroth order part of the expansion that does not depend on u_2 , but only on u_1 . This is equivalent to imposing $u_2 = 0$ ($D_2 = 0$). In this approximation, the Hamiltonian is much simpler and integrable,

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathcal{D}) + S'_q(D_1) + R'_q \left(u_1^q + \bar{u}_1^q \right). \quad (34)$$

Moreover, we have $\mathcal{D} = D_1$ and the secular part becomes simply a polynomial of degree $\lfloor q/2 \rfloor$ in $D_1 = u_1 \bar{u}_1$. We note that imposing $D_2 = 0$ is a strong hypothesis. This implies that $I_2/I_1 \approx \Lambda_2/\Lambda_1 (e_2/e_1)^2$ stays locked at its value at the libration center ($I_{2,\text{ell}}/I_{1,\text{ell}} = \tan^2 \phi$). Therefore, the eccentricities stay very close to their values at the libration center. This hypothesis is reasonable when the system is close to the libration center. When the system is close to the separatrix, the dynamics is more complex, but we keep this simplified model as a first approximation.

2.4. Development of the Keplerian part

Since we obtained an integrable Hamiltonian there is no need for a new simplification. However, if we study the dynamics at low eccentricities, the Keplerian part can be approximated with a polynomial in \mathcal{D} by a Taylor expansion. This allows one to obtain polynomial equations of motion.

A&A 566, A137 (2014)

We can first rewrite Eqs. (19) and (20) in the form

$$\Lambda_1 = \Lambda_{1,0} - \frac{p}{q}(\mathcal{D} - \Delta G) \quad (35)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_{2,0} + \frac{p+q}{q}(\mathcal{D} - \Delta G), \quad (36)$$

with $\Delta G = G_0 - G$, and G_0 , $\Lambda_{i,0}$ the values at the nominal resonance and zero eccentricities (see [Delisle et al. 2012](#)). For a resonant system, the semi-major axis ratio (or the period ratio) should be close to the nominal resonant value. Therefore, we should have $\Lambda_i \approx \Lambda_{i,0}$ and thus $\mathcal{D} - \Delta G \approx 0$. ΔG can thus be interpreted as an estimate (or a generalization) of the total angular momentum deficit \mathcal{D} ([Laskar 2000](#)). It should be observed, however, that ΔG is a constant of motion while \mathcal{D} is not conserved. Since, in the resonant case $\mathcal{D} - \Delta G$ is small, we develop the Keplerian part in power series of $\mathcal{D} - \Delta G$. The constant terms of this development can be discarded because they have no impact on the dynamics. Moreover, it can be shown that, because of the definition of $\Lambda_{i,0}$, there is no contribution at the first order. The development should then be done at least at the second order,

$$\mathcal{K} \approx \mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_2(\mathcal{D} - \Delta G)^2, \quad (37)$$

where \mathcal{K}_0 is a constant that will be ignored in the following and

$$\mathcal{K}_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{p}{q} \right)^2 n_{1,0} \left(\frac{1}{\Lambda_{1,0}} + \frac{p+q}{p} \frac{1}{\Lambda_{2,0}} \right), \quad (38)$$

where $n_{1,0}$ is the Keplerian mean motion at the nominal resonance,

$$n_{1,0} = \frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{\Lambda_{1,0}^3}. \quad (39)$$

We note that the degree of development of the Keplerian part should be consistent with the development of the perturbative part. For a resonance of order q , we developed the perturbative part at degree q , thus the Keplerian part should also be developed at order q in eccentricity (order $\lfloor q/2 \rfloor$ in $\mathcal{D} - \Delta G$). For the sake of simplicity we only consider here resonances of order $q < 6$ for which the Keplerian part can be approximated with

$$\mathcal{K} \approx -\mathcal{K}_2 D_1 (D_1 - 2\Delta G), \quad (40)$$

where we eliminated constant terms and used the hypothesis $\mathcal{D} = D_1$ ($D_2 = 0$).

2.5. Final form of the Hamiltonian

The only remaining step is to express explicitly the secular part. Assuming $q < 6$, S'_q has the form

$$S'_q = S'_1 D_1 + S'_2 D_1^2, \quad (41)$$

where we dropped constant terms, and the Hamiltonian reads

$$\mathcal{H} = D_1 \left(2(\mathcal{K}_2 \Delta G + S'_1/2) - (\mathcal{K}_2 - S'_2) D_1 \right) + R'_q (u_1^q + \bar{u}_1^q). \quad (42)$$

We define

$$\delta = \frac{\mathcal{K}_2 \Delta G + S'_1/2}{\mathcal{K}_2 - S'_2} \approx \Delta G \quad (43)$$

such that

$$\mathcal{H} = (\mathcal{K}_2 - S'_2) D_1 (2\delta - D_1) + R'_q (u_1^q + \bar{u}_1^q). \quad (44)$$

One can also rescale the Hamiltonian (and the timescale of the dynamics) with the transformation

$$\mathcal{H}^* = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{K}_2 - S'_2} \quad (45)$$

$$R^* = \frac{R'_q}{\mathcal{K}_2 - S'_2} \quad (46)$$

$$t^* = (\mathcal{K}_2 - S'_2)t. \quad (47)$$

The final form we obtain for the Hamiltonian of a MMR of order q is

$$\mathcal{H}^* = u_1 \bar{u}_1 (2\delta - u_1 \bar{u}_1) + R^* (u_1^q + \bar{u}_1^q). \quad (48)$$

In the following, we will drop the stars for the sake of brevity and will study the Hamiltonian

$$\mathcal{H} = u_1 \bar{u}_1 (2\delta - u_1 \bar{u}_1) + R (u_1^q + \bar{u}_1^q), \quad (49)$$

or equivalently

$$\mathcal{H} = D_1 (2\delta - D_1) + 2RD_1^{q/2} \cos(q\theta_1). \quad (50)$$

For the sake of simplicity we will assume that $R > 0$. If $R < 0$, one only needs to perform the rotation $\theta'_1 = \theta_1 + \pi/q$ to meet this hypothesis.

It is important to note that the change of coordinates $x \rightarrow u$ may depend on the parameter ΔG since the direction of the libration center can change with ΔG . However, for second-order resonances and at leading order in eccentricities, the direction always stays the same and the change of coordinates is constant. Moreover, for any MMR a constant change of coordinates can always be used as a first approximation at low eccentricities (e.g. [Beaugé et al. 2006](#); [Michtchenko et al. 2006](#), which gives the position of this libration center for most common MMRs and a variety of mass ratios). We thus suppose in the following that the change of coordinates is constant.

2.6. Dynamics in the integrable model

Using Hamilton equations and the Hamiltonian (49) we obtain

$$\dot{u}_1 = i(2u_1(\delta - u_1 \bar{u}_1) + qR\bar{u}_1^{q-1}). \quad (51)$$

For $q > 1$ there is an obvious fixed point at $u_1 = 0$, whereas for $q = 1$ (first-order MMR) this fixed point never exists.

For $u_1 \neq 0$, the position of the fixed points are given by

$$2u_1 \bar{u}_1 (\delta - u_1 \bar{u}_1) + qR\bar{u}_1^q = 0. \quad (52)$$

The first part of this equation is obviously real, thus \bar{u}_1^q is also real. This means that $\theta_1 = k\pi/q$ and $\bar{u}_1^q = (-1)^k |u_1|^q = (-1)^k D_1^{q/2}$. We thus have to find the positive roots of

$$\delta - D_1 + (-1)^k \frac{q}{2} R D_1^{q/2-1} = 0. \quad (53)$$

If δ is big enough, we can write $D_1 \sim \delta$. At the first order in R the solution would be

$$D_1 = \delta + (-1)^k \frac{q}{2} R \delta^{q/2-1}. \quad (54)$$

Finally, the position of the fixed point in terms of u_1 can be approximated with

$$u_1 = \sqrt{\delta + (-1)^k \frac{q}{2} R \delta^{q/2-1}} e^{i\frac{k\pi}{q}}. \quad (55)$$

J.-B. Delisle et al.: Resonance breaking due to dissipation

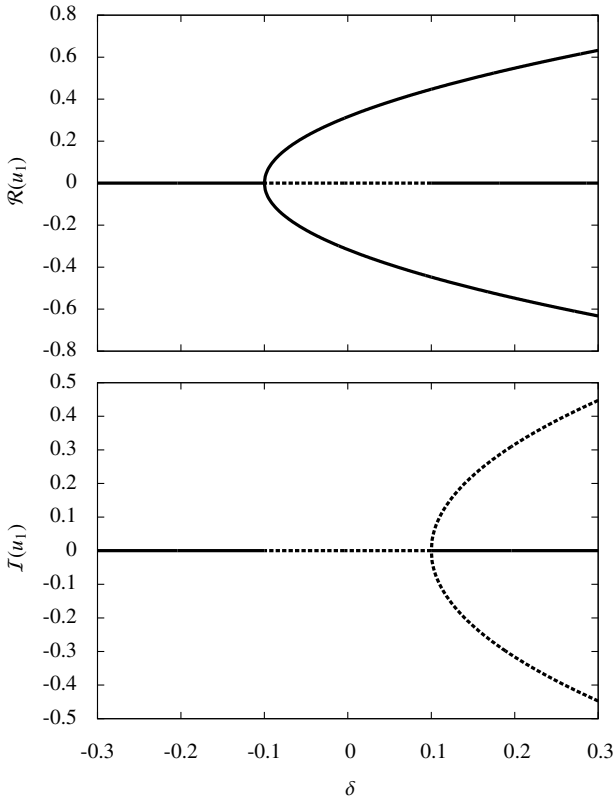


Fig. 1. Position of the fixed points of a second-order resonance ($q = 2$) in the simplified model (Hamiltonian (49)) as a function of δ . We give the real (*top*) and imaginary (*bottom*) parts of u_1 as given by Eq. (55) with $R = 0.1$. Continuous lines correspond to stable branches while dashed lines to unstable ones.

Figure 1 shows the bifurcation diagram of fixed points for a second-order resonance with $R = 0.1$ and Fig. 2 shows the three different cases for the phase space depending on the number of fixed points (1, 3, or 5). For $\delta < -R$ (Fig. 2, top), the system admits only one elliptical (stable) fixed point at zero (zero eccentricities) and the phase-space exhibits only (external) circulation around this fixed point. This clearly corresponds to a non-resonant (or secular) dynamics. For $-R < \delta < R$ (Fig. 2, middle), the fixed point at zero becomes hyperbolic (unstable) and two symmetrical elliptical fixed points bifurcate from it on the real line. Each one is associated with a resonant area. The circulation area still exists, surrounding both resonant areas. The separatrix between both types of motion passes through the hyperbolic point at zero. Finally, for $\delta > R$ (Fig. 2, bottom), the central fixed point becomes stable again and two symmetrical hyperbolic fixed points appear on the imaginary line. A new circulation area appears (internal circulation), between both resonant areas, around the stable fixed point at zero.

Higher order MMRs exhibit very similar behavior: successive bifurcations from the fixed point at zero. However, the case of first-order MMRs is different. The fixed point at zero eccentricities does not exist for $q = 1$, and the bifurcation between purely secular motion and a resonant phase space significantly differs (see [Henrard & Lemaître 1983](#); [Delisle et al. 2012](#)). In particular, at the bifurcation, the center of external circulation becomes the center of libration of the resonance. This means that under dissipation (that induces an evolution of the phase space),

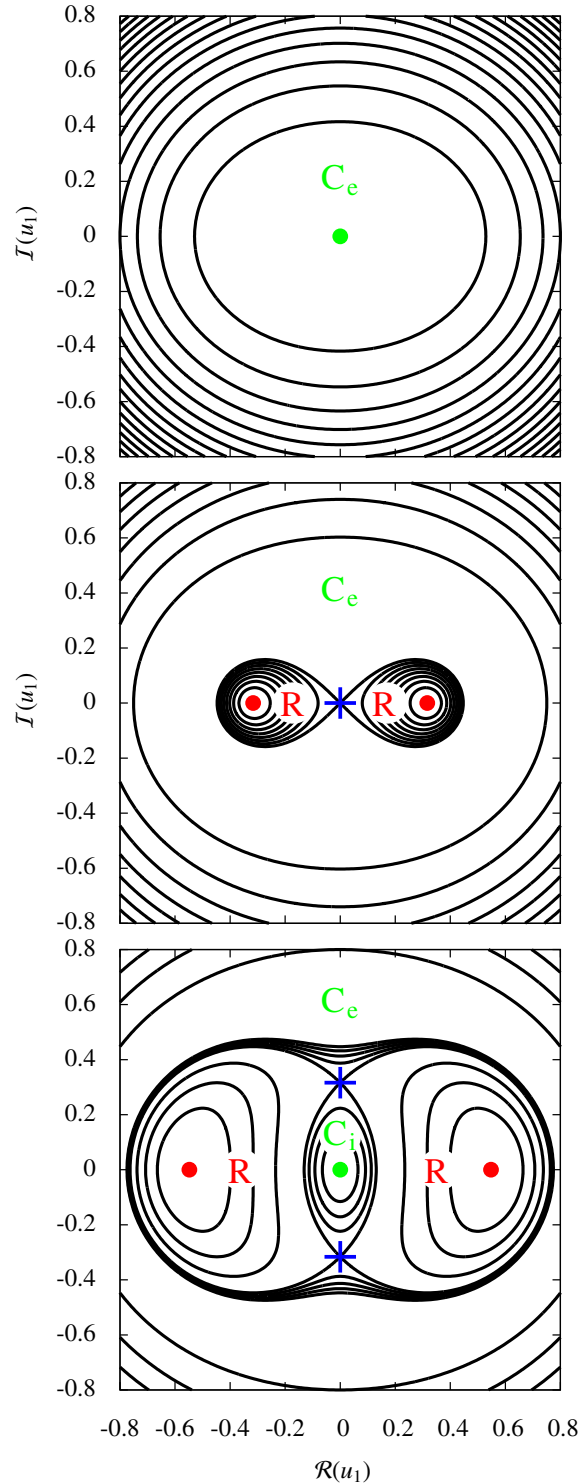


Fig. 2. The three typical phase spaces of the simplified model (Hamiltonian (49)) for a second-order resonance. We plot the energy levels in the complex plane (real and imaginary parts of u_1), for $R = 0.1$ and $\delta = -0.2$ (*top*), 0 (*middle*), 0.2 (*bottom*). Elliptical (stable) fixed points are marked with dots, while hyperbolic (unstable) ones are marked with crosses. **R** corresponds to a resonant area and C_e (respectively C_i) to external (respectively internal) circulation.

A&A 566, A137 (2014)

the system can evolve from external circulation to resonant motion (and vice versa) without crossing the separatrix of the resonance. This phenomenon was invoked to explain the excess of systems in *Kepler* data that rely close to first-order MMRs (2:1 and 3:2), but in external circulation (see [Delisle et al. 2012](#)). For higher order resonances, the same process does not occur because the size of the resonant areas tends to zero when reaching the bifurcation (see Figs. 1 and 2). Thus, a system always needs to cross the separatrix to pass from resonant motion to circulation.

3. Dissipation in a resonant system

3.1. Amplitude of libration

The aim of this section is to study the evolution of a system that is initially trapped in resonance and undergoes some dissipation, such as the tidal effect, that damps the eccentricities of the planets. At the beginning of the process, the system is assumed to be in the resonant area of the phase space (with $\delta^2 \gg R\delta^{q/2}$; see Fig. 2, bottom). We will assume here that the mode u_1 (defined in Eq. (32)) is damped on a timescale T_d ,

$$\dot{u}_1|_d = -\frac{u_1}{T_d}, \quad (56)$$

and that this dissipative force induces a decrease of the parameter δ , which is in first approximation proportional to the action $u_1\bar{u}_1$,

$$\dot{\delta}|_d = -\gamma \frac{u_1\bar{u}_1}{T_d}. \quad (57)$$

We present in Sect. 3.2 estimates of T_d and γ in the case of tidal effect in both planets.

We now introduce a measure of the amplitude of libration in the resonant area,

$$A = \sin^2\left(\frac{q\theta_{1,\max}}{2}\right), \quad (58)$$

where $\theta_{1,\max}$ is the maximum value reached by the resonant angle during a libration. We have $A = 0$ at the center of libration, $A = 1$ at the separatrix, and $0 < A < 1$ in between. The evolution of the amplitude A is governed by the following proposition.

Proposition 1. *Assuming that the conservative evolution of u_1 is given by the Hamiltonian (49), that the dissipation affects the system as described by Eqs. (56) and (57), and that the system is in the regime $\delta^2 \gg R\delta^{q/2}$, the amplitude of libration in the resonance (A , Eq. (58)) follows (demonstration in Appendix A)*

$$\dot{A}|_d \approx \frac{A}{T_d} \left(\left(1 + \frac{q}{4}\right)\gamma - 2 \right). \quad (59)$$

Therefore, if $\gamma < 8/(4+q)$ the amplitude of libration decreases with respect to the size of the resonance, while if $\gamma > 8/(4+q)$ the amplitude increases. Let γ_c be this critical value,

$$\gamma_c = \frac{8}{4+q}. \quad (60)$$

In the first case ($\gamma < \gamma_c$), the system evolves closer and closer to the fixed point. In the long-term, the system will follow very closely the stable branch while eccentricities tend to zero. On the contrary, if $\gamma > \gamma_c$, then A grows exponentially and, depending on the initial amplitude, the system can cross the separatrix before eccentricities are completely damped.

After having crossed the separatrix, the system is no longer locked in resonance and the semi-major axis ratio (or the period ratio) evolution depends on the relative strength of the dissipation in each planet.

3.2. Outcome of tidal dissipation in resonance

From our previous computations, it is clear that the most important parameter to determine is γ and especially how it compares with γ_c . The value of T_d is also important since it gives the timescale of the dissipative evolution and must be compared to the age of the considered system.

The parameter γ is mainly influenced by the balance of the dissipation in both planets. The more the first planet dissipates (compared to the second one), the greater γ is.

At leading order in eccentricities the tidal effect induces (e.g., [Correia et al. 2011](#))

$$\dot{e}_i|_d \approx -\frac{e_i}{T_i} \quad (61)$$

$$\dot{x}_i|_d \approx -\frac{x_i}{T_i} \quad (62)$$

$$\dot{a}_i|_d \approx -2e_i^2 \frac{a_i}{T_i} \approx -4 \frac{x_i \bar{x}_i}{\Lambda_i} \frac{a_i}{T_i}, \quad (63)$$

where T_i is the timescale of the tidal dissipation in planet i . For instance, if we take a constant lag time model ([Singer 1968](#); [Mignard 1979](#)), this timescale is given by (e.g., [Bonfils et al. 2013](#))

$$T_i = \frac{2}{21} \frac{\beta_i a_i^8}{\Delta t_i k_{2,i} \mathcal{G} m_0^2 R_i^5}, \quad (64)$$

where Δt_i , $k_{2,i}$, and R_i are the time lag, the second Love number, and the radius of planet i . The evolution of u_1 can be deduced from Eq. (62),

$$\dot{u}_1|_d = -\left(\frac{\cos^2 \phi}{T_1} + \frac{\sin^2 \phi}{T_2}\right) u_1. \quad (65)$$

The dissipation timescale T_d is thus

$$T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 \sin^2 \phi + T_2 \cos^2 \phi}. \quad (66)$$

The impact of the dissipation on the parameter ΔG (at leading order) is given by (see [Delisle et al. 2012](#))

$$\Delta \dot{G}|_d = -2G \left(\frac{p+q}{p} \frac{x_1 \bar{x}_1}{T_1} + \frac{x_2 \bar{x}_2}{T_2} \right) \quad (67)$$

from which we deduce

$$\dot{\delta}|_d \approx \Delta \dot{G}|_d = -\left(\frac{1}{1 + \tau \tan^2 \phi} \gamma_1 + \frac{\tau \tan^2 \phi}{1 + \tau \tan^2 \phi} \gamma_2 \right) \frac{u_1 \bar{u}_1}{T_d}, \quad (68)$$

with

$$\tau = \frac{T_1}{T_2} \quad (69)$$

$$\gamma_1 = 2 \frac{p+q}{p} G \quad (70)$$

$$\gamma_2 = 2G, \quad (71)$$

where G can be approximated with G_0 . We thus have

$$\gamma = \frac{1}{1 + \tau \tan^2 \phi} \gamma_1 + \frac{\tau \tan^2 \phi}{1 + \tau \tan^2 \phi} \gamma_2. \quad (72)$$

Since $(p + q)/p > 1$, $\gamma_1 > \gamma_2$. Therefore, γ decreases with τ , from γ_1 ($\tau = 0$, dissipation in planet 1 dominates) to γ_2 ($\tau = +\infty$, dissipation in planet 2 dominates).

More precisely, it can be shown that $\gamma_1 \in [2, 2(p + q)/p]$ and $\gamma_2 \in [2p/(p + q), 2]$. The exact values depend on the masses of both planets. The lower bounds correspond to the case $m_1 \ll m_2$ and the upper bounds to $m_2 \ll m_1$. We thus always have (see Eq. (60))

$$\gamma_1 > \gamma_c, \quad (73)$$

whereas γ_2 can either be greater or smaller than γ_c depending on the considered resonance and the masses of the planets. If $\gamma_2 > \gamma_c$, then $\gamma > \gamma_c$ regardless of the balance of dissipation in both planets (τ). If $\gamma_2 < \gamma_c$, then there exists a critical value of τ ,

$$\tau_c = \frac{\gamma_1 - \gamma_c}{\gamma_c - \gamma_2} \cot^2 \phi, \quad (74)$$

corresponding to the critical value γ_c . If $\tau > \tau_c$, then $\gamma < \gamma_c$, and the amplitude of oscillation decreases, whereas if $\tau < \tau_c$ the amplitude increases.

In the case $\tau > \tau_c$, the crossing of the separatrix is possible, and the evolution of the semi-major axis ratio, $\alpha = a_1/a_2$, just after the crossing can be estimated from Eq. (63),

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \Big|_d \approx 4 \frac{u_1 \bar{u}_1}{T_d} \left(\frac{\tau \tan^2 \phi}{1 + \tau \tan^2 \phi} \frac{1}{\Lambda_2} - \frac{1}{1 + \tau \tan^2 \phi} \frac{1}{\Lambda_1} \right). \quad (75)$$

We introduce

$$\tau_\alpha = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \cot^2 \phi. \quad (76)$$

Then, if $\tau > \tau_\alpha$, the semi-major axis ratio decreases (diverging orbits), whereas if $\tau < \tau_\alpha$ the semi-major axis ratio increases (converging orbits).

These two criteria can be rewritten in a more explicit form. We note that ϕ gives the direction of the libration center of the resonance. More precisely, we have

$$\cot^2 \phi = \frac{x_1 \bar{x}_1}{x_2 \bar{x}_2} \approx \frac{\Lambda_1 e_1^2}{\Lambda_2 e_2^2} \approx \frac{m_1 e_1^2}{m_2 e_2^2} \sqrt{\alpha}, \quad (77)$$

where all quantities must be evaluated at the libration center. Thus, τ_c and τ_α can be approximated with

$$\tau_c \approx L \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 \frac{4 + (p + q)(1 + L)}{4L - p(1 + L)} \quad (78)$$

$$\tau_\alpha \approx \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2, \quad (79)$$

where

$$L = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \approx \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\alpha} \approx \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{p}{p + q} \right)^{1/3}. \quad (80)$$

To sum up:

- If $\tau (=T_1/T_2) > \tau_c$, the amplitude of libration decreases while the eccentricities are being damped. For first-order resonances, the system leaves the resonance with diverging orbits when planets reach low eccentricities (e.g., [Delisle et al. 2012](#)). For higher order resonances the system stays in the resonant configuration.

- If $\tau < \tau_c$, the amplitude of libration increases and the system may cross the separatrix depending on the initial amplitude. The smaller τ is, the more quickly the amplitude grows. If the initial amplitude is small and the growth is slow, the eccentricities are being damped before the system reaches the separatrix and it stays in resonance. Thus, τ_c is an upper estimate of the maximum value of τ needed to cross the separatrix. The true maximum value depends on the initial eccentricities of the planets and on the initial amplitude of libration. If the system crosses the separatrix, the subsequent evolution is given by the comparison of τ and τ_α :
 - if $\tau > \tau_\alpha$, the orbits are converging ($P_2/P_1 < (p + q)/p$),
 - if $\tau < \tau_\alpha$, the orbits are diverging ($P_2/P_1 > (p + q)/p$).

It should be noted that both τ_c and τ_α have very simple expressions (Eqs. (78) and (79)) that do not depend on the coefficient R of the resonant part of the Hamiltonian.

The only difficulty in estimating τ_c and τ_α is estimating the eccentricity ratio e_1/e_2 at the libration center. This ratio (or equivalently the angle ϕ) can be estimated from the development of the Hamiltonian at leading degree, but a better estimate can be obtained by searching the fixed points of the Hamiltonian developed at a higher degree in eccentricities (e.g., [Delisle et al. 2012](#)), or using numerical averaging methods (e.g., [Beaugé et al. 2006](#); [Michtchenko et al. 2006](#)), or computations of periodic orbits (e.g. [Hadjidemetriou 2002](#); [Antoniadou & Voyatzis 2014](#)).

4. Application to observed planetary systems

In this section we present applications of our model to observed planetary systems. It should be noted that the dissipation timescale has a strong dependency on the distance to the star (see Eq. (64)). Therefore, in most planetary systems, the tidal dissipation is dominated by the contribution of the inner planet, while the tidal effect in the outer planet can be neglected. According to our model, in this case the amplitude of libration always increases with time (see Eq. (73)). Therefore, if the initial amplitude is large enough, these systems can leave the resonance by crossing the separatrix before eccentricities are damped. Moreover, after these systems leave the resonance, the dissipation in the inner planet induces an increase of the period ratio (P_2/P_1) since the semi-major axis of the inner planet decreases (see Eq. (63)). We thus conclude that for most resonant planetary systems, the final outcome of the tidal dissipation process should be external circulation if the initial amplitude of libration was large enough, or resonant motion if the initial amplitude was small.

However, a system can end up in internal circulation if the tidal effect is much more efficient in the outer planet than in the inner one (e.g., in the case of a gaseous inner planet and a rocky outer one), and/or if the eccentricity of the outer planet is much larger than that of the inner planet. Systems observed close to MMRs but in internal circulation are thus of particular interest because we can obtain strong constraints on the nature of the planets (rocky or gaseous). We looked in the exoplanet.eu database ([Schneider et al. 2011](#)) for systems observed in internal circulation and with estimated masses compatible with a gaseous inner planet and a rocky outer one. Only a few systems correspond to these criteria. We selected GJ 163b, c (3:1 MMR) and GJ 581b, c (5:2 MMR) to illustrate our model.

A&A 566, A137 (2014)

Table 1. Orbital parameters of the GJ 163 system (from Bonfils et al. 2013, fit with tidal constraint), and the GJ 581 system (from Forveille et al. 2011).

Parameter	[unit]	GJ 163			GJ 581			
		b	c	d	e	b	c	d
$m \sin i$	$[M_{\oplus}]$	10.661	7.263	22.072	1.95	15.86	5.34	6.06
P	[days]	8.633	25.645	600.895	3.14945 ± 0.00017	5.36865 \pm 0.00009	12.9182 \pm 0.0022	66.64 ± 0.08
a	[AU]	0.06069	0.12540	1.02689	0.028	0.041	0.073	0.22
e		0.0106	0.0094	0.3990	0.32 ± 0.09	0.031 \pm 0.014	0.07 \pm 0.06	0.25 ± 0.09

Notes. The stellar masses are $0.4 \pm 0.04 M_{\odot}$ (GJ 163), and $0.31 \pm 0.02 M_{\odot}$ (GJ 581). Planets considered in this study are marked with bold font.

4.1. Application to GJ 163 b, c (3:1 MMR)

4.1.1. The detected system

The star GJ 163 is an M-dwarf that hosts three planets (see Bonfils et al. 2013 and Table 1 for the orbital parameters). The two inner planets are close to a 3:1 MMR with a period ratio of 2.97 (internal circulation). The innermost planet's minimum mass ($m \sin i$) is estimated to be $10.7 M_{\oplus}$, while the other one is about $7.3 M_{\oplus}$. The radii of these planets have not been estimated so their density and nature (rocky or gaseous) is unknown. However, it seems reasonable to suppose that the inner planet is gaseous while the second one could be either rocky or gaseous (see Bonfils et al. 2013).

4.1.2. Scenario

The main question we want to answer is: Is there a natural explanation for having a system very close to but outside of the 3:1 MMR, with a period ratio $P_2/P_1 < 3$ (2.97)? It is of course possible that the system is close to the 3:1 MMR just by chance and that it was never locked in this resonance. However, it seems more probable that the system was locked in the 3:1 MMR in the past (for instance due to convergent migration in the protoplanetary disk), and afterwards slightly diverged from this resonant ratio to lower values.

We investigate here the possibility that tidal dissipation in planets may have induced this resonant departure as described in Sect. 3. Moreover, we deduce constraints on the GJ 163 system in order for this scenario to be valid. From Sect. 3 it follows that for the system to leave the resonance with $P_2/P_1 < (p + q)/p$, the ratio $\tau = T_1/T_2$ of tidal dissipation timescales in both planets must verify $\tau_{\alpha} < \tau < \tau_c$ (see Eqs. (79) and (78) for definitions of τ_{α} and τ_c). For numerical applications, we use a constant lag time model (Singer 1968; Mignard 1979). Criteria on τ transcribe in criteria on the lag time ratio $\Delta t_2/\Delta t_1$ by using the expression of T_i given in Eq. (64),

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1}{\alpha^8} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{k_{2,1}}{k_{2,2}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^5 \tau \approx \frac{1}{\alpha^8} \frac{m_2}{m_1} \kappa \tau, \quad (81)$$

with

$$\kappa = \frac{k_{2,1}}{k_{2,2}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^5 \quad (82)$$

and

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2}. \quad (83)$$

For this application, the eccentricity ratio is computed using the simplest analytical model (degree 2). We obtain $e_1/e_2 \approx 1.1$ at the libration center. The criterion $\tau > \tau_{\alpha}$ implies $\Delta t_2/\kappa \Delta t_1 \gtrsim 300$.

The criterion $\tau < \tau_c$ implies $\Delta t_2/\kappa \Delta t_1 \lesssim 1450$. Thus, the scenario that we described should be possible if

$$300 \lesssim \frac{\Delta t_2}{\kappa \Delta t_1} \lesssim 1450. \quad (84)$$

4.1.3. N-body simulations

We performed numerical simulations of GJ 163, starting in resonance with different lag time ratios for the tidal effect in both planets. We used a constant Δt model for the dissipation (Singer 1968; Mignard 1979) and the ODEX integrator (e.g., Hairer et al. 2010) as described in Bonfils et al. (2013). Gaseous planets typically have dissipation quality factors $Q \sim 10^3 - 10^4$, while rocky planets have quality factors in the range $Q \sim 10 - 100$. This corresponds to lag times in the range $\Delta t \sim 10 - 100$ s for gaseous planets, and $\Delta t \sim 10^3 - 10^4$ s for rocky ones ($Q \approx 1/(n\Delta t)$, where n is the mean motion of the planet). Since the innermost planet is probably gaseous, its lag time should be in the range $\Delta t_1 \sim 10 - 100$ s. However, in order to speed up the simulations, we used a higher tidal lag time. As explained by Bonfils et al. (2013), the timescale of the evolution is roughly inversely proportional to Δt . In order to check that this approximation does not dramatically affect our results we performed simulations with $\Delta t_1 = 10^7, 10^6, 10^5$, and 10^4 s (respectively 5, 4, 3, and 2 orders of magnitude higher than the expected value). The system is integrated during respectively 0.1, 1, 10, and 100 Myr which would roughly correspond to 10 Gyr with $\Delta t_1 = 100$ s. As a comparison, the age of the system is estimated to be in the range 1–10 Gyr (Bonfils et al. 2013).

We chose the initial elliptical elements of the planets such that the system is initially in resonance but not exactly at the libration center. As explained in Sect. 3, when the initial amplitude of libration is small, the system may not cross the separatrix before eccentricities are very small even if the amplitude increases. This initial amplitude is generated by varying the mean anomaly of the inner planet while all other elliptical elements correspond to an ACR (libration center of the resonance). For $M_1 = 0^\circ$, the system is initially at the libration center while for $M_1 = 180^\circ$, it starts at the separatrix (see Fig. 3 for a diagram of initial conditions). The initial eccentricities of the planets are set to about 0.16 and 0.11 in order to be close to the ACR, the perihelia are anti-aligned, and $M_2 = 0^\circ$. We took $a_1 = 0.062$ such that when eccentricities go to zero the system ends up approximately at its current position ($a_1 \approx 0.0607$).

Figure 4 shows the final period ratio of the planets as a function of the lag time ratio with $M_1 = 100^\circ$ (top) and 140° (bottom). In both cases, we superimposed the results obtained with the four different dissipative timescales ($\Delta t_1 = 10^7, 10^6, 10^5$, and 10^4 s). We see in Fig. 4 that the four curves show very similar features and exhibit only small variations between them. We do not observe a particular trend when varying the timescale of

J.-B. Delisle et al.: Resonance breaking due to dissipation

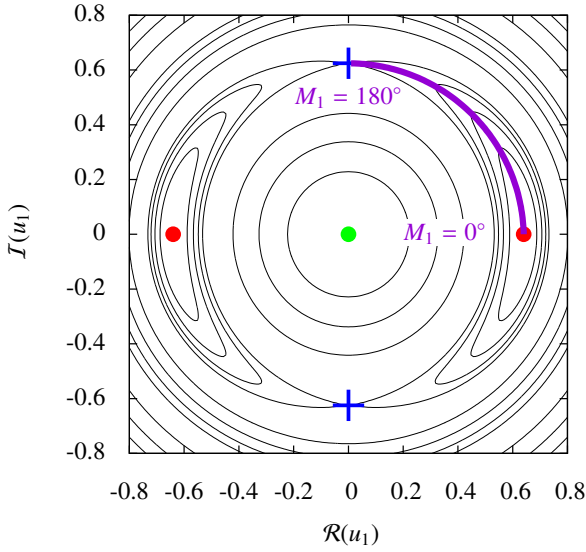


Fig. 3. Diagram of initial conditions used in numerical simulations of GJ 163 (3:1 MMR). M_1 varies between 0° (center of libration) and 180° (separatrix of the resonance) along the purple line.

the dissipation. Thus, we can assume that taking a dissipation timescale several order of magnitudes higher than realistic values does not affect the results of this study much, while it speeds up the computations.

As described by our model, we observe in Fig. 4 the three possible final states (external/internal circulation or resonant motion) for the system depending on the value of $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$. We plot in Fig. 5 an example of simulation for each of the three final configurations. For each case, we plot the evolution of the period ratio, the eccentricities, and the resonant angles. The limit between external and internal circulation (Fig. 4) is around $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \approx 250$ for both initial amplitudes of libration ($M_1 = 100$ and 140°). Our analytical estimate (300, see Eq. (84)) is fairly close to this numerical computation. The limit between internal circulation and resonant motion depends (as expected) on the initial amplitude and occurs at $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \approx 750$ for $M_1 = 100^\circ$, and 900 for $M_1 = 140^\circ$. The analytical model value (1450, see Eq. (84)) is thus significantly higher than these numerical results. However, as explained in Sect. 3 and observed in the simulation, this limit strongly depends on the initial amplitude and/or initial eccentricities. In our simple model we do not take into account these parameters and obtain an upper estimate of this limit which corresponds to a system initially in resonance but close to the separatrix ($M_1 \rightarrow 180^\circ$).

In order to illustrate this dependency we performed numerical simulations of the system with different initial amplitude of libration (M_1). The final period ratio of the system as a function of the lag time ratio and the initial amplitude is shown in Fig. 6. For this figure we used $\Delta t_1 = 10^7$ s since we showed that this value does not strongly affect our results and it allows us to speed up the computations.

For a small initial amplitude of libration, we observe that the system always ends up in resonance (green zone in Fig. 6). For higher initial amplitudes, internal (in blue) and external (in yellow/orange) circulation are possible. We observe that the limit between external and internal circulation always occurs for $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \approx 250$.

The limit between internal circulation and resonance depends on the initial amplitude of libration. At very high initial amplitudes, the limit tends to $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \sim 1100$. This is fairly close to the analytically predicted value (1450, see Eq. (84)). The remaining difference between analytical and numerical results probably comes from our simplifying hypothesis. Analytical results are obtained by assuming that e_1/e_2 stays locked at its value at the libration center. While this is reasonable when the system is close to the libration center, when it is close to the separatrix the eccentricities can significantly differ from their values at the libration center.

It should be noted that around $M_1 = 120^\circ$, some systems, which were expected to stay in resonance, end up in internal circulation (blue points in the green area). This is due to the presence of the separatrix of the secular resonance inside the MMR. Resonances of this type were already studied in the case of the 2:1 and 3:2 MMR by Callegari et al. (2004, 2006). As described by these studies, the secular frequency (dominating the motion of $\Delta\varpi$) falls to zero near the separatrix and the angle $\Delta\varpi$ librates in the opposite direction from one side to the other of the separatrix. Of course, our simplified model cannot predict this kind of phenomenon. However, it still captures the main features of the resonant motion under dissipation and allows a better understanding of the mechanisms that lead to the three different final states in our simulations.

It is important to notice that what we call initial amplitude of libration is the initial condition of our specific simulations. If we had chosen lower initial eccentricities, the amplitude of libration would have less time to grow, and a larger initial amplitude would be necessary to cross the separatrix of the resonance before reaching zero eccentricities. With higher initial eccentricities, the minimal initial amplitude of libration needed to cross the separatrix would be smaller. Moreover, at moderate eccentricities (~ 0.3), the phase space of the resonance exhibits bifurcations (e.g., Michtchenko et al. 2006) and when the system crosses these bifurcations the amplitude of libration undergoes jumps. This means that an even smaller initial amplitude of libration would be necessary if the system was initially at larger eccentricities.

If the system was initially in a 3:1 resonance, our model implies that $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 500\kappa$. In order to come to a conclusion about the nature of both planets, we need to estimate $\kappa = k_{2,1}/k_{2,2}(R_1/R_2)^5$. The Love numbers of both planets should be of the same order of magnitude¹. The radius ratio, raised to the fifth power, has a more significant impact. Since the planets' radii are unknown we estimate them from the masses using the empirical power law obtained by Weiss et al. (2013),

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{0.53} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{0.06}. \quad (85)$$

Using this estimate for GJ 163b, c, we obtain

$$\kappa \approx \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^5 \approx 2.2. \quad (86)$$

The upper x -axis of Fig. 6 is scaled using this value of κ . Finally, we conclude that $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 1000$. Such a ratio is reasonable only if the first planet is gaseous while the second one is telluric (see Bonfils et al. 2013). It should be noted that the minimum mass of the outer planet ($m \sin i$) is about $7 M_\oplus$. If it is a rocky planet, its mass is probably close to this value, and its inclination should be close to 90° .

¹ In the solar system, the Love number (k_2) of the Earth is 0.29 (Kozai 1968), Jupiter 0.379, Saturn 0.341 (Gavrilov & Zharkov 1977).

A&A 566, A137 (2014)

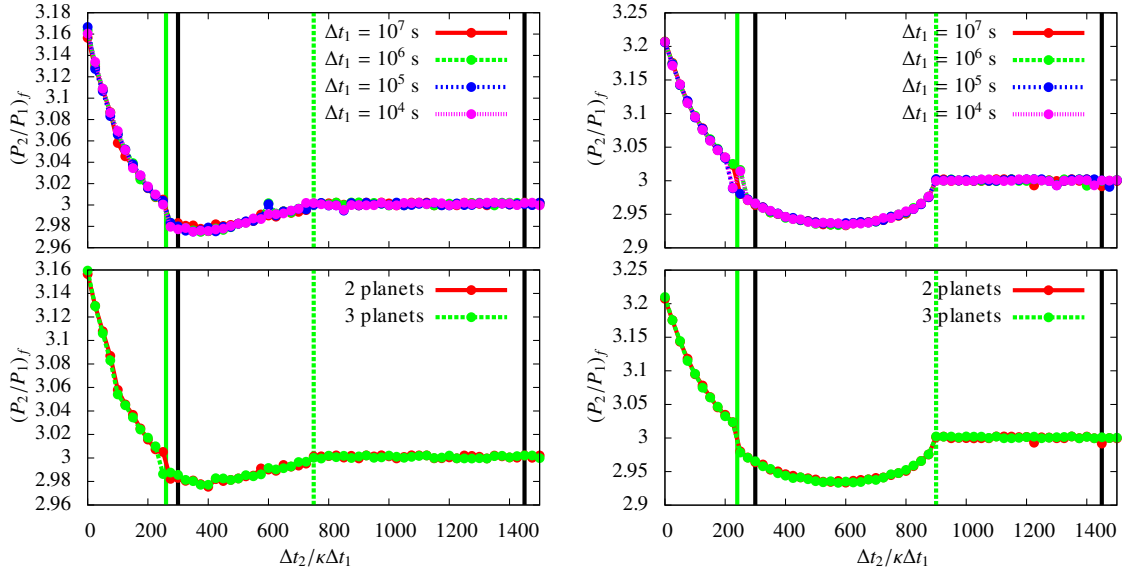


Fig. 4. Final period ratio of GJ 163's inner planets as a function of the dissipation balance between both planets ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$). We fix $M_1 = 100^\circ$ (left), 140° (right), and compare the results obtained with $\Delta t_1 = 10^7, 10^6, 10^5$, and 10^4 s (top) with an integration time of respectively 0.1, 1, 10, and 100 Myr, which roughly corresponds to 10 Gyr for a realistic value of Δt_1 (100 s). We also compare these results with integrations taking into account the third planet that has been detected in the system (bottom; see Bonfils et al. 2013). For this last comparison we use $\Delta t_1 = 10^7$ s. We observe only small variations when changing the timescale of the dissipation (Δt_1) and no systematic trend. The third planet also does not seem to have a strong effect. The vertical black lines mark the range of $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$ that may conduct to internal circulation according to our analytical model. The green lines highlight the same range obtained with the simulations. The lower bound (solid green line) is at $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 = 260$ in the case $M_1 = 100^\circ$ (left) and 240 for $M_1 = 140^\circ$ (right). It does not vary much between the experiments and it is close to the analytical value (300). The upper bound (dashed green line) is at 750 (left) and 900 (right) while the analytical value is 1450. The difference between the numerical results, and between the numerical and analytical values can easily be explained (see Sect. 4.1.3).

4.2. Application to GJ 581 b, c (5:2 MMR)

The model and mechanisms we describe in this study are very general and are not limited to the GJ 163 planetary system. Our conclusions are valid for a MMR of any order q . However, the criterion we obtain on the lag time ratio depends on the considered MMR, on the masses and radii of the planets, etc. Thus, the final outcome of the dissipation (internal/external circulation or resonant motion) must be determined for each system individually.

In order to illustrate the generality of our mechanism, we performed a similar analysis on the system GJ 581. This system has raised much discussion about the number of detected planets. Most studies agree on the presence of four planets around this M-dwarf and both planets b and c, which we are interested in, are uncontested. We reproduced the orbital parameters of the four-planet system given in Forveille et al. (2011) in Table 1. Planets b and c (see Bonfils et al. 2005; Udry et al. 2007; Mayor et al. 2009; Forveille et al. 2011) have a period ratio of 2.4 which is close to a 5:2 MMR (internal circulation). The inner planet (b) has a minimum mass of about $15.9 M_\oplus$ while planet c has a minimum mass of $5.3 M_\oplus$. Applying our analytical criterion to this system we deduce that internal circulation is possible for $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 \in [3, 52]$ (with $e_1/e_2 \approx 0.25$). As we did for GJ 163, we performed numerical simulations of the system for different lag time ratios ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$) and different initial amplitude of libration (M_1). We set the initial conditions to be close to the center of libration of the resonance. The eccentricities of the planets are initially set to about 0.05 and 0.2, the perihelia are anti-aligned, and $M_2 = -36^\circ$. We took $a_1 = 0.042$ such that when eccentricities are damped the system ends up approximately at its current

position ($a_1 \approx 0.041$). For $M_1 = 0^\circ$, the system is initially at the center of libration, while for $M_1 = 90^\circ$ the system begins on the separatrix. The system is integrated during 5×10^4 yr with $\Delta t_1 = 10^7$ s. The age of the system is estimated to be about 8 Gyr, thus our simulations are approximately equivalent to $\Delta t_1 \sim 10\text{--}100$ s on the age of the system (which corresponds to a gaseous planet).

The final outcome of these simulations are represented in Fig. 7. We observe a good agreement between analytical estimates and numerical results. In both cases, the current configuration of GJ 581b and c is obtained if $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 20\kappa$. It is interesting to note that this lag time ratio is significantly (one order of magnitude) smaller than what we obtained for GJ 163. The main reason for this is the difference in the position of the libration center in terms of eccentricity. For GJ 163 we have $e_1/e_2 \approx 1.1$, while here we have $e_1/e_2 \approx 0.25$ at the libration center. Since the lag time ratio is proportional to the eccentricity ratio squared, this explains the difference between the results. It should be observed that for most resonances, at low eccentricities, e_1/e_2 increases with m_2/m_1 (e.g., Michtchenko et al. 2006).

As in the case of GJ 163, the radii and Love numbers of both planets are unknown. We suppose equal Love numbers for both planets and estimate the radii using the same empirical power law as for GJ 163 (Weiss et al. 2013),

$$\kappa \approx \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^5 \approx 15. \quad (87)$$

The top x -axis of Fig. 7 is scaled using this value of κ . The lag time ratio of this system should be $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 300$. As in the case of GJ 163, we conclude that if GJ 581b and c

J.-B. Delisle et al.: Resonance breaking due to dissipation

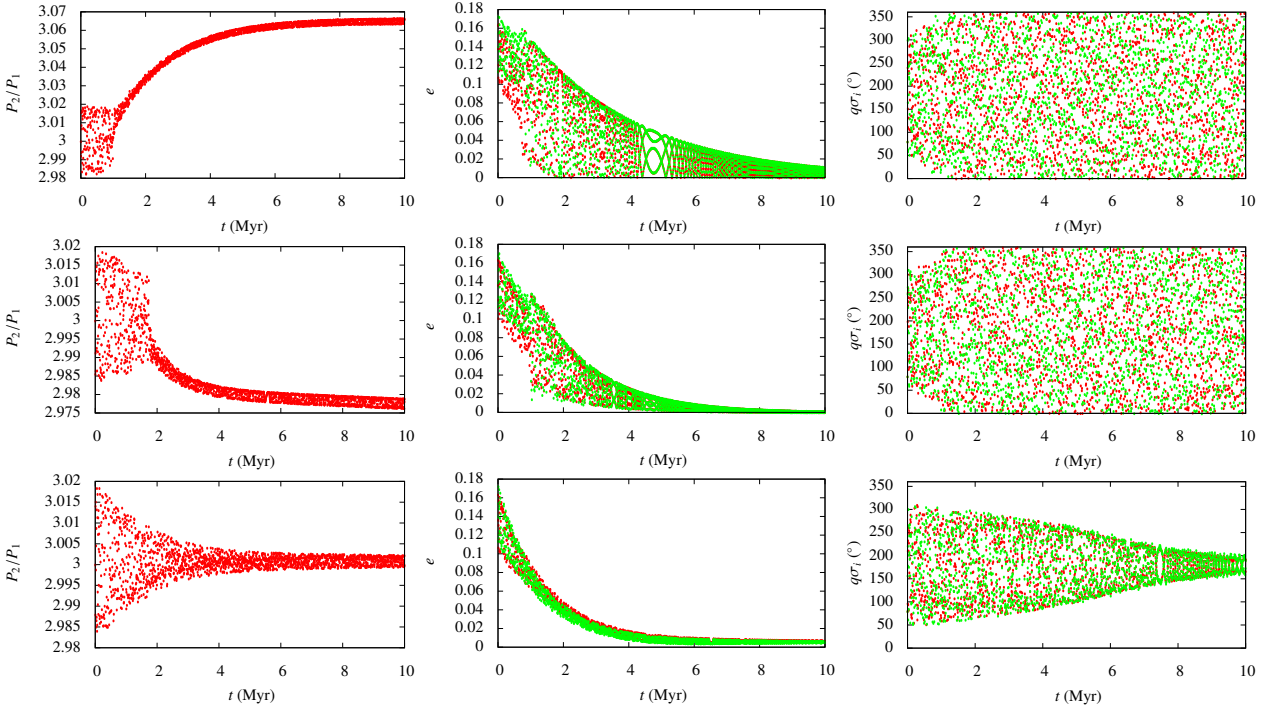


Fig. 5. Evolution of the period ratio (*left*), the eccentricities (*middle*), and the resonant angles (*right*) of GJ 163b and c, for M_1 initially set to 100° and $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1 = 100$ (*top*, departure from resonance to external circulation), 400 (*middle*, departure from resonance to internal circulation), and 1000 (*bottom*, staying in resonance). In the *middle and right columns*, red dots correspond to planet b and green dots to planet c. Time is given in Myr, but $\Delta t_1 = 10^5$ s in all these simulations. For a more realistic dissipation ($\Delta t_1 = 100$ s), the time should be read as Gyr.

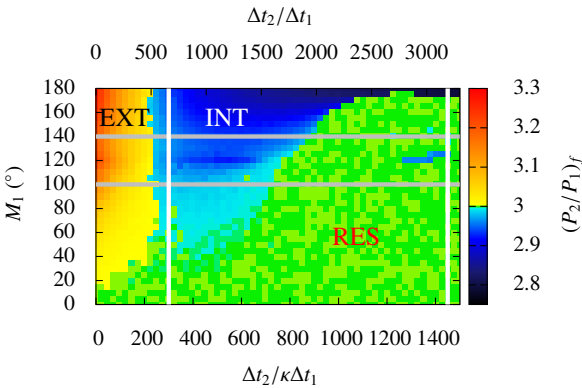


Fig. 6. Final period ratio of GJ 163's inner planets (3:1 MMR) as a function of the dissipation balance between both planets ($\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$, bottom x-axis) and initial amplitude of libration (M_1). The coefficient $\kappa = k_{2,1}/k_{2,2}(R_1/R_2)^5$ is unknown, but can be estimated using a mass-radius power law. The top x-axis ($\Delta t_2/\Delta t_1$) is scaled using the value $\kappa \approx 2.2$ obtained in Eq. (86). When M_1 is set to 0° , the system begins at the libration center, whereas when M_1 is set to 180° it starts at the separatrix. We fixed $\Delta t_1 = 10^7$ s in order to speed up the simulations and integrated the system during 0.1 Myr which roughly corresponds to 10 Gyr for a realistic value of Δt_1 (100 s). The horizontal gray lines correspond to both sets of initial conditions used in Fig. 4. The vertical white lines mark the range of $\Delta t_2/\kappa\Delta t_1$ that may conduct to internal circulation according to our analytical model.

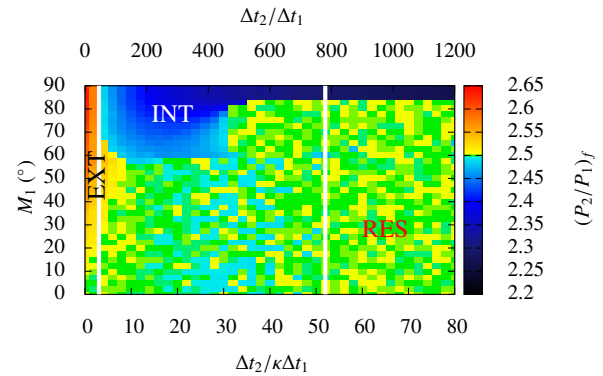


Fig. 7. Same as Fig. 6 but for GJ 581b, and c (5:2 MMR). The top x-axis ($\Delta t_2/\Delta t_1$) is scaled using the value $\kappa \approx 15$ obtained in Eq. (87). We note that M_1 varies only between 0° (center of libration) and 90° (separatrix), because the resonant combination is $5M_2 - 2M_1$ (factor 2 in front of M_1).

(respectively $15.86 M_\oplus$ and $5.34 M_\oplus$ for the inner and the outer planets) are compatible with this conclusion.

5. Kepler's statistics

Multi-planetary systems detected by the *Kepler* mission present an excess of planet pairs close to first-order MMRs (2:1 and 3:2), but in external circulation (see Lissauer et al. 2011; Fabrycky et al. 2012). Since tidal dissipation in planets involved in a first-order MMR can induce a departure from the resonance to external circulation when eccentricities reach very low values,

formed by tidal dissipation in the 5:2 MMR, the inner planet should be gaseous and the outer one rocky. The minimum masses

A&A 566, A137 (2014)

this scenario has been proposed to explain *Kepler*'s statistics (Lithwick & Wu 2012; Delisle et al. 2012; Batygin & Morbidelli 2013b). However, the timescale of this dissipation might be too long compared to the age of the systems to explain their present configurations (see Lee et al. 2013; and also Rein 2012). It should be noted that the scenario considered in these studies assumes that the planets leave the resonance with very low eccentricities and without crossing the separatrix of the resonance. The departure of the period ratio from the resonant value is very slow since the tidal dissipation decreases with eccentricities (see Eqs. (61)–(63)).

Nevertheless, a resonant system that initially has a large enough amplitude of libration can cross the separatrix of the resonance while the eccentricities of the planets are still high. The departure of the period ratio from the resonant value is much faster in this case since the eccentricities are higher. As we observed in the introduction of Sect. 4, in most planetary systems the tidal dissipation mainly occurs in the inner planet and the dissipation in the outer one can be neglected. In this case, the amplitude of libration increases with time, and when a system crosses the resonance separatrix, the period ratio increases. Therefore, this mechanism also produces the excess of planets in external circulation observed in *Kepler* data, but on a shorter timescale.

Neglecting the dissipation in the outer planet, the evolution of the period ratio ($\mathcal{P} = P_2/P_1$) after the system crossed the separatrix is given by

$$\frac{\dot{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}} = 3e_1^2 \frac{1}{T_1}. \quad (88)$$

For the sake of simplicity we will neglect the secular interactions between the planets and suppose that e_1 undergoes an exponential decrease $e_1 = e_{1,0}e^{-t/T_1}$, with $e_{1,0}$ the eccentricity of the inner planet when the system crosses the separatrix, and T_1 the dissipation timescale (see Eq. (64)). In this approximation, the temporal evolution of the period ratio follows

$$\log(\mathcal{P}/\mathcal{P}_0) = \frac{3}{2}e_{1,0}^2 \left(1 - e^{-2t/T_1}\right), \quad (89)$$

with $\mathcal{P}_0 = (p+1)/p$.

Using Eq. (89), one can obtain the maximum value reached by the period ratio,

$$\mathcal{P} = \frac{P_2}{P_1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}_0 e^{3/2e_{1,0}^2}. \quad (90)$$

Figure 8 shows this maximum value as a function of the eccentricity $e_{1,0}$. It should be noted that when eccentricities reach low values the mechanism invoked previously (e.g., Delisle et al. 2012) dominates and the period ratio continues to increase but much more slowly.

Lee et al. (2013) estimated that tidal dissipation would need at least $t \gtrsim 50T_1$ for the system to reach $\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \approx 0.03$, both for the 2:1 and the 3:2 resonances. Depending on the considered resonance and on the masses of both planets, this can even reach $t \gtrsim 1000 T_1$.

Using Eq. (89) we can estimate the time needed for the system to reach the same configuration, but supposing it left the resonance with significant eccentricities. We plot in Fig. 9 this estimate (t/T_1) as a function of the eccentricity $e_{1,0}$. We see in Fig. 9 a vertical asymptote at $e_{1,0} \approx 0.1$, because for $e_{1,0} \lesssim 0.1$, the limit $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$ is smaller than 0.03. In this case, the system can eventually reach 0.03, on a timescale shorter but comparable to the one estimated by Lee et al. (2013) (50 – $1000 T_1$). On the contrary, when $e_{1,0} \gtrsim 0.15$, the system reaches the desired period

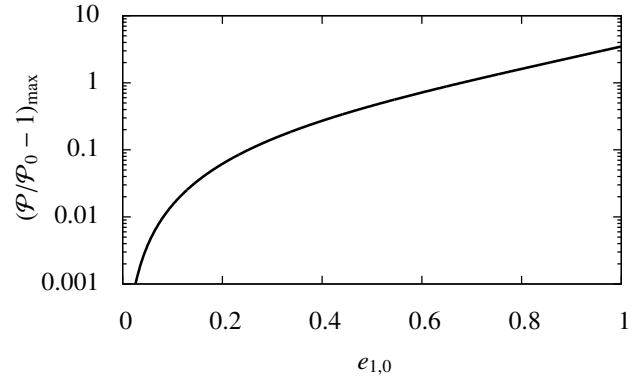


Fig. 8. Maximum value reached by the period ratio $\mathcal{P} = P_2/P_1$ (when $t \rightarrow \infty$, and according to Eq. (90)) as a function of the inner planet's eccentricity when the system leaves the resonance ($e_{1,0}$). $\mathcal{P}_0 = (p+1)/p$ is the period ratio at the exact resonance.

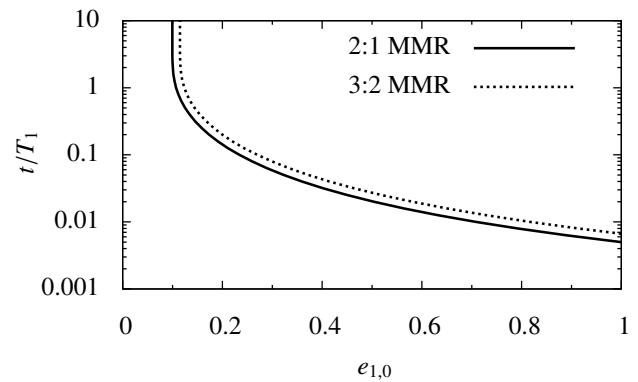


Fig. 9. Time required to produce a departure of P_2/P_1 of 0.03 from the resonant value as a function of the eccentricity of the inner planet when the system leaves the resonance ($e_{1,0}$). This value is computed using Eq. (89). It has to be compared with the estimate by Lee et al. (2013) considering a scenario of departure from the resonance at very low eccentricities ($t/T_1 \gtrsim 50$ – 1000).

ratio on a much shorter timescale: $t/T_1 \sim 0.01$ – 0.1 . This corresponds to a gain of 3–5 orders of magnitude with this alternate scenario.

Lee et al. (2013) discarded many near-resonant systems because tidal dissipation seemed too slow to explain their current configuration. However, this study only considered a scenario of resonant departure at low eccentricities. Some of these discarded systems might actually have formed by crossing the resonance separatrix with non-negligible eccentricities ($e_{1,0} \gtrsim 0.15$) due to the increase of the amplitude of libration induced by the tidal dissipation. In that case, the evolution of the period ratio after the resonance breaking is about 3–5 orders of magnitude more rapid, and the current configuration can be obtained on a more reasonable timescale.

6. Conclusion

We presented an integrable model of two-planet mean-motion resonances of any order. This model is highly simplified and cannot reproduce all the features of the resonant dynamics. However, it allows us to deduce a very simple criterion on the tidal dissipation undergone by both planets to end up inside the

resonance, or on one side or the other of the resonance. The main factors that enter into account are the balance of tidal dissipation between both planets (T_1/T_2 or $\Delta t_2/\Delta t_1$) and the position of the libration center (especially the ratio e_1/e_2).

Using this criterion on the two inner planets orbiting GJ 163 we deduce that the current period ratio (2.97) could be the outcome of dissipation in the 3:1 MMR provided that $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 1000$. Using N -body simulations with dissipation we reach the same conclusion with slightly refined bounds for $\Delta t_2/\Delta t_1$. Both methods clearly imply that the inner planet should be gaseous and the outer planet should be rocky. The minimum masses of both planets (respectively $10.7 M_\oplus$ and $7.3 M_\oplus$) are compatible with this hypothesis, but since the inclinations and the radii are currently unknown, some uncertainty remains. We also applied this model to GJ 581b, c and could reproduce the current configuration with tidal dissipation in the 5:2 MMR if $\Delta t_2/\Delta t_1 \sim 300$. As in the case of GJ 163, we conclude that the inner planet should be gaseous and the outer planet should be rocky, which is compatible with the minimum masses of both planets (respectively $15.86 M_\oplus$ and $5.34 M_\oplus$ for the inner and the outer planets).

As we noted in the case of GJ 163, some secondary resonances can affect the outcome of the considered system. Our integrable model of resonances is not able to predict such complex behavior, nor chaotic motion. This might be a limitation for high-order resonances, which may show large chaotic areas. Moreover, we make all our estimates using a constant eccentricity ratio (e_1/e_2) which is computed at the center of libration of the resonance. As eccentricities are being damped, the position of the libration center evolves and the eccentricity ratio is not constant. Depending on the resonance and on the considered range of eccentricities, the changes on the eccentricity ratio at the libration center can be non-negligible (e.g., [Michtchenko et al. 2006](#)). Besides, when the amplitude of libration is small, eccentricities of both planets should be close to the values at the libration center, but when the system reaches the separatrix and leaves the resonance, the eccentricities can be significantly different. Therefore, this estimate of the eccentricity ratio is the main limit in our model and in the computation of criteria on the lag time ratio. However, as we observed in the cases of GJ 163 and GJ 581, with this approximation we still obtain a good estimate of the order of magnitude of the lag time ratio and a better understanding of the mechanisms that are at stake in determining the outcome of the dissipative process.

The most interesting cases to study are those in internal circulation because we can obtain strong constraints on the nature of the planets for our scenario to be possible (as we did for GJ 163 and GJ 581). However, our mechanism also applies to many systems that are observed in external circulation. In most cases, the tidal dissipation in the outer planet is negligible compared to the dissipation in the inner planet, and the most probable outcome for the system is external circulation. For first-order MMRs, external circulation can also be obtained when eccentricities are very low without crossing the separatrix of the resonance (the separatrix simply disappears at low eccentricities, e.g., [Delisle et al. 2012](#)). However, the subsequent evolution of the period ratio is very slow because of the low eccentricities. [Lee et al. \(2013\)](#) showed that for many systems the evolution of the period ratio is too slow to reach the current value on a reasonable timescale. We show that a gain of 3–5 orders of magnitude on the timescale is obtained by considering a scenario of resonance breaking due to tides at non-negligible eccentricities ($e_1 \gtrsim 0.15$). This allows us to explain the presence of an excess of planets in external circulation in *Kepler* data without introducing any other mechanism than tidal dissipation.

Acknowledgements. We thank the anonymous referee for pointing out the importance of planets' radii in the estimate of the tidal dissipation and for other constructive comments that improved the quality of this article. This work has been supported by PNP-CNRS, CS of Paris Observatory, PICS05998 France-Portugal program, and FCT-Portugal (PEst-C/CTM/LA0025/2011).

Appendix A: Evolution of the amplitude of libration

The aim of this appendix is to prove Prop. 1. Assuming $\delta^2 \gg R\delta^{q/2}$, the Hamiltonian (50) can be approximated with the pendulum-like Hamiltonian

$$\mathcal{H} = D_1(2\delta - D_1) + 2R\delta^{q/2} \cos(q\theta_1). \quad (\text{A.1})$$

Noting $D_1 = \delta + \epsilon$, we obtain

$$\mathcal{H} = \delta^2 - \epsilon^2 + 2R\delta^{q/2} \cos(q\theta_1). \quad (\text{A.2})$$

Hamilton's equations give (in the conservative case)

$$\dot{\theta}_1 = -2\epsilon \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{\epsilon} = 2qR\delta^{q/2} \sin(q\theta). \quad (\text{A.4})$$

The elliptical fixed point corresponds to $q\theta_{1,\text{ell}} = 0$, $\epsilon_{\text{ell}} = 0$, $\mathcal{H}_{\text{ell}} = \delta^2 + 2R\delta^{q/2}$. The hyperbolic fixed point is at $q\theta_{1,\text{hyp}} = \pi$, $\epsilon_{\text{hyp}} = 0$, $\mathcal{H}_{\text{hyp}} = \delta^2 - 2R\delta^{q/2}$. Noting $\Delta\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ell}} - \mathcal{H}_{\text{hyp}} = 4R\delta^{q/2}$, one can verify that

$$\mathcal{H}_{\text{ell}} - \mathcal{H} = \epsilon^2 + \Delta\mathcal{H} \sin^2\left(\frac{q\theta_1}{2}\right). \quad (\text{A.5})$$

For a given conservative resonant trajectory, the maximum value of θ_1 is reached when $\dot{\theta}_1 = -2\epsilon = 0$. This corresponds to

$$\sin^2\left(\frac{q\theta_{1,\text{max}}}{2}\right) = \frac{\mathcal{H}_{\text{ell}} - \mathcal{H}}{\Delta\mathcal{H}}. \quad (\text{A.6})$$

This clearly provides a measure of the amplitude of libration which we call A ,

$$A = \sin^2\left(\frac{q\theta_{1,\text{max}}}{2}\right) = \frac{\mathcal{H}_{\text{ell}} - \mathcal{H}}{\Delta\mathcal{H}} = \frac{\epsilon^2}{\Delta\mathcal{H}} + \sin^2\left(\frac{q\theta_1}{2}\right). \quad (\text{A.7})$$

We now consider the evolution of this amplitude under dissipation. The dissipation affects the system as described by Eqs. (56) and (57). From these expressions we derive

$$\dot{D}_1|_d = -2\frac{D_1}{T_d} = -\frac{2}{T_d}(\delta + \epsilon) \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\delta}|_d = -\frac{\gamma}{T_d}(\delta + \epsilon) \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\epsilon}|_d = \dot{D}_1|_d - \dot{\delta}|_d = \frac{\gamma - 2}{T_d}(\delta + \epsilon) \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta\dot{\mathcal{H}}|_d = -\frac{q}{2}\frac{\gamma}{T_d}\Delta\mathcal{H}\left(1 + \frac{\epsilon}{\delta}\right). \quad (\text{A.11})$$

The instantaneous derivative of the amplitude A is given by (see Eq. (A.7))

$$\dot{A}|_d = \frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon^2}{\Delta\mathcal{H}}\right)|_d \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{\Delta\mathcal{H}^2}(2\Delta\mathcal{H}\epsilon\dot{\epsilon}|_d - \epsilon^2\Delta\dot{\mathcal{H}}|_d) \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{2}{T_d\Delta\mathcal{H}}\left((\gamma - 2)\delta\epsilon + \left(1 + \frac{q}{4}\right)\gamma - 2\right)\epsilon^2 + \gamma\frac{q}{4}\frac{\epsilon^3}{\delta}. \quad (\text{A.14})$$

A&A 566, A137 (2014)

We average this instantaneous derivative over one libration period in order to evaluate the long-term evolution of A . We need to compute the mean values of ϵ , ϵ^2 , and ϵ^3 . Because of the symmetry of the problem, ϵ and ϵ^3 average out to zero (odd powers of ϵ). We thus simply have

$$\langle \dot{A}|_d \rangle = \frac{2\langle \epsilon^2 \rangle}{T_d \Delta \mathcal{H}} \left(\left(1 + \frac{q}{4}\right) \gamma - 2 \right), \quad (\text{A.15})$$

with

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \left(\int_0^{\theta_{1,\max}} \frac{\epsilon^2}{|\dot{\theta}_1} d\theta_1 \right) / \left(\int_0^{\theta_{1,\max}} \frac{1}{|\dot{\theta}_1} d\theta_1 \right) \quad (\text{A.16})$$

and

$$\dot{\theta}_1 = -2\epsilon \quad (\text{A.17})$$

$$\epsilon^2 = \Delta \mathcal{H} \left(\sin^2 \left(\frac{q\theta_{1,\max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{q\theta_1}{2} \right) \right). \quad (\text{A.18})$$

Both integrals can be expressed using elliptic integrals and we obtain

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \Delta \mathcal{H} \left(A + \frac{E(\sqrt{A})}{K(\sqrt{A})} - 1 \right) \quad (\text{A.19})$$

$$\approx \frac{\Delta \mathcal{H} A}{2}, \quad (\text{A.20})$$

where K and E are the complete elliptic integrals of the first and second kinds. Finally, at leading order, the evolution of the amplitude A is governed by

$$\langle \dot{A}|_d \rangle \approx \frac{A}{T_d} \left(\left(1 + \frac{q}{4}\right) \gamma - 2 \right). \quad (\text{A.21})$$

References

- Antoniadou, K. I., & Voyatzis, G. 2014, *Astrophys. Space Sci.*, 349, 657
 Batygin, K., & Morbidelli, A. 2013a, *A&A*, 556, A28
 Batygin, K., & Morbidelli, A. 2013b, *AJ*, 145, 1
 Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, *MNRAS*, 365, 1160
 Bonfils, X., Forveille, T., Delfosse, X., et al. 2005, *A&A*, 443, L15
 Bonfils, X., Lo Curto, G., Correia, A. C. M., et al. 2013, *A&A*, 556, A110
 Callegari, N., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2004, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 89, 201
 Callegari, N., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2006, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 94, 381
 Correia, A. C. M., Laskar, J., Farago, F., & Boué, G. 2011, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 111, 105
 Delisle, J.-B., Laskar, J., Correia, A. C. M., & Boué, G. 2012, *A&A*, 546, A71
 Fabrycky, D. C., Lissauer, J. J., Ragozzine, D., et al. 2012, *ApJ*, submitted [[arXiv:1202.6328](https://arxiv.org/abs/1202.6328)]
 Forveille, T., Bonfils, X., Delfosse, X., et al. 2011, *A&A*, submitted [[arXiv:1109.2505](https://arxiv.org/abs/1109.2505)]
 Gavrilov, S. V., & Zharkov, V. N. 1977, *Icarus*, 32, 443
 Goldreich, P., & Schlichting, H. E. 2014, *AJ*, 147, 32
 Hadjidemetriou, J. D. 2002, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 83, 141
 Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. 2010, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* (Springer)
 Henrard, J., & Lemaître, A. 1983, *Celest. Mech.*, 30, 197
 Henrard, J., Milani, A., Murray, C. D., & Lemaître, A. 1986, *Celest. Mech.*, 38, 335
 Kozai, Y. 1968, *PASJ*, 20, 24
 Laskar, J. 2000, *Phys. Rev. Lett.*, 84, 3240
 Laskar, J., & Robutel, P. 1995, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 62, 193
 Lee, M. H., Fabrycky, D., & Lin, D. N. C. 2013, *ApJ*, 774, 52
 Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Fabrycky, D. C., et al. 2011, *ApJS*, 197, 8
 Lithwick, Y., & Wu, Y. 2012, *ApJ*, 756, L11
 Mayor, M., Bonfils, X., Forveille, T., et al. 2009, *A&A*, 507, 487
 Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2001, *Icarus*, 149, 357
 Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Ferraz-Mello, S. 2006, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 94, 411
 Mignard, F. 1979, *Moon and Planets*, 20, 301
 Novak, G. S., Lai, D., & Lin, D. N. C. 2003, in *Scientific Frontiers in Research on Extrasolar Planets*, eds. D. Deming, & S. Seager, *ASP Conf. Ser.*, 294, 177
 Papaloizou, J. C. B. 2011, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 111, 83
 Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 2010, *MNRAS*, 405, 573
 Rein, H. 2012, *MNRAS*, 427, L21
 Schneider, J., Dedieu, C., Le Sidaner, P., Savalle, R., & Zolotukhin, I. 2011, *A&A*, 532, A79
 Sessin, W., & Ferraz-Mello, S. 1984, *Celest. Mech.*, 32, 307
 Singer, S. F. 1968, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 15, 205
 Udry, S., Bonfils, X., Delfosse, X., et al. 2007, *A&A*, 469, L43
 Weiss, L. M., Marcy, G. W., Rowe, J. F., et al. 2013, *ApJ*, 768, 14
 Wisdom, J. 1986, *Celest. Mech.*, 38, 175

C.3 Tidal dissipation and the formation of Kepler near-resonant planets

Cette lettre présente une étude statistique des rapports de périodes des candidats de la mission *Kepler* au voisinage des résonances 2:1 et 3:2 en distinguant les systèmes proches de leur étoile et les systèmes plus lointains (voir paragraphe 4.2.1). On observe que pour les couples de planètes les plus proches de leur étoile ($P_1 < 5$ j, cf. figure 4.9 haut), il n'y a aucun système en résonance et un excès significatif de systèmes en circulation externe ($P_2/P_1 > |k_2/k_1|$). Au contraire pour les systèmes les plus éloignés ($P_1 > 15$ j, voir figure 4.9 bas), il y a un léger excès de systèmes en résonance et pas d'excès significatif en circulation externe. En utilisant un test de Kolmogorov-Smirnov (voir paragraphe 4.2.1), on montre que ces différences sont statistiquement significatives. Ces résultats impliquent que le mécanisme responsable de l'excès de planètes en circulation externe dans les données *Kepler* a une dépendance par rapport à la distance à l'étoile et n'agit que faiblement pour les systèmes éloignés. La plupart des scénarii envisagés précédemment pour expliquer cet excès ont été mis en avant justement pour leur absence de dépendance en la distance à l'étoile tandis que le scénario de sortie de la résonance par effet de marée était remis en cause pour cette dépendance. Les résultats obtenus dans cet article confortent donc l'importance de l'effet de marée dans la formation de ces systèmes même si la preuve apportée reste indirecte.

Tidal dissipation and the formation of Kepler near-resonant planets

J.-B. Delisle and J. Laskar

ASD, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
e-mail: delisle@imcce.fr

September 1, 2014

ABSTRACT

Multi-planetary systems detected by the *Kepler* mission present an excess of planets close to first-order mean-motion resonances (2:1 and 3:2) but with a period ratio slightly higher than the resonant value. Several mechanisms have been proposed to explain this observation. Here we provide some clues that these near-resonant systems were initially in resonance and reached their current configuration through tidal dissipation. The argument that has been opposed to this scenario is that it only applies to the close-in systems and not to the farthest ones for which the tidal effect is too weak. Using the catalog of KOI of the *Kepler* mission, we show that the distributions of period ratio among the most close-in planetary systems and the farthest ones differ significantly. This distance dependent repartition is a strong argument in favor of the tidal dissipation scenario.

Key words. celestial mechanics – planetary systems – planets and satellites: general

1. Introduction

The *Kepler* mission has opened the opportunity to perform statistical studies on a considerable number of planets. More specifically, the large number of planets detected in multi-planetary systems allows to test the formation and evolution scenarios of planetary systems. One of the most surprising results obtained by the *Kepler* mission was the fact that only a small fraction of planet pairs are locked in first-order mean-motion resonances (2:1, 3:2) whereas a significant excess of pairs is found with a period ratio close to but higher than the resonant value (Lissauer et al. 2011; Fabrycky et al. 2012). We reproduce in Fig. 1 the distribution of period ratio of planet pairs close to these first-order resonances using the Q1-Q16 KOI catalog (Batalha et al. 2013). This data set contains the *Kepler* confirmed planets as well as unconfirmed planet candidates. Candidates that are known to be false positives are removed from the sample. We observe, as described in the literature, an excess of planet pairs with a period ratio higher than the resonant value (see Fig. 1).

Different explanations for this observation have been proposed involving tidal dissipation raised by the star on the planets (Lithwick & Wu 2012; Delisle et al. 2012, 2014; Batygin & Morbidelli 2013), dissipative effects between the planets and the proto-planetary disk (Rein 2012; Baruteau & Papaloizou 2013), between planets and planetesimals (Chatterjee & Ford 2014), or in-situ formation (Petrovich et al. 2013; Xie 2014). In this article we provide some statistical clues in favor of the scenario involving tidal dissipation in planets initially locked in resonance.

The phenomenon of resonant departure induced by tidal dissipation was described by Papaloizou & Terquem (2010) and Papaloizou (2011) and has been analyzed with a particular focus on *Kepler* statistics by different authors (Lithwick & Wu 2012; Delisle et al. 2012; Batygin & Morbidelli 2013). These studies showed that for close-in planetary systems an excess of planets similar to the observed one is naturally produced by tidal dissipation raised in the planets by the stars.

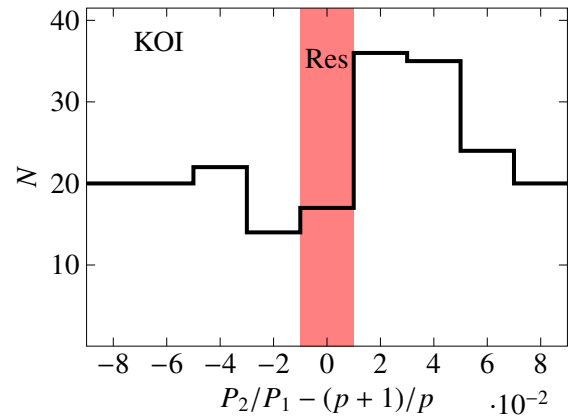


Fig. 1. Distribution of period ratio between pairs of planets close to the 2:1 and 3:2 mean-motion resonances. The distributions around both resonances are accumulated in order to obtain a more important set of systems. These statistics are obtained from the Q1-Q16 KOI catalog (Batalha et al. 2013). The origin of the x -axis is the exact commensurability of the periods (resonant systems) and is highlighted with a red strip. Negative values correspond to internal circulation ($P_2/P_1 < (p+1)/p$) and positive values correspond to external circulation ($P_2/P_1 > (p+1)/p$). We observe an important excess of systems in external circulation, with $P_2/P_1 - (p+1)/p \approx 2 \times 10^{-2}$.

Recently, Lee et al. (2013) showed that this scenario is too slow to explain the typical distance of planet pairs to the nominal resonance ($P_2/P_1 - (p+1)/p \approx 2 \times 10^{-2}$) on a reasonable timescale. In Delisle et al. (2014), we showed that tidal dissipation raised by the star in the innermost planet induces an increase of the amplitude of libration in the resonance. If the initial amplitude of libration (at the time of disappearing of the proto-planetary disk) is significant, the system is able to cross the separatrix and leave the resonance while the eccentricities of the

planets are still important ($e_1 \gtrsim 0.15$). The subsequent evolution of the period ratio of the planets is in this case 3-5 orders of magnitude higher than in the scenario of departure at low eccentricities considered by Lee et al. (2013)¹ because the tidal effect gets more efficient with increasing eccentricities (see Delisle et al. 2014, section 5). Therefore, many systems that were discarded by Lee et al. (2013) could actually have evolved from the resonance to their current configuration by tidal dissipation, following this new scenario. Supposing an important initial amplitude of libration in the resonance is not absurd. Goldreich & Schlichting (2014) showed that during the phase of migration in the proto-planetary disk, many planet pairs that are locked in resonance have their amplitude of libration increased by the dissipation induced by the disk.

However, this new scenario still involves the tidal effect and should thus be very efficient for close-in systems but not for the farthest ones. This is the main argument opposed to the tidal dissipation scenario (e.g. Rein 2012; Baruteau & Papaloizou 2013). On the contrary, the other proposed mechanisms do not have an important dependency on the distance to the star. In the following we reanalyze the *Kepler* statistics with a focus on the distance of the planets to the star.

2. Dependency on the distance to the star

Different authors already analyzed the impact of the distance to the star on the distribution of systems close to first-order mean-motion resonances. Rein (2012) divided the sample of *Kepler* planet pairs in two groups depending on the period of the innermost planet. The author used a threshold at 5 days and found a similar distribution for systems with $P_1 < 5d$ and for those with $P_1 \geq 5d$. Using a threshold at 10 days, Baruteau & Papaloizou (2013) reached the same conclusion. Both studies discarded the scenario of a tidally induced distribution of period ratio since according to this scenario the excess should only be observed for the innermost systems.

In Fig. 2 we show the results of a similar study on more recent data (Q1-Q16 KOI catalog, Batalha et al. 2013). Our findings are in disagreement with previous studies. We divide the data set in three groups:

1. close-in systems with $P_1 < 5d$,
2. intermediate systems with $5d \leq P_1 < 15d$,
3. farthest systems with $P_1 \geq 15d$.

For groups 1 and 2, we observe an excess of planets in external circulation (i.e. with a period ratio higher than the resonant value, $P_2/P_1 > (p+1)/p$ for the resonance $p+1:p$). However, the excess seems more significant for the closest systems (group 1). It is also important to notice that there is not any detected close-in system (group 1) inside the resonance ($P_2/P_1 \approx (p+1)/p$) whereas a significant number of farther systems (groups 2 and 3) are found in resonance. Moreover, in the third group, the number of systems inside the resonance is comparable to or even higher than the number of pairs in external circulation.

Figure 3 shows cumulative distributions of period ratio in the vicinity of the 2:1 and 3:2 mean-motion resonances for these three groups. The conclusions are the same as for Fig.2. We performed K-S tests on the distributions given in Fig. 3 in order to

¹ Lee et al. (2013) considered the same scenario of resonance departure at low eccentricities as in previous studies (Papaloizou & Terquem 2010; Papaloizou 2011; Lithwick & Wu 2012; Delisle et al. 2012; Batygin & Morbidelli 2013).

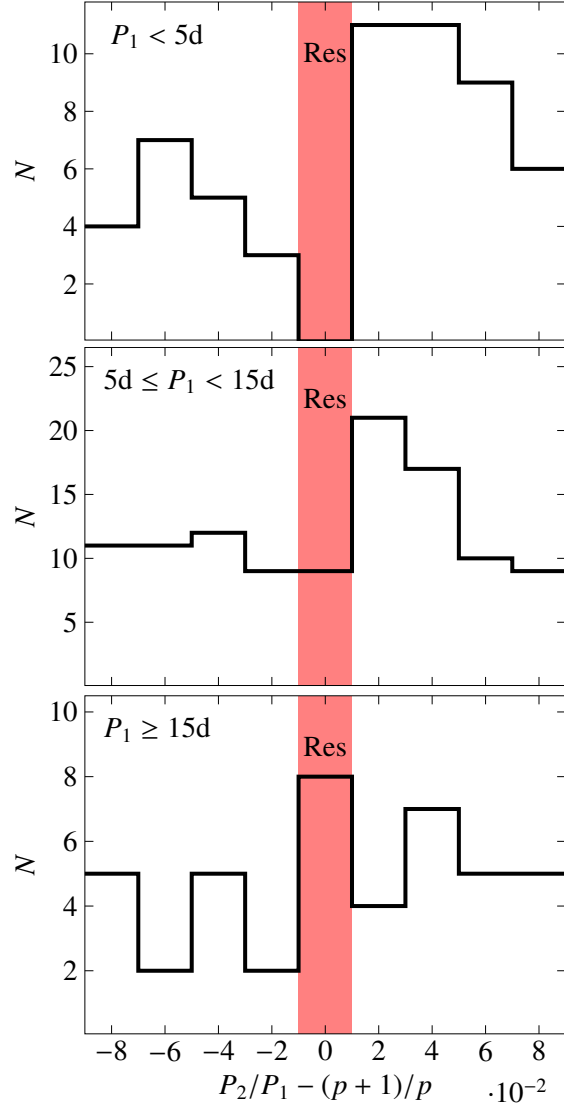


Fig. 2. Same as Fig. 1 but the statistics are computed using different subsets of KOI pairs depending on the period of the inner planet (P_1). We divide the data set in three groups: $P_1 < 5d$ (top), $5d \leq P_1 < 15d$ (middle) and $P_1 \geq 15d$ (bottom). For the innermost systems (top), we observe an important excess of planets in external circulation ($P_2/P_1 > (p+1)/p$ for the resonance $p+1:p$) and no resonant systems ($P_2/P_1 \approx (p+1)/p$). For the intermediate group (middle), the excess of planets in external circulation is still visible but less important and a significant number of resonant planets are observed. Finally for the farthest systems (bottom), the number of resonant planets is slightly higher than the number of planets in external circulation.

check the statistical significance of the observed differences between the three distributions. The K-S test give the probability to obtain distributions at least as different as the observed ones with random samplings following the same underlying law. This probability is of 0.08% for groups 1 and 3. It is thus very unlikely that both empirical distributions come from the same underlying law and are this different just by chance. When comparing the intermediate group (2) with both extreme ones (1 and 3), the differences are of course less significant and the probabilities given

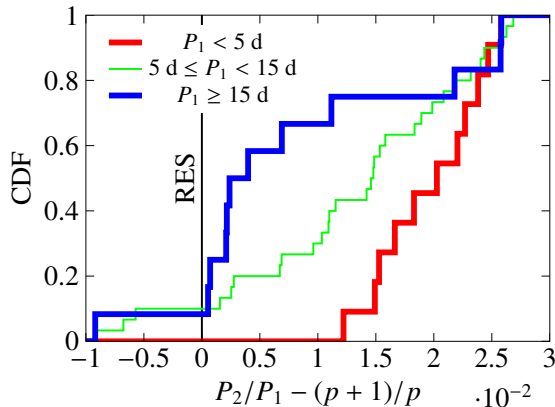


Fig. 3. Cumulative distributions of planet pairs in the vicinity of the 2:1 and 3:2 mean-motion resonances (the statistics of both resonances are accumulated) for the three groups defined in Fig. 2 (see also Sect. 2). The conclusions are the same as in Fig. 2: for farthest systems (blue) there is a pile-up of planets in the resonance, while for close-in systems (red) the pile-up is shifted toward higher values of the period ratio and we observe a lack of resonant systems. The distribution of intermediate systems (green) is, not surprisingly, intermediate. Using K-S tests to compare these distributions, we obtain a p-value of 0.08% for both extreme distributions (red and blue). The p-value for the blue and green distributions is 10%, and for the green and red ones 3.5%.

by the K-S test are respectively 3.5% (groups 1 and 2) and 10% (groups 2 and 3).

Therefore, we conclude that the distance to the star does have a statistically significant impact on the distribution of period ratio of planet pairs. Very close-in systems ($P_1 < 5$ d) are not found in resonance and are very often found in external circulation, whereas for the farthest systems ($P_1 \geq 15$ d), both populations (resonance and external circulation) are equivalent with a slight excess of systems inside the resonance. These observations are well explained by the tidal dissipation scenario of formation of Kepler near-resonant planets. On the contrary, the other proposed mechanisms do not predict this dependency on the distance to the star.

3. Conclusion

In this letter, we show that the distribution of period ratio among pairs of planets depends on the distance of the planets to the star. For close-in systems there is not any detected planet pairs in first-order mean-motion resonances (2:1, 3:2), and there is an excess of planets in external circulation, i.e. close to the resonance but with a period ratio higher than the resonant value. For the farthest systems, the number of resonant pairs is slightly greater than the number of planets in external circulation. Using a K-S test to compare both distributions, we obtain a p-value of 0.08% and conclude that the differences we observe are statistically significant. Some observational biases might contaminate the datasets, however it seems very unlikely that the differences we observe between close-in and farther systems arise from such biases. Tidal dissipation raised by the star on the planets naturally explains these observations because this effect has an important dependency on the distance to the star and is much stronger for close-in systems. Moreover, it is the only proposed mechanism of formation of these near-resonant systems that predicts such a strong dependency.

These observations together with the new scenario of formation we proposed recently (still involving the tidal dissipation but with a faster evolution of the period ratio, see Delisle et al. 2014, section 5) favor a large influence of tidal dissipation at the origin of the excess of planets in external circulation in the *Kepler* data.

Acknowledgements. We thank Stéphane Udry for useful advice. This work has been supported by PNP-CNRS, CS of Paris Observatory, and PICS05998 France-Portugal program.

References

- Baruteau, C. & Papaloizou, J. C. B. 2013, *ApJ*, 778, 7
- Batalha, N. M., Rowe, J. F., Bryson, S. T., et al. 2013, *ApJS*, 204, 24
- Batygin, K. & Morbidelli, A. 2013, *AJ*, 145, 1
- Chatterjee, S. & Ford, E. B. 2014, *ArXiv e-prints*
- Delisle, J.-B., Laskar, J., & Correia, A. C. M. 2014, *A&A*, 566, A137
- Delisle, J.-B., Laskar, J., Correia, A. C. M., & Boué, G. 2012, *A&A*, 546, A71
- Fabrycky, D. C., Lissauer, J. J., Ragozzine, D., et al. 2012, *ArXiv e-prints*
- Goldreich, P. & Schlichting, H. E. 2014, *AJ*, 147, 32
- Lee, M. H., Fabrycky, D., & Lin, D. N. C. 2013, *ApJ*, 774, 52
- Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Fabrycky, D. C., et al. 2011, *ApJS*, 197, 8
- Lithwick, Y. & Wu, Y. 2012, *ApJ*, 756, L11
- Papaloizou, J. C. B. 2011, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, 83–103
- Papaloizou, J. C. B. & Terquem, C. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 405, 573–592
- Petrovich, C., Malhotra, R., & Tremaine, S. 2013, *ApJ*, 770, 24
- Rein, H. 2012, *MNRAS*, 427, L21–L24
- Xie, J.-W. 2014, *ApJ*, 786, 153

C.4 Chaotic diffusion of the Vesta family induced by close encounters with massive asteroids

Cet article traite de l'évolution orbitale des astéroïdes de la famille de Vesta. Vesta est le deuxième plus gros astéroïde de la ceinture principale. La famille de Vesta est un ensemble d'astéroïdes plus petits dont les éléments orbitaux sont proches de ceux de Vesta et dont le type spectral est noté V en référence à celui de Vesta. Ces astéroïdes sont très probablement les fragments d'une collision entre Vesta et un autre corps qui a laissé un important cratère au pôle sud de Vesta. Il existe de plus un ensemble d'astéroïdes de type V, qui ont des orbites passant proche de la Terre, appelés astéroïdes géocroiseurs ou NEA (Near-Earth Asteroids). Enfin un nombre important de météorites HED (Howardite - Eucrite - Diogénite), qui ont à nouveau le même type spectral, ont été trouvées sur Terre. Il est communément admis que la plupart de ces objets sont issus de la collision qui a générée la famille de Vesta (Sears, 1997). Dans ce scénario, les astéroïdes géocroiseurs de type V et les météorites HED sont d'anciens membres de la famille de Vesta qui ont subi d'importantes déviations de leur trajectoire pour arriver à des orbites croisant celle de la Terre. La principale cause de déviation de ces astéroïdes vers la Terre est la présence de deux résonances au voisinage de la famille de Vesta qui entraînent une diffusion chaotique des astéroïdes : la résonance séculaire ν_6 et la résonance de moyen mouvement 3 : 1 avec Jupiter. Cependant, ce scénario ne parvient pas à expliquer correctement l'âge estimé des météorites HED collectées sur Terre (Migliorini et al., 1997). Le temps de vie (avant collision avec une planète) d'un astéroïde dans les résonance ν_6 et 3 : 1 est relativement court (~ 2 Ma, voir Migliorini et al., 1997), Or l'analyse des météorites permet d'évaluer leur temps d'exposition aux rayons cosmiques (CRE age). c'est à dire le temps qui s'est écoulé entre l'arrachement de ces fragments à la croûte de Vesta lors de la collision et l'arrivée sous la protection de l'atmosphère terrestre. Cette datation donne des durées d'exposition entre 5 et 100 Ma avec une moyenne à 21 Ma (Migliorini et al., 1997). L'explication généralement donnée pour cette différence d'âge est que ces astéroïdes ont passé une grande partie de leur temps de vie, après la collision, dans la ceinture principale au sein de la famille de Vesta et qu'ils ne sont entrés en résonance que récemment (moins de 2 Ma). Pour que cette explication soit valable, il faut qu'il y ait un mécanisme de diffusion lente des astéroïdes de la famille de Vesta permettant d'apporter régulièrement de nouveaux astéroïdes dans les deux résonances. Morbidelli & Gladman (1998) ont montré que la diffusion chaotique due au recouvrement de résonances proches des deux résonances principales (ν_6 et 3 : 1) mais plus faibles ne permet pas un apport suffisant d'astéroïdes. L'effet Yarkovsky est aujourd'hui considéré comme le principal mécanisme de diffusion de ces astéroïdes (e.g. Carruba et al., 2003). C'est un phénomène dissipatif provenant de la radiation thermique de l'astéroïde et qui provoque une variation de son demi-grand axe. Cet effet provient du fait que l'astéroïde à légèrement tourné sur lui même entre le moment où il absorbe le rayonnement solaire et le moment où il réémet thermiquement. Ainsi, les directions du maximum de l'émission thermique de photon et du maximum d'absorption des photons solaires sont différents ce qui crée une force dont la direction dépend de l'obliquité de l'astéroïde. Suivant cette obliquité, le demi-grand axe augmente (rotation prograde) ou diminue (rotation rétrograde). Cet effet agit principalement sur les astéroïdes les plus légers.

Dans cet article, nous cherchons à estimer l'effet d'un autre type de diffusion : la diffusion due aux rencontres proches des astéroïdes de la famille de Vesta avec les astéroïdes les plus massifs de la ceinture principale. Cet effet a déjà été étudié pour différentes familles d'astéroïdes (e.g. pour les familles de Flora et Lixiaohua, voir Nesvorný et al., 2002; Novaković et al., 2010; Carruba et al., 2003), et en particulier pour la famille de Vesta (Carruba et al., 2007). Dans cette dernière étude seules les rencontres proches avec Vesta sont prises en compte tandis que les autres astéroïdes massifs de la ceinture principale sont ignorés. Les différentes études portant sur les rencontres proches montrent que leur effet dépend fortement de la famille d'astéroïde considérée et de sa position dans la ceinture principale. Nous réalisons donc ici une nouvelle étude de l'impact des rencontres proches sur l'évolution de la famille de Vesta en tenant compte dans des simulations numériques de l'effet de 11 astéroïdes massifs : (1) Ceres, (2) Pallas, (3) Juno, (4) Vesta, (7) Iris, (10) Hygiea, (15) Eunomia, (19) Fortuna, (324) Bamberga, (532) Herculina, and (704) Interamnia.

Les résultats de cette étude montrent que les rencontres proches génèrent bien une diffusion du demi-

grand axe des astéroïdes de la famille de Vesta. De plus, on estime que la contribution totale des rencontres proches avec l'ensemble des objets de la ceinture principale ne devrait pas dépasser 1.3 fois la contribution des astéroïdes pris en compte dans nos simulations. En comparant la diffusion due aux rencontres proches avec celle due à l'effet Yarkovsky, on montre que sur l'âge de la famille de Vesta (~ 1 Ga), l'effet des rencontres proches domine pour les astéroïdes dont la taille dépasse 40 ± 5 km. Pour les astéroïdes plus petits, l'effet Yarkovsky est plus important. Notons que les plus gros astéroïdes (hors Vesta) de la famille sont de l'ordre de 7-8 km ce qui implique que l'effet Yarkovsky est bien l'effet dominant pour expliquer la diffusion de ces objets. Cependant, ces résultats sont des résultats statistiques. Or, si l'effet Yarkovsky est un effet continu et régulier, les rencontres proches provoquent des sauts brusques et irréguliers du demi-grand axe. Ainsi, certains astéroïdes, qui ont des rencontres très proches avec les astéroïdes massifs, subissent des changements très importants de leur demi-grand axe. Par exemple, sur les 13800 astéroïdes connus de la famille de Vesta (Nesvorný, 2010), environ une dizaine pourraient avoir eu une rencontre avec Vesta en passant à moins d'un diamètre de sa surface et aurait alors subi un saut de l'ordre d'une unité astronomique ce qui rend possible une rencontre avec la Terre.

A&A 540, A118 (2012)
DOI: [10.1051/0004-6361/201118339](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118339)
© ESO 2012

Chaotic diffusion of the Vesta family induced by close encounters with massive asteroids

J.-B. Delisle and J. Laskar

ASD, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
e-mail: delisle@imcce.fr

Received 26 October 2011 / Accepted 1 March 2012

ABSTRACT

We numerically estimate the semi-major axis chaotic diffusion of the Vesta family asteroids induced by close encounters with 11 massive main-belt asteroids: (1) Ceres, (2) Pallas, (3) Juno, (4) Vesta, (7) Iris, (10) Hygiea, (15) Eunomia, (19) Fortuna, (324) Bamberga, (532) Herculina, (704) Interamnia. We find that most of the diffusion is caused by Ceres and Vesta. By extrapolating our results, we are able to constrain the global effect of close encounters with all main-belt asteroids. A comparison of this drift estimate with the one expected for the Yarkovsky effect shows that for asteroids whose diameter is larger than about 40 km, close encounters dominate the Yarkovsky effect. Overall, our findings confirm the standard scenario for the history of the Vesta family.

Key words. celestial mechanics – minor planets, asteroids: general – chaos – methods: numerical

1. Introduction

It is now common consent that most of the V-type near-Earth asteroids (NEAs) and howardite, eucrite, and diogenite (HED) meteorites are fragments of a collision between Vesta and another object that also produced the Vesta family (see [Sears 1997](#)). V-type NEAs and HED meteorites are former members of the Vesta family that have been carried from the main asteroid belt to Earth-crossing orbits by the two main resonances in the neighborhood of Vesta: the ν_6 and 3:1 resonances with Jupiter. The major problem in this scenario is the fact that the average life time of fragments in these two resonances is too short to explain the mean age of HED meteorites and V-type NEAs ([Migliorini et al. 1997](#)).

The commonly accepted explanation for this is that NEAs spent most of their life time in the main asteroid belt before entering in resonance and being carried to their current orbits. This supposes that a mechanism can induce a diffusion process that brings fragments to one (or both) of the two main resonances. The Yarkovsky effect is now viewed as the main mechanism explaining the diffusion of Vesta family members (e.g. [Carruba et al. 2003](#)).

However, other processes also contribute to the diffusion. This is in particular the case for the chaos induced by overlaps of mean-motion resonances or close encounters between asteroids in the main belt. [Morbidelli & Gladman \(1998\)](#) showed for resonances that the chaotic zone around the 3:1 resonance is too narrow to explain the needed diffusion. Recently, [Laskar et al. \(2011\)](#) showed that close encounters among massive asteroids induce strong chaos that appears to be the main limiting factor for planetary ephemeris on tens of Myr. In the continuation of this work we concentrated our study on the diffusion induced by close encounters of Vesta family members with massive asteroids.

This effect has already been studied for different asteroid families (e.g. for the Flora and Lixiaohua families [Nesvorný et al. 2002](#); [Novaković et al. 2010](#)). The most exhaustive study

(in terms of the number of asteroids taken into account) concerned the Gefion and Adeona families and was conducted by [Carruba et al. \(2003\)](#). The authors considered all 682 asteroids of radius larger than 50 km for encounters with members of the families. They concluded that the four largest asteroids ((1) Ceres, (2) Pallas, (4) Vesta and (10) Hygiea) had a much stronger influence than all other 678 remaining asteroids; therefore these can be considered negligible. The Vesta family has also been the object of such an analysis ([Carruba et al. 2007](#)), but only close encounters with (4) Vesta were taken into account. These different studies show that the effect of close encounters with massive asteroids depends to a great extent on the considered family and its position in phase space with respect to those of massive asteroids.

The purpose of this work is to explore the effect of close encounters for the Vesta family in more detail by considering the effect of 11 large asteroids: (1) Ceres, (2) Pallas, (3) Juno, (4) Vesta, (7) Iris, (10) Hygiea, (15) Eunomia, (19) Fortuna, (324) Bamberga, (532) Herculina, and (704) Interamnia. Moreover, we use the results from these interactions to extrapolate and obtain an estimate of the effect that would be raised by the whole main asteroid belt. Finally, we compare the semi-major axis diffusion induced by the Yarkovsky effect and the diffusion caused by close encounters (for the Vesta family).

2. Numerical simulations

We ran two sets of numerical simulations. Both of them comprise the eight planets of the solar system, Pluto, the Moon and the 11 asteroids enumerated above. In both simulations, we generated a synthetic Vesta family produced by an initial collision of another object with Vesta. We did not model a realistic collision process but instead considered a set of test particles initially at the same position as Vesta, but with different relative velocities. This is not a problem because we are mainly interested here in exploring the phase space in the region of the Vesta family. The relative velocities of the collision fragments are sampled both in

A&A 540, A118 (2012)

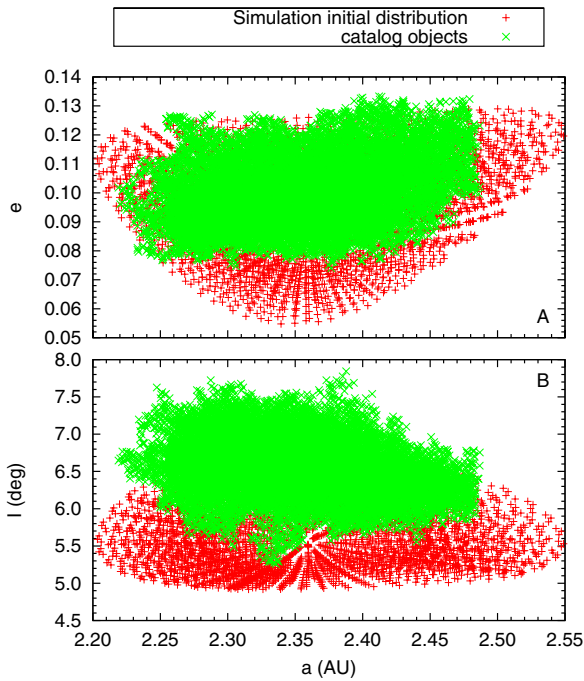


Fig. 1. Initial distribution of the synthetic Vesta family in the (a, e) plane (top) and the (a, I) plane (bottom). Real members proper elements (from Nesvorný 2010) are superimposed for comparison.

norm and direction. For the norm, we chose eight different values (every 50 m s^{-1}) between the escape velocity at Vesta's surface (around 350 m s^{-1}) and twice this value (700 m s^{-1}). The inclination was sampled between -50° and 50° every 10° (11 different values). Finally, the direction in the invariant plane was taken every 10° (36 values). This way we created 3168 test particles that represent the Vesta family. We plotted the positions of these particles in the (a, e) and (a, I) planes (where a is the semi-major axis, e the eccentricity and I the inclination) superimposed with the catalog published by Nesvorný (2010) of current Vesta family members (Fig. 1). Note that although we did not compute the proper elements, whereas the catalog uses them, the two sets of points superimpose quite well. Moreover, we constructed an initial set of particles just after the original collision, whereas the catalog exposes the remnants of the family after approximately 1.2 Gyr of evolution (Carruba et al. 2007).

In the first simulation (the reference simulation, S), the 11 asteroids were considered as test particles as well and therefore do not perturb the fragments of collision. In the second simulation (SE) the 11 asteroids were considered as the planets and accordingly interact with members of the synthetic Vesta family. Both solutions are integrated over 30 Myr using the symplectic integrator described in Laskar et al. (2011) and references therein. The effects of all planets and Pluto are taken into account, as is general relativity. Particles were integrated over the full span of time unless their trajectories became hyperbolic, in which case they are stopped to avoid numerical overflows.

We set up different logs to be able to analyze the evolution of the test particles and in particular the impact of close encounters with the 11 asteroids. We recorded for each particle its instantaneous orbital elements every 1 kyr. We did not compute proper elements but instead used the minimum and maximum values (Laskar 1994) taken by a , e , and I on time spans of 10 kyr. We

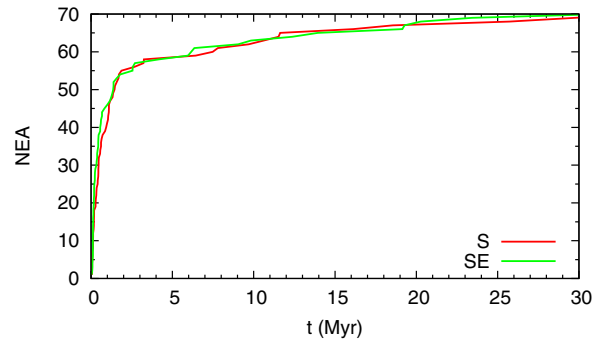


Fig. 2. Number of near-Earth asteroids (NEA) among the synthetic Vesta family as a function of time in S and SE . The criterion for considering a fragment as an NEA is based on the minimum value taken by the periastron. When this value is less than 1.3 AU the fragment is considered an NEA.

used here the average of the minimum and maximum values as proper elements. We also set up a log of close encounters for each particle. Each time that a particle passed within 0.01 AU from an asteroid, the asteroid number, the minimum distance of approach, and the time of the encounter were recorded in the logs.

3. Global overview of the diffusion

The goal of this study is to understand whether the current flux of V-type asteroids that comes from the main belt and is carried to near-Earth orbits through strong planetary resonances can be explained by the chaos induced by close encounters in the main asteroid belt (or at least if these encounters contribute significantly). The simplest way to check this assumption is to consider the number of NEAs in S and SE simulations as a function of time and to see if the consideration of asteroidal interactions implies more NEAs. We used the usual criterion to decide whether an asteroid is an NEA or not: if the periastron of its orbit becomes smaller than 1.3 AU, the asteroid is considered an NEA (see for example Morbidelli et al. 2002). In Fig. 2 we plot the evolution of the number of NEAs in both simulations as a function of time. We can see in this graph that the close encounters do not have a major effect on the population of NEAs during the simulation. However, we did not run our simulations on the total age of the Vesta family (around 1.2 Gyr) and we assume that just after the collision that produced the Vesta family, the population of V-type NEAs is dominated by fragments of the collision that were directly injected into the two main resonances. The diffusion process is supposed to provide these resonances on a much longer time scale.

Another way to search for the effect of close encounters is to compare the proper elements of the initial and final distribution of fragments in both simulations. A common way to do that is to compute the standard deviation of different proper elements (and in particular the semi-major axis) on the whole population of fragments at a time t with respect to the initial values of these elements (see for example Carruba et al. 2003):

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{\sum_j (x_j(t) - x_j(0))^2}{N - 1}}, \quad (1)$$

where x can be the semi-major axis a , the eccentricity e or the inclination I of Vesta family fragments. We used the averages

J.-B. Delisle and J. Laskar: Chaotic diffusion induced by massive asteroids

of the minima and maxima as proper elements, and in particular for the initial values we computed them on the first 10 kyr of the simulation. We did not use the initial conditions given in Fig. 1 because they are only instantaneous values.

We measured only the diffusion in the semi-major axis caused by close encounters, i.e., we excluded resonances, in particular strong ones. For this purpose we plotted the value of the standard deviation between the beginning and the end (after 30 Myr of evolution) for both simulations (S , SE) as a function of the initial (proper) semi-major axis. We divided the interval of the semi-major axis into bands of 0.01 AU and computed for each band the standard deviation (of the semi-major axis, the eccentricity, and the inclination) of the set of asteroids that were initially in this band. The results of this calculation are given in Fig. 3. We can see that the strong resonance 3:1 around 2.5 AU induces considerable diffusion in both S and SE and that for a semi-major axis lower than 2.25 AU both simulations are strongly affected by resonances (see Nesvorný et al. 2008, for a list of resonances acting on the Vesta family). Note that in strong resonances most fragments are highly unstable and for a great part of them the calculation stops before the end of the simulation (collisions with a planet or the Sun, or escapes from the solar system). Therefore calculations of the diffusion between the beginning and the end of the simulation in these zones are not representative of their instability (see Fig. 3D).

Between 2.26 and 2.48 AU, S shows a very limited semi-major axis diffusion even though we can see small peaks (e.g., around 2.42 AU corresponding to the 1:2 resonance with Mars). SE undergoes a more important diffusion in this band. We ran our calculations on this band because it fulfills two important conditions at the same time: the diffusion caused by resonances is limited and the band contains (at the beginning of the simulation) a sufficient amount of fragments (2617 of the 3168 fragments), which is important for the statistics. Note that for the eccentricity and the inclination, the diffusion is hidden in the remaining oscillations caused by the secular evolution of these elements induced by the planets. Thus, the diffusion in eccentricity and inclination caused by close encounters as well as the diffusion caused by weak resonances (e.g., 1:2 with Mars) is not visible in Fig. 3B and C. However, this is not really a problem since in this work we are mainly interested in the semi-major axis diffusion.

The evolution (in time) of the standard deviation of the semi-major axis computed on the 2.26–2.48 AU band for both simulations is plotted in Fig. 4. The standard deviation is approximately constant for S , which reinforces our choice of this band. In contrast, SE clearly undergoes diffusion. Analyzing Fig. 4 gives us an approximation of the drift in semi-major axis caused by asteroidal interactions during the simulation. After 30 Myr of evolution, we have a standard deviation around 9×10^{-4} AU for SE and 2×10^{-4} AU for S . To evaluate the diffusion caused by asteroidal interactions, we have to remove the diffusion obtained in the reference simulation (which is probably caused by resonances and output sampling of the secular evolution of the semi-major axis) from the total standard deviation. Note that the total variance (the squared of the standard deviation) is the sum of the variances of the different contributions. Thus we obtain a standard deviation caused by asteroidal interactions after 30 Myr of evolution of about 8.8×10^{-4} AU. We also observe several jumps in the semi-major axis diffusion, which are caused by very close encounters of a single fragment with one of the 11 considered asteroids. Indeed, it has been shown (Carruba et al. 2007) that the distribution of jump sizes is not a Gaussian but has thicker wings. Therefore the curve is not regular on the time scale of

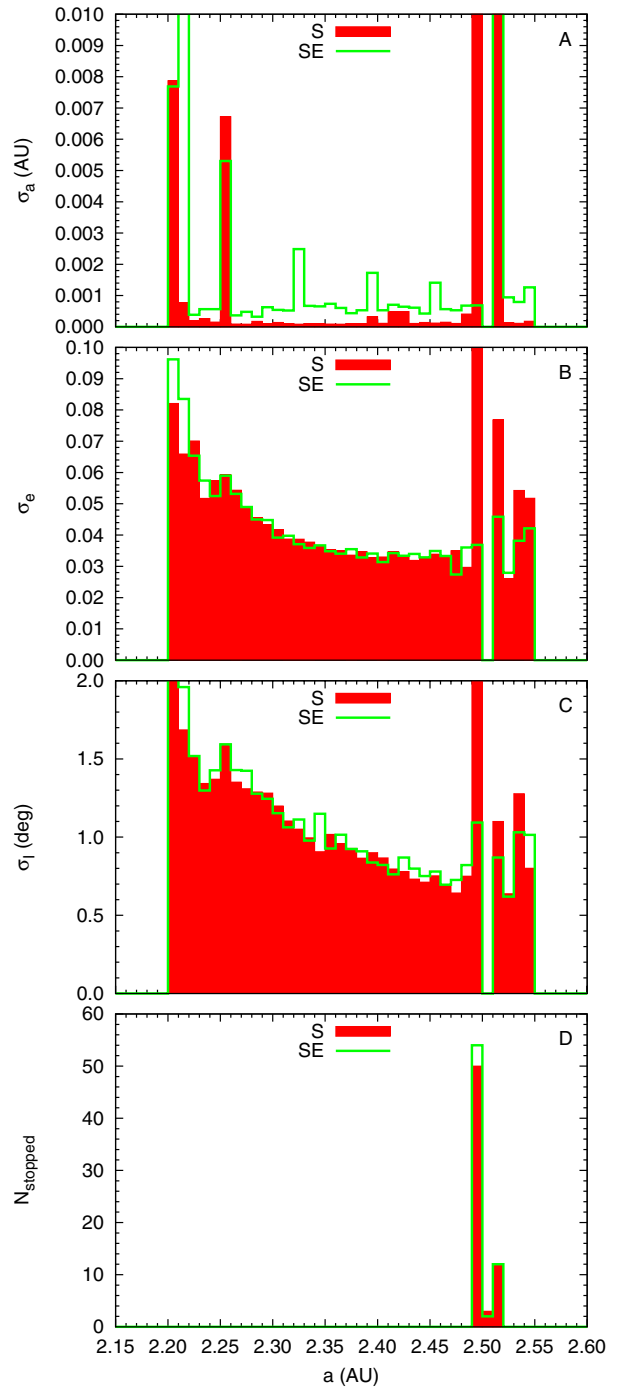


Fig. 3. Semi-major axis dependency of the diffusion in semi-major axis (A), eccentricity (B), and inclination (C) in S and SE . For each band of 0.01 AU, we plot the standard deviation of the average of the minimum and the maximum values of a (respectively e and i) during the last 10 kyr of the simulations with respect to the initial values (see Eq. (1)). Some of the particle's orbits are not integrated on the total duration of the simulation because of their instability. We plot the number of these fragments for each band of initial semi-major axis (D). For bands containing unstable fragments (in both simulations: around 2.5 AU, i.e., around the 3:1 resonance with Jupiter) the calculation of standard deviations is underestimated and comparisons between both simulations are meaningless.

A&A 540, A118 (2012)

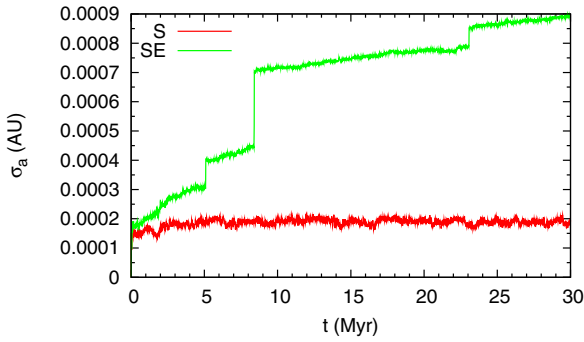


Fig. 4. Evolution in time of the semi-major axis diffusion in S and SE . We plot the standard deviation of the average of the minimum and the maximum values of a for each fragment over 10 kyr steps with respect to the initial values (see Eq. (1)) for asteroids whose semi-major axes are initially between 2.26 and 2.48 AU (to avoid strong resonances).

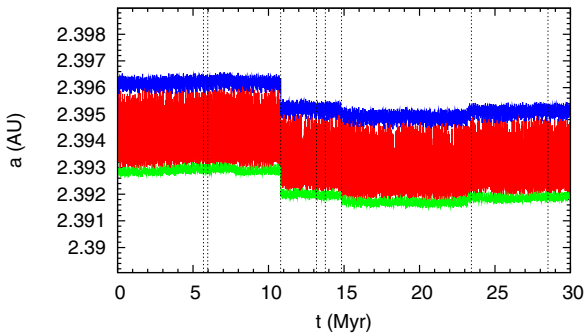


Fig. 5. Semi-major axis evolution of a fragment that underwent various close encounters. We plot the maximum, minimum, and instantaneous values of the semi-major axis of the fragment. All times of encounters closer than 10^{-3} AU are highlighted with dotted vertical lines.

this simulation because of the presence of rare very significant events. We can find the same kind of effects in Fig. 3, the curve is not regular in the 2.26–2.48 AU band and shows peaks caused by a few very close encounters.

4. Diffusion induced by asteroid close encounters

The global analysis that we made does not allow us to separate the contributions of the 11 asteroids in the diffusion process or to extrapolate to the whole main asteroid belt. To do this we have to examine logs of close encounters and estimate the diffusion resulting from each of these events and then compile statistics. This entire analysis is still restricted to the 2.26–2.48 AU band to avoid the strong resonances as previously.

For each encounter recorded in the logs we compared the value of the semi-major axis before and after the encounter. Figure 5 gives an example of the evolution of the semi-major axis of a fragment that underwent several close encounters that resulted in jumps of different sizes. Figure 6 gives a more unusual example of the evolution of a fragment that underwent a very close encounter with Vesta resulting in a very significant jump in semi-major axis.

We analyzed statistically all encounters with each of the 11 asteroids. As an example of our results, Fig. 7 gives the histograms of jump sizes for close encounters with the first four asteroids considered in the simulation (Ceres, Pallas, Juno, and Vesta). These distributions are centered on 0, which means that

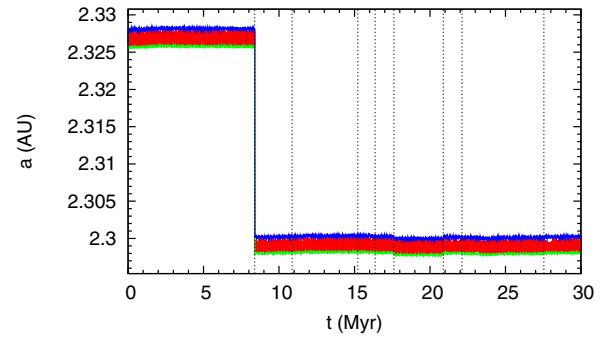


Fig. 6. Semi-major axis evolution of a fragment that underwent a very close encounter (minimum distance of 3.4×10^{-5} AU) with Vesta (at $t \approx 8.39$ Myr). We plot the maximum, minimum, and instantaneous values of the semi-major axis of the fragment. All times of encounters closer than 10^{-3} AU are highlighted with dotted vertical lines.

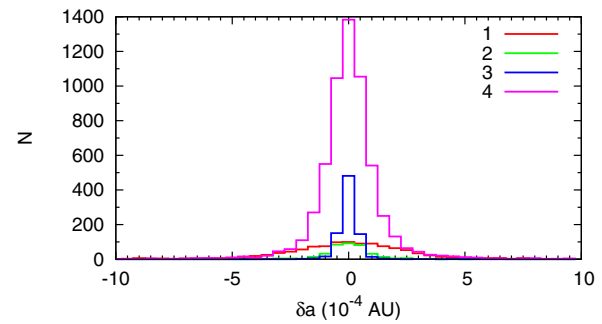


Fig. 7. Histograms of jump sizes caused by close encounters with Ceres (1), Pallas (2), Juno (3), and Vesta (4). These histograms are plotted with a step width of 5×10^{-5} AU.

the probabilities are the same to have an increase or a decrease of the semi-major axis after a close encounter. We thus measure the average diffusion resulting from a single encounter with each of the 11 asteroids by calculating the standard deviation of each distribution.

As we already noticed, it is more convenient to manipulate variances than standard deviations since the latter are not additive. If we assume that close encounters are independent events, every fragment undergoes a random walk and after N encounters, the total variance is multiplied by a factor N :

$$\sigma_a^2[N] = N\sigma_a^2[1]. \quad (2)$$

This gives a measure of the average diffusion resulting from N encounters with the considered asteroid. We then merely need to replace N by the mean number of close encounters per fragment with the selected asteroid during the whole simulation to obtain the diffusion (variance) caused by this asteroid during the simulation. The diffusion caused by close encounters with all 11 asteroids during the simulation is the sum of the variances of the 11 asteroids. With the same reasoning as for Eq. (2) it is possible to extrapolate the value of the variance on longer time-scales:

$$\sigma_a^2(t) = \frac{t}{T_{\text{sim}}} \sigma_a^2(T_{\text{sim}}). \quad (3)$$

Note that as has been shown (e.g. Nesvorný et al. 2002), close encounters do not exactly trigger random walk (there are some

J.-B. Delisle and J. Laskar: Chaotic diffusion induced by massive asteroids

Table 1. Comparison of the contributions of the encounters with the 11 asteroids to the semi-major axis diffusion. All standard deviations are given in AU.

Ast.	N_{events}	$\sigma_a[1]$ $\times 10^5$	$\bar{\sigma}_a[1]$ $\times 10^5$	$\bar{\sigma}_a(T_{\text{sim}})$ $\times 10^5$	Contrib. (%)
1	1175	76.9	76.8	51.4	35.55
2	401	14.6	13.9	5.4	0.40
3	868	5.9	3.8	2.2	0.07
4	6521	43.8	43.6	68.8	63.63
7	2999	5.2	2.6	2.8	0.11
10	162	5.7	3.6	0.9	0.01
15	1064	5.6	3.4	2.2	0.06
19	3210	4.8	1.9	2.1	0.06
324	603	6.5	4.8	2.3	0.07
532	688	5.8	3.7	1.9	0.05
704	4	6.7	5.0	0.2	0.00
All	17695	–	–	86.3	100

Notes. The contributions are given as percentages of the total variance (which is additive, unlike the standard deviation).

correlations between successive encounters) and that the variance is not exactly linear with time (or number of encounters). It can, indeed, be written as a power law of the form

$$\sigma_a(t) = Ct^B. \quad (4)$$

For a random walk $B = 0.5$. Numerical estimates of this coefficient B for different families (see Nesvorný et al. 2002; Carruba et al. 2003; Novaković et al. 2010) show that it depends on the family considered and can even evolve with time. However, the values found in the literature range between 0.5 and 0.65 and we did not find any estimations in the case of the Vesta family so we decided to stick to the random walk hypothesis.

In this reasoning we excluded the influence of noise in the calculation of jumps sizes. Indeed, we observe in Figs. 5 and 6 that the minimum and maximum values of the semi-major axis are not constant outside the close encounters (jumps) but undergo oscillations that are caused by remaining secular evolution. It is possible to eliminate a considerable part of this noise by taking the minimum of minima and the maximum of maxima over longer time-scales before and after the encounters. To choose the best time interval to compute these extrema, and to evaluate the remaining noise after this treatment, we used the reference simulation S and calculated the standard deviation of the difference of semi-major axis before and after random times. Since there are no close encounters, there are no jumps in this simulation, and this standard deviation measures only the remaining noise. With this method we computed the standard deviation of the noise for different time intervals for the calculation of extrema and found that the minimum value (4.4×10^{-5} AU) is employed for an interval length of 200 kyr. This is the value we employed for all following calculations.

The variance of jump sizes in SE (for real close encounters) is affected by the same noise. The value we obtained for this variance is the sum of the real diffusion variance and the variance of the noise. Thus the real diffusion resulting from close encounters is given by

$$\bar{\sigma}_a^2[1] = \sigma_a^2[1] - \sigma_{\text{noise}}^2. \quad (5)$$

Another problem we experienced is that the logs of close encounters record all encounters within 0.01 AU, but it appears that at this distance the effect is too weak and is completely hidden in

the noise. Thus statistics are contaminated by false events (without real jumps). To avoid this contamination we considered only encounters within 0.001 AU, which are more significant events.

Finally, when a fragment undergoes several close encounters spaced by less than 200 kyr, we are unable to separate the effect of each encounter. We therefore ignored all such multiple encounters and kept only single encounters for calculating the standard deviation of the jumps size. However, when we computed the total diffusion during the simulation we used all encounters that occurred during the simulation because multiple encounters should not be ignored.

Table 1 lists the results we obtained for each asteroid and for the 11 asteroids together. We give the numbers of encounters during the simulation (including multiple encounters), the standard deviation obtained from statistics on single encounters ($\sigma_a[1]$), the corrected values from the noise ($\bar{\sigma}_a[1]$) and the standard deviations during the simulation ($\bar{\sigma}_a(T_{\text{sim}})$). Finally, the percentages of contribution of the different asteroids are given in term of variance. We obtained a total diffusion caused by close encounters of 8.63×10^{-4} AU during the 30 Myr of the simulation (see Table 1). This number is to be compared with the drift rate obtained with the global approach (8.8×10^{-4} AU). The results given by both methods agree well.

By using Eq. (3) we can extrapolate our results to longer times:

$$\bar{\sigma}_a(t) = 1.57 \times 10^{-4} \sqrt{t \text{ (Myr)}} \text{ AU}. \quad (6)$$

Of course it is possible to do the same for the contribution of each asteroid. This allows us to compare our results with the previous study of Carruba et al. (2007). In this article, the authors found a drift rate of $2.0^{+2.5}_{-2.0} \times 10^{-3}$ AU/(100 Myr) by considering only close encounters with Vesta. If we extrapolate our results to 100 Myr and consider only Vesta, we find a drift of 1.3×10^{-3} AU, which is coherent with Carruba et al. (2007) findings.

Considering the different contributions in Table 1, we see that close encounters with Ceres and Vesta together represent about 99% of the total diffusion (in variance). Contributions from the nine other asteroids seem negligible. This is coherent with findings of previous studies on other asteroid families (see in particular Carruba et al. 2003). On the contrary, since Ceres represents 36% of the diffusion, this asteroid should not be neglected (like in Carruba et al. 2007). We believe that there are two main reasons for these proportions of contribution: the mass of the asteroids and their proximity with the Vesta family members in phase space. The mass must influence the significance of the effect of a single close encounter, whereas the proximity in phase space influences the number of these events. To check for these correlations we plotted the variance caused by close encounters as a function of the mass of the considered asteroid (Fig. 8) and the number of events as a function of the distance in phase space of the considered asteroid with respect to Vesta (Fig. 9). We used the definition of the distance in phase space introduced by Zappala et al. (1994):

$$d = na' \sqrt{\frac{5}{4} \left(\frac{\delta a}{a'}\right)^2 + 2(\delta e)^2 + 2(\delta \sin i)^2}. \quad (7)$$

This distance has the dimensions of a velocity since it is an estimate of the ejection velocity that would be needed to carry two objects that initially are at the same position to their current positions. In Eq. (7), we used the mean values of the semi-major axes, the eccentricities and the inclinations of the 11 asteroids during the whole simulation (30 Myr) to compute the distances.

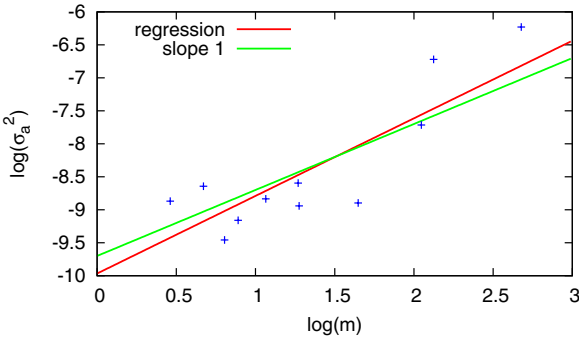


Fig. 8. Contribution to the semi-major axis diffusion caused by each asteroid as a function of its mass.

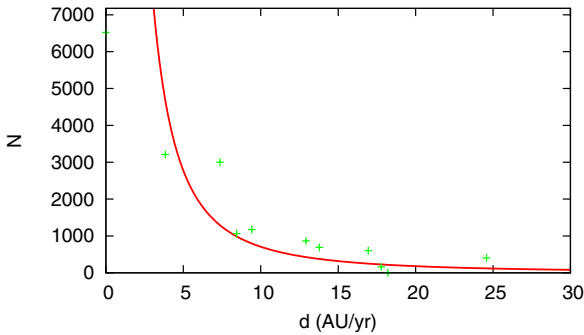


Fig. 9. Number of close encounters ($<10^{-3}$ AU) between Vesta family fragments and each of the 11 considered asteroids as a function of the distance in phase space between these asteroids and Vesta. We used the mean values of the semi-major axes, the eccentricities and the inclinations of the 11 asteroids during the 30 Myr of the simulation to compute the distances (see Eq. (7)).

We deduce from these plots that we indeed have an effect of the mass and the proximity in phase space but we cannot obtain a simple and precise law to evaluate the diffusion that would result from close encounters with other asteroids than the ones considered in our simulation.

However, we can constrain the global effect of the remaining objects of the main asteroid belt. In our simulation we took into account the most massive objects of the main asteroid belt. Indeed, if we add the masses of the 11 asteroids of our simulation we obtain a total mass of $8.36 \times 10^{-10} M_{\odot}$. The estimated total mass contained in the main asteroid belt is about $15 \times 10^{-10} M_{\odot}$ (obtained from INPOP10a fits, [Fienga et al. 2011](#)), while [Krasinsky et al. \(2002\)](#) gave $18 \times 10^{-10} M_{\odot}$. The most massive asteroid in the main belt is Ceres with $4.76 \times 10^{-10} M_{\odot}$, thus the remaining mass (not considered in our simulation) represents about 1.5 to 2 times the mass of Ceres. The total mass contained in the main asteroid belt is not well constrained but we can assume the upper limit of this remaining mass to be about twice the mass of Ceres.

In Fig. 8, the slope of the regression curve is about 1.2. We plotted a straight line of slope 1 for comparison. A slope of 1 means that two objects of masses 0.5 have the same effect as one of mass 1. If the slope is higher than 1, it is more efficient to have a single object, whereas if the slope is lower than 1, it is more efficient to have two objects. Even if this slope is not well constrained in Fig. 8 it is reasonable to consider that it is greater than 1, accordingly it is more efficient to have one big object than to split it into smaller objects. Therefore, we can assume

that the total contribution of the remaining objects of the main belt will be less than twice the contribution of Ceres.

We still have the problem of the influence of the distance in phase space, but it seems realistic to consider that the case of Vesta is singular since it is the parent body of the Vesta family and that the remaining objects must have a probability of close encounter closer to that of Ceres than to Vesta (Fig. 9). Thus, the total variance caused by encounters with all asteroids of the main belt should not exceed (and is probably a lot lower than) 1.7 times the value of the variance obtained in our simulation. In terms of standard deviations it corresponds to a factor of about 1.3.

5. Comparison with the Yarkovsky-YORP effect

The Yarkovsky effect is a non-gravitational force that results from the interaction between asteroids and the solar radiation. There are two versions of the Yarkovsky effect: a diurnal and a seasonal effect. The diurnal effect can result in an increase or a decrease of the semi-major axis depending on the obliquity (ϵ) of the asteroid ($\propto \cos \epsilon$), whereas the seasonal effect systematically decreases the semi-major axis ($\propto \sin^2 \epsilon$). The diurnal effect is maximal when $\epsilon = 0^\circ$ or 180° and is zero when $\epsilon = 90^\circ$. In contrast, the seasonal effect is maximal when $\epsilon = 90^\circ$ and zero when $\epsilon = 0^\circ, 180^\circ$. Both effects are size-dependent, for instance the diurnal effect is given for basaltic material by (see in particular [Nesvorný et al. 2008](#))

$$\frac{da}{dt} = 2.5 \times 10^{-4} \left(\frac{1 \text{ km}}{D} \right) \cos \epsilon \text{ AU/Myr.} \quad (8)$$

In addition to the Yarkovsky effect, we have to consider the YORP (Yarkovsky – O’Keefe – Radzievskii – Paddack) effect, which also comes from the solar radiation but affects the rotational velocity and the obliquity of asteroids. This effect highly depends on the shape and the surface composition of the asteroid but it is possible to assemble some statistics to understand what the most probable scenario is ([Vokrouhlický & Čapek 2002](#); [Čapek & Vokrouhlický 2004](#)). It has been shown ([Čapek & Vokrouhlický 2004](#)) that for most of the basaltic asteroids (more than 95%), the obliquity is asymptotically driven to 0° or 180° by the YORP effect. The time scale for the YORP effect is about 10–50 Myr ([Vokrouhlický & Čapek 2002](#); [Morbidelli & Vokrouhlický 2003](#)). This means that on a 1 Gyr time scale (which is the order of magnitude for the age of the Vesta family, [Carruba et al. 2007](#)), we can consider that the obliquity is either 0° or 180° during the whole evolution and that the seasonal effect is negligible and the diurnal effect is maximal (in one or the other direction).

Nevertheless, the collisions must also be taken into account. We have to distinguish whether a collision is destructive or not. The collisional life time of a 1–10 km asteroid in the main belt is about 1 Gyr. But non-destructive collisions are more frequent and can reorient the spin axis of the asteroid. The characteristic time scale of these events is given (still for basaltic material) by ([Farinella et al. 1998](#); [Morbidelli & Vokrouhlický 2003](#))

$$\tau_{\text{coll}} = 15 \left(\frac{R}{1 \text{ m}} \right)^{1/2} \text{ Myr} = 335 \left(\frac{D}{1 \text{ km}} \right)^{1/2} \text{ Myr.} \quad (9)$$

For kilometer-sized asteroids, the time between two reorienting collisions is about 300 Myr. This means that there are a few (3 or 4) reorientations on the time scale of the age of the Vesta family. Thus it is likely that these reorientations will reduce the

J.-B. Delisle and J. Laskar: Chaotic diffusion induced by massive asteroids

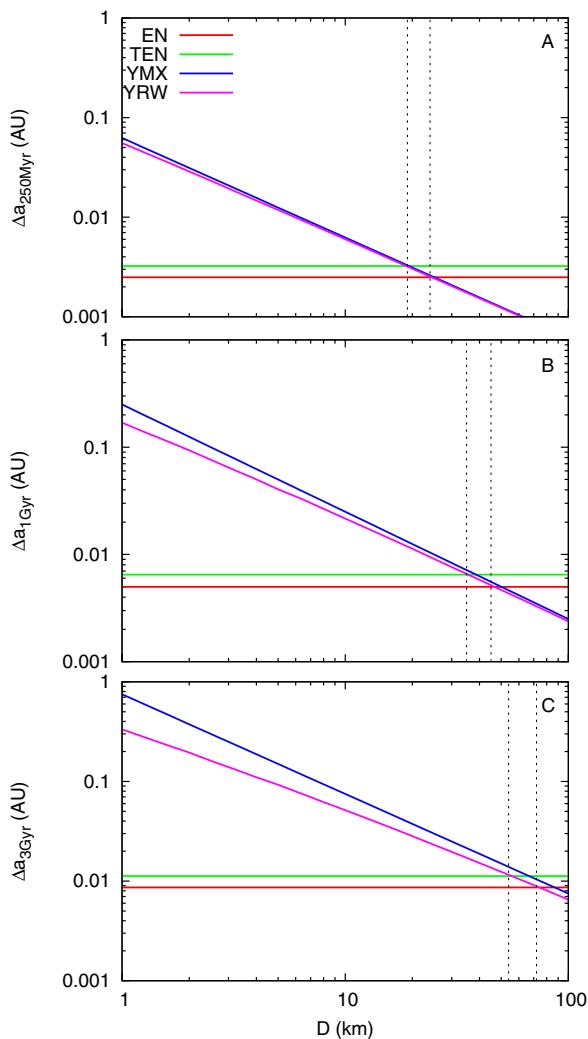


Fig. 10. Comparison of the semi-major axis diffusion induced by the close encounters and by the Yarkovsky effect after 250 Myr (A), 1 Gyr (B) and 3 Gyr (C). EN is the diffusion caused by close encounters with the 11 asteroids considered in our simulations. TEN is the extrapolation we performed for the entire main belt ($\times 1.3$). YMX stands for the maximum diurnal Yarkovsky effect. YRW stands for the Yarkovsky effect with reorientations (random walk).

diffusion caused by the Yarkovsky effect, but not by a large factor. Moreover, we can still consider that the YORP effect acts almost instantaneously between two reorientations and that the seasonal Yarkovsky effect is negligible and the diurnal effect is always maximal.

Considering these different results we estimate the diffusion of Vesta family members under the effect of Yarkovsky, YORP, and collisions by a simple random walk process and the maximal diurnal Yarkovsky effect between each reorientation. Figure 10 shows a comparison between the diffusion caused by close encounters and the one caused by the Yarkovsky effect as functions of the asteroid diameter at different times (250 Myr, 1 Gyr and 3 Gyr). For the close encounters, we plotted the diffusion obtained for the 11 asteroids and the extrapolation we deduced for the whole main asteroid belt. For the Yarkovsky effect we plotted both the maximum diurnal effect (without any reorientation) and

the result of the random walk process. We can see that reorienting collisions do not affect much the magnitude of the Yarkovsky effect for the range of diameters we are interested in, even at 3 Gyr. We recall that the estimated age of the Vesta family is about 1 Gyr (Carruba et al. 2007). For this duration, close encounters are dominant for the diffusion of asteroids larger than 40 ± 5 km (Fig. 10), but below this value the Yarkovsky effect is prevailing. For a diameter of 1 km the Yarkovsky effect is about 25 times greater than the effect of close encounters.

Regarding the time evolution of these effects, we assumed that close encounters generate a random walk process that evolves as \sqrt{t} , whereas the maximum Yarkovsky effect is linear with time. When we include reorientations for the Yarkovsky effect, we also have a random walk process, therefore the evolution law should be proportional to \sqrt{t} . However, this is an asymptotic law that is valid when a great number of random walk steps is reached. For reorienting collisions the characteristic time is about 300 Myr, accordingly, there are only a few steps per Gyr and the asymptotic law is invalid on this time scale. It means that for the time scale we are interested in, the Yarkovsky effect evolves faster than \sqrt{t} , i.e., faster than close encounters. This is exactly what we observe in Fig. 10: for 250 Myr the close encounters take a more important part in the diffusion process (equivalence of the two effects for $D = 19$ km), whereas for 3 Gyr the Yarkovsky effect is even more prevailing (equivalence for $D = 54$ km). Note that known Vesta family members are relatively small objects. The biggest members have a diameter of about 7–8 km (absolute magnitude of 12, see Nesvorný et al. 2008). For these diameters, the Yarkovsky effect is thus dominating the diffusion caused by close encounters by a factor of about 4–5 over 1 Gyr.

6. Very close encounters

When we compare the global (average) effect on the semi-major axis diffusion of the Vesta family induced by close encounters with the Yarkovsky effect, we find that the latter is much more important. However, we have also seen that a single very close encounter can result in a very significant jump in semi-major axis (see Fig. 6).

Here we quantify the probability and the impact of very close encounters. Figure 11 gives the change in semi-major axis during a single encounter as a function of the minimum distance of approach for Ceres and Vesta. Because close encounters with Vesta are more frequent, determining the evolution law is more reliable using Vesta data. By fitting for the standard deviation of Vesta (Fig. 11), we obtain the following power law:

$$\sigma_a \propto d_{\min}^{-1.8}. \quad (10)$$

Assuming that this formula remains valid for very close encounters, we can extrapolate our results and look, for instance, at the effect of encounters at distances comparable to the diameter of Vesta. When the minimum distance of approach with respect to Vesta is on the order of the magnitude of its diameter (about 512 km, Drummond & Christou 2008), Eq. (10) gives a jump size of 1.3 AU.

The probability of such an encounter can be evaluated using the same approach as in Laskar et al. (2011). We obtain a number of encounters closer than the diameter of Vesta (without colliding, i.e., farther away than the radius of Vesta) of about 7×10^{-4} per Gyr and per fragment. This means that on the time scale of the age of the Vesta family (1 Gyr), 1 fragment in 1400

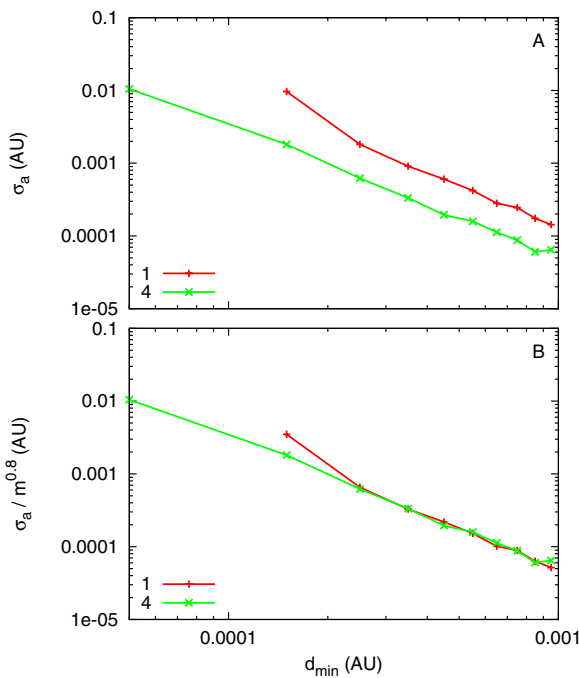


Fig. 11. Semi-major axis jump size for a single encounter with Ceres (1) and Vesta (4) as a function of the minimum distance of approach. Close encounters with both asteroids are sorted into 0.001 AU wide strips of minimum distance of approach. For each band we plot **A**) the standard deviation (corrected from the noise) of the jump size distribution. This plot needs the effect of encounters to be much higher than the noise. It also needs a sufficient number of encounters in each band to attain a regular curve. This is why we only plotted the curves of Ceres and Vesta. We also plot **B**) the standard deviations with a renormalization for Ceres. We divided Ceres values by the mass ratio of Ceres and Vesta to the power 0.8. Vesta's curve is left unchanged. This power law would be equivalent to a slope of 1.6 (instead of 1.2) in Fig. 8. However, the fit of the slope in Fig. 8 is made with 11 points and is therefore more reliable.

should undergo such an encounter. As a comparison, Nesvorný (2010) catalog lists 13 800 members of the Vesta family.

We used the symplectic integrator SABA4 of Laskar & Robutel (2001) with a stepsize of 5×10^{-2} years throughout. But contrary to Laskar & Gastineau (2009), the step size was not reduced here during close approaches, because this would have reduced the integration time too much, because of the large number of particles present. The regularity of the curves presented in Fig. 11 indicates that our study did not suffer significantly from this drawback.

7. Conclusion

We evaluated the effect of close encounters between Vesta family members and massive asteroids on the semi-major axis diffusion of the family. We calculated this effect by two methods. We first considered the collective effect of close encounters and deduced an estimate of the semi-major axis drift caused by the 11 massive asteroids taken into account here. Then we studied the close encounters individually and assembled statistics on these events.

With this second method we were able to separate the contribution of each of the 11 asteroids to the diffusion. We showed that both methods yield comparable results and that our findings are compatible with previous work on the Vesta family (Carruba et al. 2007). We used the results we obtained for the 11 asteroids to extrapolate and constrain the diffusion that would result from close encounters with all main-belt asteroids. We showed that this diffusion should not exceed 1.3 times the diffusion caused by the 11 asteroids. Finally, we compared the diffusion caused by close encounters with the Yarkovsky-driven drift of the semi-major axis of asteroids in the 1–100 km range (in terms of asteroids diameters). We found that both effects are equivalent over 1 Gyr for a diameter of 40 ± 5 km. For smaller asteroids the Yarkovsky effect dominates the semi-major axis diffusion and for larger asteroids close encounters become more important. Since Vesta family members are all smaller than 7–8 km, we confirmed that although asteroid close encounters have a significant influence, the main mechanism of semi-major axis diffusion that transports main-belt asteroids (and especially V-type asteroids) to Earth-crossing orbits via strong resonances is the Yarkovsky effect. This global approach should not hide that a small fraction of initial Vesta family members underwent very close encounters that resulted in considerable alterations of their orbits. For example, we estimated that about 10 fragments of the 13 800 known Vesta family objects (Nesvorný 2010) may have had an encounter with Vesta within one diameter over the age of the family (about 1 Gyr) and this kind of event may have resulted (in terms of semi-major axis) in jumps of about 1 AU.

Acknowledgements. This work was supported by ANR-ASTCM, INSU-CNRS, PNP-CNRS, and CS, Paris Observatory. Part of the computations were made at CINES/GENCI.

References

- Carruba, V., Burns, J. A., Bottke, W., & Nesvorný, D. 2003, *Icarus*, 162, 308
- Carruba, V., Roig, F., Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., & Nesvorný, D. 2007, *A&A*, 465, 315
- Drummond, J., & Christou, J. 2008, *Icarus*, 197, 480
- Farinella, P., Vokrouhlický, D., & Hartmann, W. K. 1998, *Icarus*, 132, 378
- Fienga, A., Laskar, J., Kuchynka, P., et al. 2011, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 101
- Krasinsky, G. A., Pitjeva, E. V., Vasilyev, M. V., & Yagudina, E. I. 2002, *Icarus*, 158, 98
- Laskar, J. 1994, *A&A*, 287, L9
- Laskar, J., & Gastineau, M. 2009, *Nature*, 459, 817
- Laskar, J., & Robutel, P. 2001, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 80, 39
- Laskar, J., Gastineau, M., Delisle, J.-B., Farrés, A., & Fienga, A. 2011, *A&A*, 532, L4
- Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappala, V., et al. 1997, *Meteor. Planet. Sci.*, 32, 903
- Morbidelli, A., & Gladman, B. 1998, *Meteor. Planet. Sci.*, 33, 999
- Morbidelli, A., & Vokrouhlický, D. 2003, *Icarus*, 163, 120
- Morbidelli, A., Bottke, Jr., W. F., Froeschlé, C., & Michel, P. 2002, *Asteroids III*, 409
- Nesvorný, D. 2010, *Nesvorný HCM Asteroid Families V1.0. EAR-A-VARGBDET-5-NESVORNYFAM-V1.0. NASA Planetary Data System*
- Nesvorný, D., Morbidelli, A., Vokrouhlický, D., Bottke, W. F., & Brož, M. 2002, *Icarus*, 157, 155
- Nesvorný, D., Roig, F., Gladman, B., et al. 2008, *Icarus*, 193, 85
- Novaković, B., Tsiganis, K., & Knežević, Z. 2010, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 107, 35
- Sears, D. 1997, *Meteor. Planet. Sci.*, 32, 3
- Čapek, D., & Vokrouhlický, D. 2004, *Icarus*, 172, 526
- Vokrouhlický, D., & Čapek, D. 2002, *Icarus*, 159, 449
- Zappala, V., Cellino, A., Farinella, P., & Milani, A. 1994, *AJ*, 107, 772

Bibliographie

- Antoniadou, K. I. & Voyatzis, G. 2014, Resonant periodic orbits in the exoplanetary systems, *Ap&SS*, 349, 657
- Baruteau, C. & Papaloizou, J. C. B. 2013, Disk-Planets Interactions and the Diversity of Period Ratios in Kepler's Multi-planetary Systems, *ApJ*, 778, 7
- Batalha, N. M., Rowe, J. F., Bryson, S. T., et al. 2013, Planetary Candidates Observed by Kepler. III. Analysis of the First 16 Months of Data, *ApJS*, 204, 24
- Batygin, K. & Morbidelli, A. 2013a, Analytical treatment of planetary resonances, *A&A*, 556, A28
- Batygin, K. & Morbidelli, A. 2013b, Dissipative Divergence of Resonant Orbits, *AJ*, 145, 1
- Beauge, C. & Ferraz-Mello, S. 1993, Resonance trapping in the primordial solar nebula - The case of a Stokes drag dissipation, *Icarus*, 103, 301
- Beauge, C. & Ferraz-Mello, S. 1994, Capture in exterior mean-motion resonances due to Poynting-Robertson drag, *Icarus*, 110, 239
- Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365, 1160
- Bonfils, X., Forveille, T., Delfosse, X., et al. 2005, The HARPS search for southern extra-solar planets. VI. A Neptune-mass planet around the nearby M dwarf Gl 581, *A&A*, 443, L15
- Bonfils, X., Lo Curto, G., Correia, A. C. M., et al. 2013, The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXIV. A planetary system around the nearby M dwarf μ ASTROBJ/GJ 163/ μ ASTROBJ, with a super-Earth possibly in the habitable zone, *A&A*, 556, A110
- Buchberger, B. 1965, PhD thesis
- Buchberger, B. 2006, PhD thesis
- Callegari, N., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2006, Dynamics of Two Planets in the 3/2 Mean-motion Resonance: Application to the Planetary System of the Pulsar PSR B1257+12, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 381
- Callegari, N., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2004, Dynamics of Two Planets in the 2/1 Mean-Motion Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 89, 201
- Carruba, V., Burns, J. A., Bottke, W., & Nesvorný, D. 2003, Orbital evolution of the Gefion and Adeona asteroid families: close encounters with massive asteroids and the Yarkovsky effect, *Icarus*, 162, 308
- Carruba, V., Roig, F., Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., & Nesvorný, D. 2007, Modeling close encounters with massive asteroids: a Markovian approach - An application to the Vesta family, *Astronomy and Astrophysics*, 465, 20

- Chatterjee, S. & Ford, E. B. 2014, Planetesimal Interactions Can Explain the Mysterious Period Ratios of Small Near-Resonant Planets, ArXiv e-prints
- Cochran, W. D., Fabrycky, D. C., Torres, G., et al. 2011, Kepler-18b, c, and d: A System of Three Planets Confirmed by Transit Timing Variations, Light Curve Validation, Warm-Spitzer Photometry, and Radial Velocity Measurements, *ApJS*, 197, 7
- Collins, G. E. & Akritas, A. G. 1976, in Proceedings of the Third ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, SYMSAC '76 (New York, NY, USA: ACM), 272–275
- Correia, A. C. M., Laskar, J., Farago, F., & Boué, G. 2011, Tidal evolution of hierarchical and inclined systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, 105
- Darwin, G. H. 1880, On the Secular Changes in the Elements of the Orbit of a Satellite Revolving about a Tidally Distorted Planet, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I*, 171, 713
- Delisle, J.-B., Laskar, J., & Correia, A. C. M. 2014, Resonance breaking due to dissipation in planar planetary systems, *A&A*, 566, A137
- Delisle, J.-B., Laskar, J., Correia, A. C. M., & Boué, G. 2012, Dissipation in planar resonant planetary systems, *A&A*, 546, A71
- Dumusque, X., Bonomo, A. S., Haywood, R. D., et al. 2014, The Kepler-10 planetary system revisited by HARPS-N: A hot rocky world and a solid Neptune-mass planet, ArXiv e-prints
- Fabrycky, D. C., Lissauer, J. J., Ragozzine, D., et al. 2012, Architecture of Kepler's Multi-transiting Systems: II. New investigations with twice as many candidates, ArXiv e-prints
- Ferraz-Mello, S., Tsuchida, M., & Klafke, J. C. 1993, On symmetrical planetary corotations, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 55, 25
- Forveille, T., Bonfils, X., Delfosse, X., et al. 2011, The HARPS search for southern extra-solar planets XXXII. Only 4 planets in the Gl 581 system, ArXiv e-prints
- Gavrilov, S. V. & Zharkov, V. N. 1977, Love numbers of the giant planets, *Icarus*, 32, 443
- Goldreich, P. & Schlichting, H. E. 2014, Overstable Librations can Account for the Paucity of Mean Motion Resonances among Exoplanet Pairs, *AJ*, 147, 32
- Goldreich, P. & Tremaine, S. 1979, The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential, *ApJ*, 233, 857
- Goldreich, P. & Ward, W. R. 1973, The Formation of Planetesimals, *ApJ*, 183, 1051
- Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Morbidelli, A. 2005, Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets, *Nature*, 435, 466
- Gonczy, R., Froeschle, C., & Froeschle, C. 1982, Poynting-Robertson drag and orbital resonance, *Icarus*, 51, 633
- Hadjidemetriou, J. D. 2002, Resonant Periodic Motion and the Stability of Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83, 141
- Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. 2010, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (Springer)

- Haisch, K. E. J., Lada, E. A., & Lada, C. J. 2001, Disk Frequencies and Lifetimes in Young Clusters, *ApJ*, 553, L153
- Henrard, J. 1982, in *NATO ASIC Proc. 82: Applications of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics*, ed. V. Szebehely, 153–171
- Henrard, J. & Lemaître, A. 1983, A second fundamental model for resonance, *Celestial Mechanics*, 30, 197
- Henrard, J., Milani, A., Murray, C. D., & Lemaître, A. 1986, The reducing transformation and apocentric librators, *Celestial Mechanics*, 38, 335
- Jancart, S. & Lemaître, A. 2001, Dissipative forces and external resonances, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81, 75
- Jeans, J. H. 1902, The Stability of a Spherical Nebula, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 199, 1
- Kozai, Y. 1968, Love's Number of the Earth Derived from Satellite Observations, *PASJ*, 20, 24
- Laskar, J. 1989, in *Groupe de travail sur la lecture des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, S 026* (Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes, Paris), 1–37
- Laskar, J. 1991, in *Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems*, ed. S. Roeser & U. Bastian, 93–114
- Laskar, J. 2000, On the Spacing of Planetary Systems, *Physical Review Letters*, 84, 3240
- Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, Tidal dissipation in multi-planet systems and constraints on orbit fitting, *A&A*, 538, A105
- Laskar, J. & Robutel, P. 1995, Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62, 193
- Lee, M. H., Fabrycky, D., & Lin, D. N. C. 2013, Are the Kepler Near-resonance Planet Pairs due to Tidal Dissipation?, *ApJ*, 774, 52
- Lemaître, A. 1984a, Formation of the Kirkwood gaps in the asteroid belt, *Celestial Mechanics*, 34, 329
- Lemaître, A. 1984b, High-order resonances in the restricted three-body problem, *Celestial Mechanics*, 32, 109
- Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Rowe, J. F., et al. 2012, Almost All of Kepler's Multiple-planet Candidates Are Planets, *ApJ*, 750, 112
- Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Fabrycky, D. C., et al. 2011, Architecture and Dynamics of Kepler's Candidate Multiple Transiting Planet Systems, *ApJS*, 197, 8
- Lithwick, Y. & Wu, Y. 2012, Resonant Repulsion of Kepler Planet Pairs, *ApJ*, 756, L11
- Malhotra, R. & Dermott, S. F. 1990, The role of secondary resonances in the orbital history of Miranda, Icarus, 85, 444
- Mayor, M., Bonfils, X., Forveille, T., et al. 2009, The HARPS search for southern extra-solar planets. XVIII. An Earth-mass planet in the GJ 581 planetary system, *A&A*, 507, 487
- Mayor, M. & Queloz, D. 1995, A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 378, 355

- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Ferraz-Mello, S. 2006, Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 411
- Michtchenko, T. A. & Ferraz-Mello, S. 2001, Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, *Icarus*, 149, 357
- Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappala, V., et al. 1997, Vesta fragments from v6 and 3:1 resonances: Implications for V-type NEAs and HED meteorites, *Meteoritics and Planetary Science*, 32, 903
- Mignard, F. 1979, The evolution of the lunar orbit revisited. I, *Moon and Planets*, 20, 301
- Morbidelli, A. & Gladman, B. 1998, Orbital and temporal distributions of meteorites originating in the asteroid belt, *Meteoritics and Planetary Science*, 33, 999
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. 2005, Chaotic capture of Jupiter's Trojan asteroids in the early Solar System, *Nature*, 435, 462
- Nesvorný, D. 2010, Nesvorný HCM Asteroid Families V1.0. EAR-A-VARGBDET-5-NESVORNYFAM-V1.0. NASA Planetary Data System
- Nesvorný, D., Morbidelli, A., Vokrouhlický, D., Bottke, W. F., & Brož, M. 2002, The Flora Family: A Case of the Dynamically Dispersed Collisional Swarm ?, *Icarus*, 157, 155
- Novaković, B., Tsiganis, K., & Knežević, Z. 2010, Dynamical portrait of the Lixiaohua asteroid family, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107, 35
- Papaloizou, J. C. B. 2011, Tidal interactions in multi-planet systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, 83
- Papaloizou, J. C. B. & Terquem, C. 2010, On the dynamics of multiple systems of hot super-Earths and Neptunes: tidal circularization, resonance and the HD 40307 system, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 405, 573
- Petrovich, C., Malhotra, R., & Tremaine, S. 2013, Planets near Mean-motion Resonances, *ApJ*, 770, 24
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., et al. 1996, Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas, *Icarus*, 124, 62
- Press, W. H., Flannery, B. P., & Teukolsky, S. A. 1986, Numerical recipes. The art of scientific computing
- Rein, H. 2012, Period ratios in multiplanetary systems discovered by Kepler are consistent with planet migration, *MNRAS*, 427, L21
- Rouillier, F. 1999, Solving Zero-Dimensional Systems through the Rational Univariate Representation, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 9, 433
- Schneider, J., Dedieu, C., Le Sidaner, P., Savalle, R., & Zolotukhin, I. 2011, Defining and cataloging exoplanets: the exoplanet.eu database, *A&A*, 532, A79
- Sears, D. 1997, "The Evolution of igneous asteroids: Focus on Vesta and the HED meteorites" Houston, Texas, 1996 October 16-18, *Meteoritics and Planetary Science*, 32, 3
- Sessin, W. & Ferraz-Mello, S. 1984, Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2:1 solutions of the Hori auxiliary system, *Celestial Mechanics*, 32, 307
- Singer, S. F. 1968, The Origin of the Moon and Geophysical Consequences*, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 15, 205

- Tittemore, W. C. & Wisdom, J. 1990, Tidal evolution of the Uranian satellites. III - Evolution through the Miranda-Umbriel 3:1, Miranda-Ariel 5:3, and Ariel-Umbriel 2:1 mean-motion commensurabilities, *Icarus*, 85, 394
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005, Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System, *Nature*, 435, 459
- Udry, S., Bonfils, X., Delfosse, X., et al. 2007, The HARPS search for southern extra-solar planets. XI. Super-Earths (5 and 8 M_{\oplus}) in a 3-planet system, *A&A*, 469, L43
- Vincent, A. J. H. 1834, Mémoire sur la résolution des équations numériques, Mémoires de la société royale des sciences, de l'agriculture et des arts, de Lille, 1
- Weidenschilling, S. J. & Davis, D. R. 1985, Orbital resonances in the solar nebula - Implications for planetary accretion, *Icarus*, 62, 16
- Weiss, L. M., Marcy, G. W., Rowe, J. F., et al. 2013, The Mass of KOI-94d and a Relation for Planet Radius, Mass, and Incident Flux, *ApJ*, 768, 14
- Wisdom, J. 1986, Canonical solution of the two critical argument problem, *Celestial Mechanics*, 38, 175
- Wolszczan, A. & Frail, D. A. 1992, A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12, *Nature*, 355, 145
- Xie, J.-W. 2014, Asymmetric Orbital Distribution near Mean Motion Resonance: Application to Planets Observed by Kepler and Radial Velocities, *ApJ*, 786, 153