

École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île-de-France

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Disciplines : Astronomie et Astrophysique

présentée par

**Adrien LELEU**

---

## DYNAMIQUE DES PLANÈTES COORBITALES

---

dirigée par

Philippe ROBUTEL

IMCCE

Alexandre C.M. CORREIA Université d'Aveiro

Soutenue le 27 septembre 2016 devant le jury composé de :

M. Alexandre CORREIA	co-directeur
M. Bálint ÉRDI	rapporteur
M. Alain LECAVELIER DES ETANGS	examinateur
M. Alessandro MORBIDELLI	examinateur
M. David NESVORNY	rapporteur
M. Philippe ROBUTEL	directeur

IMCCE  
Observatoire de Paris  
77, avenue Denfert-Rochereau  
75 014 Paris  
France

UPMC  
4 place Jussieu  
75005 Paris  
France

## Remerciements

Je tiens vivement à exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Philippe Robutel et Alexandre Correia qui m'ont guidé et accompagné pendant ces trois années. Leurs avis éclairés et leur patience m'ont permis d'étendre largement mes connaissances dans des aspects variés de la mécanique céleste.

Je remercie sincèrement Messieurs Alexandre Correia, Alain Lecavelier des Etangs, Alessandro Morbidelli et Philippe Robutel pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse, et plus spécialement Messieurs Bálint Érdi et David Nesvorný qui m'ont fait l'honneur d'être mes rapporteurs.

J'exprime toute ma gratitude à l'équipe ASD et à son directeur Jacques Laskar pour leur accueil pendant ces trois années. La bonne entente et le sérieux qui y règnent, ainsi que le partage organisé de connaissances, font du 5ème étage un lieu privilégié pour l'épanouissement scientifique. Je tiens à remercier particulièrement Michael et Hervé dont la gentillesse et les compétences ont grandement contribué à l'avancée de ces travaux.

D'autres personnes ont contribué indirectement à ces travaux :

Les camarades du master 2 de l'observatoire, qui ont égayé ces trois années.

Mes amis, qui m'ont permis de garder un équilibre et grâce à qui aucune période n'a été trop difficile.

Ma famille, dont l'amour et la confiance ont été un véritable moteur durant tout mon parcours.

Et enfin, Celle qui assure ma sérénité et mon bonheur depuis des années.

## Abstract

Ce travail porte principalement sur la dynamique et les méthodes de détection des exoplanètes coorbitales. Nous appelons "coorbitale" toute configuration pour laquelle deux planètes orbitent avec le même moyen mouvement moyen autour d'une même étoile. Dans un premier temps, nous revisitons les résultats du cas coplanaire circulaire. Nous rappelons également que les variétés des coorbitaux circulaires et celle des coorbitaux coplanaires sont toutes deux invariantes par le flot du Hamiltonien moyen. Nous nous intéressons donc à ces deux cas particuliers. L'accent est mis sur le cas coplanaire (excentrique), où nous étudions l'évolution de familles d'orbites quasi-périodiques de dimension non maximale en fonction de l'excentricité des planètes. Nous montrons que la géométrie de ces familles dépend fortement de l'excentricité, ce qui entraîne des changements de topologie importants dans l'ensemble de l'espace des phases à mesure que celle-ci augmente. Un chapitre est dédié à la détection des exoplanètes coorbitales. On y rappelle les différentes méthodes de détection adaptées au cas coorbital. On développe particulièrement le cas des vitesses radiales, ainsi que leur combinaison avec des mesures de transit. Enfin, on décrit une méthode permettant d'étudier l'effet de perturbations orbitales sur les résonances spin-orbite d'un corps indéformable. Nous appliquons cette méthode dans deux cas : le cas coorbital excentrique, et le cas circumbinaire.

This work focuses on the dynamics and the detection methods of co-orbital exoplanets. We call "co-orbital" any configuration in which two planets orbit with the same mean mean-motion around the same star. First, we revisit the results of the circular coplanar case. We also recall that the manifold associated to the coplanar case and the manifold corresponding to the circular case are both invariant by the flow of the averaged Hamiltonian. We hence study these two particular cases. We focus mainly on the coplanar case (eccentric), where we study the evolution of families of non-maximal quasi-periodic orbits parametrized by the eccentricity of the planets. We show that the geometry of these families is highly dependent on the eccentricity, which causes significant topology changes across the space of phases as the latter increases. A chapter is dedicated to the detection of co-orbital exoplanets. We recall the different detection methods adapted to the co-orbital case. We focus on the radial velocity technique, and the combination of radial velocity and transit measurements. Finally, we describe a method to study the effect of orbital perturbations on the spin-orbit resonances for a rigid body. We apply this method in two cases : the eccentric co-orbital case and the circumbinary case.

*The sounding cataract  
Haunted me like a passion : the tall rock,  
The mountain, and the deep and gloomy wood,  
Their colours and their forms, were then to me  
An appetite ; a feeling and a love,  
That had no need of a remoter charm,  
By thought supplied, nor any interest  
Unborrowed from the eye.*

---

WORDSWORTH



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Coorbitaux quasi-circulaires coplanaires</b>	<b>7</b>
1.1 Formulation hamiltonienne de la résonance 1 :1 pour des orbites quasi-circulaires . . . . .	7
1.1.1 Formulation hamiltonienne du problème planétaire moyen général . . . . .	7
1.1.2 Invariance des variétés circulaire et plane . . . . .	9
1.1.3 Stabilité des variétés circulaire et plane . . . . .	10
1.2 Dynamique sur la variété circulaire plane . . . . .	11
1.2.1 Modèle à un degré de liberté . . . . .	11
1.2.2 Portrait de Phase sur la variété circulaire plane . . . . .	12
1.2.3 Évolution des élément orbitaux dans le cas quasi-circulaire . . . . .	13
1.3 Stabilité des orbites coorbitales quasi-circulaires . . . . .	14
<b>2 Dynamique des co-orbitaux excentriques coplanaires</b>	<b>17</b>
2.1 Approche du problème . . . . .	17
2.2 Dynamique au voisinage des points fixes circulaires $L_k$ . . . . .	18
2.3 Dynamique au voisinage d'un point fixe . . . . .	22
2.3.1 Approximation quadratique . . . . .	22
2.3.2 Au-delà de l'approximation quadratique . . . . .	22
2.3.3 Dynamique le long des familles $\mathcal{F}_k^2$ . . . . .	23
2.3.4 Approximation quadratique des familles $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ au voisinage des équilibres de Lagrange circulaires . . . . .	24
2.4 Réduction du problème . . . . .	25
2.4.1 Variété de référence . . . . .	26
2.4.2 Séparation des échelles de temps et invariance adiabatique . . . . .	28
2.4.3 Variété de référence au voisinage de l'équilibre de Lagrange circulaire . . . . .	29
2.4.4 Variété de référence pour des coorbitaux à masses égales . . . . .	30
2.4.5 Identification des familles $\overline{\mathcal{F}}$ . . . . .	34
2.5 Étude des coorbitaux excentriques à deux masses égales . . . . .	37
2.5.1 Dynamique des coorbitaux excentriques à masses égales . . . . .	38
2.5.2 Stabilité . . . . .	47
2.6 Étude des coorbitaux excentriques de masse quelconque . . . . .	52
2.6.1 Étude de l'espace des phases . . . . .	53
2.6.2 variété de référence pour $m_2 \neq m_1$ . . . . .	55
2.7 Dynamique au voisinage des équilibres elliptiques $\mathcal{F}_k^2$ . . . . .	60
2.7.1 Hamiltonien au voisinage de la famille $\mathcal{F}_4^2$ . . . . .	60
2.7.2 Direction des familles $\overline{\mathcal{F}}_k^l$ . . . . .	62
2.7.3 Forme normale au voisinage d'un point de $\mathcal{F}_4^2$ . . . . .	65

2.7.4	$\overline{\mathcal{F}}_4^l$ au voisinage de $\mathcal{F}_4^2$ . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Co-orbitaux circulaires inclinés</b>	<b>69</b>
3.1	Réduction du problème . . . . .	69
3.2	Familles émergent des équilibres de Lagrange circulaire . . . . .	71
3.3	Dynamique et stabilité des co-orbitaux circulaires inclinés . . . . .	72
3.3.1	Limite du domaine troyen . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Détection des coorbitaux quasi-circulaires</b>	<b>77</b>
4.1	Mouvement du barycentre . . . . .	78
4.2	Transit . . . . .	81
4.2.1	transit des deux coorbitaux . . . . .	81
4.2.2	transit d'un des coorbitaux . . . . .	81
4.3	Transit et vitesse radiale . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Résonances spin-orbites dans le problème planétaire à trois corps plan</b>	<b>87</b>
5.1	Formulation Hamiltonienne de l'équation de la rotation plane . . . . .	87
5.2	Description de l'espace des phases . . . . .	88
5.2.1	Système planétaire . . . . .	90
5.2.2	Cas binaire . . . . .	91
	<b>Résumé et discussion</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Matrices de Passage</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Exemples d'orbites</b>	<b>103</b>
<b>C</b>	<b>Publications</b>	<b>109</b>
C.1	Détection de coorbitaux par vitesse radiale . . . . .	109
C.2	Détection de coorbitaux par vitesse radiale et transit . . . . .	139
C.3	Rotation de coorbitaux excentriques . . . . .	144
C.4	Rotation d'un corps circumbinaire . . . . .	175



# Introduction

Au début XVII<sup>e</sup> siècle Kepler trouva, en analysant les observations de Tycho Brahe, trois lois décrivant le mouvement des planètes autour du soleil. Quelques décennies plus tard, Newton développa la théorie de la gravitation : les équations du mouvement de corps à symétrie sphérique soumis uniquement à leur attraction gravitationnelle mutuelle. Appliquant sa nouvelle théorie au cas du problème à deux corps, Newton intégra les équations du mouvement et trouva des trajectoires suivant les lois décrites par Kepler. Il fut cependant démuni face au problème à trois corps, comme de nombreux mathématiciens après lui jusqu'à ce que Poincaré montre en 1892 que ce problème n'était pas intégrable.

Si les observations de notre système solaire multi-planétaire ont permis à Kepler d'établir des lois décrivant le problème à deux corps, c'est parce que les perturbations mutuelles des planètes sont suffisamment faibles pour que sur des temps courts les trajectoires ne diffèrent pas significativement de celles de corps isolés. En effet, si les masses des planètes sont faibles par rapport à celle de l'étoile et que leurs distances mutuelles ne deviennent pas trop petites, les équations du mouvement de ce système sont proches d'une somme de problèmes à deux corps. Cette approche, dite perturbative, a été utilisée par Lagrange en 1778 afin de donner des solutions approchées du problème à deux corps perturbé.

Mais si il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique générale et exacte du problème à trois corps, cela n'exclut évidemment pas la possibilité d'identifier des solutions particulières de ce problème. Dès 1767, Euler en trouva trois : trois configurations où les corps sont alignés et sont sur une orbite périodique. En 1772, Lagrange porta ce nombre à 5 : il ajouta aux configurations d'Euler deux nouvelles configurations où les trois corps sont au sommet d'un triangle équilatéral indéformable tournant autour du centre de gravité du système à une vitesse constante. Soit  $m_0$ ,  $m_1$  et  $m_2$  les masses de ces trois corps, avec  $m_0 \geq m_2 \geq m_1$ . Nous notons  $L_1$  et  $L_2$  les configurations alignées où les corps 1 et 2 sont du même côté du corps 0,  $L_3$  la configuration où  $m_1$  et  $m_2$  sont chacun d'un côté de  $m_0$ ,  $L_4$  la configuration équilatérale où  $m_1$  est en avance sur  $m_2$  et  $L_5$  l'autre configuration équilatérale. On appellera également ces 5 orbites les 'équilibres de Lagrange', car ce sont des points fixes dans le repère tournant avec chacune de ces configurations.  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont des équilibres instables. En 1843, Gascheau montra que la stabilité (linéaire) des équilibres  $L_4$  et  $L_5$  dépendait de la répartition de masse entre les trois corps<sup>1</sup> : ces configurations sont stables si  $m_1$  et  $m_2$  sont suffisamment faibles devant  $m_0$ . Quand cette condition est vérifiée, il existe un ensemble de conditions initiales non vide pour lesquelles un système de trois corps libre au voisinage de cet équilibre sur des temps longs (où 'long' reste ici à définir). Il fallu attendre 1906 pour que le premier corps dans cette configuration, Achille, soit découvert par Wolf (1906) au voisinage du point  $L_4$  de Jupiter. Depuis, des milliers d'astéroïdes ont été découverts dans le voisinage des points  $L_4$  et  $L_5$  des planètes du système solaire, principalement de Jupiter<sup>2</sup>. Par analogie au nom donné aux premiers

---

1.  $\frac{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2}{(m_0 + m_1 + m_2)^2} < \frac{1}{27}$

2. <http://www.minorplanetcenter.org/>

de ces astéroïdes découverts, nous appellerons cette configuration ‘troyenne’, où les corps librent autour des sommets d’un triangle équilatéral.

Les 5 orbites particulières précédemment décrites sont périodiques, leur mouvement est donc régi par une unique fréquence fondamentale. Les trois corps ont donc, sur chacune de ces orbites, le même moyen mouvement autour du barycentre du système. Plus généralement on parlera de configuration coorbitale, ou résonance coorbitale par analogie aux autres résonances en moyen mouvement, pour toute orbite où les trois corps auront le même moyen mouvement moyen. Les configurations troyennes précédemment évoquées sont donc des configurations coorbitales, mais ce ne sont pas les seules connues. La topologie globale de la résonance coorbitale a été étudiée en particulier par Garfinkel (1976, 1978) et Érdi (1977) par approche perturbative. Leurs travaux fournissent un modèle de la résonance coorbitale dans le cadre du problème restreint ( $m_1 = 0$ ), valable tant que les longitudes des corps 1 et 2 ne sont pas trop proches. Dans leur modèle apparaît, en plus des régions troyennes, une région où l’angle résonant  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$  subit de larges librations durant lesquelles l’orbite oscille autour des équilibres  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Cette configuration est nommée ‘fer-à-cheval’, d’après la forme que décrit l’orbite de  $m_1$  dans le repère tournant avec le moyen mouvement moyen des trois corps. Quelques années plus tard, les premiers corps en configuration fer-à-cheval furent découverts : les satellites de Saturne Janus et Epiméthée (Smith *et al.*, 1980; Synnott *et al.*, 1981).

Récemment, Robutel et Pousse (2013); Robutel *et al.* (2015) proposèrent un modèle pour la résonance coorbitale coplanaire quasi-circulaire dans le cas planétaire ( $m_0 \gg m_2 \geq m_1$ ). Ces travaux constituent un point de départ pour ce manuscrit et seront rappelés, parmi d’autres résultats concernant la résonance coorbitale circulaire plane, dans le chapitre 1.

Les 5 équilibres de Lagrange sont des configurations coplanaires avec des orbites circulaires. Les domaines des orbites troyennes et en fers à cheval sont également définis dans ce cas particulier. Cependant, les configurations d’Euler et de Lagrange du cas circulaire plan se prolongent en des configurations homothétiques dans le cas excentrique, auxquelles s’ajoutent d’autres familles d’orbites remarquables, telles que les ‘Anti-Lagranges’ (Giuppone *et al.*, 2010), ou les ‘quasi-satellites’ (Namouni, 1999; Mikkola *et al.*, 2006). Il existe donc une grande variété de configurations différentes dans la résonance coorbitale. De plus, le cas incliné apporte de nouvelles configurations, telles que les coorbitaux rétrogrades (Morais et Namouni, 2013). Il est difficile d’explorer cet espace des phases de manière exhaustive. Nous allons cependant développer une approche dans le but d’en apprendre plus sur la dynamique coorbitale, en nous concentrant principalement sur le cas plan excentrique. Les résultats de cette étude seront présentés dans le chapitre 2, avec un intérêt particulier pour les modifications de l’espace des phases à mesure que l’excentricité augmente. Le cas circulaire incliné sera étudié plus brièvement dans le chapitre 3.

En se basant sur les connaissances acquises dans les chapitres 1 à 3, on s’intéressera ensuite à la détection des exoplanètes coorbitales. Dans ces chapitres, nous montrons que pour de faibles excentricités et des masses planétaires suffisamment faibles, de grandes régions de l’espace des phases contiennent des orbites stables sur le long terme. Il est donc étonnant que parmi les milliers d’exoplanètes découvertes ces vingt dernières années<sup>3</sup>, aucune ne soit en configuration coorbitale. Cette question sera abordée dans le chapitre 4. On y discutera deux causes possibles de cette absence : dans une première partie, on rappellera les résultats existants concernant la formation et l’évolution des systèmes coorbitaux. Dans un second temps, on verra pourquoi les techniques “traditionnelles” de

---

3. <http://www.exoplanets.eu/>

détection confondent, au moins au premier ordre, des coorbitaux pour une planète seule. Enfin nous verrons comment des techniques adaptées peuvent lever cette indétermination.

Dans le dernier chapitre, nous prendrons un peu de recul par rapport à la résonance coorbitale et nous discuterons de l'effet des perturbations orbitales sur la dynamique du spin d'un corps asymétrique indéformable. Nous y présenterons une méthode générale qui sera appliquée dans deux cas : le cas coorbital excentrique, et le cas circumbinaire.

## Notations

$AL_k$		famille de points fixes émergent de $L_k$ (problème moyen)
$a_j$		demi-grand axe de la planète $j$
$\bar{a}$		demi-grand axe moyen (calculé à partir de $\eta$ )
$\beta_j$	$= \frac{m_0 m'_j}{m_0 + \varepsilon m'_j}$	
$C$	$= 2J_1$	moment cinétique total
	$= \sum_{j \in \{1,2\}} \Lambda_j - i x_j \tilde{x}_j$	
$\Delta a$	$= a_1 - a_2$	
$\Delta \varpi$	$= \varpi_1 - \varpi_2$	
$\delta$	$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}$	
$e_j$		excentricité du corps $j$
$\varepsilon$	sec. 1.1.1	petit paramètre
$\eta$		moyen mouvement moyen
$\mathcal{F}_k^j$	sec. 2.3.2	réunion d'orbites périodiques - prblm moyen
$\overline{\mathcal{F}}_k^j$	sec. 2.3.2	réunion d'orbites quasi-périodiques (2 freq.) - prblm moyen
$\overline{\mathcal{F}}$	sec. 2.4	réunion d'orbites périodiques - prblm moyen réduit
$f_j$		longitude vraie of planet $j$
$\mathcal{G}$		constante gravitationnelle
$\mathcal{HS}$		orbite en fer-à-cheval
$J$		inclinaison mutuelle

$L_j$		$j$ ème équilibre de Lagrange
$\Lambda_j$	$= \beta_j \sqrt{\mu_j a_j}$	variable canonique de Poincaré (conj. $\lambda_j$ )
$\lambda$		longitude moyenne du corps $j$
$m_j$		masse du corps $j$
$m'_j$	$= m_j/\varepsilon$	masse réduite du corps $j$
$\mu$	$= \frac{m_1+m_2}{m_0+m_1+m_2}$	
$\mu_j$	$= \mathcal{G}(m_0 + \varepsilon m'_j)$	
$n$		mouvement moyen
$\nu$		fréquence fondamentale associée à $\zeta$
$P_n$	$= 2\pi/n$	période orbitale
$\Pi$	$= i(x_2 \tilde{x}_2 - x_1 \tilde{x}_1)/2$	conjugué canoniquement à $\Delta\varpi$
$\varpi_j$		longitude du périhélie de la planète $j$
$QS$		quasi-satellite
$r_j$		distance à l'étoile de la $j$ ème planète
$\mathbf{r}_j$	vecteur	position héliocentrique de la planète $j$
$\tilde{\mathbf{r}}_j$	vecteur	impulsion barycentrique normalisée de la planète $j$
$\Sigma$	sec 2.4.1	volume de l'espace des phases représenté par $\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	sec 2.4.1	variété représentative
$x_j$	$= \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} e^{i\varpi_j}$	variable canonique de Poincaré (conj. $\tilde{x}_j$ )
$\tilde{x}_j$	$= -\bar{x}_j$	variable canonique de Poincaré (conj. $x_j$ )
$y_j$	$= \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{\sqrt{1 - e_j^2}(1 - \cos i)} e^{i\Omega_j}$	variable canonique de Poincaré (conj. $\tilde{y}_j$ )
$\tilde{y}_j$	$= -\bar{y}_j$	variable canonique de Poincaré (conj. $y_j$ )
$Z$	$= \Lambda_1 - \Lambda_1^0$	variable conjuguée canoniquement à $\zeta$ canonical conjugate variable to $\zeta$
$z$	$= \zeta - \pi/3$	
$\zeta$	$= \lambda_1 - \lambda_2$	angle résonant



# Chapitre 1

## Coorbitaux quasi-circulaires coplanaires

Sans ce chapitre, nous rappelons les principaux résultats sur la dynamique et la stabilité des coorbitaux circulaires coplanaires. Notre objet d'étude étant les systèmes planétaires, on se limitera au cas  $m_0 \gg m_2 \geq m_1$ .

### 1.1 Formulation hamiltonienne de la résonance 1 :1 pour des orbites quasi-circulaires

*Les transformations du hamiltonien de la résonance 1 :1 en moyen mouvement présenté ici sont issues de l'article de Robutel et al. (2015).*

#### 1.1.1 Formulation hamiltonienne du problème planétaire moyen général

Le hamiltonien du problème à trois corps dans les coordonnées canoniques héliocentriques est le suivant (Laskar et Robutel, 1995; Robutel *et al.*, 2015) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K(\mathbf{r}_j) + \varepsilon \mathcal{H}_P(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j), \quad (1.1)$$

où

$$\mathcal{H}_K = \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_j\|^2}{2\beta_j} - \frac{\mu_j \beta_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right), \quad (1.2)$$

est la partie keplerienne du hamiltonien où  $\mathbf{r}_j$  est la position du corps  $j$  par rapport au corps central  $m_0$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_j$  est l'impulsion barycentrique normalisée par le petit paramètre  $\varepsilon$  de manière à ce que les masses  $m'_k = m_k/\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ , avec  $m_k = \max(m_1, m_2)$ .  $\beta_j$  est le rapport de masse réduit  $\beta_j = \frac{m_0 m'_j}{m_0 + \varepsilon m'_j}$  et  $\mu_j = \mathcal{G}(m_0 + \varepsilon m'_j)$  où  $\mathcal{G}$  est la constante universelle de gravitation. La partie perturbée du Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}_P = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0} - \mathcal{G} \frac{m'_1 m'_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}. \quad (1.3)$$

Afin de se rapprocher des éléments elliptiques, plus adaptés à l'étude d'orbites kepleriennes perturbées, on réécrit le hamiltonien 1.1 en fonction des variables canoniques de Poincaré :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K(\Lambda_j) + \varepsilon \mathcal{H}_p(\Lambda_j, \lambda_j, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j), \quad (1.4)$$

avec

$$\begin{aligned}\Lambda_j &= \beta_j \sqrt{\mu_j a_j}, & \lambda_j &= \lambda_j, \\ x_j &= \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} e^{i\varpi_j}, & \tilde{x}_j &= -i\bar{x}_j, \\ y_j &= \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{\sqrt{1 - e_j^2}(1 - \cos i)} e^{i\Omega_j}, & \tilde{y}_j &= -i\bar{y}_j,\end{aligned}\tag{1.5}$$

et

$$\mathcal{H}_K = - \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\mu_j^2 \beta_j^3}{2\Lambda_j^2} \right).\tag{1.6}$$

Par définition, la résonance coorbitale exacte est atteinte quand  $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\Lambda_1^0, \Lambda_2^0)$ , de manière à ce que les moyen mouvements des deux planètes soient identiques (nous noterons cette fréquence  $\eta$ ), donc, lorsque :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_K}{\partial \Lambda_1}(\Lambda_1^0, \Lambda_2^0) = \frac{\partial \mathcal{H}_K}{\partial \Lambda_2}(\Lambda_1^0, \Lambda_2^0) = \eta,\tag{1.7}$$

ou

$$\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{(\Lambda_1^0)^3} = \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{(\Lambda_2^0)^3} = \eta.\tag{1.8}$$

Plus généralement, quand deux corps sont en résonance coorbitale, ils librent autour des points de résonance exacte. Le moyen mouvement des deux corps étant ‘proche’ à tout instant, la différence des longitudes moyennes évolue lentement par rapport à chacune des longitudes. Plus précisément, l’angle résonant  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$  est régi par la fréquence fondamentale  $\nu \propto \sqrt{\varepsilon}n$ . Nous effectuons donc le changement de variable canonique suivant :

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 - \Lambda_1^0 \\ \Lambda_2 - \Lambda_2^0 \end{pmatrix}.\tag{1.9}$$

qui met en évidence l’angle semi-rapide  $\zeta$  et un angle rapide  $\zeta_2$  ainsi que leur variable conjuguée  $Z$  et  $Z_2$ . On obtient le hamiltonien suivant :

$$H = H_K(Z, Z_2) + \varepsilon H_P(\zeta, \zeta_2, Z, Z_2, x_j, -i\bar{x}_j, y_j, -\bar{y}_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\tag{1.10}$$

avec

$$H_K(Z, Z_2) = - \frac{\beta_1^3 \mu_1^2}{2(\Lambda_1^0 + Z)^2} - \frac{\beta_2^3 \mu_2^2}{2(\Lambda_2^0 - Z + Z_2)^2}.\tag{1.11}$$

Dans le hamiltonien (1.10), une troisième échelle de temps lente, dite séculaire, apparaît pour l’évolution des variables  $x_j$  et  $y_j$  ( $\dot{x}_j = \varepsilon \partial H_P / \partial (\tilde{x}_j) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ). Les différentes échelles de temps qui apparaissent dans le hamiltonien nous permettent de le moyenner sur l’angle rapide  $\zeta_2$ . En pratique, cette moyenne se fait par l’application au temps 1 du flot de l’hamiltonien  $\overline{W}$  :

$$\overline{W}(\zeta, Z, Z_2, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{\zeta_2} [\overline{H}_P - H_P] d\zeta_2,\tag{1.12}$$

où

$$\overline{H}_P(\zeta, Z, Z_2, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_P d\zeta_2.\tag{1.13}$$



On obtient alors le hamiltonien moyen :

$$\bar{H} = \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{W}}}H. \quad (1.14)$$

où  $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{W}}}$  est la transformée de Lie :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}} = Id + \{\mathcal{W}, \cdot\} + \{\mathcal{W}, \{\mathcal{W}, \cdot\}\} + \dots \quad (1.15)$$

avec  $\{\cdot, \cdot\}$  le crochet de Lie. On note  $\chi_m$  le changement de variables canonique proche de l'identité :

$$\chi_m = \mathcal{L}_{-\bar{\mathcal{W}}}, \quad (1.16)$$

où les anciennes variables s'écrivent en fonction des nouvelles sous la forme :

$$(\zeta, \zeta_2, Z, Z_2, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) = \chi_m(\zeta', \zeta_2', Z', Z_2', x_j', \tilde{x}_j', y_j', \tilde{y}_j') \quad (1.17)$$

Le hamiltonien  $\bar{\mathcal{W}}$  étant de taille  $\varepsilon$ , les nouvelles variables ne diffèrent des anciennes que par des quantités de taille  $\varepsilon$ . Dans la suite on écrira également les variables moyennes :  $(\zeta, \zeta_2, Z, Z_2, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j)$ . Nous obtenons donc :

$$\bar{H} = H_K(Z, Z_2) + \varepsilon \bar{H}_P(\zeta, Z, Z_2, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (1.18)$$

car  $\bar{\mathcal{W}}$  est de taille  $\varepsilon$ . Notons que  $Z_2$  est une constante du mouvement de ce hamiltonien moyen. Quitte à renormer le temps  $t$ , on peut choisir  $\eta$  de manière à ce que la variable  $Z_2$  soit nulle :

$$\eta = \left( \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{\mu_1^{2/3} \beta_1 + \mu_2^{2/3} \beta_2} \right)^3. \quad (1.19)$$

On obtient donc le hamiltonien moyen suivant :

$$\bar{H} = H_K(Z) + \varepsilon \bar{H}_P(\zeta, Z, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.20)$$

### 1.1.2 Invariance des variétés circulaire et plane

Dans un certain domaine (voir Robutel *et al.*, 2015), le hamiltonien  $\bar{H}_P$  est analytique, et peut être développé en série de Taylor au voisinage de  $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0, 0, 0)$  :

$$\bar{H}_P(\zeta, Z, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) = \sum_{(p, \tilde{p}, q, \tilde{q}) \in \mathbb{N}^8} C_{p, \tilde{p}, q, \tilde{q}}(\zeta, Z) x_1^{p_1} x_2^{p_2} \tilde{x}_1^{\tilde{p}_1} \tilde{x}_2^{\tilde{p}_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2} \tilde{y}_1^{\tilde{q}_1} \tilde{y}_2^{\tilde{q}_2}, \quad (1.21)$$

où les coefficients  $C_{p, \tilde{p}, q, \tilde{q}}$  sont non nuls si et seulement si  $(p, \tilde{p}, q, \tilde{q}) \in \mathbb{N}^8$  respectent la règle de D'Alembert :

$$p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2. \quad (1.22)$$

Ceci est équivalent au fait que la quantité  $\sum_{j=1}^2 (x_j \tilde{x}_j + y_j \tilde{y}_j)$  est une intégrale première du mouvement moyen. Le développement (1.21) n'admet donc pas de termes linéaires en les variables  $x_j, \tilde{x}_j, y_j$  et  $\tilde{y}_j$ . La variété

$$C_0 = \{(\zeta, Z, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j) / x_j = \tilde{x}_j = y_j = \tilde{y}_j = 0\} \quad (1.23)$$

est donc une variété invariante par le flot du hamiltonien moyenné (1.20). D'autre part, le développement (1.21) est pair en les puissances des  $(y_j, \tilde{y}_j)$ . Ceci est dû à l'invariance par

symétrie du hamiltonien par rapport au plan Oxy (Laskar, 1989, page 26). De la parité du développement (1.21) en les puissances des  $(y_j, \tilde{y}_j)$ , nous pouvons déduire que la variété :

$$\mathcal{C}_{y=0} = \{(\zeta, Z, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j)/y_j = \tilde{y}_j = 0\} \quad (1.24)$$

est également une variété invariante par le flot du hamiltonien moyenné (1.20). En effet, les termes de la série de Taylor (1.21) commencent au degré deux en  $y, \tilde{y}$ . Pour finir, si le développement de (1.21) est pair à la fois en les variables  $(x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j)$  et les variables  $(y_j, \tilde{y}_j)$ , il est pair en les variables  $(x_j, \tilde{x}_j)$ . La variété

$$\mathcal{C}_{x=0} = \{(\zeta, Z, x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j)/x_j = \tilde{x}_j = 0\}, \quad (1.25)$$

est donc également invariante par le flot du hamiltonien moyen (1.20).

### 1.1.3 Stabilité des variétés circulaire et plane

Nous avons vu précédemment que la variété  $\mathcal{C}_{x=0}$  était invariante par le flot du hamiltonien (1.20). Nous allons maintenant étudier sa stabilité linéaire dans la direction  $(x_j, \tilde{x}_j)$ . Il a été montré par Robutel et Pousse (2013) que l'équation variationnelle dans la direction  $(x_j, \tilde{x}_j)$  autour d'une trajectoire arbitraire  $\zeta(t)$  de  $\mathcal{C}_{x=0}$  s'écrit :

$$\dot{X} = M(t)X \quad (1.26)$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(t) = i\varepsilon\eta \frac{m'_1 m'_2}{m_0} \begin{pmatrix} \frac{A(\zeta(t))}{m'_1} & \frac{\bar{B}(\zeta(t))}{\sqrt{m'_1 m'_2}} \\ \frac{B(\zeta(t))}{\sqrt{m'_1 m'_2}} & \frac{A(\zeta(t))}{m'_2} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= \frac{1}{4\Delta(\zeta)^5} (5 \cos 2\zeta - 13 + 8 \cos \zeta) - \cos \zeta, \\ B(\zeta) &= e^{-2i\zeta} - \frac{1}{8\Delta(\zeta)^5} (e^{-3i\zeta} + 16 e^{-2i\zeta} - 26 e^{-i\zeta} + 9 e^{i\zeta}), \\ \Delta(\zeta) &= \sqrt{2 - 2 \cos \zeta}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ces équations sont obtenues par le développement à l'ordre 2 en excentricité du hamiltonien moyen (1.20). Suivant le théorème de Floquet-Lyapunov (Meyer et Hall, 1992), si la trajectoire  $\zeta(t)$  est  $2\pi/\nu$  périodique, alors les solutions de l'équation aux variations prennent la forme :

$$Y(t) = P(\nu t) e^{Ut}, \quad (1.29)$$

où  $U$  est une matrice constante et  $P(\psi)$  une matrice dont les coefficients sont des fonctions  $2\pi$  périodiques de  $\psi$ . Nous avons donc :

$$Y(t + 2\pi\nu^{-1}) = Y(t) e^{2\pi\nu^{-1}U}. \quad (1.30)$$

La stabilité des solutions de l'équation aux variations ne dépend donc que des valeurs propres de la matrice  $U$ . Nous avons vu précédemment que la quantité  $x_1 \tilde{x}_1 + x_2 \tilde{x}_2$  est une intégrale de l'équation variationnelle (1.26). Ceci implique que ses solutions sont bornées.  $U$  est alors diagonalisable, et les parties réelles de ses valeurs propres sont nulles.  $\mathcal{C}_{x=0}$  est donc linéairement stable dans la direction  $(x_j, \tilde{x}_j)$ .

Nous ne pouvons pas effectuer la même démonstration dans la direction des  $(y_j, \tilde{y}_j)$  à cause d'une forte dégénérescence du système linéaire. Nous verrons cependant dans le Chapitre 3 que dans le cas planétaire, si l'inclinaison mutuelle initiale est faible, elle ne subit que de très faibles oscillations au cours du temps.

## 1.2 Dynamique sur la variété circulaire plane

### 1.2.1 Modèle à un degré de liberté

Sur cette variété, la dynamique est donnée par la restriction du hamiltonien (1.20) sur  $\mathcal{C}_0$  (Robutel *et al.*, 2015) :

$$\bar{H}_0 = \frac{\beta_1 \mu_1}{a_1} + \frac{\beta_2 \mu_2}{a_2} + \varepsilon \mathcal{G} m'_1 m'_2 \left( \frac{\cos \zeta}{\sqrt{a_1 a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \zeta}} \right), \quad (1.31)$$

où :

$$a_j = \mu_j^{-1} \beta_j^{-2} (\Lambda_j^0 + (-1)^{j+1} Z)^2. \quad (1.32)$$

Une approximation intégrable de  $\bar{H}_0$  peut être obtenue en effectuant un développement limité de l'expression (1.31) en  $Z$  et  $\varepsilon$  à l'ordre  $(Z^2, \varepsilon Z^0)$  :

$$\tilde{H}_0 = -\frac{3}{2} (\eta)^{4/3} (\beta_1 \mu_1^{-2/3} + \beta_2 \mu_2^{-2/3}) Z^2 + \varepsilon \mu_0^{2/3} (\eta)^{2/3} \frac{m'_1 m'_2}{m_0} F(\zeta), \quad (1.33)$$

où

$$F(\zeta) = \cos \zeta - \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \zeta}}. \quad (1.34)$$

Bien que le hamiltonien  $\tilde{H}_0$  soit intégrable, ses trajectoires ne peuvent être données explicitement. Cependant, celles-ci vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{Z} = -\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \zeta} = \varepsilon \mu_0^{2/3} (\eta)^{2/3} \frac{m'_1 m'_2}{m_0} \left( 1 - (2 - 2 \cos \zeta)^{-3/2} \right) \sin \zeta \\ \dot{\zeta} = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial Z} = -3 \frac{m'_1 + m'_2}{m'_1 m'_2} (\eta)^{4/3} \mu_0^{-2/3} Z \end{cases} \quad (1.35)$$

et peuvent donc être aisément intégrées numériquement. Ce système peut également être écrit sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 2, généralisant l'équation d'Érdi (1977) dans le cas planétaire :

$$\ddot{\zeta} = -3\varepsilon \eta^2 \frac{m'_1 + m'_2}{m_0} \left( 1 - (2 - 2 \cos \zeta)^{-3/2} \right) \sin \zeta. \quad (1.36)$$

En utilisant la transformation linéaire (1.9), ainsi que l'application  $\mathcal{C}$ , on peut écrire l'évolution temporelle approchée des variables initiales  $\lambda_j, \Lambda_j$  sur  $\mathcal{C}_0$ , à partir des solutions du système (1.35) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \eta t + \delta \zeta(t) + \lambda_0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \lambda_2 &= \eta t - (1 - \delta) \zeta(t) + \lambda_0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \Lambda_1 &= \Lambda_1^0 + Z(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \Lambda_2 &= \Lambda_2^0 - Z(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (1.37)$$

avec  $\delta = \frac{m'_2}{m'_1 + m'_2}$ , et

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= (1 - \delta)\lambda_1(0) + \delta\lambda_2(0), \\ \zeta(0) &= \lambda_1(0) - \lambda_2(0), \\ Z(0) &= \delta(\Lambda_1(0) - \Lambda_1^0) - (1 - \delta)(\Lambda_2(0) - \Lambda_2^0).\end{aligned}\tag{1.38}$$

### 1.2.2 Portrait de Phase sur la variété circulaire plane

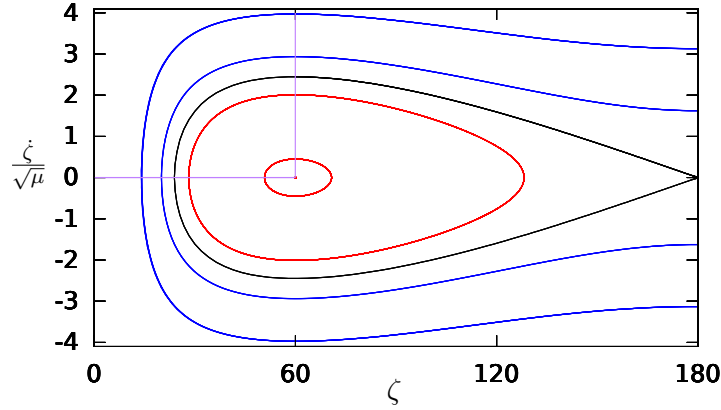


FIGURE 1.1 – Portrait de phase de l'équation (1.36) tracé pour des masses égales. Le point  $L_4$  se situe en  $(60, 0)$ . Autour de ce point, en rouge, librent les configurations troyennes. la courbe noire représente la séparatrice issue de l'équilibre instable  $L_3$   $(180, 0)$ . Au delà de cette séparatrice, les configurations fers à cheval (en bleu) librent autour des points  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Ce portrait de phase est symétrique par rapport à  $\zeta = 180^\circ$ . Les droites violettes seront utilisées comme conditions initiales pour l'étude de stabilité menée en section suivante. Voir le texte pour plus de détails.

Le portrait de phase du hamiltonien à un degré de liberté  $\overline{H}_0$  est représenté en Fig. 1.1 dans le plan  $(\zeta, \dot{\zeta}/\sqrt{\mu})$ , avec :

$$\mu = \varepsilon \frac{m'_1 + m'_2}{m_0 + \varepsilon(m'_1 + m'_2)}.\tag{1.39}$$

Cette figure a été obtenue pour des valeurs particulières des masses et des paramètres données dans la description de la figure, mais la topologie de l'espace des phases ne dépend pas de ces valeurs. Le portrait de phase de  $\overline{H}_0$  est invariant par symétrie par rapport à  $\zeta = 180^\circ$  :  $(\zeta, \dot{\zeta}/\sqrt{\mu}) \rightarrow (360^\circ - \zeta, \dot{\zeta}/\sqrt{\mu})$ . On concentrera donc notre description de l'espace des phases sur  $\zeta \in [0, 180^\circ]$ . De plus, quand les coorbitaux sont de masse égale, le hamiltonien  $\overline{H}_0$  et donc son portrait de phase, sont invariants par la symétrie  $(\zeta, \dot{\zeta}/\sqrt{\mu}) \rightarrow (\zeta, -\dot{\zeta}/\sqrt{\mu})$ . On rappelle que  $\dot{\zeta}$  est proportionnel à la variable  $Z$  (eq. 1.35).

Comme nous pouvons le voir Figure 1.1, toutes les trajectoires solutions de l'équation (1.36) peuvent être entièrement déterminées par des conditions initiales de la forme  $(t_0, \zeta_0)$  tel que  $\zeta(t_0) = \zeta_0$  et  $\dot{\zeta}(t_0) = 0$ , où  $\zeta_0$  est la valeur minimale de  $\zeta$  sur sa trajectoire, et  $t_0$  est le premier instant positif pour lequel  $\zeta_0$  est atteint. Les valeurs possibles de  $\zeta_0$ , représentées par la ligne horizontale violette, sont incluses dans l'intervalle  $]0^\circ, 60^\circ]$ ;  $\zeta_0 = 60^\circ$  correspond

à l'équilibre  $L_4$ , situé en :

$$\zeta = 60^\circ \quad \text{et} \quad Z = \frac{\varepsilon}{6} \frac{m'_1 - m'_2}{m'_1 + m'_2} \frac{m'_1 m'_2}{m_0} \mu_0^{2/3} \eta^{-1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.40)$$

Les orbites troyennes sont situées en  $\zeta_0 \in ]\zeta_s, 60^\circ[$ , avec  $\zeta_s \approx 23.9^\circ$ , pour lesquelles quelques exemples ont été tracés en rouge. Cette région, qui a une épaisseur maximale de l'ordre de  $\varepsilon^{1/2}$  (Robutel et Pousse, 2013) est délimitée par la séparatrice émergeant du point fixe hyperbolique  $L_3$  situé en :

$$\zeta = 180^\circ \quad \text{et} \quad Z = \frac{\varepsilon}{2} \frac{m'_1 - m'_2}{m'_1 + m'_2} \frac{m'_1 m'_2}{m_0} \mu_0^{2/3} \eta^{-1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.41)$$

A l'extérieur de cette courbe se trouvent les configurations en fer-à-cheval, représentées ici en bleu. La largeur de cette région est de l'ordre de  $\varepsilon^{1/3}$  dans la direction  $Z$ , et  $\zeta$  libre avec une grande amplitude tel que :

$$\zeta \in [\zeta_m, 2\pi - \zeta_m] \quad \text{avec} \quad 0 < \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) < \zeta_m < 2 \arcsin((\sqrt{2} - 1)/2) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.42)$$

Les formes des orbites du mouvement relatif sont entièrement déterminées par la quantité  $\zeta_0$ . En revanche,  $t_0$  est nécessaire pour connaître la position des corps sur leur orbite à un instant donné, et  $\eta\sqrt{\mu}$  est nécessaire pour connaître l'échelle dans le temps et dans la direction  $Z$  du mouvement coorbital.

### 1.2.3 Évolution des élément orbitaux dans le cas quasi-circulaire

Le hamiltonien moyen (1.20) étant quadratique en les variables  $x_j$ , donc en excentricité, le système d'équation (1.35) reste valable à l'ordre 1 en excentricité. En revenant aux expressions des éléments orbitaux à l'ordre 1 en excentricité, nous pouvons écrire :

$$a_j = \bar{a} \left( 1 + (-1)^j \frac{2}{3} \frac{m'_k}{m'_1 + m'_2} \frac{\dot{\zeta}}{n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon, e\sqrt{\varepsilon}, e^2), \quad k \neq j. \quad (1.43)$$

où  $\bar{a}$  est le demi grand axe associé au moyen mouvement  $\eta$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} r_j &= \bar{a} \left( 1 - e_j \cos(\lambda_j - \varpi_j) + (-1)^j \frac{2}{3} \frac{m'_k}{m'_1 + m'_2} \frac{\dot{\zeta}}{n} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon, e\sqrt{\varepsilon}, e^2), \\ f_j &= \lambda_j + 2e_j \sin(\lambda_j - \varpi_j) + \mathcal{O}(\varepsilon, e\sqrt{\varepsilon}, e^2). \end{aligned} \quad (1.44)$$

où  $\lambda_j$  est donné par l'expression (1.37).

En développant l'équation (1.36) au voisinage de  $\zeta = \pi/3$ , on obtient (Charlier, 1906) :

$$\nu_0 = \eta \sqrt{\frac{27}{4} \mu}. \quad (1.45)$$

Plus généralement, à l'exception de la séparatrice, les solutions de l'équation (1.36) sont périodiques. La fréquence associée  $\nu$  dépend de l'orbite. Les variations de la fréquence normalisée  $\tilde{\nu} = \nu/(\eta\sqrt{\mu})$  le long de la ligne violette horizontale de la figure 1.1 sont représentées en figure 1.2. Cette courbe est obtenue en intégrant numériquement le modèle à un degré de liberté (eq. 1.36). En configuration troyenne, cette fréquence sans dimension reste presque constante dans un voisinage de l'équilibre de Lagrange  $L_4$  où  $\nu \approx \nu_0$

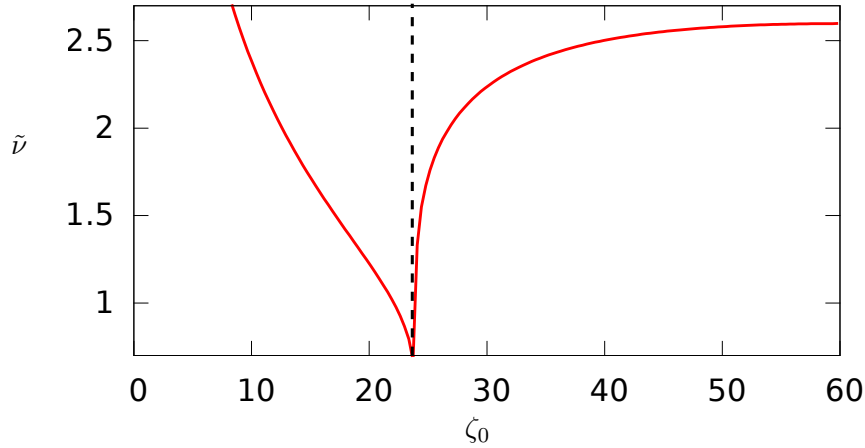


FIGURE 1.2 – Variation de la fréquence de libration normalisée  $\tilde{\nu} = \nu/(\eta\sqrt{\mu})$  le long de la ligne violette horizontale de la figure 1.1. Dans la région troyenne, la fréquence normalisée décroît de  $\sqrt{27/4}$  en  $L_4$  jusqu'à 0 à la séparatrice. Cette fréquence réaugmente dans le domaine des fers à cheval et tend vers l'infini quand  $\zeta_0$  tend vers  $0^\circ$ , ce qui n'a pas de signification physique car les approximations nécessaires à l'obtention du modèle à un degré de liberté ne sont plus valables si proches de la collision.

(Eq. 1.45) et tend vers 0 quand on atteint la séparatrice en  $\zeta_0 = \zeta_s \approx 23.9^\circ$ . En configuration fer-à-cheval,  $\nu$  varie grandement. Sur la figure 1.2, on peut voir que tant que on reste suffisamment loin de la collision,  $\tilde{\nu}$  est toujours proche de l'unité ou moins. Cela confirme que l'angle résonant  $\zeta$ , est lent par rapport à l'échelle de temps orbital, i.e.  $\nu \ll n$  tant que  $\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ .

### 1.3 Stabilité des orbites coorbitales quasi-circulaires

Nous nous intéressons ici à l'influence qu'ont les masses des coorbitaux sur la stabilité des configurations coplanaires quasi-circulaires dans le cas planétaire. Pour cette étude, nous allons intégrer numériquement le problème à trois corps en balayant l'ensemble des configurations coorbitales possibles ( $\zeta_0 \in ]0, 60^\circ[$ ) pour  $\mu = \frac{m_1+m_2}{m_0+m_1+m_2} \in [10^{-6}, 10^{-1}]$  dans trois cas : le cas  $m_2 = m_1$  (figure 1.3 - (a)), le cas  $m_2 = 10m_1$  (c) et le cas  $m_2 = 100m_1$  (d). Dans chacune de ces figures, on considère deux planètes orbitant une étoile de masse  $m_0 = 1 M_\odot$ , avec les éléments orbitaux initiaux suivants fixés :  $a_1 = a_2 = 1$  ua,  $e_1 = e_2 = 0.05$ , and  $\lambda_1 = \varpi_1 = 0^\circ$ . Nous faisons varier les éléments initiaux suivants  $\lambda_2 = \varpi_2 = -\zeta_0$  et leur masse. Pour chaque jeu de conditions initiales, les systèmes sont intégrés pendant 5 millions d'années au moyen de l'intégrateur symplectique SABA4 (Laskar et Robutel, 2001) avec un pas d'intégration de 0.0101 an. Pour la figure (b), on prend les conditions initiales sur la ligne violette verticale de la figure 1.1, en gardant  $\zeta_2 = \varpi_2 = -60^\circ$  pour chaque intégration avec  $m_1 = m_2$ .

Les systèmes fortement chaotiques qui quittent la résonance coorbitale avant la fin de l'intégration ou dont la variation relative d'énergie dépasse  $10^{-6}$  sont retirés de l'intégration. Dans ce cas, la couleur blanche est assignée à leurs conditions initiales  $(\zeta_0, \mu)$  sur les figures (1.3). Ces instabilités à court terme sont principalement dues au recouvrement de résonances secondaires (Robutel et Gabern, 2006; Páez et Efthymiopoulos, 2015). Après l'élimination de ces conditions initiales, la diffusion à long terme le long de ces résonances secondaires peut déstabiliser les configurations coorbitales sur des temps beaucoup plus

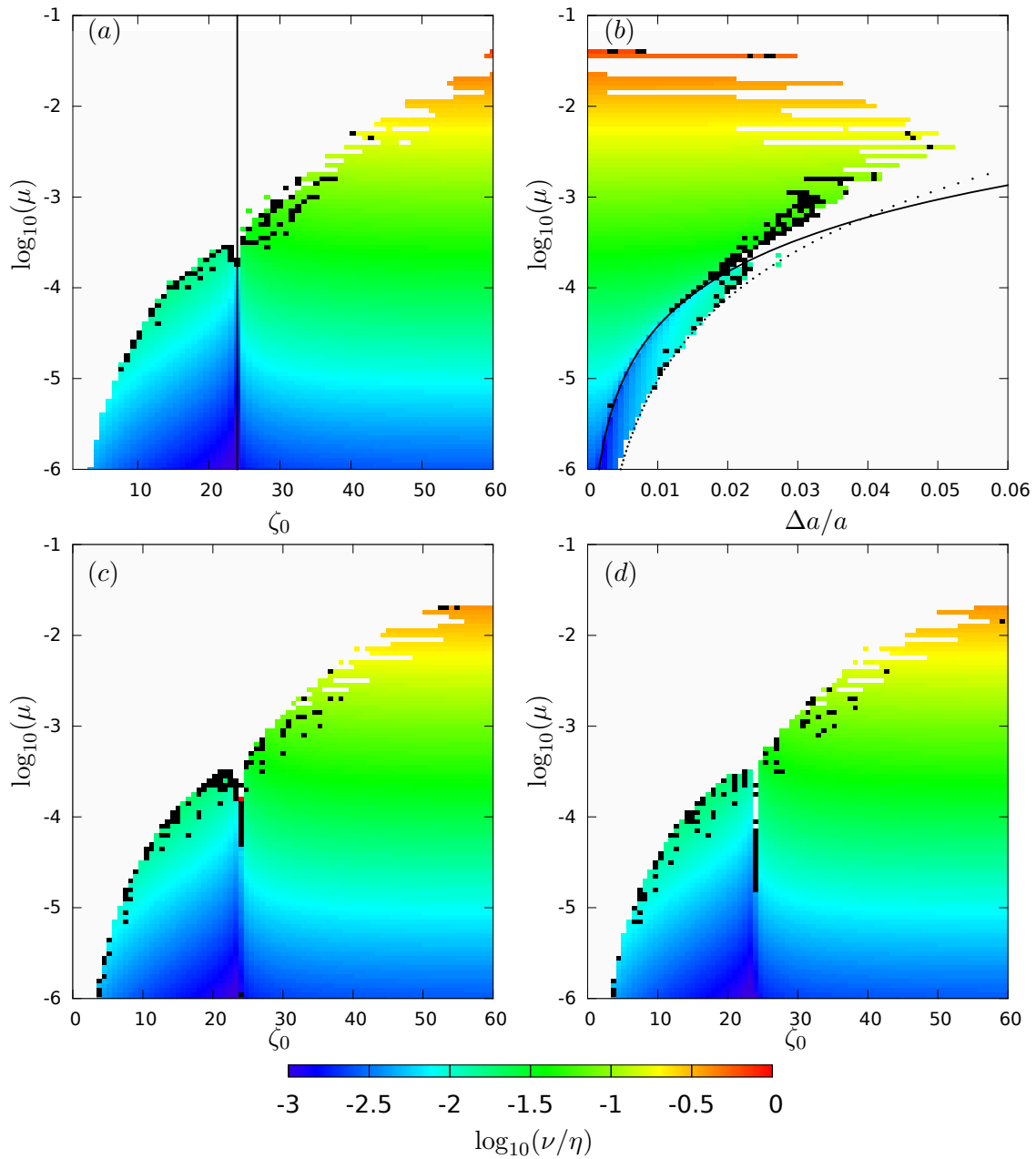


FIGURE 1.3 – Stabilité des coorbitaux quasi-circulaires coplanaires en fonction de  $\log_{10}(\mu)$  et  $\zeta_0$  pour les graphes (a), (c) et (d), et  $\Delta a/a$  pour le graphe (b). Pour les graphes (a) et (b)  $m_2 = m_1$ , pour le graphe (c)  $m_2 = 10m_1$  et pour le graphe (d)  $m_2 = 100m_1$ . La ligne noire continue sur les graphes (a) et (b) indique la position de la séparatrice entre le domaine des troyens et des fer-à-cheval. Le code couleur indique la valeur de la fréquence de libration. Voir le texte pour plus de détails.

longs. Une façon d'identifier cette diffusion est de mesurer la variation temporelle de la fréquence de libration (Laskar, 1990, 1999). La couleur noire est assignée aux conditions initiales pour lesquelles la fréquence  $\nu$  a une variation relative de plus de  $10^{-6}$  entre la première moitié et la seconde moitié des 5 millions d'années d'intégration. Les trajectoires

ainsi identifiées sont principalement situées le long de la séparatrice et proches des configurations éjectées. Dans les régions restantes, les faibles variations de  $\nu$  garantissent, dans la plupart des cas, la stabilité sur des milliard d'années (Laskar, 1990; Robutel et Gabern, 2006). Pour les systèmes stables sur le long terme, la couleur assignée représente la valeur de la fréquence de libration (voir le code couleur en bas de la figure 1.3).

Nous observons que pour des masses proches de  $\mu \approx 0.037$  (Gascheau, 1843), l'amplitude de libration des orbites stables est très faible et le domaine de stabilité est fortement perturbé par des résonances secondaires. Le chaos induit par ces résonances ( $\nu = \eta/2$ ,  $\nu = \eta/3$ , et  $\nu = \eta/4$ ) réduit la région de stabilité significativement, la confinant au voisinage des configurations équilatérales  $L_4$  et  $L_5$  (voir Roberts, 2002; Nauenberg, 2002). Quand  $\mu$  diminue, la région troyenne stable s'élargit dans la direction des  $\zeta_0$ , augmentant l'amplitude de libration maximale que peuvent atteindre les configurations troyennes. L'influence déstabilisatrice des résonances secondaires ne reste dominante qu'au bord des régions stables (voir Páez et Efthymiopoulos, 2015; Robutel et Gabern, 2006; Érdi *et al.*, 2007, pour le problème restreint).

Quand  $\mu \approx 3 \times 10^{-4} \approx 2M_{\text{Saturne}}/M_{\odot}$ , l'ensemble du domaine troyen devient stable à l'exception d'une petite région au voisinage de la séparatrice ( $\zeta_0 = \zeta_s \approx 23.9^\circ$ ). De l'autre côté de la séparatrice, pour  $\zeta_0 < \zeta_s$ , des fers à cheval stables commencent à apparaître (voir Laughlin et Chambers, 2002). Pour des masses plus faibles, la taille du domaine des fers à cheval augmente quand  $\mu$  diminue jusqu'à atteindre la limite extérieure de la sphère de Hill à une distance de la collision de l'ordre de  $\mu^{1/3}$  (voir Robutel et Pousse, 2013).

La comparaison des figures (a), (c) et (d) montre que la répartition de masse entre les deux coorbitaux n'a que peu d'influence sur la stabilité. On constate cependant une légère diminution des domaines de stabilité, notamment dans le voisinage immédiat de la séparatrice.

La figure 1.3 (b) représente les mêmes configurations que la figure (a) avec des conditions initiales le long de la ligne violette verticale (fig 1.1). Sur cette figure, le domaine troyen se situe au-dessus de la ligne noire continue d'équation  $\Delta a = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}$  (Robutel et Pousse, 2013). Dans ce cas, contrairement à la direction  $\zeta_0$  où la largeur de la région troyenne stable est grossièrement monotone en  $\mu$ , la largeur de la région stable atteint ici un maximum en  $\Delta a/a \approx 0.052$  pour  $\mu = 3.5 \times 10^{-3}$  puis tend vers 0 quand  $\mu$  décroît. La courbe en pointillé est proportionnelle à  $\mu^{1/3}$  (d'équation  $\Delta a = 0.47\mu^{1/3}$ ) et a été ajustée à la frontière extérieure du domaine de stabilité des fers à cheval (voir Robutel et Pousse, 2013). La largeur de ce domaine tend aussi vers 0 quand  $\mu$  décroît, mais moins vite que celle du domaine des troyens. Par conséquent, le domaine des fers à cheval stables devient plus important que celui des configuration troyennes quand la masse des coorbitaux tend vers 0 (Dermott et Murray, 1981).



## Chapitre 2

# Dynamique des co-orbitaux excentriques coplanaires

Nous avons vu dans le Chapitre 1 que la dynamique sur la variété circulaire coplanaire se réduit à celle d'un système à un degré de liberté dont le portrait de phase est bien connu (voir section 1.2.2) : le problème comporte 2 points d'équilibre stables, les points  $L_4$  et  $L_5$  qui sont des points fixes du problème moyen. Au voisinage de ces positions d'équilibre se trouve le domaine des configurations troyennes qui s'étend jusqu'à la séparatrice émergeant du point d'équilibre instable  $L_3$ . Au delà de la séparatrice se trouve le domaine des fers-à-cheval.

Les équilibres  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  existent également dans le cas excentrique pour  $e_1 = e_2$ , avec  $\zeta = \Delta\varpi = 180^\circ$  pour  $L_3$  ( $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$ ),  $\zeta = \Delta\varpi = 60^\circ$  pour  $L_4$  et  $\zeta = \Delta\varpi = -60^\circ$  pour  $L_5$ . Dans le problème moyen, en plus de ces familles de points fixes, des familles d'orbites périodiques  $AL_3$ ,  $AL_4$  et  $AL_5$  émergent des équilibres  $L_k$  circulaires. Pour de faibles excentricités, la dynamique du degré de liberté associé à  $(Z, \zeta)$  est inchangée (l'équation 1.36 reste valable à l'ordre 1 en excentricité) : les orbites troyennes librent autour de  $L_4$ ,  $L_5$ ,  $AL_4$  ou  $AL_5$  et les orbites en fer-à-cheval gardent une grande amplitude de libration de l'angle  $\zeta$ .

On s'intéresse dans ce chapitre à des excentricités modérées à grandes (jusqu'à 0.7). Nous avons vu dans le Chapitre 1 que la variété des coorbitaux coplanaires ( $\mathcal{C}_{y=0}$ ) est invariante, nous pouvons donc considérer le cas excentrique plan. Comme nous allons le voir dans ce chapitre, les familles de points fixes du problème moyen ainsi que les familles d'orbites quasi-périodiques de dimension non maximale entraînent des changements de topologie importants quand l'énergie cinétique totale du système augmente (les excentricités augmentent) et sont au centre des différentes régions stables et instables de l'espace des phases. Ce chapitre porte donc à la fois sur l'évolution de ces familles, et sur la dynamique des différentes configurations co-orbitales qui librent autour de celles-ci : les configurations troyennes, fers-à-cheval et d'autres qui apparaîtront à plus haute excentricité.

### 2.1 Approche du problème

L'espace des phases complet pour le problème excentrique plan est de dimension 8. La moyenne sur l'angle rapide  $\zeta_2 = \lambda_2$  peut réduire le nombre de dimensions à 6 (voir Chapitre 1). Une réduction à 4 est possible en utilisant la conservation du moment cinétique total. Pour finir, une seconde moyenne sur l'angle résonant  $\zeta$  est envisageable pour

obtenir un espace des phases de dimension 2. Nous voulons travailler autant que possible sur un espace des phases de dimension minimale pour des raisons évidentes de facilité d'interprétation des résultats.

Pour des excentricités modérées, la moyenne sur l'angle rapide peut être effectuée analytiquement comme nous l'avons fait au Chapitre 1. Si l'excentricité n'est pas petite, les moyennes doivent être effectuées numériquement, mais l'intégration d'une trajectoire avec moyenne numérique est longue, et la 2ème moyenne (sur l'angle semi-rapide  $\zeta$ ) nécessite en plus le calcul de coordonnées action angle pour chaque orbite (Beaugé et Roig, 2001). Cependant, si on considère des coorbitaux de masse suffisamment faible, la dynamique du problème moyenné sera très proche de la dynamique des variables équivalentes dans le problème complet. En effet, si  $\sqrt{\varepsilon} \ll 1$  (et donc a fortiori  $\varepsilon \ll 1$ ), l'influence des courtes périodes sur les variables du problème moyen est négligeable (perturbations de taille  $\varepsilon$ ), et l'échelle de temps semi-rapide affecte peu le problème séculaire (perturbations de taille  $\sqrt{\varepsilon}$ , voir Morbidelli, 2002).

Dans cette étude, nous considérons le cas planétaire. Si la masse des planètes est de l'ordre de celle de Jupiter ( $\varepsilon > 10^{-3}$ ), nous ne pourrions que constater le résultat d'intégrations numériques du problème complet. Pour de telles masses, les domaines de stabilités sont relativement restreints dans le cas circulaire (voir figure 1.3) et dans le cas excentrique (voir Giuppone *et al.*, 2010). De plus, ils sont perturbés par des résonances entre le moyen mouvement et la fréquence de libration :  $\eta/\nu \approx 10$  dans le cas de Jupiter, (voir Robutel et Gabern, 2006). En revanche, si la masse des planètes est de l'ordre de celle de saturne ou moins ( $\varepsilon \leq 10^{-4}$ ), ces résonances sont moins importantes. De plus, nous pourrions considérer que  $\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ . Dans ce cas, l'évolution des variables semi-rapides (resp. séculaire) lors de l'intégration du problème complet sera proche de leur évolution dans le problème moyen (resp. doublement moyenné). Nous pouvons donc comparer le résultats de calculs analytiques et semi-analytiques obtenus dans le problème moyen, aux résultats d'intégrations numériques du problème complet.

Dans un premier temps, nous étudierons le voisinage des équilibres de Lagrange circulaires analytiquement à l'aide d'une approximation quadratique du hamiltonien moyen (1.20), puis nous étendrons nos résultats au reste de l'espace des phases à l'aide de méthodes numériques. Enfin, nous vérifierons analytiquement que la position des objets mis en évidence de manière numérique et semi-analytique correspond à celle attendue.

## 2.2 Dynamique au voisinage des points fixes circulaires $L_k$

On s'intéresse ici à la dynamique au voisinage des équilibres de Lagrange circulaires  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ , notamment au calcul de la tangente aux familles  $L_k$  et  $AL_k$  excentrique. Pour ce faire, on utilisera la partie quadratique du hamiltonien moyen (1.20) développé au voisinage de l'équilibre de Lagrange  $L_k$  circulaire en fonction des variables  $x_j$ ,  $\tilde{x}_j$ ,  $Z$  et  $z = \zeta - \zeta_{L_k}$ . La dynamique au voisinage de  $L_4$  et  $L_5$  étant équivalente pour des raisons de symétrie, les calculs ne seront développés que pour les points  $L_4$  et  $L_3$ . Le hamiltonien moyen au voisinage de l'équilibre  $L_k$  circulaire peut se décomposer de la manière suivante :

$$\bar{H}_{L_k}(\zeta, Z, x_j, \tilde{x}_j) = \sum_{(p, \tilde{p}) \in \mathbb{N}^6} C_{p, \tilde{p}} z^{p_0} Z^{\tilde{p}_0} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \tilde{x}_1^{\tilde{p}_1} \tilde{x}_2^{\tilde{p}_2}, \quad (2.1)$$

Où la partie quadratique de  $\overline{H}_{L_4}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{H}_{L_4}^{(2)} = & h_{4,0} + h_{4,Z}Z + h_{4,Z^2}Z^2 + h_{4,z^2}z^2 \\ & + h_{4,x_1\tilde{x}_1}x_1\tilde{x}_1 + h_{4,x_2\tilde{x}_2}x_2\tilde{x}_2 + h_{4,x_2\tilde{x}_1}x_2\tilde{x}_1 + h_{4,x_1\tilde{x}_2}x_1\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{aligned} h_{4,Z} &= +\varepsilon\frac{\eta}{2}(m'_2 - m'_1) \\ h_{4,Z^2} &= +\frac{3}{2}\frac{\eta^{4/3}}{\mathcal{G}^{2/3}m_0^{2/3}}\left[-\left(\frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2}\right) + \varepsilon\frac{1}{m_0}\left(\frac{m'_1}{m'_2} + \frac{m'_2}{m'_1} - \frac{7}{3}\right)\right] \\ h_{4,z^2} &= -\varepsilon\frac{9}{8}\mathcal{G}^{2/3}\frac{\eta^{2/3}}{m_0^{1/3}}m'_1m'_2 \\ h_{4,x_1\tilde{x}_1} &= +i\varepsilon\eta\frac{27}{8}\frac{m'_2}{m_0} \\ h_{4,x_2\tilde{x}_2} &= +i\varepsilon\eta\frac{27}{8}\frac{m'_1}{m_0} \\ h_{4,x_2\tilde{x}_1} &= -i\varepsilon\eta\frac{27}{8}\frac{\sqrt{m'_1m'_2}}{m_0}e^{i\pi/3} \\ h_{4,x_1\tilde{x}_2} &= +\bar{h}_{x_2\tilde{x}_1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pour  $\overline{H}_{L_3}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{H}_{L_3}^{(2)} = & h_{3,0} + h_{3,Z}Z + h_{3,Z^2}Z^2 + h_{3,z^2}z^2 \\ & + h_{3,x_1\tilde{x}_1}x_1\tilde{x}_1 + h_{3,x_2\tilde{x}_2}x_2\tilde{x}_2 + h_{3,x_2\tilde{x}_1}x_2\tilde{x}_1 + h_{3,x_1\tilde{x}_2}x_1\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} h_{3,Z} &= +\varepsilon\frac{3}{2}\eta(m'_2 - m'_1) \\ h_{3,Z^2} &= -\frac{3}{2}\frac{\eta^{4/3}}{\mathcal{G}^{2/3}m_0^{2/3}}\left[\left(\frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2}\right) + \varepsilon\frac{1}{m_0}\left(\frac{m'_1}{m'_2} + \frac{m'_2}{m'_1} - \frac{4}{3}\right)\right] \\ h_{3,z^2} &= \varepsilon\frac{7}{16}\mathcal{G}^{2/3}\frac{\eta^{2/3}}{m_0^{1/3}}m'_1m'_2 \\ h_{3,x_1\tilde{x}_1} &= +i\varepsilon\eta\frac{7}{8}\frac{m'_2}{m_0} \\ h_{3,x_2\tilde{x}_2} &= +i\varepsilon\eta\frac{7}{8}\frac{m'_1}{m_0} \\ h_{3,x_2\tilde{x}_1} &= +i\varepsilon\eta\frac{7}{8}\frac{\sqrt{m'_1m'_2}}{m_0} \\ h_{3,x_1\tilde{x}_2} &= +h_{3,x_2\tilde{x}_1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans un premier temps, on se débarrasse des termes linéaires avec le changement de variable  $\chi^{(1)}$  (A.1). Ensuite, nous pouvons diagonaliser indépendamment la partie dépendant des variables  $(z, Z)$  et la partie dépendant des variables  $(x_j, \tilde{x}_j)$  par les transformations suivantes :

Pour  $L_4$  :

$$\chi_{L_4}(z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2) = (z, Z, x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2) \quad (2.6)$$

Pour  $L_3$  :

$$\chi_{L_3}(z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2) = (z, Z, x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2) \quad (2.7)$$

Les matrices de passage de cette transformation peuvent être trouvées en annexe A. Nous rappellerons juste ici que la diagonalisation des variables  $(x_j, \tilde{x}_j)$  s'effectue par la matrice des vecteurs propres de  $M$  (eq. 1.27) calculée en l'équilibre considéré ( $L_4$  ou  $L_3$ ). Nous appelons également  $\overline{H}_{L_4}$  le hamiltonien du problème moyen dont la partie quadratique est diagonale et égale à :

$$\overline{H}_{L_4}^{(2)} = \omega_0 z_0 \tilde{z}_0 + \omega_1 z_1 \tilde{z}_1 + \omega_2 z_2 \tilde{z}_2, \quad (2.8)$$

où les variables  $\tilde{z}_j$  vérifient la relation  $\tilde{z}_j = -i\tilde{z}_j$ , et :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -i\sqrt{\varepsilon}\eta\sqrt{\frac{27}{4}\frac{m'_1 + m'_2}{m_0}}, \\ \omega_1 &= -i\varepsilon\eta\frac{27}{8}\frac{m'_1 + m'_2}{m_0}, \\ \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour le voisinage de  $L_3$  :

$$\overline{H}_{L_3}^{(2)} = \omega_0 z_0 \tilde{z}_0 + \omega_1 z_1 \tilde{z}_1 + \omega_2 z_2 \tilde{z}_2, \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\sqrt{\varepsilon}\eta\sqrt{\frac{21}{8}\frac{m'_1 + m'_2}{m_0}}, \\ \omega_1 &= +i\varepsilon\eta\frac{7}{8}\frac{(m'_1 + m'_2)}{m_0}, \\ \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

notons que les variables  $(z_j, \tilde{z}_j)$  sont canoniquement conjuguées mais ne vérifient pas de relations particulières.

**Remarque 1.** *Les variables  $z_j$  et  $\tilde{z}_j$  introduites ici dépendent de l'équilibre considéré. Les variables  $(z_j, \tilde{z}_j)$  qui diagonalisent le hamiltonien dans le voisinage du point  $L_4$  n'ont aucun lien avec les variables  $(z_j, \tilde{z}_j)$  qui le diagonalisent au voisinage de  $L_3$ . Pour ne pas introduire de notation supplémentaire, on parlera du voisinage de  $L_4$  si rien n'est précisé.*

Nous pouvons d'ores et déjà retrouver que les équilibres de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  sont des points d'équilibres stables du problème moyen, avec deux directions elliptiques et une direction dégénérée ; alors que le point  $L_3$  est hyperbolique dans la direction  $z_0$ . Nous allons exprimer ces différentes directions au voisinage des équilibres de Lagrange en fonction des éléments elliptiques. Cela est effectué en inversant les matrices de passages (A.5) et (A.6). Pour les familles émergent de  $L_4$ , nous avons :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\alpha z - iZ/\alpha}{\sqrt{2}} & \text{où } \alpha &= \left( \varepsilon \frac{3}{4} \mathcal{G}^{4/3} m_0^{1/3} \eta^{-2/3} \frac{(m'_1 m'_2)^2}{m'_1 + m'_2} \right)^{1/4}, \\ z_1 &= \frac{\sqrt{m'_2} e^{-i\pi/3} x_1 - \sqrt{m'_1} x_2}{\sqrt{m'_1 + m'_2}}, \\ z_2 &= \frac{\sqrt{m'_1} e^{-i\pi/3} x_1 + \sqrt{m'_2} x_2}{\sqrt{m'_1 + m'_2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Au voisinage de  $L_4$ , la famille des anti-Lagrange  $AL_4$  est tangente à  $z_1 = c e^{h_{z_1} z_1}$  où  $c$  est un réel positif quelconque. Cette tangente est donnée par le système suivant :

$$\begin{aligned} z_0 &= z_2 = 0, \\ z_1 &= c e^{\omega_1 t}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} z &= 0, & Z &= 0, \\ x_1 &= \frac{\sqrt{m'_1 + m'_2}}{\sqrt{2}(1 + m'_1/m'_2)} c e^{i(\pi/3 + gt)}, & x_2 &= \frac{\sqrt{m'_1}}{\sqrt{m'_2}} e^{i(2\pi/3)} x_1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ce qui signifie que au voisinage de  $L_4$ , la famille  $AL_4$  est tangente à la direction  $a_1 = a_2$ ,  $\zeta = \pi/3$ ,  $e_2 = \frac{m_1}{m_2} e_1$  et  $\Delta\varpi = \zeta + \pi$  dans les coordonnées elliptiques. De plus, les deux ellipses précèdent à la fréquence  $g_{1,L_4}$ . De la même manière on retrouve que, au moins au voisinage de  $L_4$ , la famille des  $L_4$  elliptiques est donnée par  $a_1 = a_2$ ,  $\zeta = \Delta\varpi = \pi/3$ ,  $e_2 = e_1$ , et que la fréquence de précession,  $g_{2,L_4}$ , est nulle. Cette expression est en fait valable pour toute valeur du paramètre  $e_1$ .

De manière analogue, nous avons pour  $L_3$  :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{i\alpha z + Z/\alpha}{\sqrt{2}} & \text{où } \alpha &= \sqrt{i} \left( \varepsilon \frac{1}{4} \mathcal{G}^{4/3} m_0^{1/3} \eta^{-2/3} \frac{(m'_1 m'_2)^2}{m'_1 + m'_2} \right)^{1/4}, \\ \tilde{z}_0 &= \frac{-\alpha z - iZ/\alpha}{\sqrt{2}}, \\ z_1 &= \frac{\sqrt{m'_2} x_1 + \sqrt{m'_1} x_2}{\sqrt{m'_1 + m'_2}}, \\ z_2 &= \frac{\sqrt{m'_1} x_1 - \sqrt{m'_2} x_2}{\sqrt{m'_1 + m'_2}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

On rappelle que nous n'obtenons pas la relation  $\tilde{z}_0 = -i\bar{z}_0$  par la matrice de passage (A.7) car  $\alpha$  n'est pas un réel. De l'expression (2.15) nous pouvons déduire que au voisinage de  $L_3$ , la famille  $AL_3$  est tangente à la direction  $a_1 = a_2$ ,  $\zeta = \pi$ ,  $e_2 = \frac{m_1}{m_2} e_1$  et  $\Delta\varpi = 0$ . Les deux ellipses précèdent à la fréquence  $g_{L_3}$ . De la même manière, on peut montrer que, au moins au voisinage de  $L_3$ , la famille  $L_3$  des Eulers elliptiques est donnée par  $a_1 = a_2$ ,  $\zeta = \Delta\varpi = \pi$ ,  $e_2 = e_1$ , et que la fréquence de précession,  $g_{2,L_3}$ , est nulle. Cette expression est en fait valable pour toute valeur du paramètre  $e_1$ .

Dans cette section nous avons retrouvé les résultats de Robutel et Pousse (2013). Nous connaissons maintenant la dynamique coorbitale au voisinage des équilibres de Lagrange circulaires et la tangente aux familles  $L_k$  et  $AL_k$  excentriques. Avant de poursuivre notre étude en dehors du voisinage des équilibres circulaires, nous allons introduire plus formellement les différents objets qui émergent de ces équilibres.

## 2.3 Dynamique au voisinage d'un point fixe

Considérons un hamiltonien  $H'$  décrivant un système à trois degrés de liberté au voisinage d'un point fixe  $L_k$  situé à l'origine des coordonnées.

### 2.3.1 Approximation quadratique

Soit  $\mathcal{Q}'$  la partie quadratique du hamiltonien  $H'$ . On effectue un changement de variables canonique visant à diagonaliser  $\mathcal{Q}'$ . On appellera  $H$  le hamiltonien dans ces nouvelles variables et on écrit sa partie quadratique :

$$\mathcal{Q} = \omega_0 z_0 \tilde{z}_0 + \omega_1 z_1 \tilde{z}_1 + \omega_2 z_2 \tilde{z}_2, \quad (2.16)$$

où les couples de variables  $(z_j, \tilde{z}_j)$  sont canoniquement conjugués, et les  $\omega_j$  sont les valeurs propres du système d'équation associé à  $\mathcal{Q}'$ . Nous définirons deux types de variétés :

- Les variétés  $z_j = \tilde{z}_j = 0$ . Qui sont des objets de dimension 4.
- Les variétés  $z_m = \tilde{z}_m = z_l = \tilde{z}_l = 0$  ( $j, l$  et  $m$  deux à deux distincts) qui sont l'intersection des variétés  $z_l = \tilde{z}_l = 0$  et  $z_m = \tilde{z}_m = 0$ , donc des objets de dimension 2.

Notons que toutes ces variétés sont invariantes par le flot du hamiltonien  $\mathcal{Q}$ . Le théorème du centre de Lyapunov (Meyer et Hall, 1992) stipule que si  $\omega_j$  est imaginaire pure, non nulle, et n'est pas résonante avec les deux autres valeurs propres, alors il existe une famille d'orbites périodiques à un paramètre issu de  $L_k$ , orbites dont la période tend vers  $2\pi/i\omega_j$  quand on s'approche du point d'équilibre. Cette famille, que nous appellerons  $\mathcal{F}_k^j$ , est tangente à l'origine au sous-espace propre associé à  $\omega_j$  : la variété  $z_m = \tilde{z}_m = z_l = \tilde{z}_l = 0$ .

### 2.3.2 Au-delà de l'approximation quadratique

Supposons ici que les valeurs propres  $\omega_j$  sont soit imaginaires pures, soit nulles. On peut obtenir une approximation intégrable de  $H'$  dans le voisinage de  $L_k$  à un ordre supérieur à 2 en calculant la forme normale de Birkhoff. On rappelle qu'une forme normale est une expression invariante par le flot du système hamiltonien engendré par sa partie quadratique.

Si les  $\omega_j$  sont non résonants et non nuls, la forme normale  $\mathcal{N}$ , dans les variables canoniques  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$ , ne contient que des monômes de la forme  $\prod_{j=0}^2 (Z_j \tilde{Z}_j)^{p_j}$  avec  $p_j \in \mathbb{Z}$ .

Dans le cas résonant, si par exemple  $\omega_m$  et  $\omega_p$  vérifient  $k_1 \omega_m = k_2 \omega_l$ ,  $k_j \in \mathbb{Z}$ , alors la forme normale comprendra tous les monômes de la forme  $\prod_{j=0}^2 (Z_j \tilde{Z}_j)^{p_j} (Z_m^{k_1} \tilde{Z}_l^{k_2})^{q_1} (Z_l^{k_2} \tilde{Z}_m^{k_1})^{q_2}$ ,  $q_j \in \mathbb{Z}$ .

Pour finir, si  $\omega_l = 0$ , la forme normale comprendra l'ensemble des monômes de la forme  $\prod_{j=0}^2 (Z_j \tilde{Z}_j)^{p_j} Z_l^{q_1} \tilde{Z}_l^{q_2}$ .

Effectuons maintenant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} (Z_j, \tilde{Z}_j) &= \chi \mathcal{N}(I_j, \theta_j) \\ &= (\sqrt{2I_j} e^{i\theta_j}, \sqrt{2I_j} e^{-i\theta_j}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si les  $\omega_j$  sont tous non nuls et non résonants, nous obtenons la forme normale à l'ordre  $p$  :

$$\mathcal{N}' = \sum_{d=2}^p \left( \sum_{k_0+k_1+k_2=d} C_{k_0, k_1, k_2} I_0^{k_0} I_1^{k_1} I_2^{k_2} \right). \quad (2.18)$$

Une orbite générique du voisinage de  $L_k$  vit sur un tore invariant de dimension 3 paramétré par les actions  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ . Si  $\omega_2$  est nulle, nous avons :

$$\mathcal{N}' = \sum_{d=2}^p \left( \sum_{k_0+k_1+k_2+\bar{k}_2=d} C_{k_0,k_1,k_2} I_0^{k_0} I_1^{k_1} \sqrt{I_2}^{k_2+\bar{k}_2} e^{i(k_2-\bar{k}_2)\theta_2} \right). \quad (2.19)$$

Notons qu'ici  $I_2$  n'est pas une intégrale problème du mouvement ( $\dot{I}_2 = \partial \mathcal{N}' / \partial \theta_2 \neq 0$ ).

Ainsi, les coordonnées qui réduisent le hamiltonien à sa forme normale fournissent une paramétrisation naturelle des familles d'orbites de Lyapunov. En effet, dans un voisinage du point fixe,  $\mathcal{F}_k^j$  est paramétrée par l'action  $I_j$  pour  $J_k = J_l = 0$  ( $j, k, l$  deux à deux distincts). On notera que cette paramétrisation est possible même si la fréquence associée à l'action est nulle. De manière analogue, on définit la variété  $\overline{\mathcal{F}}_k^j$  par  $I_j = 0$ . Cette variété est tangente à l'origine à la variété  $z_j = \bar{z}_j = 0$ . Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k^j &\subset \overline{\mathcal{F}}_k^l && \forall j \neq l \\ \overline{\mathcal{F}}_k^l \cap \overline{\mathcal{F}}_k^m &= \mathcal{F}_k^j && j, l, m \text{ deux à deux distincts} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les orbites des familles  $\mathcal{F}_k^j$  évoluent sur des tores de dimension 1 paramétrés par l'action  $I_j$ . Ces familles, réunions d'orbites périodiques, sont donc des objets de dimension 2, sauf si il s'agit de familles de points fixes (quand  $\omega_j = 0$ ), auquel cas ce sont des objets de dimension 1.

Les variétés  $\overline{\mathcal{F}}_k^j$  sont la réunion d'orbites quasi-périodiques vivant sur des tores de dimension 2 paramétrés par les actions  $I_l$  et  $I_m$ , ces variétés sont donc des objets de dimension 4.

### 2.3.3 Dynamique le long des familles $\mathcal{F}_k^2$

On s'intéresse maintenant à la dynamique du système dans le voisinage d'une des orbites de la famille  $\mathcal{F}_k^2$ . Considérons dans un premier temps que les  $\omega_j$  soient non nulles et non résonantes. On peut écrire  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_k^2}$ , la forme normale du hamiltonien au voisinage de ce point, en translatant  $\mathcal{N}$  le long de la famille  $\mathcal{F}_k^2$ . Cela s'effectue naturellement au moyen du changement de variable canonique suivant :

$$\begin{aligned} I_2 &= I_2^0 + I_2' \\ I_0 &= I_0 \\ I_1 &= I_1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $I_2^0$  est une constante qui paramètre la translation. Nous obtenons le nouveau hamiltonien :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}_k^2} = \sum_{d=2}^p \left( \sum_{k_0+k_1+k_2=d} C_{k_0,k_1,k_2} (I_2^0) I_0^{k_0} I_1^{k_1} I_2'^{k_2} \right), \quad (2.22)$$

qui représente la dynamique dans le voisinage du tore invariant ( $I_0 = 0, I_1 = 0, I_2 = I_2^0$ ).

Considérons maintenant que la valeur propre  $\omega_2$  soit nulle, et que les deux autres valeurs propres soient non nulles et non résonantes. Comme nous l'avons vu en section précédente,

la transformation effectuée ne permet à priori pas d'obtenir des variables actions-angles dans le voisinage de  $L_k$  ( $I_2$  n'est pas une intégrale première du mouvement). Cependant, si on suppose que la famille  $\mathcal{F}_k^2$  est une famille de points fixes du problème moyen, alors la décomposition (2.19) ne comprend pas de termes tels que  $k_0 = k_1 = 0$ ,  $k_2 \neq 0$ ,  $\bar{k}_2 \neq 0$  (Robutel et Pousse, 2013). Les tores de la forme  $(I_0 = 0, I_1 = 0, I_2 = I_2^0)$  sont donc invariants par le flot de (2.19). Nous pouvons donc translater le hamiltonien le long de la famille  $\mathcal{F}_k^2$  afin de décrire les orbites dans le voisinage de cette famille.

Pour le moment, on se contente de l'approximation quadratique au voisinage des équilibres circulaire dont les résultats sont résumés dans la section suivante (2.3.4). On étudiera la dynamique le long des familles  $\mathcal{F}_k^2$  en fin de chapitre, dans la section 2.7.

**Remarque 2.** *Dans ce cas la translation le long de cette famille peut s'effectuer de manière équivalente dans n'importe quelles variables. En effet les membres de  $\mathcal{F}_k^2$  sont des points fixes, et ne nécessitent donc pas de passer aux variables action-angles pour faire apparaître des intégrales premières du mouvement.*

### 2.3.4 Approximation quadratique des familles $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ au voisinage des équilibres de Lagrange circulaires

L'ensemble de ces familles de Lyapunov à un paramètre qui émergent des points  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  est maintenant bien connu : nous avons calculé leur expression quadratique au voisinage des  $L_k$  circulaires dans la section 2.2. Pour résumer, nous avons :

- Les familles  $\mathcal{F}_4^0$  et  $\mathcal{F}_5^0$  tangentés au sous-espace engendré par  $(z_0, \tilde{z}_0)$  en  $L_4$  et  $L_5$ , respectivement. Ces deux familles sont des représentations locales de la famille des co-orbitaux circulaires que nous avons étudiée dans le Chapitre 1 et que nous noterons  $\mathcal{F}^0$ . Elles sont tangentés à la variété  $e_1 = e_2 = 0$ .
- La famille  $\mathcal{F}_4^1$  (resp  $\mathcal{F}_5^1$ ) émergeant de  $L_4$  (resp.  $L_5$ ) dans la direction  $z_1$  est la famille des anti-Lagrange  $AL_4$  (resp.  $AL_5$ ), mise en évidence numériquement par Giuppone *et al.* (2010). Elle est tangente à la variété définie par  $\zeta = \pi/3$ ,  $e_2 = \frac{m_1}{m_2}e_1$  et  $\Delta\varpi = \zeta + \pi$ .
- La famille  $\mathcal{F}_4^2$  (resp  $\mathcal{F}_5^2$ ) émergeant de  $L_4$  (resp.  $L_5$ ), portée par la direction  $z_2$  est la famille des configurations équilatérales excentriques. Elle est tangente à la variété  $\zeta = \Delta\varpi = \pi/3$ ,  $e_2 = e_1$ .
- La famille  $\mathcal{F}_3^1$  émergeant de  $L_3$ , portée par la direction  $z_1$  est la famille que nous appellerons anti-Euler ( $AL_3$ ), calculée numériquement par Hadjidemetriou *et al.* (2009). Elle est tangente à la variété  $\zeta = \pi$ ,  $e_2 = \frac{m_1}{m_2}e_1$  et  $\Delta\varpi = 0$ .
- La famille  $\mathcal{F}_3^2$  émergeant de  $L_3$ , portée par la direction  $z_2$  est la famille des Euler excentriques. Elle est tangente à la variété  $\zeta = \Delta\varpi = \pi$  et  $e_2 = e_1$ .

Nous choisirons  $\zeta_0$  comme paramètre pour la famille  $\mathcal{F}^0$  et l'excentricité du corps 1 pour les autres. Il est important de rappeler que les familles  $\mathcal{F}_3^2$ ,  $\mathcal{F}_4^2$  et  $\mathcal{F}_5^2$  sont des familles de points fixes du problème moyen ( $\omega_2 = 0$ , voir section 2.3).

Les variétés d'expression quadratique tangentés aux familles  $\bar{\mathcal{F}}_k^l$  en les équilibres de Lagrange circulaires  $L_4$  et  $L_3$  apparaissent également de manière évidente dans les variables  $z_j$ . Les équations (2.12) et (2.15) nous donnent leur expression en les variables elliptiques. Pour le voisinage de  $L_4$  :

- La famille  $\bar{\mathcal{F}}_4^0$  est tangente à la variété  $z = Z = 0$
- La famille  $\bar{\mathcal{F}}_4^1$  est tangente à la variété  $e_1 = e_2$  et  $\Delta\varpi = \pi/3$ .
- La famille  $\bar{\mathcal{F}}_4^2$  est tangente à la variété  $m_1e_1 = m_2e_2$  et  $\Delta\varpi = -2\pi/3$ .



Des intégrations numériques d'orbites dans le voisinage de ces familles à plus haute excentricité sont représentées sur la figure 2.31 et section 2.7.4.

Pour le voisinage de  $L_3$  :

- La famille  $\overline{\mathcal{F}}_3^0$  est tangente à la variété  $z = Z = 0$ .
- La famille  $\overline{\mathcal{F}}_3^1$  est tangente à la variété  $e_1 = e_2$  et  $\Delta\varpi = \pi$ .
- La famille  $\overline{\mathcal{F}}_3^2$  est tangente à la variété  $m_1e_1 = m_2e_2$  et  $\Delta\varpi = 0$ .

Notons que dans le cadre de nos approximations (voisinage du cas circulaire à l'ordre 2 en les variables  $z_j$ ) ces directions ne dépendent ni de  $\varepsilon$ , ni de la répartition de masse entre les coorbitaux.

## 2.4 Réduction du problème

Avant de poursuivre sur l'étude globale de l'espace des phases, il est intéressant de remarquer que, comme proposé par Giuppone *et al.* (2010), le système peut être réduit de 1 degré de liberté supplémentaire en prenant le moment cinétique total comme paramètre du problème. Repartant du hamiltonien (1.1) dans les variables de Poincaré, nous effectuons le changement de variable canonique suivant <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \zeta &= \lambda_1 - \lambda_2; & Z &= (\Lambda_1 - \Lambda_2)/2 \\ \Delta\varpi &= \varpi_1 - \varpi_2; & \Pi &= i(x_2\tilde{x}_2 - x_1\tilde{x}_1)/2 \\ q &= \varpi_1 + \varpi_2; & J_1 &= (\Lambda_1 + \Lambda_2 - i(x_1\tilde{x}_1 + x_2\tilde{x}_2))/2 \\ Q &= \lambda_1 + \lambda_2 - q; & J_2 &= (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

En notant ce changement de variable  $\chi_{\mathcal{R}}$ , nous obtenons le hamiltonien réduit suivant :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \mathcal{H} \circ \chi_{\mathcal{R}}^{-1}(\zeta, Z, \Delta\varpi, \Pi, J_1, J_2, q). \tag{2.24}$$

Notons que  $J_1$  est la moitié du moment cinétique total des deux coorbitaux. Il s'agit d'une intégrale première du mouvement. Comme précédemment, nous pouvons moyenniser le hamiltonien sur l'angle rapide  $Q$ , et la quantité  $J_2$  devient également une intégrale première du mouvement. Son interprétation physique est celle d'un facteur d'échelle : le demi grand-axe moyen des coorbitaux n'influe pas sur la dynamique, excepté pour la valeur du moyen mouvement moyen. En notant le changement de variable associé à cette moyenne  $\chi_{\mathcal{M}}$ , nous obtenons le hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \circ \chi_{\mathcal{M}}^{-1}(\zeta, Z, \Delta\varpi, \Pi, J_1, J_2). \tag{2.25}$$

où les grandeurs  $J_1$  et  $J_2$  sont des intégrales premières du mouvement. Suite à ces deux transformations, le hamiltonien devient :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}^K(Z) + \varepsilon \mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}^P(Z, \zeta, \Delta\varpi, \Pi), \tag{2.26}$$

Nous obtenons donc pour le problème moyen réduit un espace des phases de dimension 4, avec pour variables  $\zeta$ ,  $\Delta\varpi$ ,  $Z$  et  $\Pi$ . Par analogie au problème moyen non réduit, on appellera  $\nu$  la fréquence fondamentale de l'angle de libration semi-rapide  $\zeta$  et  $g$  la fréquence fondamentale séculaire d'évolution des excentricités et de la différence des périhélie.

1. Ce changement de variable comporte une singularité pour des excentricités nulles

Dans la section 2.3.2 nous avons introduit les familles  $\mathcal{F}_k^j$  et  $\overline{\mathcal{F}}_k^j$  à partir d'un équilibre circulaire  $L_k$  donné. Tout d'abord, notons que les familles  $\mathcal{F}_k^0$  (paramétrant les co-orbitaux circulaires) ne sont plus décrites par le nouvel hamiltonien car nous avons une singularité pour les excentricités nulles. Après réduction du problème, les familles  $\mathcal{F}_k^l$ ,  $l \in \{1, 2\}$  sont réduites à leur représentant pour la valeur du moment cinétique choisi, donc à des points fixes du problème moyen réduit car  $Z$ ,  $\zeta$ ,  $\Pi$  et  $\Delta\varpi$  sont constants pour chacune de ces orbites. Leur valeur dépend de l'élément de la famille  $\mathcal{F}_k^l$ . Nous continuerons à appeler  $L_k$  le représentant de la famille  $\mathcal{F}_k^2$  et  $AL_k$  le représentant de la famille  $\mathcal{F}_k^1$ . Toute mention d'un équilibre  $L_k$  à partir de maintenant se référera donc à l'équilibre de Lagrange excentrique pour la valeur du moment cinétique considérée, sauf si le contraire est précisé.

Comme nous nous intéressons désormais à l'ensemble de l'espace des phases, nous introduisons les réunions de familles d'orbites périodiques du problème moyen réduit  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  et  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , avec  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  toute orbite ne subissant pas de variation à la fréquence semi-rapide  $\nu$  (donc les orbites  $2\pi/g$  périodiques du problème moyen réduit) et  $\overline{\mathcal{F}}^g$  toute orbite ne subissant pas de variations à la fréquence  $g$  (donc les orbites  $2\pi/\nu$  périodiques du problème moyen réduit). La famille  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  est représentée localement au voisinage d'un point de  $L_k$  par  $\overline{\mathcal{F}}_k^0$  et la famille  $\overline{\mathcal{F}}^g$  est paramétrée localement par  $\overline{\mathcal{F}}_k^1$  au voisinage de  $L_k$  et par  $\overline{\mathcal{F}}_k^2$  dans le voisinage de  $AL_k$ . On pourra faire référence à une famille donnée des réunions  $\overline{\mathcal{F}}^g$  et  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  en appelant par exemple  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  la famille  $\overline{\mathcal{F}}^g$  passant par l'équilibre  $L_k$ .

**Remarque 3.** *Dans la suite, l'espace des phases de dimension 4 sera exploré à la fois par intégration numérique du problème à trois corps et par des méthodes semi-analytiques. La moyennisation sur l'angle  $\mathcal{Q}$  est identique à celle décrite dans le Chapitre 1. Dans le cas de l'étude semi-analytique, cette moyennisation sera effectuée numériquement. Dans le cas d'intégrations du problème à trois corps, on étudiera la dynamique et la stabilité en fonction des variables  $\zeta$ ,  $Z$ ,  $\Delta\varpi$  et  $\Pi$ , variables qui seront  $\varepsilon$  proches de leur équivalent dans le problème moyen réduit (voir la section 2.1 pour plus d'explication).*

Représenter l'ensemble de la dynamique d'un espace des phases de dimension 4 n'est pas facile. Nous allons voir que dans certains cas il est possible d'avoir une bonne représentation de l'ensemble des orbites d'une configuration donnée en ne considérant qu'une variété de dimension 2 de conditions initiales.

### 2.4.1 Variété de référence

Dans le cas circulaire plan, nous avons vu que le problème moyen possédait un seul degré de liberté, et donc qu'une trajectoire pouvait être déterminée de manière unique par un jeu de conditions initiales  $(\zeta_i, Z_i)$ . Nous avons vu section 1.2.2 que ces conditions initiales étaient équivalentes à  $\zeta_0$  et  $t_0$ , où  $t_0$  ne représentait que la position initiale de la trajectoire sur une orbite donnée, qui elle est définie de manière unique par  $\zeta_0$ . Nous avons choisi de définir  $\zeta_0$  à l'instant où  $\dot{\zeta} = 0$  (ce qui est vérifié une infinité de fois dans la résonance coorbitale). Étudier uniquement l'ensemble des trajectoires partant de  $t_0 = 0$  permet donc d'avoir un aperçu exhaustif de l'espace des phases en n'explorant qu'une seule dimension de conditions initiales.

Dans le cas elliptique, les 4 dimensions du problème moyen réduit nécessitent 4 conditions initiales  $(\zeta_i, \Delta\varpi_i, Z_i$  et  $\Pi_i)$  pour définir une trajectoire. A l'instar du cas circulaire nous voulons construire une variété de conditions initiales  $\mathcal{V}'$  de dimension 2 (la moitié de la dimension de l'espace des phases), de manière à ce que les trajectoires prenant leurs conditions initiales sur cette variété soient représentatives de l'ensemble des orbites comprises dans un volume  $\Sigma'$  de l'espace des phases. Ici, "représentatif" signifie que toutes les

orbites de  $\Sigma'$  passent aussi proches que l'on veut de la variété  $\mathcal{V}'$  en un temps fini, on fait donc l'hypothèse que les trajectoires émergentes de  $\mathcal{V}'$  balayent l'ensemble des comportements des orbites de  $\Sigma$ . Nous appellerons  $\mathcal{V}'$  la variété représentative de  $\Sigma'$  (similaire au plan représentatif introduit par Michtchenko *et al.*, 2006).

Le couplage entre les degrés de liberté  $(\zeta, Z)$  et  $(\Delta\varpi, \Pi)$  empêche une détermination triviale d'un jeu de conditions initiales du type  $(\zeta_0, t_0)$ , mais une construction heuristique reste néanmoins possible si on considère que les orbites étudiées sont quasi-périodiques. On travaille ici sur des temps finis, on peut donc considérer qu'une trajectoire est quasi-périodique si ses fréquences fondamentales n'évoluent pas de manière significative sur les échelles de temps étudiées (on peut étudier de manière équivalente la diffusion du demi-grand axe moyen d'un des corps, Robutel et Laskar, 2001). En vérifiant cela sur une grille de conditions initiales dans un domaine donné, on admettra que la mesure de l'ensemble des conditions initiales conduisant à des trajectoires quasi-périodiques est grande dans le domaine de l'espace des phases étudié.

### Construction de $\mathcal{V}'$

La construction du jeu de conditions initiales s'effectue en deux étapes. La première est de déterminer une variété de dimension 3 :  $\mathcal{V}_Z = \{(\zeta, \Delta\varpi, Z, \Pi_i)/Z = Z_{\mathcal{V}}\}$  (resp.  $\mathcal{V}_{\Pi} = \{(\zeta, \Delta\varpi, Z, \Pi)/\Pi = \Pi_{\mathcal{V}}\}$ ) de manière à ce que l'adhérence des trajectoires issues de  $\mathcal{V}_Z$  (resp.  $\mathcal{V}_{\Pi}$ ) forme un volume que nous appellerons  $\Sigma_Z$  (resp.  $\Sigma_{\Pi}$ ). Les trajectoires étudiées étant supposées quasi-périodiques, il existe pour toute trajectoire de  $\Sigma_{Z_{\mathcal{V}}}$  un nombre infini d'instantants  $t_{Z_{\mathcal{V}}}^k$  (resp.  $t_{\Pi_{\mathcal{V}}}^k$ ), avec  $k \in \mathbb{N}$ , tels que :

$$(\zeta, \Delta\varpi, Z, \Pi)(t_{Z_{\mathcal{V}}}^k) = (\zeta, \Delta\varpi, Z = Z_{\mathcal{V}}, \Pi)(t_{Z_0}^k). \quad (2.27)$$

Respectivement, il existe pour toute trajectoire comprise dans  $\Sigma_{\Pi_{\mathcal{V}}}$  un nombre infini d'instantants  $t_{\Pi_{\mathcal{V}}}^k$  tels que :

$$(\zeta, \Delta\varpi, Z, \Pi)(t_{\Pi_{\mathcal{V}}}^k) = (\zeta, \Delta\varpi, Z, \Pi = \Pi_{\mathcal{V}})(t_{\Pi_0}^k). \quad (2.28)$$

**Remarque 4.** *On exclut ici le cas particulier où l'adhérence de l'orbite est tangente à la variété  $\mathcal{V}_Z$  (resp.  $\mathcal{V}_{\Pi}$ ) sans y être confinée.*

Considérons désormais que l'intersection  $\tilde{\Sigma} = \Sigma_{Z_{\mathcal{V}}} \cap \Sigma_{\Pi_{\mathcal{V}}}$  est non vide. La seconde étape est de vérifier que pour tout  $\epsilon_t > 0$ , il existe un couple d'entiers  $k$  et  $n$  tels que

$$|t_{\Pi_{\mathcal{V}}}^k - t_{Z_{\mathcal{V}}}^n| < \epsilon_t. \quad (2.29)$$

Nous appellerons  $\Sigma'$  l'adhérence des trajectoires de  $\tilde{\Sigma}$  vérifiant cette condition. Comme les trajectoires de  $\Sigma'$  sont continues, on peut choisir  $\epsilon_t$  de manière à ce qu'elles passent  $\epsilon_{\Sigma}/2$  proches d'un point de la variété  $\mathcal{V}'$  :

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_Z \cap \mathcal{V}_{\Pi}. \quad (2.30)$$

Si ces deux étapes sont validées, puisque les orbites de  $\Sigma$  sont quasi-périodiques, le théorème de récurrence de Poincaré nous indique qu'une trajectoire de  $\Sigma$  repasse un nombre infini de fois  $\epsilon_{\Sigma}/2$  proche d'un point qui est lui même  $\epsilon_{\Sigma}/2$  proche d'un des points de  $\mathcal{V}'$ . Le flot du hamiltonien (1.1) étant continu, Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que la trajectoire étudiée reste  $\epsilon$  proche de l'orbite issue de  $\mathcal{V}'$  sur un temps  $\pm t$ , où  $t$  dépend de la valeur de  $\epsilon_{\Sigma}$ .

Notons que si  $\epsilon_t$  est aussi petit que l'on veut,  $\epsilon_\Sigma$  l'est également, et par continuité du flot du hamiltonien et le théorème de Cauchy Lipschitz, toute orbite de  $\Sigma$  est identique à une orbite passant par un point de  $\mathcal{V}'$ . En pratique, on vérifiera qu'une trajectoire appartient à  $\Sigma$  en intégrant le problème à trois corps sur une durée longue devant la plus longue période du système, et on en vérifiant qu'il existe un temps  $t$  tel que :

$$(Z - Z_0)^2 + (II - II_0)^2 < \epsilon_\Sigma, \quad (2.31)$$

Nous avons donc construit  $\mathcal{V}'$ , une variété représentative de la région  $\Sigma'$  de l'espace des phases, au sens où l'étude du comportement des trajectoires émergent de cette variété nous informe sur l'ensemble des trajectoires comprises dans  $\Sigma'$ .

Par la suite, notre but est que  $\Sigma'$  englobe la totalité des trajectoires stables d'une ou plusieurs configurations coorbitales pour une valeur des masses et du moment cinétique donné, si elle existe, on notera ce volume  $\Sigma$  et  $\mathcal{V}$  la variété représentative associée. Notons qu'une condition nécessaire est donc que  $\Sigma$  comprenne l'ensemble des points fixes et des variétés  $\overline{\mathcal{F}}_k$  existant dans la ou les configurations coorbitales que nous voulons représenter.

### Expression de $\mathcal{V}$

On verra en section 2.6.2 un algorithme visant à déterminer une variété de référence pour une configuration coorbitale donnée à masses et valeur du moment cinétique fixés. Dans certains cas, nous pouvons déterminer une expression approchée de  $\mathcal{V}$ . Nous le ferons pour le voisinage de l'équilibre de Lagrange circulaire  $L_4$  en section 2.4.3, et dans le cas d'excentricité modérée (ordre 1) pour des coorbitaux à masses égales en section 2.4.4.

### 2.4.2 Séparation des échelles de temps et invariance adiabatique

Rappelons qu'il existe deux échelles de temps pour le problème moyen réduit : une échelle de temps semi-rapide de fréquence fondamentale  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  qui est associée à l'évolution de l'angle résonant  $\zeta$ , et une échelle de temps dite séculaire, associée à l'évolution des excentricités et des périhélie. Dans le problème moyen réduit, la fréquence fondamentale associée aux variables  $\Delta\varpi$  et  $II$  est notée  $g = \mathcal{O}(\epsilon)$ . La séparation de ces échelles de temps dans le cas de résonances en moyen mouvement est une approche classique (Henrard et Caranicolas, 1989; Morbidelli, 2002; Batygin et Morbidelli, 2013; Delisle *et al.*, 2012, 2014, par exemple). En théorie, cette séparation nous permettrait de moyenner le hamiltonien sur l'angle semi-rapide, et donc d'obtenir le hamiltonien du problème séculaire. En pratique cette opération est assez délicate car  $(Z, \zeta)$  ne sont pas proches de variables action-angle (Morais, 1999, 2001; Beaugé et Roig, 2001; Páez et Efthymiopoulos, 2015, dans le cas restreint). Supposons cependant que nous effectuons cette seconde moyenne. Nous obtiendrions un hamiltonien à 1 degré de liberté avec un paramètre supplémentaire  $J_0$  qui serait la variable d'action associée au degré de liberté  $(Z, \zeta)$ . La transformation canonique associée à cette moyennisation pour les variables  $\Delta\varpi$  et  $II$  ne diffère de l'identité que par des coefficients de taille  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  (voir Morbidelli, 2002).

La possibilité d'effectuer cette moyenne nous apporte des informations importantes sur la dynamique. Premièrement, dans le problème moyen réduit (à deux degrés de liberté), l'évolution des variables  $\Delta\varpi$  et  $II$  sur des temps de l'ordre de  $1/\nu$  se limite à des perturbations de taille  $\sqrt{\epsilon}$ . Par conséquent, les variables  $\Delta\varpi$  et  $II$  peuvent être considérées constantes sur des temps courts devant  $1/g$ . Pour des coorbitaux de masses suffisamment faibles, nous pouvons donc faire l'hypothèse que  $\Delta\varpi$  et  $II$  sont des invariants adiabatiques.

Cette séparation des échelles de temps induit une propriété intéressante des variétés de référence définies par l'équation (2.30). Considérons à nouveau que nous ayons effectué la seconde moyenne sur l'angle  $\zeta$ . Le système à 1 degré de liberté  $(\Delta\varpi, \Pi)$  est donc intégrable et ses trajectoires sont périodiques. Distinguons trois cas : si l'intersection entre la famille  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  et la variété  $\mathcal{V}_\Pi$  est non vide, les trajectoires qui ont pour condition initiale un des points de cette intersection sont des points fixes du problème séculaire. Leur orbite est donc représentée par un unique point de la variété  $\mathcal{V}_\Pi$ . Le cas où  $\dot{\Pi} = 0$  sur la variété  $\mathcal{V}_\Pi$  sans que la trajectoire soit membre de  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  est un cas particulier à priori exclu par construction de  $\mathcal{V}$ . Dans tous les autres cas, les trajectoires périodiques passent par au moins deux points de la variété  $\mathcal{V}_\Pi$ , un pour  $\dot{\Pi} > 0$  et un pour  $\dot{\Pi} < 0$ .

Rappelons que les points de la variété  $\mathcal{V}$  sont par définition à la fois dans les variétés  $\mathcal{V}_\Pi$  et  $\mathcal{V}_Z$ . Considérons les orbites passant par un ou plusieurs points de  $\mathcal{V}_\Pi$ . Comme évoqué précédemment, on peut considérer que sur une échelle de temps courte devant  $1/g$ ,  $\Pi = \Pi_\mathcal{V}$  et  $\Delta\varpi$  sont des constantes. Sur cette échelle de temps, la dynamique est réduite à un degré de liberté, celui des variables  $(Z, \zeta)$ . Pour ces orbites périodiques, nous pouvons avoir une discussion similaire à celle conduite pour les variables  $(\Delta\varpi, \Pi)$  dans le cas du problème doublement moyenné. Les trajectoires génériques issues de la variété de référence passent dans le voisinage de plusieurs points distincts de la variété. Le nombre de points par lequel passe la trajectoire est réduit si la condition initiale appartient à une des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k$ . Au cas où la condition initiale appartient à la fois aux familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^\nu$  et  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$ , alors l'orbite est un point fixe du problème réduit moyen, et la trajectoire est réduite à sa condition initiale.

### 2.4.3 Variété de référence au voisinage de l'équilibre de Lagrange circulaire

Le voisinage de l'équilibre de Lagrange circulaire est un des cas où nous pouvons avoir une approximation analytique de la variété  $\mathcal{V}$ . L'équation (1.35) reste valable pour de petites excentricités. Donc, indépendamment de  $\Delta\varpi$ , nous pouvons voir sur le portrait de phase figure 1.1 que l'ensemble des trajectoires passe deux fois par la variété  $\dot{\zeta} = 0$ . On sait que  $L_4$  est en  $Z_{L_4} = \frac{\varepsilon}{6} \frac{m'_1 - m'_2}{m'_1 + m'_2} \frac{m'_1 m'_2}{m_0} \mu_0^{2/3} \eta^{-1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  (équation 1.40). Nous définissons donc  $\mathcal{V}_Z$  par  $Z_\mathcal{V} = Z_{L_4}$ .

Nous rappelons qu'au voisinage de la variété  $\mathcal{C}_0$ , l'évolution des variables  $x_1$  et  $x_2$  est donnée par le système différentiel (1.26). Au voisinage de l'équilibre de Lagrange  $L_4$ , les solutions de ce système se décomposent sur la base des vecteurs propres  $V_{\pi/3}^1$  et  $V_{\pi/3}^2$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \sqrt{m_2} e^{i(\frac{\pi}{3} + gt)} + \beta \sqrt{m_1} e^{i\frac{\pi}{3}}, \\ x_2 &= -\alpha \sqrt{m_1} e^{igt} + \beta \sqrt{m_2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  complexes, dépendants des valeurs initiales de  $x_1$  et  $x_2$ . En injectant ces expressions dans celle de  $\Pi$  eq. (2.23), et en notant  $\alpha\bar{\beta} = C e^{ic}$ , nous obtenons :

$$\Pi = (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta})(m_1 - m_2) - 2C\sqrt{m_1 m_2} \cos(gt + c), \quad (2.33)$$

d'autre part,

$$\Delta\varpi = \arg(x_1 \bar{x}_2) \text{ avec } x_1 \bar{x}_2 = [\sqrt{m_1 m_2} (\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha}) + C m_2 e^{i(gt+c)} - C m_1 e^{-i(gt+c)}] e^{i\pi/3}, \quad (2.34)$$

L'ensemble des orbites dans le voisinage de Lagrange passe donc par la variété  $\mathcal{V}_\Pi$ , définie par  $\Pi_\mathcal{V} = (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta})(m_1 - m_2)$  quand  $t_k = (\pi/2 + k\pi - c)/g$ . A ces mêmes instants,  $\Delta\varpi$  atteint ses extrema, donc  $\dot{\Delta\varpi} = 0$ . Notons que la variété  $\mathcal{V}_\Pi$  est le plan d'équation

$\Pi = 0$  sur le voisinage de  $L_4$  dans le cas où  $m_1 = m_2$ . Par ailleurs, les orbites génériques passent deux fois par  $\mathcal{V}_Z$  avec une fréquence  $\nu$  et deux fois par  $\mathcal{V}_\Pi$  avec une fréquence  $g$ . Toute orbite générique du voisinage de l'équilibre de Lagrange passe donc au voisinage de 4 points de  $\mathcal{V}$ . Si les fréquences  $g$  et  $\nu$  ne sont pas résonantes, alors la condition (2.29) est vérifiée. La variété  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_Z \cap \mathcal{V}_\Pi$  est donc une variété représentative de conditions initiales pour l'ensemble du voisinage de  $L_4$ .

#### 2.4.4 Variété de référence pour des coorbitaux à masses égales

Dans le cas de coorbitaux à masses égales nous pouvons avoir une expression simple de  $\mathcal{V}$  dans l'ensemble de l'espace des phases à l'ordre 1 en excentricité. Nous avons vu au Chapitre 1, section 1.2.2 que le hamiltonien moyen du cas circulaire plan est symétrique par rapport à la variété  $Z = 0$ . La quantité  $\dot{\zeta}$  s'annule donc sur cette variété. On fait ici l'hypothèse que cette propriété reste vraie pour des coorbitaux excentriques et on définit  $\mathcal{V}_Z$  par  $Z = 0$ .

On rappelle que l'équation variationnelle dans la direction  $(x_j, \tilde{x}_j)$  autour d'une trajectoire arbitraire  $\zeta(t)$  du cas circulaire plan est donnée par les équations (1.26) à (1.28). Les coefficients de la matrice (1.27) dépendent donc du temps et des conditions initiales de la trajectoire  $\zeta(t)$  choisie. Cependant, comme l'évolution des  $x_j$  est lente par rapport à celle des variables  $(Z, \zeta)$ , nous pouvons obtenir une approximation de l'évolution séculaire des  $x_j$  en moyennant temporellement les coefficients de cette matrice sur une période  $2\pi/\nu$ . De plus en prenant  $m_1 = m_2$ , cette équation variationnelle moyennée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i(ax_1 + \bar{c}x_2), & \dot{\tilde{x}}_1 &= -i(a\tilde{x}_1 + c\tilde{x}_2), \\ \dot{x}_2 &= i(\bar{c}x_1 + ax_2), & \dot{\tilde{x}}_2 &= -i(\bar{c}\tilde{x}_1 + a\tilde{x}_2), \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec  $a$  réel et  $c$  complexe. De ces relations, nous pouvons déduire que :

$$\frac{d^2}{dt^2}|x_1|^2 = -\frac{d^2}{dt^2}|x_2|^2 = -2|c|^2(|x_1|^2 - |x_2|^2). \quad (2.36)$$

d'où

$$\frac{d^2}{dt^2}(|x_1|^2 - |x_2|^2) = -4|c|^2(|x_1|^2 - |x_2|^2). \quad (2.37)$$

On reconnaît ici l'équation de l'oscillateur harmonique.  $|x_1| = |x_2|$  étant une solution admissible du système, on en déduit que les solutions du système (1.27) oscillent autour de  $|x_1| = |x_2|$  à la fréquence  $2|c|$ .  $|x_1| = |x_2|$  est équivalent à  $\Pi = 0$  quand  $m_1 = m_2$  (et donc  $e_1 = e_2$ ). On définit donc  $\mathcal{V}_\Pi$  par  $\Pi = 0$ . La variété  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_Z \cap \mathcal{V}_\Pi$  est représentative des coorbitaux excentriques tant que l'approximation quadratique du hamiltonien (1.21) est valable.

Nous allons vérifier numériquement si cela reste vrai pour de plus grandes excentricités. Comme énoncé en section 2.4.1, nous allons chercher le volume de l'espace des phases dans lequel l'ensemble des trajectoires vérifie la relation (2.31). Ici, comme  $m_1 = m_2$ , ce critère est équivalent à

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{\bar{a}^2} + (e_1 - e_2)^2 < \epsilon'_\Sigma \quad (2.38)$$

Comme  $\Sigma \subset \Sigma_{Z_0}$ , nous prenons nos conditions initiales sur la variété  $Z = 0$  et nous explorons l'espace des phases en faisant varier  $\Pi$ ,  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$ . En pratique nous regardons

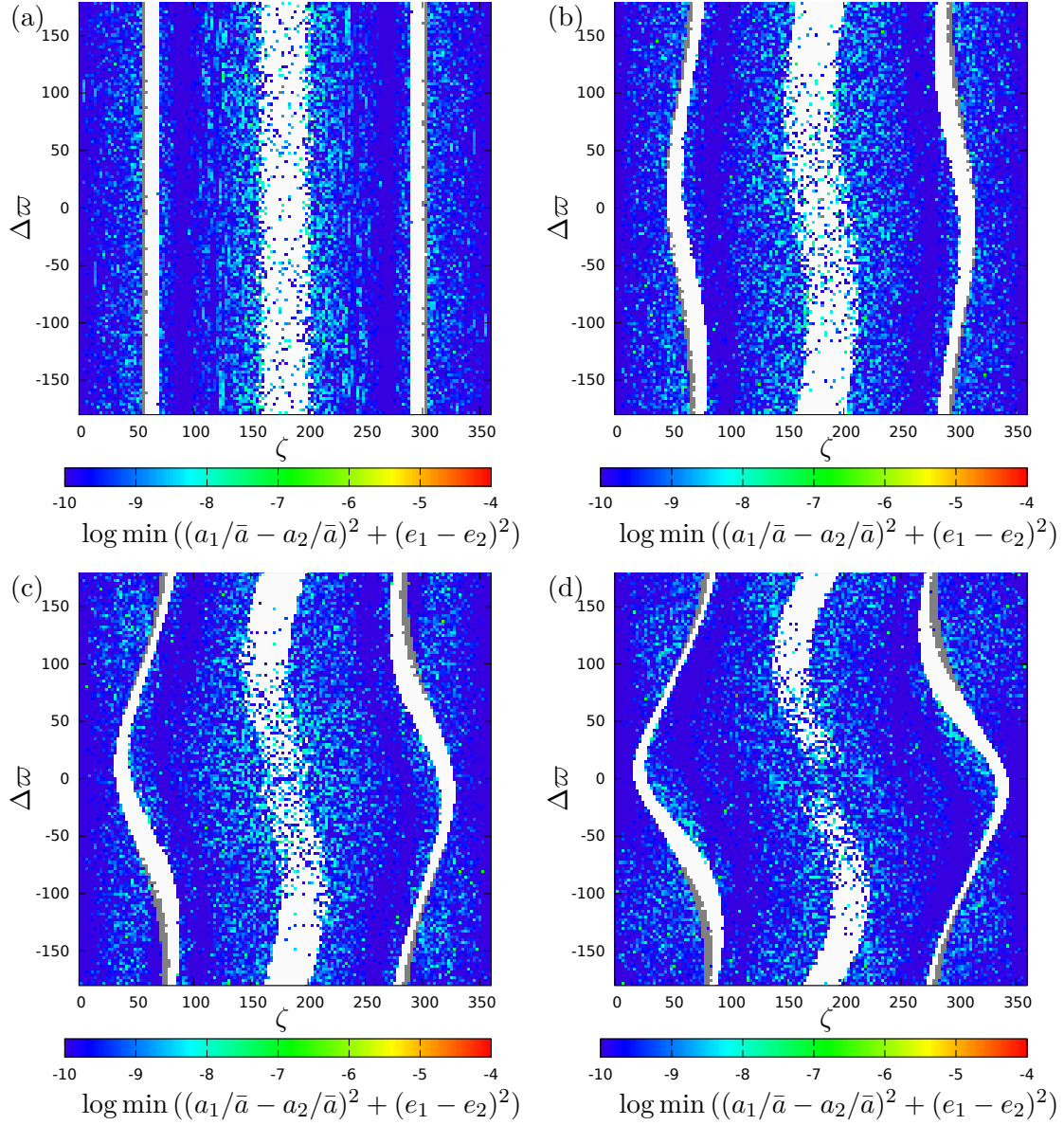


FIGURE 2.1 – Valeur minimale de  $\log \left( (a_1/\bar{a} - a_2/\bar{a})^2 + (e_1 - e_2)^2 \right)$  sur  $10 \times 10^5$  an avec un pas de 0.01 an pour une valeur fixée du moment cinétique  $J_1 (e_1 = e_2 = 0.4)$  avec les conditions initiales suivantes  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $m_1 = m_2 = 10^{-5} m_0$ . Sur la figure (a)  $e_1 = 0.00$  et  $e_2 \approx 0.55$ ; (b)  $e_1 = 0.10$  et  $e_2 \approx 0.54$ ; (c)  $e_1 = 0.20$  et  $e_2 \approx 0.52$ ; (d)  $e_1 = 0.30$  et  $e_2 \approx 0.47$ . Les trajectoires éjectées avant la fin de l'intégration sont identifiées par des pixels blancs. Voir la section 2.5 pour plus de détails concernant les intégrations. La couleur grise indique les trajectoires dont la diffusion du demi-grand axe moyen est supérieure à  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

des cartes pour  $\zeta \in [0^\circ : 360^\circ]$  et  $\Delta\varpi \in [-180^\circ : 180^\circ]$  et différentes valeurs de  $\Pi$  pour  $J_1$  fixé. Pour les excentricités, cela implique :

$$e_2 = \sqrt{1 - \frac{2J_1}{\Lambda_1^0} - \sqrt{1 - e_1^2}} \quad (2.39)$$

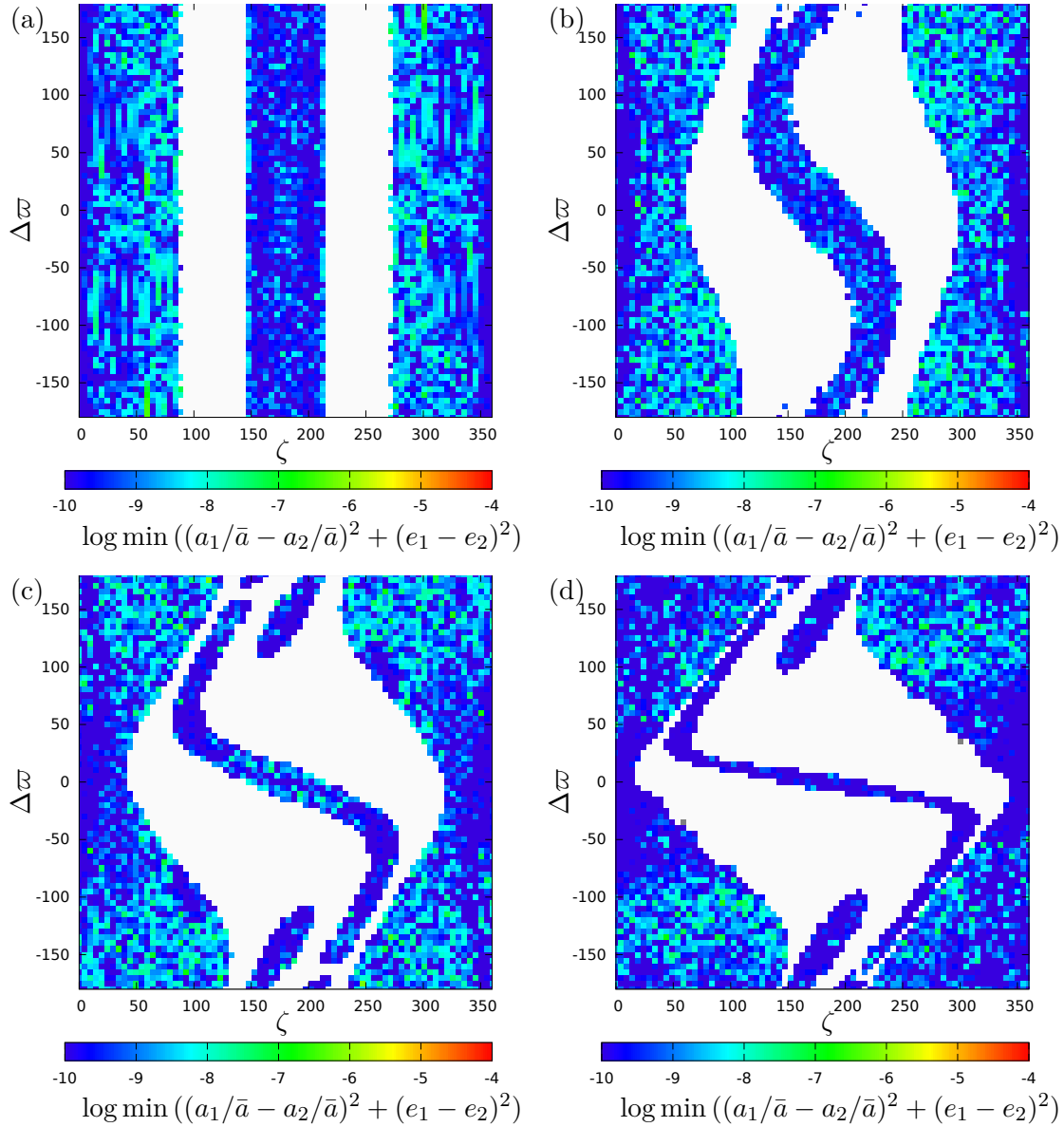


FIGURE 2.2 – Valeur minimale de  $\log \left( (a_1/\bar{a} - a_2/\bar{a})^2 + (e_1 - e_2)^2 \right)$  sur  $10 \times 10^5$  an avec un pas de 0.01 an pour une valeur fixée du moment cinétique  $J_1(e_1 = e_2 = 0.7)$  avec les conditions initiales suivantes  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $m_1 = m_2 = 10^{-5}m_0$ . Sur la figure (a)  $e_1 = 0.00$  et  $e_2 \approx 0.90$ ; (b)  $e_1 = 0.20$  et  $e_2 \approx 0.89$ ; (c)  $e_1 = 0.40$  et  $e_2 \approx 0.86$ ; (d)  $e_1 = 0.60$  et  $e_2 \approx 0.78$ . Les trajectoires éjectées avant la fin de l'intégration sont identifiées par des pixels blancs. Voir la section 2.5 pour plus de détails concernant les intégrations. La couleur grise indique les trajectoires dont la diffusion du demi-grand axe moyen est supérieure à  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

La figure 2.1 représente le cas de deux coorbitaux de masses égales  $m_1 = m_2 = 10^{-5}$  pour diverses valeurs de  $H$  à  $J_1(e_1 = e_2 = 0.4)$  fixé (pour des raisons de clarté on donnera les valeurs des  $e_j$  équivalentes). Les intégrations sont effectuées sur des temps de  $4/\varepsilon$  périodes orbitales, correspondant à quelques périodes de  $g$  seulement. Pour chacune des valeurs



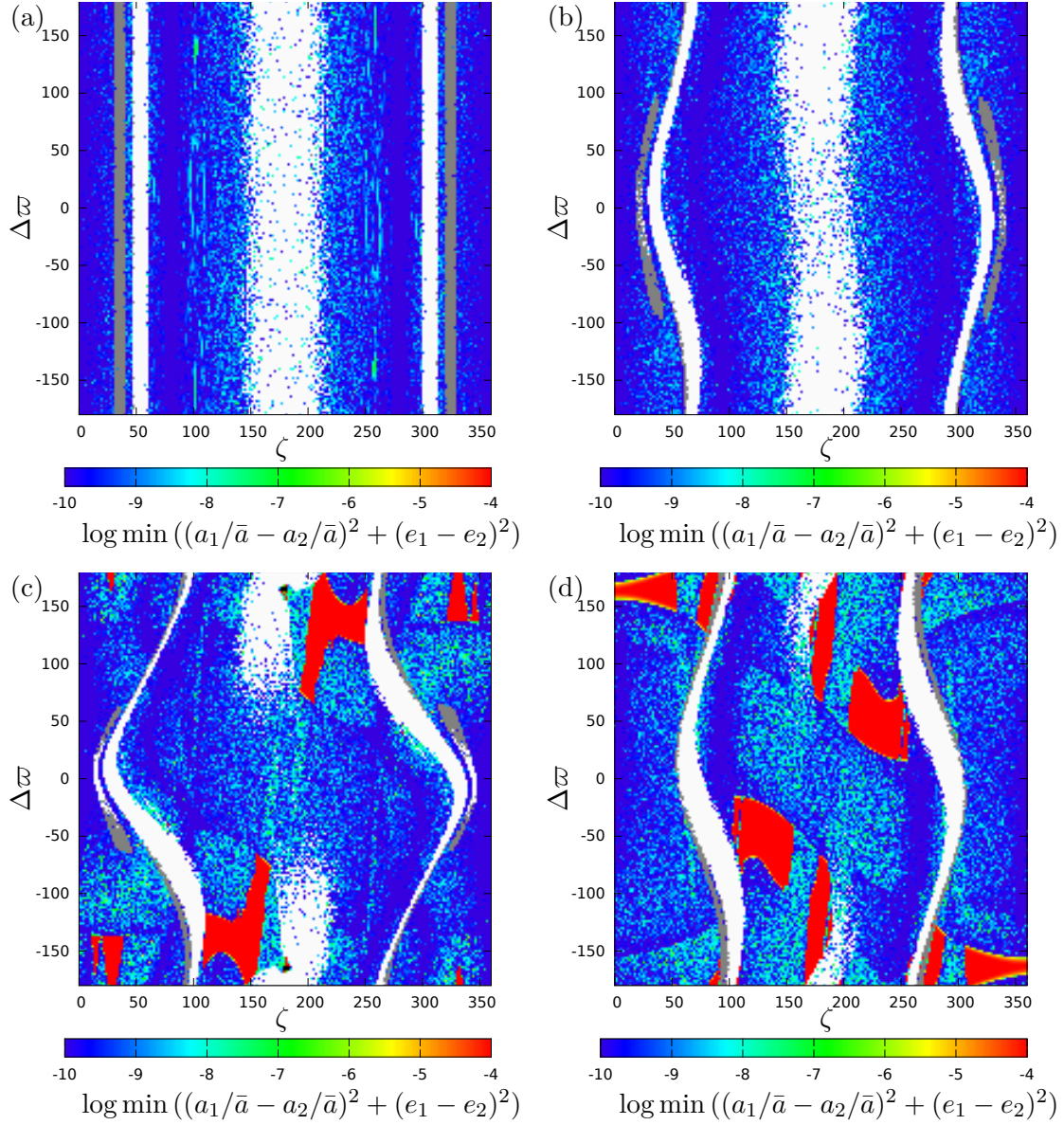


FIGURE 2.3 – Valeur minimale de  $\log((a_1/\bar{a} - a_2/\bar{a})^2 + (e_1 - e_2)^2)$  sur  $10 \times 10^5$  an avec un pas de 0.01 an pour une valeur fixée du moment cinétique  $J_1(e_1 = e_2 = 0.4)$  avec les conditions initiales suivantes  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $m_2 = 3m_1 = 1.5 \times 10^{-5}m_0$ . Sur la figure (a)  $e_1 = 0.00$  et  $e_2 \approx 0.55$ ; (b)  $e_1 = 0.10$  et  $e_2 \approx 0.54$ ; (c)  $e_1 = 0.20$  et  $e_2 \approx 0.52$ ; (d)  $e_1 = 0.30$  et  $e_2 \approx 0.47$ . Les trajectoires éjectées avant la fin de l'intégration sont identifiées par des pixels blancs. Voir la section 2.5 pour plus de détails concernant les intégrations. La couleur grise indique les trajectoires dont la diffusion du demi-grand axe moyen est supérieure à  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

initiales de  $\Pi$  choisies, la condition (2.38) est vérifiée par l'ensemble des trajectoires non éjectées pour  $\epsilon'_\Sigma \approx 10^{-8}$ . Bien que non exhaustive, cette vérification suggère que la variété de référence choisie représente une part conséquente de l'espace des phases du problème moyen réduit. Il n'est cependant pas exclu que, même avec  $m_1 = m_2$ , des domaines stables

apparaissent à haute excentricité avec  $e_1 \neq e_2$  sur toute l'orbite. Cependant aucun d'entre eux n'a été découvert pendant cet étude. La figure 2.2 montre une vérification similaire pour  $J_1(e_1 = e_2 = 0.7)$ .

Pour comparaison, la figure 2.3 montre que, pour  $m_1 \neq m_2$ , le critère (2.38) n'est pas vérifié partout pour  $\epsilon'_\Sigma = 10^{-4}$ . Il y a donc des orbites de l'espace des phases qui ne sont pas représentées par des conditions initiales prises sur le plan  $e_1 = e_2$ ,  $a_1 = a_2$ .

### 2.4.5 Identification des familles $\overline{\mathcal{F}}$

À la section 2.3.4 nous avons donné une approximation quadratique de la position des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k$  au voisinage des points fixes du problème circulaire. Il est possible de calculer leur position à n'importe quel ordre dans le voisinage des équilibres de Lagrange elliptique, c'est ce que nous montrerons en section 2.7. La séparation des échelles de temps exposée en section 2.4.2 va nous permettre d'identifier les familles  $\overline{\mathcal{F}}$  d'un point de vue global à l'aide de méthodes semi-analytiques et numériques.

Commençons par faire l'hypothèse d'invariance adiabatique pour les variables  $\Delta\varpi$  et  $\Pi$ , comme exposé en section 2.4.2. Ce faisant, nous pouvons étudier le système à 1 degré de liberté  $(\zeta, Z)$  sur des temps courts devant  $2\pi/g$ . En partant du hamiltonien dans les variables du problème réduit (2.24), nous pouvons calculer une estimation en tout point de l'espace des phases du hamiltonien réduit moyenné  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}$  (2.25) en effectuant une moyenne numérique sur l'angle rapide  $Q$ . On rappelle que les familles  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  sont composées d'orbites dont les termes de fréquence  $\nu$  sont d'amplitude nulle. Sur des temps courts devant  $2\pi/g$ , nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une famille de points fixes. Les  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  sont donc l'ensemble des points de l'espace des phases pour lesquels nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial Z}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} = 0. \quad (2.40)$$

On se place sur la variété  $\dot{\zeta} = 0$  ( $Z = 0$  quand  $m_1 = m_2$ ). Sur cette variété, les  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  se trouvent donc pour  $\dot{Z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} = 0$ . Cette dérivée numérique, effectuée en tout point  $\zeta_k$  d'une discrétisation de l'espace des phases dans la direction  $\zeta$  est calculée de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}|_{\zeta=\zeta_k} = \frac{\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}(Z, \zeta_{k+1}, \Delta\varpi, \Pi) - \mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}(Z, \zeta_{k-1}, \Delta\varpi, \Pi)}{|\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}|}. \quad (2.41)$$

On considèrera que la condition (2.40) est remplie au point  $(\zeta_k, \Delta\varpi)$  si on a :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}|_{\zeta=\zeta_k} \times \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}|_{\zeta=\zeta_{k+1}} < 0. \quad (2.42)$$

Dans les variables utilisées, l'expression de (2.26)  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}$  montre de manière évidente que la dérivée  $\frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  dans le cas de notre approximation tant que nous trouvons sur des variétés à  $Z$  constant. Cette méthode permet de trouver des points de l'espace des phases vérifiant l'équation (2.40) pour le problème moyen, mais certains de ces points peuvent être situés dans des zones où les orbites ne sont pas quasi-périodiques dans le problème complet (voir les figures de la section 2.5).

Cette méthode semi-analytique n'est pas utilisable pour les familles  $\overline{\mathcal{F}}^g$  en l'état car elle nécessiterait d'effectuer la seconde moyenne sur l'angle semi-lent  $\zeta$ . Cependant, comme expliqué en sections 2.4 et 2.4.2, l'intégration du problème à trois corps représente correctement la dynamique du problème moyen réduit tant que la masse des coorbitaux est

suffisamment faible. Nous avons également vu dans ces sections que les variations de  $\Delta\varpi$  dues à la fréquence  $\nu$  sont de taille  $\sqrt{\varepsilon}$ . Pour les orbites membres des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$ , les variations de  $\Delta\varpi$  sont de taille  $\sqrt{\varepsilon}$  sur toute échelle de temps. Nous allons donc utiliser la quantité  $(\max(\Delta\varpi) - \min(\Delta\varpi))$  comme un traceur des orbites membres du voisinage des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$ . Nous ferons l'hypothèse suivante : on considèrera donc membre du voisinage des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  toute orbite située dans une zone régulière de l'espace des phases (loin des séparatrices et des zones instables) vérifiant la condition suivante :

$$(\max(\Delta\varpi) - \min(\Delta\varpi)) < \epsilon_g, \quad (2.43)$$

avec  $\epsilon_g \propto \sqrt{\varepsilon}$ . On pourra comparer les membres de  $\overline{\mathcal{F}}^g$  ainsi déterminés avec ceux calculés analytiquement au voisinage des familles de points fixes du problème moyen dans la section 2.7.

Dans le cadre de ces intégrations du problème à trois corps, une constatation sur l'ensemble des simulations qui seront exposées par la suite nous amène à la détermination d'un traceur équivalent pour les orbites proches des familles  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ . En effet, la quantité  $(\max(Z) - \min(Z))$  semble peu affectée par la fréquence  $g$ . En complément du critère (2.40), nous ferons l'hypothèse suivante : on considèrera donc membre du voisinage des familles  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  toute orbite située dans une zone régulière de l'espace des phases (loin des séparatrices et des zones instables) vérifiant la condition suivante :

$$(\max(Z) - \min(Z)) < \epsilon_\nu, \quad (2.44)$$

avec  $\epsilon_\nu \propto \sqrt{\varepsilon}$ .

### Identification des familles $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ dans le cas de deux masses égales

Nous savons déjà que la famille  $\overline{\mathcal{F}}_k^\nu$  se trouve sur la variété  $Z = 0$  dans le cas de masses égales. Les figures 2.4 montrent l'ensemble des points de la variété ( $Z = 0, \Pi = 0$ ) pour lesquels la condition (2.42) est vérifiée. Ces cartes sont tracées grâce à une estimation de  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}$  sur une grille de conditions initiales  $(\zeta, Z = 0, \Delta\varpi, \Pi = 0)$  avec  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  sur des intervalles de taille  $360^\circ$  et un pas de  $0.5^\circ$ .

Nous savons que la variété de collision passe par le point  $(0, 0)$ , mais nous ne connaissons pas son expression en dehors de ce point. Cependant, des courbes issues de  $(0, 0)$  et vérifiant la condition (2.42) semblent correspondre à la position de la variété de collision dans les intégrations numériques du problème à trois corps complet (voir les figures de la section 2.5). Une explication possible est que  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}$  tend vers  $+\infty$  en se rapprochant d'un côté de la collision et  $-\infty$  de l'autre, ce qui expliquerait pourquoi la collision vérifie la condition (2.42). À partir de maintenant on fera cette hypothèse et on identifiera ainsi la position de la variété de collision.

Pour des excentricités faibles ( $\leq 0.1$ ) nous sommes au voisinage de la variété circulaire et la direction  $\Delta\varpi$  influe peu sur la position des familles  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ . Nous avons  $\overline{\mathcal{F}}_4^\nu$  en  $\zeta = 60^\circ$ ,  $\overline{\mathcal{F}}_3^\nu$  en  $\zeta = 180^\circ$  et  $\overline{\mathcal{F}}_5^\nu$  en  $\zeta = 300^\circ$ , ce qui correspond à l'approximation quadratique effectuée en section 2.3.4. Pour  $e_1 = e_2 = 0.1$ , on observe une courbe supplémentaire sur laquelle la condition (2.42) est vérifiée en  $\zeta \approx 0^\circ$  qui n'est pas la collision (cette courbe est confondue avec l'axe  $\zeta = 0$  sur la figure 2.4 (a)). Comme on le verra par la suite, cette variété coupe le domaine des quasi-satellites. Nous l'appellerons donc  $\overline{\mathcal{F}}_{QS}^\nu$ .

Une augmentation de l'excentricité entraîne une dépendance croissante de la position des  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  en fonction de  $\Delta\varpi$ . Jusqu'à  $e_j = 0.6$ , l'excentricité n'a pour effet que de tordre les

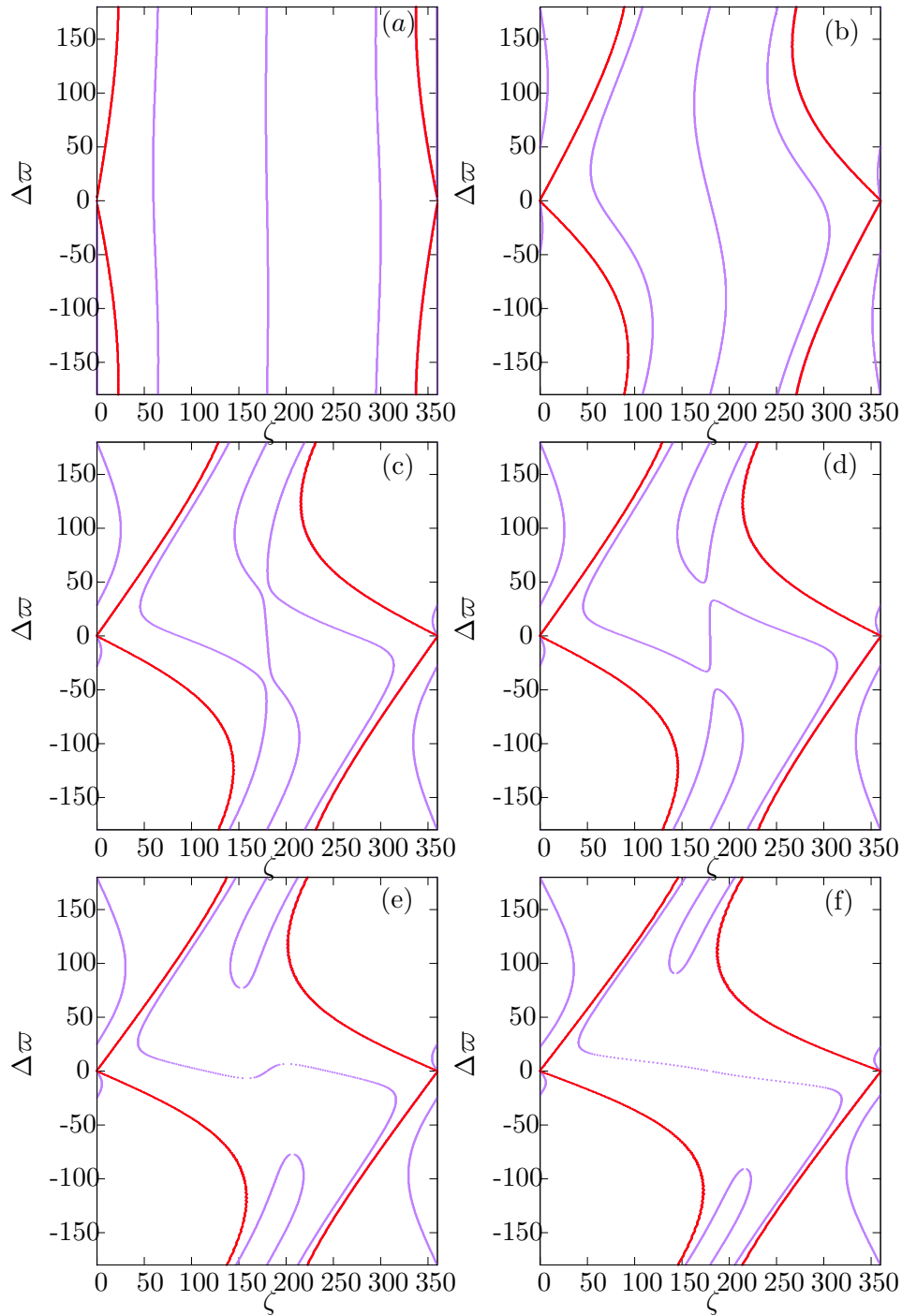


FIGURE 2.4 – Trace de  $\overline{\mathcal{F}}'$  sur la variété représentative  $a_1 = a_2$  et  $e_1 = e_2$ . Les familles  $\overline{\mathcal{F}}'$  sont tracées en violet et les courbes dues à la variété de collision sont représentées en rouge. (a)  $e_j = 0.1$ ; (b)  $e_j = 0.4$ ; (c)  $e_j = 0.6$ ; (d)  $e_j = 0.605$ ; (e)  $e_j = 0.65$  et (f)  $e_j = 0.7$ .

$\overline{\mathcal{F}}'$  existantes. On vérifiera analytiquement la position de ces famille en section 2.7. Cependant, entre  $e_j = 0.6$  et  $e_j = 0.605$ , survient un changement de topologie important : les  $\overline{\mathcal{F}}'$  se reconnectent de manière à former une seule famille continue passant par l'ensemble des  $L_k$  et des  $AL_k$  pour  $k \in \{3, 4, 5\}$ . Comme nous le verrons dans les sections suivantes, cette reconnexion semble entraîner une modification globale de l'espace des phases de la

résonance coorbitale excentrique.

**Remarque 5.** *Dans ce plan, la variété de collision représentée en rouge sur les figures 2.4 se rapproche des équilibres de Lagrange et anti-Lagrange excentriques  $L_4$  et  $L_5$  quand  $e_j$  augmente. Cela diminue la taille possible du domaine de stabilité dans cette direction pour les régions troyennes et augmente la taille du domaine des quasi-satellites. Dans ce plan, la variété de collision semble se rapprocher plus rapidement de  $L_4$  (resp.  $L_5$ ) que de  $AL_4$  (resp.  $AL_5$ ). Ce qui est cohérent avec l'observation de Giuppone et al. (2010) selon laquelle la taille de la région stable au voisinage de  $L_4$  diminue plus vite que celle au voisinage de  $AL_4$  à mesure que l'excentricité des coorbitaux augmente.*

**Remarque 6.** *Robutel et Pousse (2013) conjecturent que les familles  $L_3$ ,  $AL_4$  et  $AL_5$  se confondent quand l'excentricité des deux corps tend vers 1. Cette reconnexion est consistante avec cette conjecture.*

**Remarque 7.** *On rappelle que la méthode semi-analytique utilisée ici est effectuée dans le cadre du problème moyen. La vérification de la condition (2.40) est donc une condition nécessaire pour que l'orbite associée du problème à trois corps excentrique plan (donc à 4 degrés de liberté) soit une orbite quasi-périodique à 3 fréquences. Il reste cependant à vérifier que cette orbite est effectivement quasi-périodique (et non chaotique/instable).*

## 2.5 Étude des coorbitaux excentriques à deux masses égales

A l'aide des outils et études précédemment développés, nous allons maintenant étudier la dynamique et la stabilité de deux coorbitaux excentriques. Comme nous l'avons vu en section 2.4.4, l'expression de la variété de référence est triviale dans le cas de coorbitaux de masses égales, c'est pourquoi nous nous limitons à ce cas pour l'instant. Le moment cinétique total  $J_1$  étant un paramètre du problème moyen réduit, lié à la valeur de l'excentricité des corps, nous allons étudier son influence sur l'espace des phases.

Nous verrons que la valeur de  $m_1/m_0 = m_2/m_0 = \varepsilon$  ne semble pas influencer significativement la dynamique co-orbitale pour les masses choisies dans cette étude (entre  $\varepsilon = 10^{-6}$  et  $10^{-4}$ ). On verra cependant en section 2.5.2 que ce paramètre influe grandement sur la taille des domaines de stabilité.

Nous prendrons pour l'ensemble des intégrations  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$  ( $J_2$  jouant le rôle d'un facteur d'échelle),  $m_0$  égal à une masse solaire. L'éventuelle fréquence de précession des périhélie étant très faible devant la fréquence orbitale, nous pouvons prendre en condition initiale  $\lambda_1 = \varpi_1 = 0$  sans perte de généralité. Le reste des conditions initiales est déterminé par les coordonnées du point considéré sur la variété de référence ainsi que par la valeur de  $J_1$  considérée. En pratique on donnera la valeur de  $e_1 = e_2$  pour des raisons de clarté.

Pour chaque condition initiale, le système est intégré pendant  $10/\varepsilon$  ans en utilisant l'intégrateur symplectique SABA4 (Laskar et Robutel, 2001) avec un pas de temps de 0.01001 ans. Ce pas de temps est suffisamment faible pour des excentricités allant jusqu'à  $\approx 0.6$ . Au delà, il est préférable de prendre 0.01001 ans pour éviter les éjections dues aux erreurs numériques. Les conditions initiales d'orbites fortement chaotiques, ou qui quittent la résonance coorbitale avant la fin de l'intégration sont identifiées dans tous les graphes par des pixels blancs. De plus, afin d'identifier les orbites qui sont instables sur des temps longs devant  $1/\varepsilon$ , on calcule la diffusion de la valeur moyenne du demi-grand axe de la planète  $m_1$  entre la première et la seconde moitié de l'intégration. La couleur grise sera attribuée aux conditions initiales pour lesquelles cette diffusion dépasse la valeur  $\epsilon_a$ .

**Remarque 8.** *L'espace des phases est symétrique par rapport au point  $(\zeta = 0, \Delta\varpi = 0)$ . On n'intégrera et on ne décrira donc que la partie de l'espace des phases pour laquelle  $\zeta \in [0 : 180]$ . La seconde moitié sera affichée pour faciliter l'appréhension de la totalité de l'espace des phases et pour pouvoir représenter les points de la variété de référence au voisinage desquels passent quelques orbites qu'on décidera de représenter.*

### 2.5.1 Dynamique des coorbitaux excentriques à masses égales

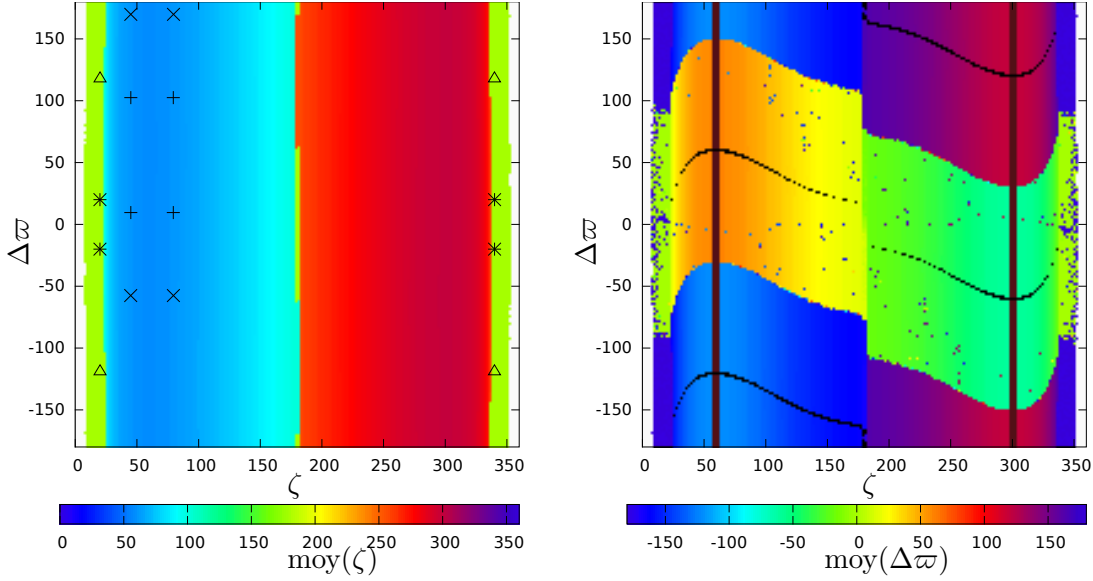


FIGURE 2.5 – Plan de référence pour  $\varepsilon = m_1/m_0 = m_2/m_0 = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.01$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Les divers marqueurs représentent les points près desquels passent les orbites de la figure B.1. Sur la figure de droite le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite. Les excentricités sont faibles et susceptibles de s'annuler, la détermination de  $\Delta\varpi$  est donc difficile. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

#### quasi-circular case, $e_1 = e_2 = 0.01$

Prenons des masses relativement faibles mais consistantes avec un cas planétaire  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Partons du cas quasi-circulaire et augmentons les excentricités progressivement. La figure 2.5 représente les valeurs moyennes des angles  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  quand les conditions initiales parcourent la variété  $\mathcal{V}$  pour  $e_1 = e_2 = 0.01$ . Les orbites voisines des variétés  $\overline{\mathcal{F}}_k$  sont mises en évidence grâce aux critères développés en section 2.4.5 : en noir pour  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  et en marron pour  $\overline{\mathcal{F}}_k^\nu$ . A l'intersection de ces variétés se trouvent les  $L_k$  et  $AL_k$  excentriques qui sont des points fixes du problème réduit moyen. Les familles  $\overline{\mathcal{F}}_3$ , ainsi

que les points  $L_3$  et  $AL_3$  ne sont pas mis en évidence par cette méthode car ils sont situés le long de la séparatrice.

On peut vérifier que chacun de ces points fixes est situé à l'endroit prévu par le développement du hamiltonien à faible excentricité, section 2.2. Nous pouvons vérifier également que la direction des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k$  à partir des  $L_k$  est bien celle prévue par l'étude menée en section 2.3.4, c'est à dire une tangente en  $\Delta\varpi$  constant pour les familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  au voisinage de  $L_4(0.01)$  et  $L_5(0.01)$ , ainsi que  $\zeta$  constant pour la direction des  $\overline{\mathcal{F}}_k^v$  au voisinage de ces deux mêmes points.

D'un point de vue global, la dynamique mise en évidence sur cette figure est en accord avec l'étude analytique : le degré de liberté  $(Z, \zeta)$  évolue presque indépendamment du degré de liberté  $(II, \Delta\varpi)$  et est semblable au cas circulaire plan rappelé au Chapitre 1. On retrouve en particulier les régions appelées troyennes au voisinage des  $L_4$  et  $L_5$  circulaires (donc les bandes autour de  $\zeta = 60^\circ$  et  $300^\circ$ ), la séparatrice entre régime troyen et fer à cheval pour  $\zeta \approx 24^\circ$  et  $\approx 336^\circ$  (passant également au voisinage de cette variété pour  $\zeta = 180^\circ$ ), le régime fer à cheval, et la zone instable centrée sur la collision en  $\zeta = 0^\circ$ . On peut voir cependant par la dépendance de la position des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  en  $\zeta$  que la dynamique du degré de liberté  $(II, \Delta\varpi)$  est influencée par celle de  $(Z, \zeta)$ <sup>2</sup>. Notons par ailleurs que dans la région des fers-à-cheval, deux groupements d'orbites vérifient la condition (2.43), un centré en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (davantage visible sur la figure 2.6) et l'autre en  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Par analogie avec les familles émergeant des équilibres de Lagrange, on suppose que ces orbites sont dans le voisinage d'une variété d'orbites périodiques du problème moyen réduit de fréquence  $\nu$ . Ces variétés seront nommées  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}}^g$  (pour l'anglais horseshoe) pour celle en  $\Delta\varpi = 0^\circ$  et  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}'}^g$  pour celle en  $\Delta\varpi = 180^\circ$ .

Pour une condition initiale dans ce plan, la trajectoire qui en est issue passe une infinité de fois dans le voisinage de 4 points du plan pour une trajectoire générique, 2 points pour les membres des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k$  et 1 point pour les points fixes du problème moyen réduit comme nous l'avons vu en section 2.4.4. Les projections sur les plans  $(Z, \zeta)$  et  $(II, \Delta\varpi)$  de quelques orbites génériques ayant pour conditions initiales des points de  $\mathcal{V}$  sont représentées en annexe sur la figure B.1. Les points auprès desquels repassent chaque trajectoire sont représentés par le même symbole sur la figure 2.5. Dans la région troyenne, les 4 points représentant la même trajectoire se répartissent dans les 4 quadrants délimités par les  $\overline{\mathcal{F}}_4$ , soit autour de  $L_4$ , soit autour de  $AL_4$ . Dans la région des fers-à-cheval, il y a deux points représentant la même trajectoire dans la zone  $\zeta < 180^\circ$  et deux points dans la zone  $\zeta > 180^\circ$ , chaque couple de points étant de part et d'autre de  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}}^g$  ou de  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}'}^g$  selon sa condition initiale. Il y a donc, à la fois pour les orbites troyennes et les orbites en fer-à-cheval, une transition dans l'espace des phases entre les orbites qui librent autour de  $L_4$  ou  $AL_4$  d'une part et  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}}^g$  ou  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}'}^g$  d'autre part. Cette transition peut être mise en évidence de manière simple en traçant la moyenne de l'angle  $\Delta\varpi$  pour chaque point de la variété, figure 2.5 à droite<sup>3</sup>. En effet, la discontinuité de la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sépare les orbites librant autour de points fixes ou de variétés différentes. Cette frontière n'est cependant pas une séparatrice, au sens où on peut passer continûment d'une orbite du voisinage de  $L_4$  (resp.  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}}^1$ ) à une orbite au voisinage de  $AL_4$  (resp.  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}'}^1$ ), la discontinuité apparente dans le comportement de  $\Delta\varpi$  étant due à l'annulation d'une des excentricités le long de la frontière (on rappelle que la variable  $\Delta\varpi$  n'est pas définie quand une des

2. cf. la dépendance en  $(Z, \zeta)$  du système d'équation aux variations (1.26)

3. on remarque que pour de nombreuses conditions initiales la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  semble discontinue sur  $\mathcal{V}$  dans des régions qui semblent cependant régulières sur le graphe de gauche. Cela est dû aux difficultés rencontrées lors de la détermination de  $\Delta\varpi$  qui n'est pas défini quand une des excentricités est nulle.

excentricités est nulle).

$$e_1 = e_2 = 0.4$$

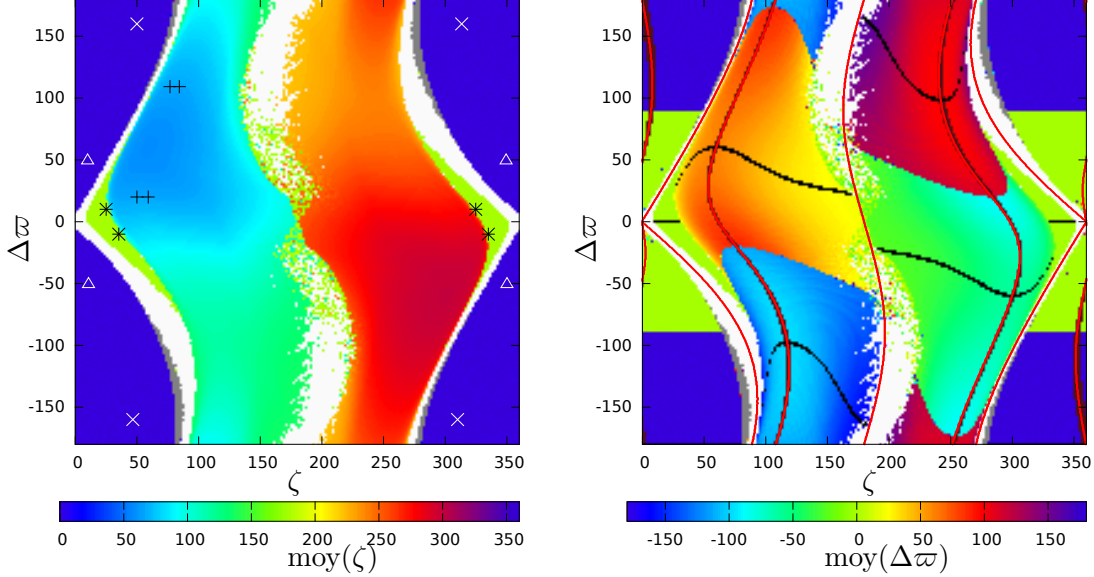


FIGURE 2.6 – Plan de référence pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.4$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Les divers marqueurs représentent les points près desquels passent les orbites de la figure B.2. Sur la figure de droite le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}'$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\varepsilon_\nu = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron. Les résultats de la méthode semi-analytique sont surimprimés en rouge (relation 2.40). Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\varepsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\varepsilon_a = 10^{-5.5}$ .

Quand le moment cinétique total augmente, on s'éloigne du cas circulaire et l'ensemble de l'espace des phases se modifie. Nous pouvons voir sur la figure 2.6 le cas de deux masses égales pour  $e_1 = e_2 = 0.4$ . Par rapport au cas précédent, nous pouvons constater l'apparition du domaine des quasi-satellites (Giuppone *et al.*, 2010; Namouni, 1999), centré sur le point que nous appellerons  $QS$  :  $\zeta = 0^\circ$  et  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . Notons que ce point est à l'intersection d'un groupement d'orbites vérifiant la condition (2.40), que nous supposons être au voisinage d'une variété d'orbites périodiques  $\overline{\mathcal{F}}'_{QS}$ , et d'un groupement d'orbites vérifiant la condition (2.43), que nous supposons être au voisinage d'une variété d'orbites périodiques  $\overline{\mathcal{F}}^g_{QS}$ . La variété de collision, ainsi que l'ensemble des  $\overline{\mathcal{F}}_k$ , sont également déformés par l'augmentation du moment cinétique. Notons notamment que dans ce plan, l'aire des configurations troyennes et des fers-à-cheval diminue au profit de celle des quasi-satellites. De plus, la zone d'instabilité au voisinage de la variété  $\overline{\mathcal{F}}'_3$  s'épaissit. La dynamique dans les régions troyennes et fer-à-cheval reste sensiblement la même, excepté que le domaine des fers-à-cheval semble rétrécir au point de disparaître dans le voisinage de  $\overline{\mathcal{F}}^g_{HS'}$  ( $\Delta\varpi = 180^\circ$ ).



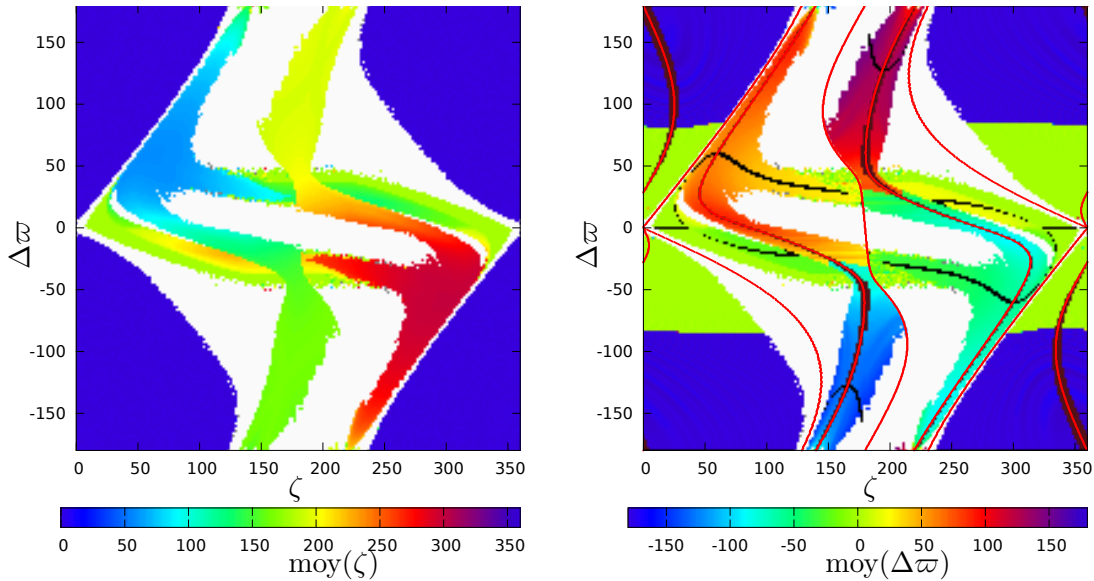


FIGURE 2.7 – Plan de référence pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.6$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Sur la figure de droite le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron. Les résultats de la méthode semi-analytique sont surimprimés en rouge (relation 2.40). Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

**Remarque 9.** *Le plan de référence est censé représenter l'ensemble des configurations co-orbitales pour une valeur du moment cinétique donné. Cependant la taille relative de la coupe de deux domaines de stabilité par la variété de référence n'est généralement pas représentative du volume relatif de ces configurations. Les figures 1.3 du Chapitre 1 montrent par exemple que selon le plan choisi, l'intersection du domaine des fers-à-cheval avec ce plan peut être plus ou moins importante que celle avec le domaine troyen (pour des  $\mu \approx 10^{-6}$ ).*

**Remarque 10.** *Nous avons deux méthodes pour identifier les familles  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , basées sur les critères (2.42) et (2.40). Comme nous pouvons le voir sur les figures 2.5 à 2.9, et plus facilement sur les figures 2.8 et 2.10 (en annexe) ces deux méthodes donnent des résultats similaires. La méthode semi-analytique est basée sur le calcul du hamiltonien moyen et donne donc une position approchée de  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  sans prendre en compte les instabilités du problème réel, alors que la méthode numérique identifie les orbites stables qui sont susceptibles d'être au voisinage des  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ .*

Dans le domaine des quasi-satellites, nous pouvons constater une frontière similaire à celle présente dans le domaine troyen : selon la position sur la variété de référence, les orbites oscillent soit autour du point  $\mathcal{QS}$  en passant dans le voisinage d'un point dans chaque quadrant délimité par les familles  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{QS}}^0$  et  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{QS}}^1$  ; soit les orbites oscillent autour de la collision ( $\Delta\varpi = 0^\circ$ ) avec également un point représentatif dans chaque quadrant. Les orbites situées sur cette frontière représentent les "exchange orbits" introduites par Dvorak (2006). De manière analogue aux cas troyen et fer-à-cheval expliqués précédemment, nous

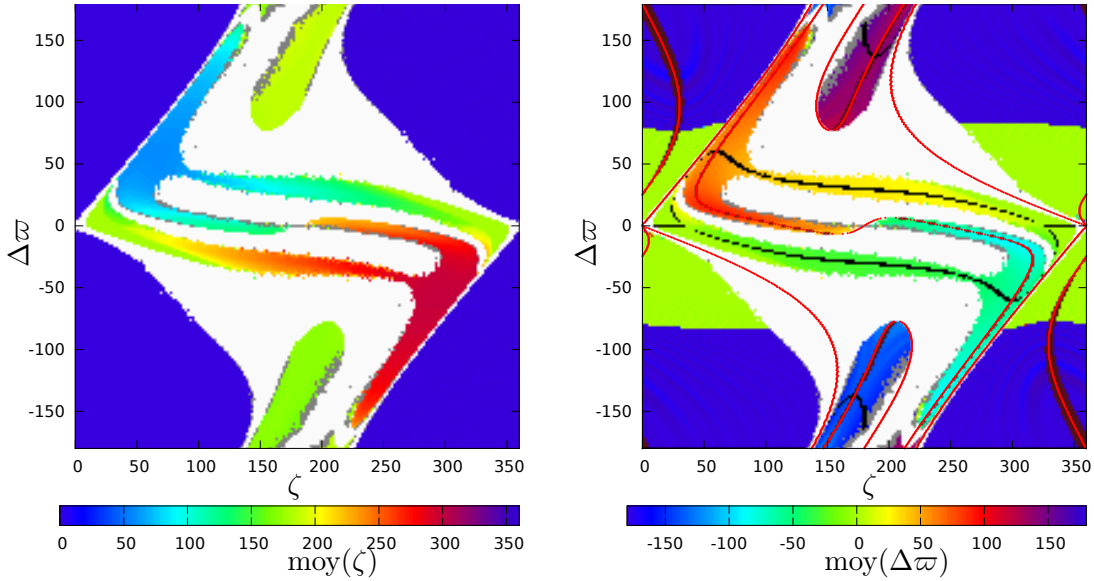


FIGURE 2.8 – Plan de référence pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.65$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Sur la figure de droite le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron. Les résultats de la méthode semi-analytique sont surimprimés en rouge (relation 2.40). Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

pouvons passer continûment d'un type de quasi-satellite à l'autre.

### Apparition des fers-à-cheval asymétriques

Pour  $e_j \leq 0.5$ , la variété  $\nu = 0$  (séparatrice) délimite le domaine troyen du domaine fer-à-cheval à l'instar du cas circulaire (voir figure 1.2), alors que  $g$  reste non nul dans l'ensemble de ces domaines. En augmentant le moment cinétique total ( $e_1 = e_2 = 0.6$ ), nous voyons apparaître la première modification notable de l'espace des phases dans ces régions. A partir de  $e_1 = e_2 \approx 0.5$ ,  $g$  s'annule dans le domaine des fers-à-cheval sur une variété  $g = 0$  avant que la séparatrice  $\nu = 0$  soit rencontrée (figure 2.12). L'annulation de  $g$  entraîne une bifurcation de la famille d'orbites périodiques du problème moyen réduit  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}}^g$  en deux familles d'orbites stables :  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}1}^g$  (pour  $\Delta\varpi > 0$ ) et  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}2}^g$  (pour  $\Delta\varpi < 0$ ) ; et une famille instable  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}i}^g$  pour  $\Delta\varpi = 0$ . Les orbites dans le voisinage des familles stables  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}1}^g$  et  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{HS}2}^g$  librent autour de celles-ci, pour des valeurs moyennes de  $\Delta\varpi$  différentes de  $0^\circ$ , ce qui diffère de la région des fers-à-cheval avant la bifurcation. Cette différence permet d'identifier les différents domaines des fers-à-cheval symétriques ( $\mathcal{HS}$ ) en vert sur la figure 2.11 (gauche), des fers-à-cheval asymétriques  $A\mathcal{HS}_1$  en rouge et  $A\mathcal{HS}_2$  en bleu sur cette même figure. Cette dénomination "asymétrique" provient de la forme de la projection de ces orbites sur les variables  $(Z, \zeta)$ , voir les exemples indiqués par les  $\times$  et les  $*$  sur la figure 2.9 et tracés en annexe sur la figure B.3 (b) et (c), à comparer avec le cas symétrique

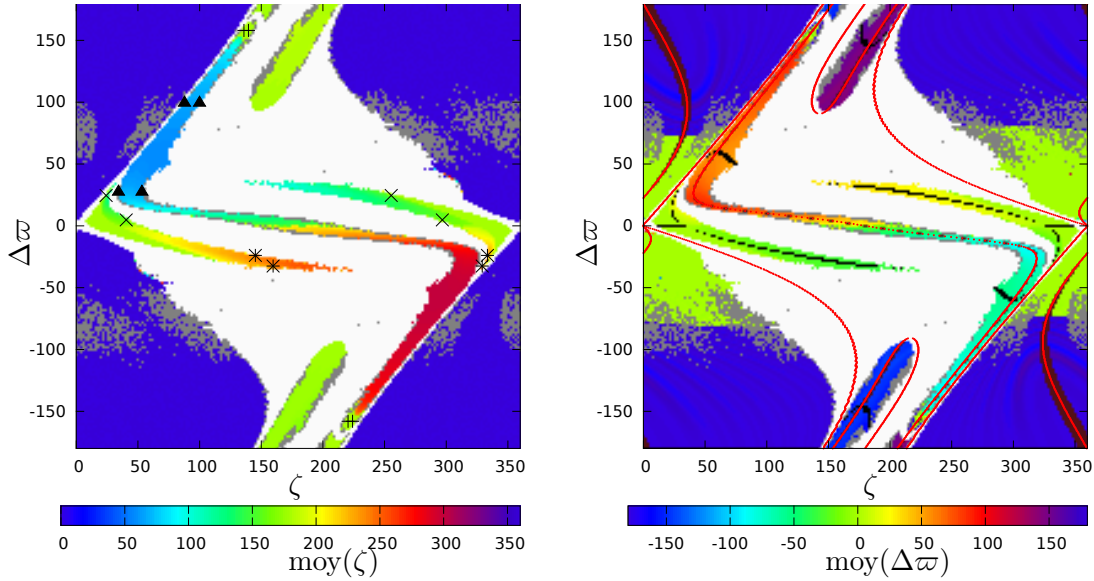


FIGURE 2.9 – Plan de référence pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.7$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Sur la figure de droite le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^v$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron. Les résultats de la méthode semi-analytique sont surimprimés en rouge (relation 2.40). Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ . Les projections des trajectoires représentées par les différents symboles sur la figure de gauche sont tracées en annexe (figure B.3)

figure B.2 (b). Notons que la transition des couleurs vert à bleu et vert à rouge permet de visualiser l'intersection de la variété  $g = 0$  avec le plan de référence. La variété instable  $\overline{\mathcal{F}}_{HSi}^g$  est quant à elle mise en évidence par la transition du rouge au bleu et semble se trouver pour  $\Delta\varpi = 0^\circ$  sur le plan de référence.

$$e_1 = e_2 = 0.6$$

La figure 2.7 représente les valeurs moyennes des angles  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  quand les conditions initiales parcourent la variété  $\mathcal{V}$  pour  $e_1 = e_2 = 0.6$  et  $\varepsilon = 10^{-5}$ . On peut y voir la même bifurcation que sur la figure 2.11, ce qui laisse penser que la valeur de  $\varepsilon$  a peu d'influence sur l'apparition de cette bifurcation. D'autre part on peut voir que les régions stables, même à court terme, se réduisent de plus en plus au voisinage des familles  $\overline{\mathcal{F}}$  pour les domaines troyen et fer-à-cheval, alors que le domaine de stabilité des quasi-satellites continue de s'étendre. Les familles  $\overline{\mathcal{F}}^v$  sont à la limite de la reconnexion mise en évidence en section 2.4.5.

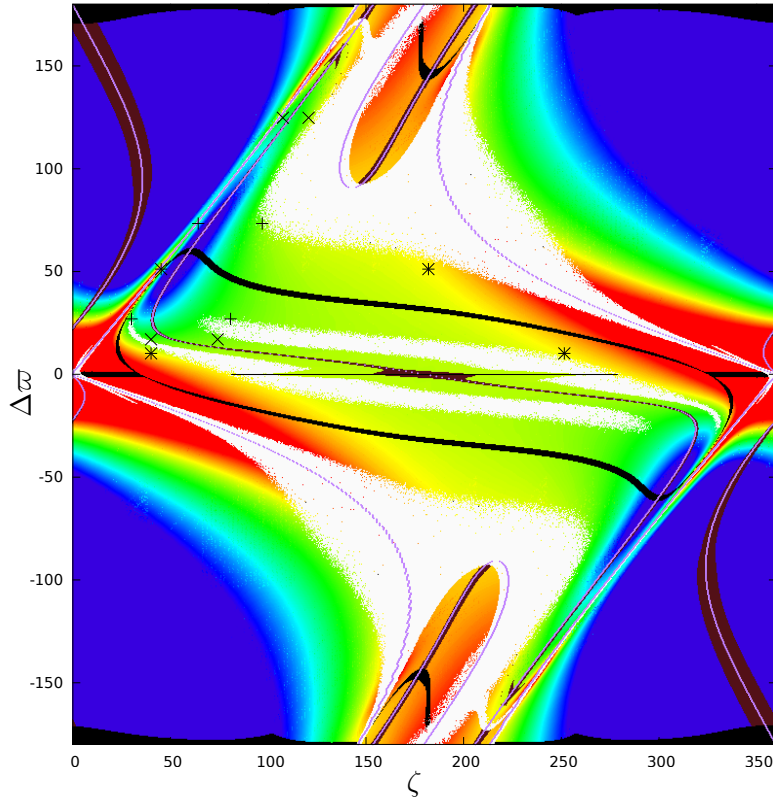


FIGURE 2.10 – Variations de l'énergie totale du problème moyen sur le plan de référence pour  $\varepsilon = 10^{-6}$  et  $e_1 = e_2 = 0.7$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 ua$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite, seules les orbites qui ne sont pas sorties de la résonance en  $1/\varepsilon$  an sont représentées. la couleur rouge représente un maximum d'énergie et la couleur bleue un minimum (échelle non linéaire). Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\varepsilon_\nu = 10^{-4}$  sont représentées en marron. Les résultats de la méthode semi-analytique sont surimprimés en violet (relation 2.40). Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\varepsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.

$$e_1 = e_2 = 0.65$$

La figure 2.8 représente les valeurs moyennes des angles  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  quand les conditions initiales parcourent la variété  $\mathcal{V}$  pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.65$ , donc après la reconnexion. Les domaines des anti-lagranges au voisinage des points  $AL_4$  et  $AL_5$  sont séparés des autres configurations par de larges régions instables, et les familles  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}S_k}^g$  semblent se reconnecter continûment avec les familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  issues des équilibres de lagrange elliptiques  $L_4$  et  $L_5$ , en plus de la reconnexion des familles  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ . Cette reconnexion des familles  $\overline{\mathcal{F}}^g$  permettrait de passer continûment du voisinage des points  $L_4$  et  $L_5$  aux orbites en fers-à-cheval asymétriques. Cette reconnexion est stable sur des temps long (diffusion de  $\eta$  inférieure à  $10^{-7}$  sur une durée de  $100/\varepsilon$ ) pour  $\varepsilon = 10^6$  et  $e_1 = e_2 = 0.7$ , voir section 2.5.2 pour plus de détails.

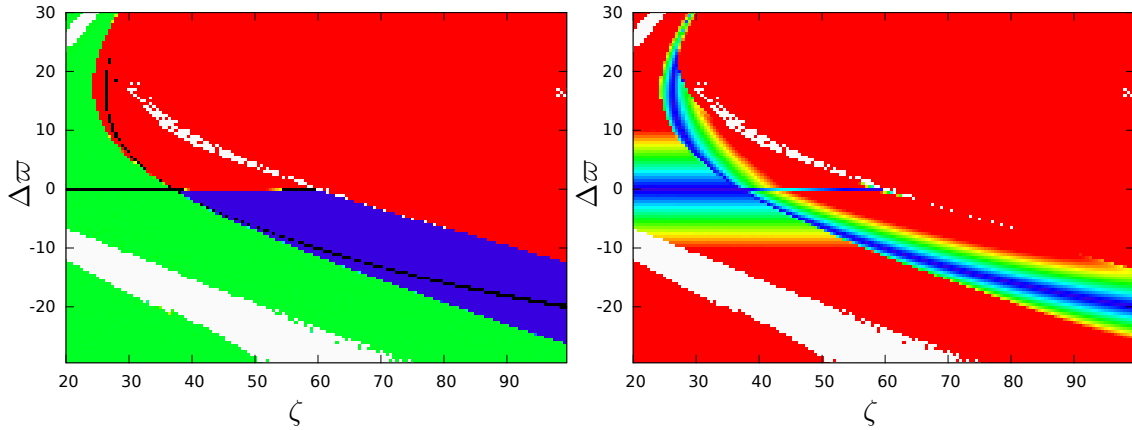


FIGURE 2.11 – Détail de la région fer-à-cheval du plan de référence pour  $\varepsilon = 10^{-6}$  et  $e_1 = e_2 = 0.6$ ,  $m_1 = m_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, la couleur verte est assignée quand  $\Delta\varpi$  libre autour de 0, rouge quand il libre autour d'une valeur supérieure à  $+1^\circ$  et bleue pour une valeur inférieure à  $-1^\circ$ . Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 1^\circ$ , sont représentées en noir. Sur la figure de droite le code couleur représente l'amplitude de variation  $\max(\Delta\varpi) - \min(\Delta\varpi)$  sur chaque orbite. avec  $\max(\Delta\varpi) - \min(\Delta\varpi) = 0^\circ$  en bleu et  $\max(\Delta\varpi) - \min(\Delta\varpi) \geq 20^\circ$  en rouge.

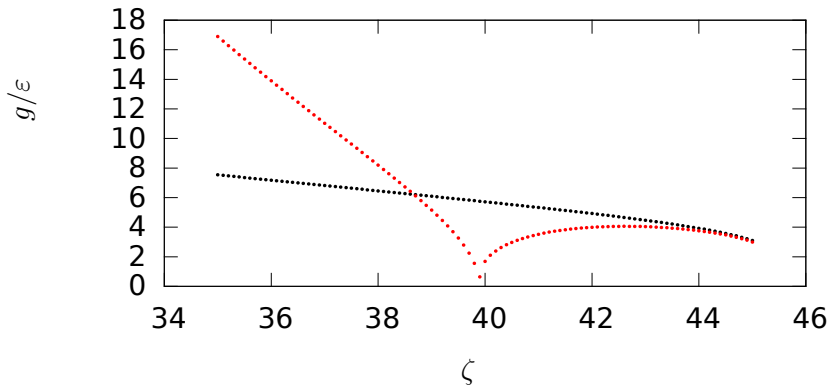


FIGURE 2.12 – Évolution des fréquences  $g/(n\varepsilon)$  en rouge et  $\nu/(n\sqrt{\varepsilon})$  en noir pour  $\Delta\varpi = 1^\circ$  constant et  $e_1 = e_2 = 0.55$ .

$$e_1 = e_2 = 0.7$$

Enfin, la figure 2.9 représente les valeurs moyennes des angles  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  quand les conditions initiales parcourent la variété  $\mathcal{V}$  pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.7$ . Les domaines stables du voisinage des  $L_k$  et  $AL_k$  continuent à rétrécir. On note cependant l'apparition d'orbites quasi-périodiques (sur le temps de l'étude) au voisinage du point d'équilibre instable (au sens hyperbolique)  $AL_3$ . Les nombreux pixels gris dans le domaine des quasi-satellites sont susceptibles d'être dus à des problème numériques : à l'interface des domaines bleu et

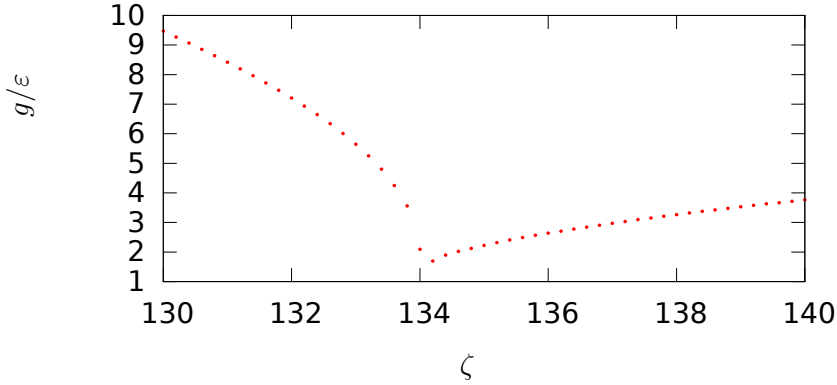


FIGURE 2.13 – Évolution de la fréquence  $g/(n\varepsilon)$  le long de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^\nu$  pour  $e_1 = e_2 = 0.7$  (figure 2.9).

vert sur la figure de gauche, l'excentricité de chaque corps s'annule périodiquement, pendant que l'autre prend des valeurs proches de 0.99. Ces orbites ne sont donc pas intégrées correctement avec le pas d'intégration choisi (0.01 an). Par ailleurs, en suivant la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^\nu$  partant de  $L_4$  pour des  $\Delta\varpi$  croissant, on rencontre une nouvelle variété  $g = 0$  (voir figure 2.13) avant de rencontrer la bande d'orbites instables qui sépare la région troyenne de la région des anti-Lagrange. Au-delà de cette séparatrice, une nouvelle configuration stable apparaît. Nous l'appellerons la configuration  $G$ . L'exemple de trajectoire indiqué par les symboles  $+$  sur la figure 2.9 est donné sur la figure B.3 (a). Ces orbites, comme nous pouvons le voir par la position des quatre  $+$  sur la figure 2.9, passent au voisinage de la variété de référence à la fois proche des configurations troyennes librant autour de  $L_4$  et celles librant autour de  $L_5$ . Ces trajectoires librent donc autour des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  avec  $k \in \{3, 4, 5\}$ , où  $\overline{\mathcal{F}}_4^g$  et  $\overline{\mathcal{F}}_5^g$  sont stables et  $\overline{\mathcal{F}}_3^g$  est instable, à l'extérieur de la variété  $g = 0$  à la manière des trajectoires bleues sur la figure 1.1 pour le degré de liberté  $(Z, \zeta)$ . Il est important de noter que toute orbite dans le domaine  $G$  voit l'excentricité des deux co-orbitaux osciller grandement (voir figure B.3 (a)), dans le cas  $m_1 \ll m_2$ , l'oscillation est principalement subie par l'excentricité de la petite planète, ces configurations risquent donc d'être instables pour des co-orbitaux de masses trop différentes.

Pour comparaison, on trace la figure 2.10, pour  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Notons que pour cette figure les trajectoires sont intégrées sur seulement  $1/\varepsilon = 10^6$  an<sup>4</sup>. La position de l'intersection des familles  $\overline{\mathcal{F}}$  avec la variété de référence semble ne pas dépendre fortement de la valeur de  $\varepsilon = m_2/m_0 = m_1/m_0$ <sup>5</sup>. L'augmentation brusque du nombre d'orbites satisfaisant la relation (2.40) (représentées en marron) au voisinage de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_{AL_3}^g$  et de la frontière  $g = 0$  est due à la mauvaise détermination des variations de  $Z$  car  $g$  tend vers 0 le long de cette séparatrice, le temps d'intégration est donc court devant  $1/g$ . L'intersection des variétés  $g = 0$  et  $\nu = 0$  avec la variété de référence semble également être indépendante de  $\varepsilon$  (comparer par exemple les figures 2.7 et 2.11). Sur la figure 2.10 nous avons marqué trois conditions initiales ' $+$ ', ' $\times$ ' et ' $*$ ' dans le quadrant supérieur gauche de l'équilibre elliptique  $L_4$  ( $\zeta = \Delta\varpi = 60^\circ$ ) délimité par  $\overline{\mathcal{F}}_4^\nu$  et  $\overline{\mathcal{F}}_4^g$ . Ces conditions initiales sont prises

4. Ce qui est de l'ordre d'une unique période  $2\pi/g$ . Le fait qu'une orbite ne soit pas éjecté ne donne donc pas d'information sur la stabilité à long terme de la dite orbite.

5. Nous le savions déjà pour  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , voir section 2.4.5 et pour les position des points fixes, voir section 2.2.

dans le voisinage immédiat des orbites éjectées au voisinage de la variété de collision. En intégrant ces orbites sur quelques périodes  $2\pi/g$ , on identifie les 3 autres points de  $\mathcal{V}$  au voisinage desquels passent ces orbites. Chaque passage s'effectue dans un quadrant différent, au voisinage de la limite de stabilité dans chaque direction. Ces frontières de stabilité semblent donc avoir la même origine : elles sont voisines de la variété de collision. De la même manière, on peut identifier deux à deux les différentes frontières qui délimitent le domaine de stabilité des configurations voisines de  $AL_4$  et  $AL_5$ .

## 2.5.2 Stabilité

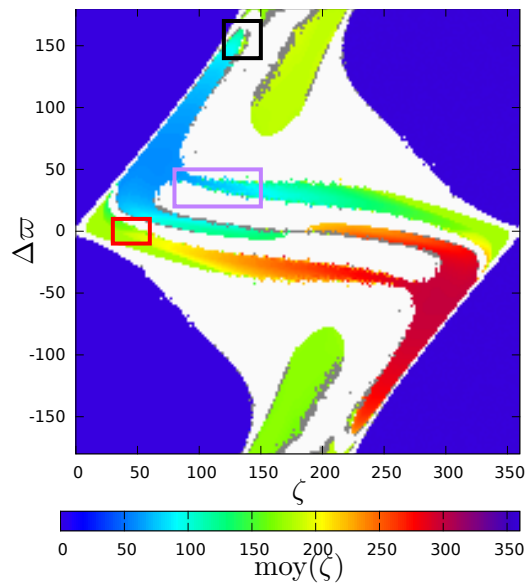


FIGURE 2.14 – Identification des régions où la stabilité à long terme est étudiée : la configuration  $G$  (rectangle noir), l'éventuelle reconnexion des familles  $\overline{\mathcal{F}}^g$  (rectangle violet) et le domaines de fers à cheval asymétriques (rectangle rouge).

Dans cette section nous étudions la stabilité sur le long terme de certaines régions de l'espace des phases. On se concentrera sur les régions de la variété de référence qui sont identifiées par des rectangles sur la figure 2.14 : une région où apparaissent les fer-à-cheval asymétriques ( $\mathcal{AHS}$ ), identifiée par le rectangle rouge, une région où apparaissent les orbites  $G$ , identifiée par le rectangle noir, et la région où se produit l'éventuelle reconnexion entre les familles  $\overline{\mathcal{F}}^g$  (rectangle violet). Les rectangles de conditions initiales sont susceptibles d'être légèrement déplacés car la position sur la variété représentative de certaines configurations (par exemple les  $\mathcal{AHS}$ ) évolue avec l'excentricité. Notons que la région encadrée par le rectangle noir a un intérêt double : en plus de contrôler la stabilité des configurations de type  $G$ , elle contrôle également la stabilité des configurations du voisinage du point  $\zeta = 180^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (qui est l'équilibre  $AL_3$  car ici  $m_1 = m_2$  et  $e_1 = e_2$ ), car les orbites en bas à gauche de la variété  $g = 0$  sont celles qui passent également au voisinage de ce point.

Pour étudier la stabilité de ces configurations, évaluons la diffusion du moyen mouve-

ment moyen  $\eta$  (Robutel et Laskar, 2001) :

$$\Delta\eta' = \log_{10} \left| \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1} \right|, \quad (2.45)$$

où  $\eta_1$  est calculé sur la première moitié de l'intégration et  $\eta_2$  sur la deuxième moitié. Cette quantité est calculée pour chaque trajectoire prenant pour condition initiale  $a_1 = a_2 = 1$  ua,  $e_1 = e_2$ ,  $\lambda_1 = \varpi_1 = 0^\circ$ , et  $\lambda_2$  et  $\varpi_2$  sont donnés par les coordonnées du point sur chaque figure.

### Choix de l'intégrateur et méthode

L'intégrateur SABA4 (Laskar et Robutel, 2001) que nous avons utilisé jusqu'à présent a l'avantage de conserver les intégrales premières du mouvement. Il s'agit cependant d'un intégrateur à pas constant. Or, pour de grandes excentricités, ce pas doit être adapté au moment où les planètes sont proches de leur périastres respectifs ( $dt = 0.001$  semble être un bon compromis pour des conditions initiales  $e_j = 0.7$ ). Pour vérifier la stabilité de systèmes avec des masses de  $\varepsilon = 10^{-6}$  sur des temps long devant la fréquence séculaire  $g = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , nous verrons dans la prochaine section que nous devons intégrer les trajectoires sur des temps de l'ordre de  $100/\varepsilon$ . Il est donc beaucoup plus rapide d'utiliser un intégrateur à pas variable pour ces cas excentriques (de plus nous n'intégrons que le problème plan). On utilise l'intégrateur DOPRI (Runge-Kutta (7)8) avec un pas minimal de 0.001 et une précision locale de  $10^{-14}$  (une tolérance plus grande dégrade significativement les résultats, une tolérance inférieure ralentit l'intégration). Néanmoins cet intégrateur ne conserve pas les intégrales premières du mouvement, et on constate une dérive linéaire de  $\eta$  dans les zones régulières quand on augmente le temps d'intégration pour une trajectoire donnée (Robutel et Laskar, 2001).

Sur la figure 2.15, nous comparons les résultats des deux intégrateurs pour les conditions initiales de la région encadrée en noir sur la figure 2.14. Les trajectoires des graphes de gauche ont été intégrés par SABA4 et ceux de droite par DOPRI. En haut nous avons des intégrations sur  $10/\varepsilon$  périodes orbitales et en bas sur  $100/\varepsilon$ .

Les deux intégrateurs donnent des résultats similaires sur  $10/\varepsilon$  périodes orbitales. La diffusion de  $\eta$  est plus importante dans le domaine des configurations  $G$  (centré en  $\zeta = 140^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 160^\circ$ ) que dans le domaine troyen (en bas à gauche) et le domaine quasi-satellite (en haut à gauche), mais la diffusion s'homogénéise pour des intégration sur  $100/\varepsilon$ . Cette diffusion plus importante sur des temps de  $10/\varepsilon$  peut donc s'expliquer par une mauvaise estimation de  $\eta$  sur la première et la seconde moitié de l'intégration. En effet, chaque tranche a une durée de  $5/\varepsilon$  période orbitale, et  $g$  est de l'ordre de  $\varepsilon$ . Si la valeur du moyen mouvement instantané  $n$  est sensible aux variations séculaires dans ce domaine, une intégration plus longue permet d'obtenir une meilleure estimation de sa valeur moyenne.

Sur  $100/\varepsilon$  périodes orbitales, la taille et la forme du domaine de stabilité est similaire dans les deux cas, mais la diffusion de  $\eta$  dans les zones régulières de l'espace des phases a augmenté d'un facteur 10 pour l'intégrateur DOPRI. La stabilité des différentes configurations est discutée dans la section suivante.

On constate que la plupart des trajectoires ayant une diffusion similaire à celle des zones régulières pour une durée d'intégration donnée ( $10/\varepsilon$  sur les graphes du haut) ne sont pas éjectés pendant la même simulation sur des temps 10 fois plus long (graphes du bas).



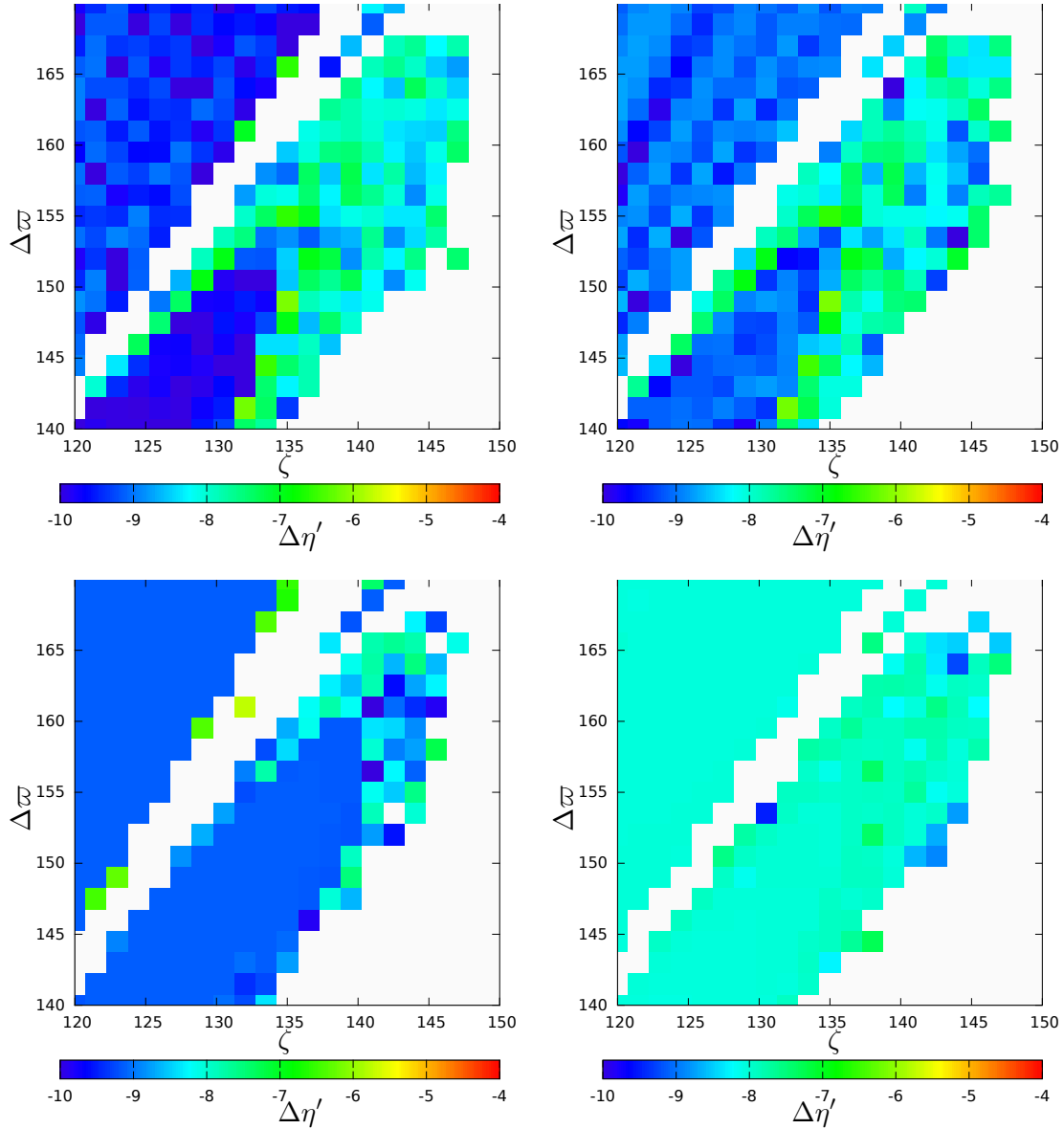


FIGURE 2.15 – diffusion de  $\eta$  pour  $e_1 = e_2 = 0.7$ ,  $m_1 = m_2 = 10^{-5}$ , avec à gauche l'intégrateur à pas constant SABA4 ( $dt = 0.001$  an) et à droite l'intégrateur DOPRI avec un pas variable (pas minimal  $dt = 0.001$ ) avec une précision de  $10^{-14}$ . Intégration sur  $10/\varepsilon$  an pour la ligne du haut et  $100/\varepsilon$  an sur la ligne du bas.

À partir de maintenant nous utilisons l'intégrateur à pas variable pour vérifier la stabilité les différentes configurations identifiées sur la figure 2.14. Avec cet intégrateur et une précision de  $10^{-14}$ , la diffusion dans les domaines régulier (voir par exemple les points aux alentours de  $\zeta = 120^\circ$  et  $\Delta\pi = 170^\circ$  dans le domaine quasi-satellite) est de l'ordre de  $\Delta\eta' \approx 10^{-9}$  pour les intégrations sur  $10^6$  périodes orbitales,  $\Delta\eta' \approx 10^{-8}$  pour  $10^7$  périodes orbitales et  $\Delta\eta' \approx 10^{-7}$  pour  $10^8$  périodes orbitales, ce qui est cohérent avec la dérive linéaire observée par Robutel et Laskar (2001). Si une trajectoire diffuse d'au plus  $\Delta\eta' \approx 10^{k-15}$  pour une intégration sur  $10^k$  périodes orbitales (avec l'intégrateur DOPRI), on considèrera qu'elle est stable sur des temps long devant  $10^k$  périodes orbitales (au moins sur  $10^{k+1}$  périodes orbitales). Nous définissons, à partir de l'équation (2.46), la diffusion

$\Delta\eta$  qui prend en compte la dérive due à l'erreur de méthode (Robutel et Laskar, 2001) :

$$\Delta\eta = \Delta\eta' - (k - 6), \quad (2.46)$$

### Configuration $G$ et voisinage de $AL_3$

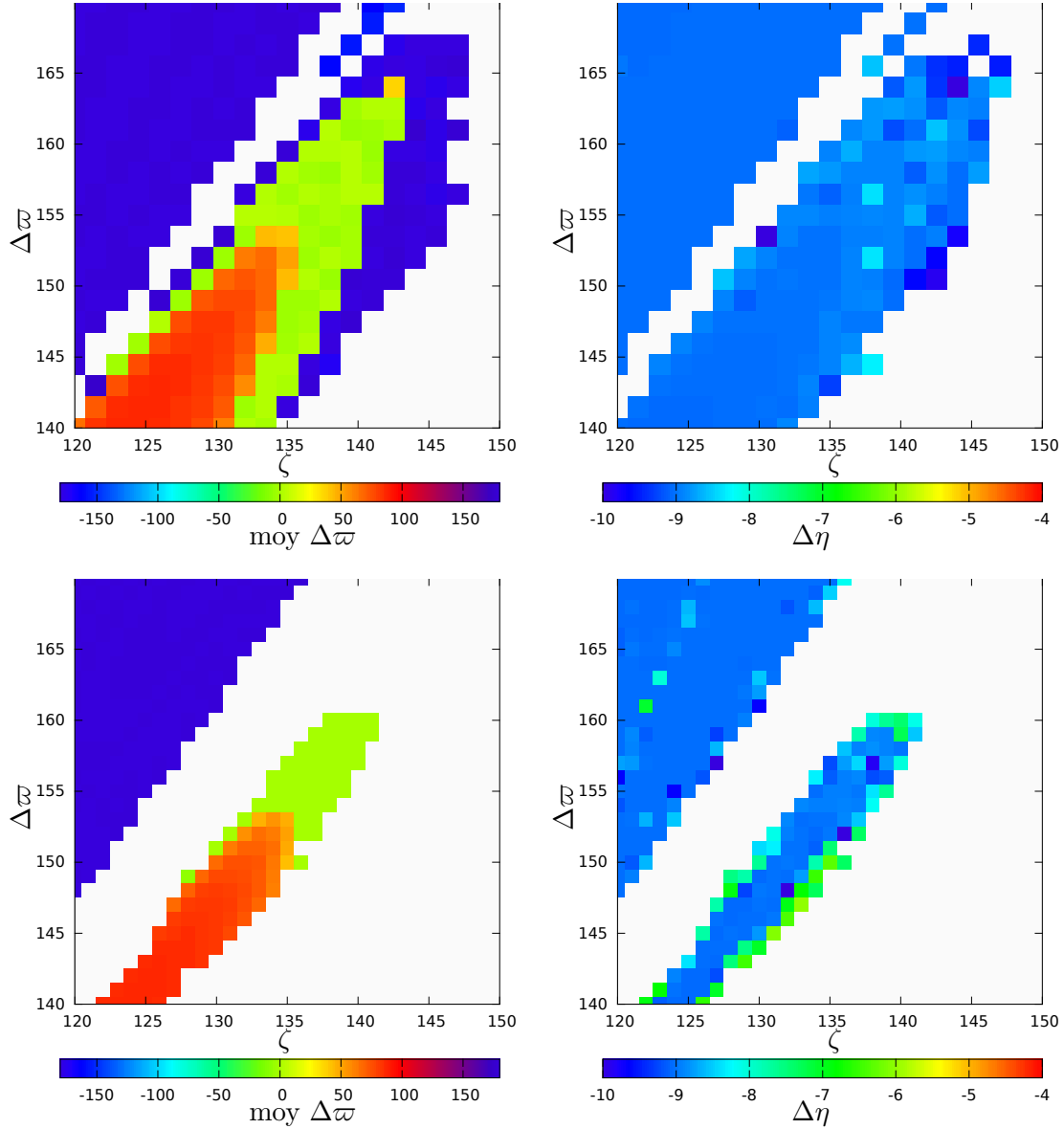


FIGURE 2.16 – Domaine de stabilité de la configuration  $G$  pour  $\varepsilon = m_1/m_0 = m_2/m_0 = 10^{-5}$  pour les graphes du haut et  $\varepsilon = 10^{-4}$  pour les graphes du bas. Intégration sur  $100/\varepsilon$  dans les deux cas. Les graphes de gauche représentent la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur la trajectoire pour pouvoir identifier la position de la séparatrice. Les graphes de droite représentent la diffusion de  $\eta$  pour chaque trajectoire.

Les trajectoires passant proche de  $AL_3$  sont stables sur des temps long par rapport à  $100/\varepsilon$  pour  $\varepsilon = m_1/m_0 = m_2/m_0 = 10^{-5}$ . En effet, ces trajectoires (en rouge sur le graphe de gauche figure 2.16) ont une diffusion similaire aux orbites régulières du domaine des quasi-satellites (voir tous les graphes des figures 2.15 et le graphe en haut à droite 2.16).

Cela reste vrai pour  $\varepsilon = 10^{-4}$ , voir les graphes du bas sur la figure 2.16.

Le domaine de la configuration  $G$ , situé au-dessus de la séparatrice identifiée par l'interface orange/vert sur les graphes de gauche de la figure 2.16, contient également des orbites stables sur des temps longs devant  $100/\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $\varepsilon = 10^{-4}$ . En effet, pour ces deux valeurs des masses, ce domaine contient des orbites dont la diffusion est comparable aux orbites régulières du système.

De plus, pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  on remarque que le domaine des configurations  $G$ , possède la même séparation que dans les autres domaines : des configurations librent autour de  $\Delta\varpi = 0^\circ$  (vert sur le graphe en haut à gauche de la figure 2.16) et d'autres autour de  $\Delta\varpi = 180^\circ$  (bleu).

### Reconnexion des familles $\overline{\mathcal{F}}^g$

Nous avons vu en section 2.5 que les familles  $\overline{\mathcal{F}}_{L_4}^g$ ,  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{AHS}_1}^g$  et  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{AHS}_2}^g$ , ainsi que leur équivalent du voisinage de  $L_5$  semblent se reconnecter pour des valeurs des excentricités semblables à celles nécessaires à la reconnexion des familles  $\overline{\mathcal{F}}^v$ . Dans le problème séculaire, la reconnexion des  $\overline{\mathcal{F}}^g$  crée une famille continue d'orbites périodiques passant par  $L_4$ , les domaines  $\mathcal{AHS}_1$ ,  $\mathcal{AHS}_2$ , et  $L_5$ , avant de revenir à  $L_4$  en repassant par les domaines  $\mathcal{AHS}_2$  et  $\mathcal{AHS}_1$  (voir les pixels noirs sur la figure 2.10).

Nous nous demandons si il est effectivement possible de passer continûment (par le biais d'orbites quasi-périodiques stables) des configurations fers à cheval au voisinage de  $L_4$  dans le problème complet. Il est important de noter que, comme illustré par les symboles \* et  $\times$  sur la figure 2.9, notre variété de conditions initiales intersecte les mêmes domaines de fers à cheval asymétriques en des endroits différents : le domaine  $\mathcal{AHS}_1$  est intersecté en  $\Delta\varpi > 0$  et  $\mathcal{AHS}_2$  est intersecté en  $\Delta\varpi < 0$ . Les orbites qui nous permettraient de passer continûment du voisinage de  $L_4$  au fer à cheval asymétriques pour  $\zeta > 180^\circ$  sont donc, si elles existent, les mêmes qui nous permettraient de passer continûment du voisinage de  $L_4$  au fer à cheval asymétriques pour  $\zeta < 180^\circ$ . il est donc suffisant d'étudier les trajectoires issues du rectangle violet de la figure 2.14 pour conclure sur cette reconnexion.

Pour  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.7$ , on trouve une zone d'orbites instables au voisinage de  $\zeta = 100^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 50^\circ$  empêchant cette reconnexion dans le problème complet (voir figure 2.9). En prenant  $e_1 = e_2 = 0.62$ , les graphes du haut de la figures 2.17 indiquent que ce passage existe au moins sur des temps de l'ordre de  $100/\varepsilon$  périodes orbitales. Cependant, les orbites sur le bord de cette reconnexion ont une diffusion non négligeable, et seule les trajectoires dans le voisinage immédiat de  $\overline{\mathcal{F}}^g$  semblent stable sur des temps long devant  $100/\varepsilon$  périodes orbitales (comparer les intégrations sur  $10/\varepsilon$  périodes orbitales à gauche et  $100/\varepsilon$  périodes orbitales à droite).

En revanche, pour des masses plus faibles ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ), cette reconnexion existe sur des temps longs devant  $100/\varepsilon$  périodes orbitales pour  $e_1 = e_2 = 0.7$  (voir les graphes du bas figure 2.17).

### Configuration $\mathcal{AHS}$

En ce qui concerne les configurations en fers à cheval asymétriques ( $\mathcal{AHS}_k$ ), on montre figure 2.18 qu'il existe un domaine stable pour  $\mathcal{AHS}_1$  (rouge sur le graphe de gauche) et  $\mathcal{AHS}_2$  (bleu) sur des temps longs devant  $100/\varepsilon$  périodes orbitales pour  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Comme

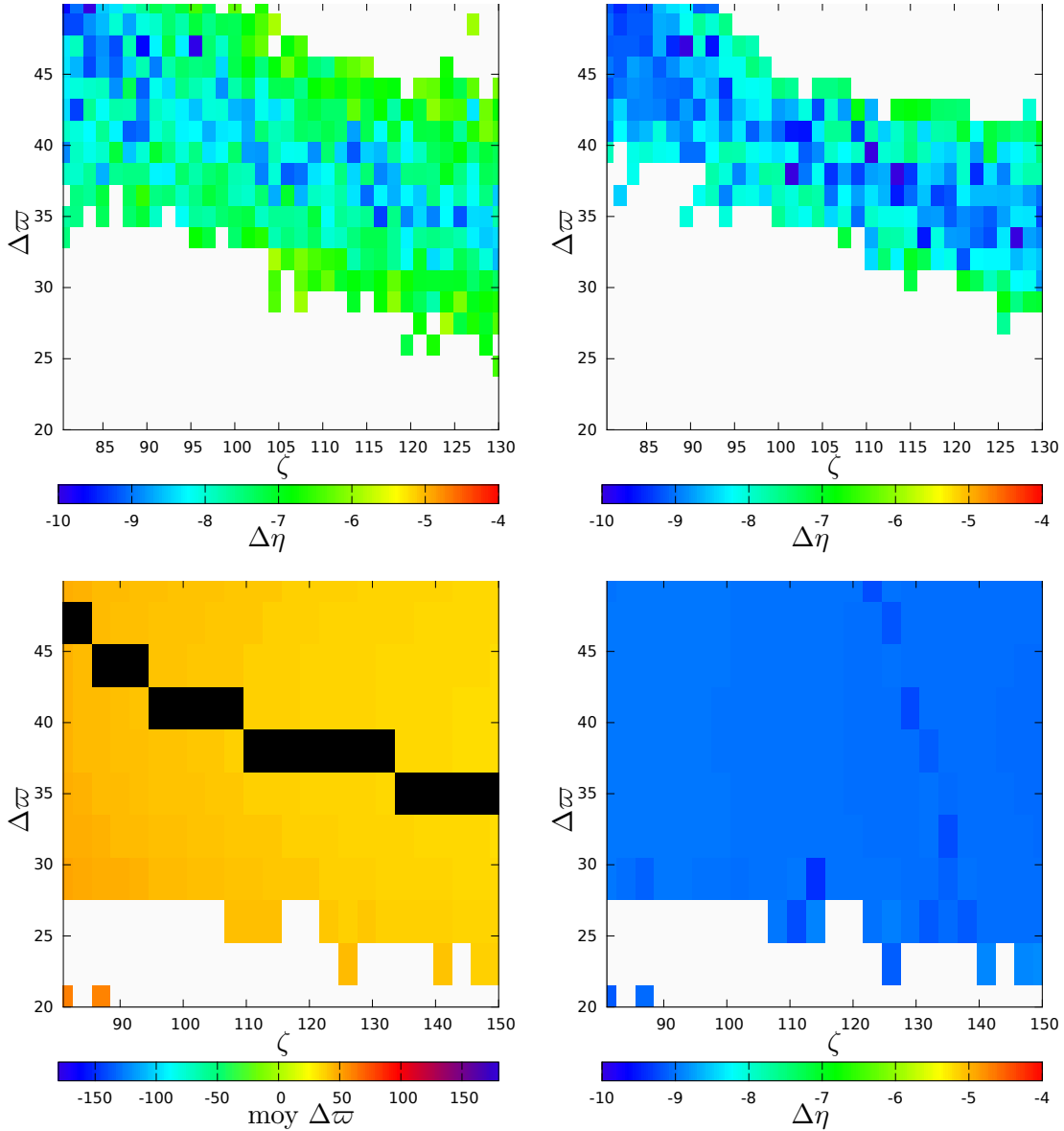


FIGURE 2.17 – Stabilité au voisinage de la reconnexion des  $\overline{\mathcal{F}}^g$  pour  $\varepsilon = m_1/m_0 = m_2/m_0 = 10^{-6}$  pour les graphes du bas (en intégrant sur  $100/\varepsilon$  périodes orbitales) et  $\varepsilon = 10^{-5}$  pour les graphes du haut ( $10/\varepsilon$  périodes orbitales à gauche et  $100\varepsilon$  à droite). Le graphe en bas à gauche représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$ . Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$ , sont représentées en noir. Les autres graphes représentent la diffusion de  $\eta$  pour chaque trajectoire.

la taille des zones instable tend à diminuer quand  $\varepsilon$  diminue, des orbites stables  $\mathcal{AHS}_k$  existent pour tout  $\varepsilon \leq 10^{-4}$ .

## 2.6 Étude des coorbitaux excentriques de masse quelconque

Lorsque  $m_2 \neq m_1$ , les équilibres de Lagrange elliptiques  $L_k$  se trouvent dans le plan  $e_1 = e_2$ , alors que les équilibres anti-lagranges  $AL_k$  se trouvent en  $m_1 e_1 = m_2 e_2$  pour une

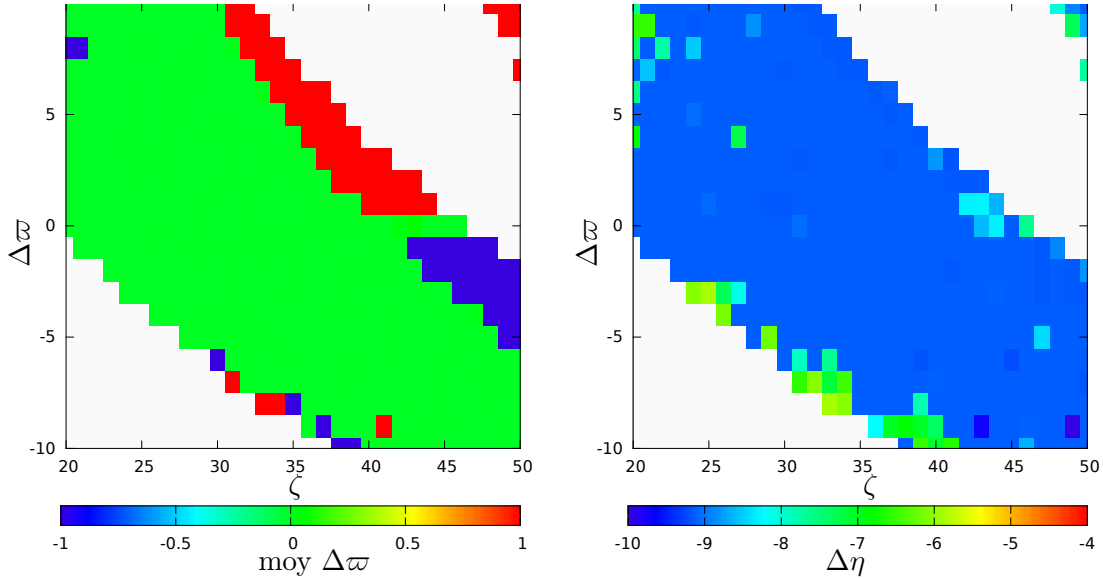


FIGURE 2.18 – Stabilité au voisinage de la reconnexion des  $\overline{\mathcal{F}}^g$  pour  $\varepsilon = m_1/m_0 = m_2/m_0 = 10^{-6}$  pour les graphes du haut et  $\varepsilon = 10^{-5}$  pour les graphes du bas. Intégration sur  $10/\varepsilon$  dans les deux cas. Les graphes de gauche représentent la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$ . Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 1^\circ$ , sont représentées en noir. Les graphes de droite représentent la diffusion de  $\eta$  pour chaque trajectoire.

valeur donnée du moment cinétique, au moins pour de faibles excentricités (voir Hadjidemetriou et Voyatzis, 2011). De même, comme pour le cas circulaire, ces équilibres ne se situent pas en la même valeur de  $Z$  (voir section 1.2.2). Des conditions initiales sur une variété à  $Z$  et  $\Pi$  constants ne peuvent donc pas être représentatives de l'ensemble des configurations pour une valeur du moment cinétique donné.

Dans un premier temps, on tracera de tels plans afin de comparer certaines propriétés de l'espace des phases quand  $m_1 \neq m_2$  avec le cas  $m_1 = m_2$  vu dans les sections précédentes. Dans un second temps, on décrira un algorithme qui vise à déterminer une variété de référence pour une configuration coorbitale donnée.

### 2.6.1 Étude de l'espace des phases

Comme nous l'avons fait dans le cas  $m_1 = m_2$ , on s'intéresse à des plans de conditions initiales à valeur du moment cinétique total fixé.

$$J_1(e_1 = e_2 = 0.4)$$

Pour commencer, comparons les orbites issues de deux plans de conditions initiales identiques à l'exception de la répartition de la masse entre les coorbitaux :  $m_1 = m_2$  pour le plan de référence figure 2.6, et  $m_2 = 3m_1$  pour le plan de conditions initiales figure 2.19. La dynamique du degré de liberté  $(Z, \zeta)$  (graphe de gauche) est similaire sur ces deux plans. Les domaines de stabilité de chaque configuration semblent légèrement moins étendus dans le cas de deux masses différentes, mais il ne s'agit justement pas d'une variété représentative : les extremums des angles  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  peuvent être atteints autre part dans l'espace des phases. La dynamique du degré de liberté  $\Delta\varpi$  est quant à elle

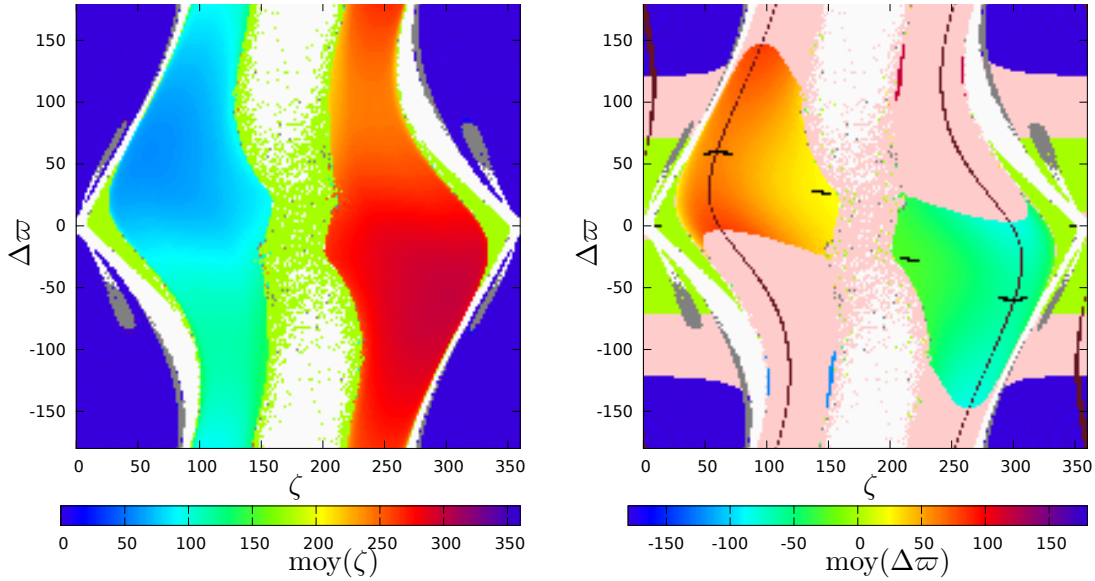


FIGURE 2.19 – Grille de conditions initiales pour  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ ,  $m_2 = 3m_1 = 1.5 \cdot 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.4$ . Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Sur la figure de droite, le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite, et la couleur saumon est affectée aux orbites pour lesquelles  $\Delta\varpi$  circule. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$ , sont représentées en marron. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

totalemment différente sur près de la moitié du plan de condition initiales : pour  $m_2 = 3m_1$ , une portion significative des trajectoires issues du plan voit  $\Delta\varpi$  circuler (ces orbites sont identifiées en saumon sur le graphe de droite, figure 2.19). Sur ce même graphe, on constate que seules quelques orbites des configurations troyennes vérifient la condition (2.43). Cela est cohérent avec les résultats de la section 2.7.2 où nous verrons que la variété  $\overline{\mathcal{F}}^g$  est tangente au plan  $e_1 = e_2$  en les équilibres elliptiques  $L_4$  et  $L_5$  et qu'elle s'en éloigne quand on s'éloigne de ces points d'équilibres. La variété  $\overline{\mathcal{F}}^\nu$  semble quant à elle rester au voisinage du plan  $a_1 = a_2$  (elle y reste  $\varepsilon$  proche au moins dans le cas circulaire, voir section 1.2.2).

Le plan de conditions initiales représenté en figure 2.20 ne diffère de celui de la figure 2.19 que par la valeur initiale des excentricités ( $e_1 = 0.7$  et  $e_2 \approx 0.18$ ), mais la valeur du moment cinétique total reste la même. Il s'agit donc d'une coupe différente du même portrait de phase. Cette coupe est significativement plus proche des points  $AL_4$  et  $AL_5$  (situés en  $e_1 \approx 0.67$ ,  $e_2 \approx 0.22$  selon l'approximation linéaire). Ce plan de conditions initiales intersecte d'ailleurs le domaine des configurations voisines de ces points (zone centrée en  $\zeta = 140^\circ$ ,  $\Delta\varpi = -100^\circ$  pour le voisinage de  $AL_4$ ). Notons que dans le cas de masses différentes il n'est peut-être pas possible de passer directement d'orbites voisines de  $L_4$  à des orbites voisines de  $AL_4$  car les deux régions semblent toujours séparées par une région où  $\Delta\varpi$  circule (vérifié pour  $e_1 \in \{0, 0.15, 0.30, 0.55, 0.7\}$  et  $e_2$  tel que  $J_1 = J_1(e_1 = e_2 = 0.4)$ ).

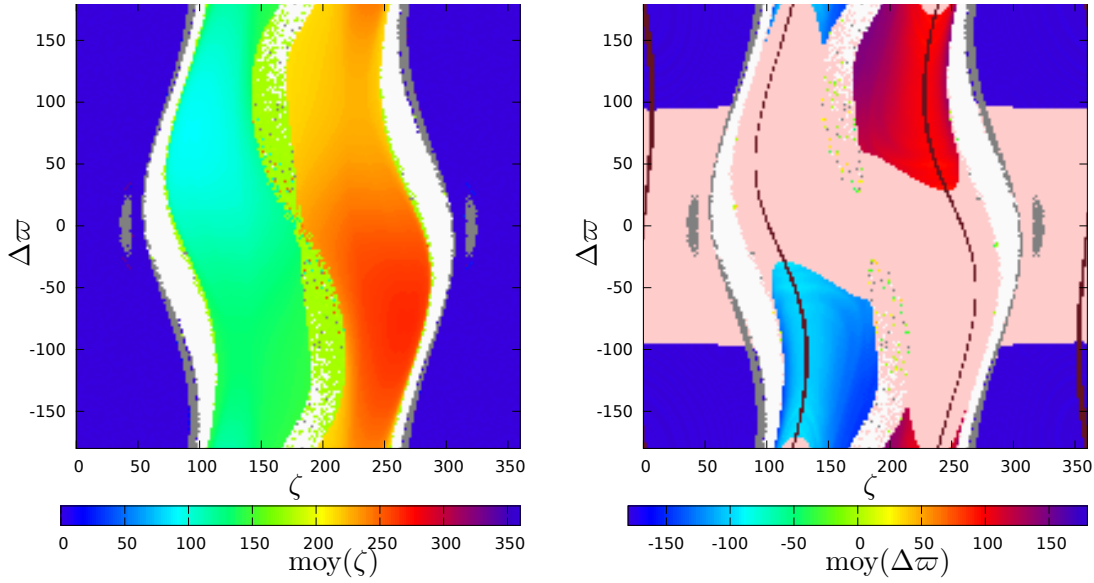


FIGURE 2.20 – Grille de conditions initiales pour  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ ,  $m_2 = 3m_1 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $e_1 = 0.7$  et  $e_2 \approx 0.18$  de manière à ce que la valeur de  $J_1$  soit identique à celle de la figure 2.19. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Sur la figure de droite, le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite, et la couleur saumon est affectée aux orbites pour lesquelles  $\Delta\varpi$  circule. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}'$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$ , sont représentées en marron. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir.  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$ .

$$J_1(e_1 = e_2 = 0.65)$$

La figure 2.21 représente l'évolution de la valeur moyenne de  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  sur un plan de conditions initiales  $e_1 = e_2 = 0.65$ ,  $a_1 = a_2 = 1$  pour  $m_2 = 3m_1 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ . Cette figure est à comparer avec la figure 2.8 où les trajectoires ont les mêmes conditions initiales pour  $m_1 = m_2$ . On observe ici le même changement de topologie que dans le cas de masses égales, la reconnexion des familles  $\overline{\mathcal{F}}$  semble également survenir quand  $m_1 \neq m_2$ . On constate notamment l'apparition des régions des fers-à-cheval asymétriques. Pour cette valeur des excentricités, aucune des trajectoires issue de ce plan voit l'angle  $\Delta\varpi$  circuler (il n'est pas exclu que ce soit le cas en prenant des excentricités initiales différentes pour la même valeur de moment cinétique). Notons que pour ces valeurs des masses et des excentricités, le pas de temps de 0.01 périodes orbitales n'est pas adaptée : des orbites stables sont éjectées (comparer les figures 2.21 et 2.22).

### 2.6.2 variété de référence pour $m_2 \neq m_1$

En section 2.4.3, nous avons déterminé l'expression d'une variété de référence pour le voisinage de l'équilibre  $L_4$  circulaire pour des masses quelconques. Dans cette section, nous cherchons à étendre la détermination de cette variété représentative à l'ensemble du domaine des configurations troyennes librant autour de l'équilibre excentrique  $L_4$  :  $\Sigma_{L_4}$ .

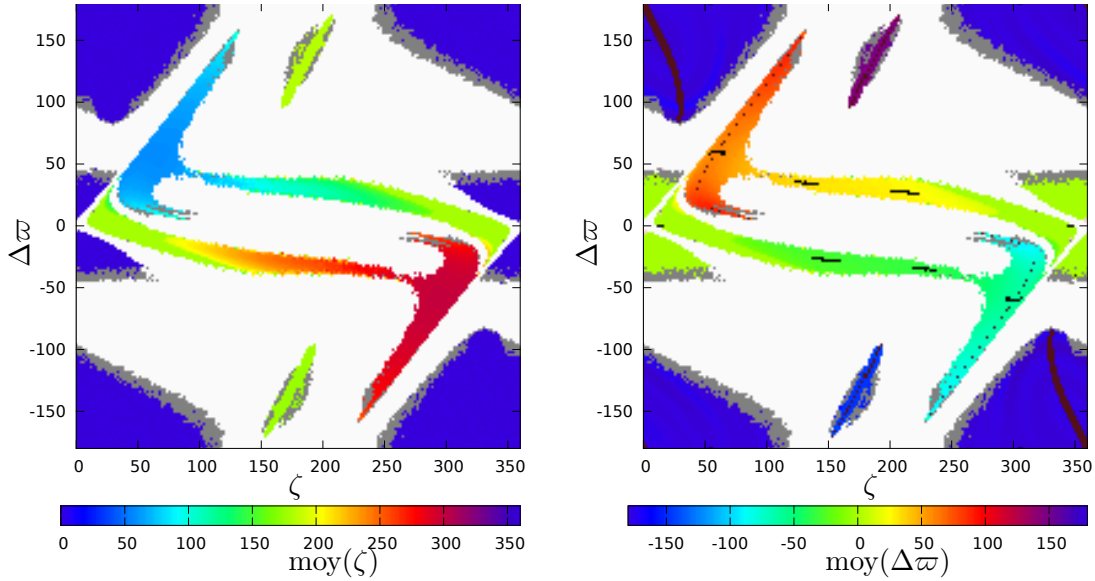


FIGURE 2.21 – grille de conditions initiales pour  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ ,  $m_2 = 3m_1 = 1.5 \cdot 10^{-5}$  et  $e_1 = e_2 = 0.65$ . Le plan est défini par  $a_1 = a_2 = 1 \text{ ua}$ , et  $e_1 = e_2$ . Chaque point de ce plan est une condition initiale d'orbite. Sur la figure de gauche, le code couleur correspond à la valeur moyenne de  $\zeta$  sur cette orbite. Sur la figure de droite, le code couleur représente la valeur moyenne de  $\Delta\varpi$  sur chaque orbite. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^v$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_\nu = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir. Les orbites ayant une diffusion en demi-grand axe supérieur à  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$  ont été représentées en gris.

On simplifie le problème en considérant que toutes les trajectoires de  $\Sigma_{L_4}$  passent par le plan  $a_1 = a_2$ , ou de manière équivalente par  $Z = Z_\nu = Z(a_1 = a_2)$ . En pratique nous savons que, au moins pour le cas quasi-circulaire, elles passent par une variété qui reste  $\varepsilon$  proche de ce plan. Il nous reste à déterminer  $\mathcal{V}_\Pi$ . Nous cherchons donc à déterminer la variété  $\Delta\dot{\varpi} = 0$  (section 2.4.3).

### Description de l'algorithme

Afin d'estimer numériquement la position de la variété  $\Delta\dot{\varpi} = 0$  dans l'espace des phases, on implémentera l'algorithme suivant : on prend en condition initiale une carte  $(\zeta, \Delta\varpi) \in [0^\circ, 360^\circ]^2$ ,  $Z = Z_\nu$  et  $\Pi = \Pi_\nu^0$  avec  $\Pi_\nu^0$  quelconque. On prendra par exemple  $\Pi_\nu^0$  tel que  $e_1 = e_2$  (nous prenons donc en condition initiale de l'algorithme le plan représenté en figure 2.19). Pour chacune des trajectoires intégrées depuis ces conditions initiales sur plusieurs périodes de  $g$ , on enregistre les instants  $t_Z^k$  où  $Z = Z_\nu$  (par interpolation linéaire). Notons  $t_Z^{k_{\min}}$  l'instant où  $\Delta\varpi(t_Z^k)$  est minimal et  $t_Z^{k_{\max}}$  l'instant où  $\Delta\varpi(t_Z^k)$  est



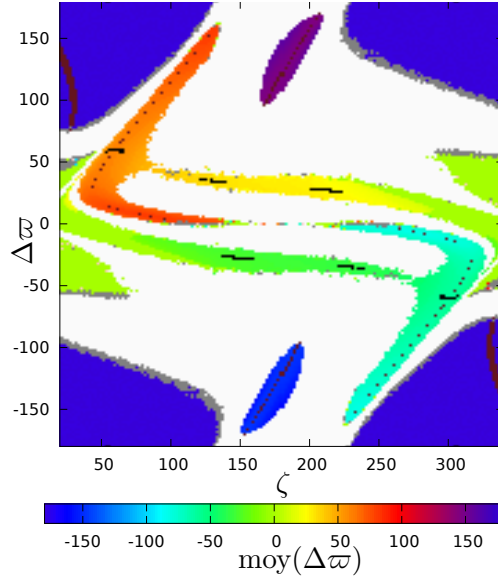


FIGURE 2.22 – Conditions initiales, temps d'intégration et code couleur identiques au graphe de droite de la figure 2.21 pour  $\zeta \in [20^\circ, 340^\circ]$ . Pas de temps :  $dt = 0.001$  périodes orbitales.

maximal (on discutera le cas où  $\Delta\varpi$  circule à la fin de cette section). On définit ensuite :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{1,1} &= \min(\zeta(t_Z^{k_{\min}}), \zeta(t_Z^{k_{\min}+1})) \\
 \zeta_{1,2} &= \max(\zeta(t_Z^{k_{\min}}), \zeta(t_Z^{k_{\min}+1})) \\
 \zeta_{2,1} &= \min(\zeta(t_Z^{k_{\max}}), \zeta(t_Z^{k_{\max}+1})) \\
 \zeta_{2,2} &= \max(\zeta(t_Z^{k_{\max}}), \zeta(t_Z^{k_{\max}+1}))
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour obtenir un ensemble de 4 points qui sont dans le voisinage de  $\mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned}
 (Z = Z_{\mathcal{V}}, \zeta_{1,1}, \Delta\varpi_1, \Pi_1) \\
 (Z = Z_{\mathcal{V}}, \zeta_{1,2}, \Delta\varpi_1, \Pi_1) \\
 (Z = Z_{\mathcal{V}}, \zeta_{2,1}, \Delta\varpi_2, \Pi_2) \\
 (Z = Z_{\mathcal{V}}, \zeta_{2,2}, \Delta\varpi_2, \Pi_2)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Avec l'indice  $_1$  pour la valeur au temps  $t_Z^{k_{\min}}$  et l'indice  $_2$  pour  $t_Z^{k_{\max}}$ . on note  $\mathcal{V}_{\Pi}^1$  la variété définie par  $\mathcal{V}_{\Pi}^1(\zeta_{j,k}, \Delta\varpi_j) = \Pi_j$  pour l'ensemble des orbites issues de la variété de conditions initiales  $(\mathcal{V}_Z, \mathcal{V}_{\Pi}^0)$ . Comme nous l'avons rappelé, toutes les orbites ne passent pas dans le voisinage de  $e_1 = e_2$ , la variété définie par  $(Z = 0, \Pi = \Pi_{\mathcal{V}}^1)$  comporte donc des "trous", il est donc nécessaire d'itérer plusieurs fois cet algorithme en interpolant à chaque fois la variété  $\mathcal{V}_{\Pi}^j$  afin de reconstituer un maillage régulier selon les directions  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$  et de converger vers une variété proche de  $\mathcal{V}$  en tout point de l'espace des phases.

### Application de l'algorithme

L'algorithme précédemment décrit a été utilisé sur le voisinage de l'équilibre de Lagrange elliptique pour  $m_1 = 3m_2$  et une énergie cinétique calculée pour  $e_1 = e_2 = 0.4$

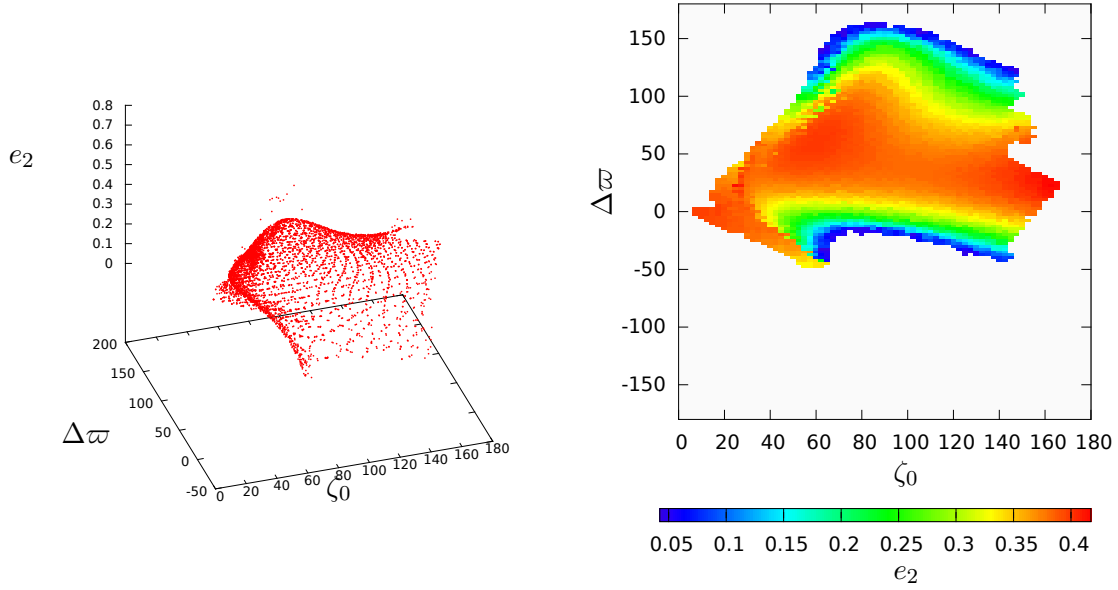


FIGURE 2.23 – Résultat de l’algorithme détaillé en section 2.6.2 après 3 itérations, pour  $m_1 = 3m_2$  et une énergie cinétique fixée calculée pour  $e_1 = e_2 = 0.4$ . Le graphe de gauche représente les points de  $\Delta\dot{\varpi} = 0$  identifiés par l’algorithme dans les coordonnées  $(\zeta, \Delta\varpi, e_2)$ . Le graphe de droite représente la valeur de  $e_2$  sur cette variété après interpolation. Voir le texte pour plus de détails.

Le résultat de la 3ème itération de l’algorithme est présenté en figure 2.24 dans les variables  $\zeta$ ,  $\Delta\varpi$ ,  $e_2$ . On rappelle que  $Z_{\mathcal{V}} = Z(a_1 = a_2)$  et que la valeur de  $H$  est imposée par celles de  $e_2$  et du moment cinétique choisi. On peut voir sur la figure de gauche que la variété  $\Delta\dot{\varpi} = 0$  semble être lisse et passe bien par l’équilibre de Lagrange excentrique ( $\zeta = 60^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 60^\circ$ ,  $e_1 = e_2 = 0.4$ ). Certains points de la variété  $\Delta\dot{\varpi} = 0$  ont été identifiés dans le domaine des fers-à-cheval.

Le résultat de l’interpolation (à droite) semble régulier, à l’exception de la séparatrice entre les fers-à-cheval et les configurations troyennes, et les zones de fortes pentes dans le quadrant supérieur gauche par rapport à l’équilibre de Lagrange. Cela peut être amélioré en augmentant le nombre de points dans cette région, en améliorant la détermination de l’instant où  $\Delta\dot{\varpi} = 0$  en augmentant par exemple la durée de l’intégration, et en améliorant la fonction d’interpolation (on a utilisé ici une simple interpolation linéaire à trois points).

### Exploitation de la variété de référence

On intègre ici les trajectoires ayant pour conditions initiales le maillage résultant de l’algorithme explicité en section 2.6.2. Ces conditions initiales sont donc proches de la variété de référence définie par  $Z_{\mathcal{V}} = Z(a_1 = a_2)$  et  $H_{\mathcal{V}}$  tel que  $\Delta\dot{\varpi} = 0$ . L’approximation obtenue de cette variété a été présentée en section 2.6.2. Nous rappelons que pour les conditions initiales choisies, les masses des co-orbitaux, l’énergie cinétique totale, ainsi que l’ensemble des autres conditions initiales sont identiques à celles du plan de conditions initiales représenté en figures 2.19 et 2.20 à l’exception de la valeur de  $H$ . Nous pouvons donc comparer ces différentes variétés de conditions initiales qui font parties du même

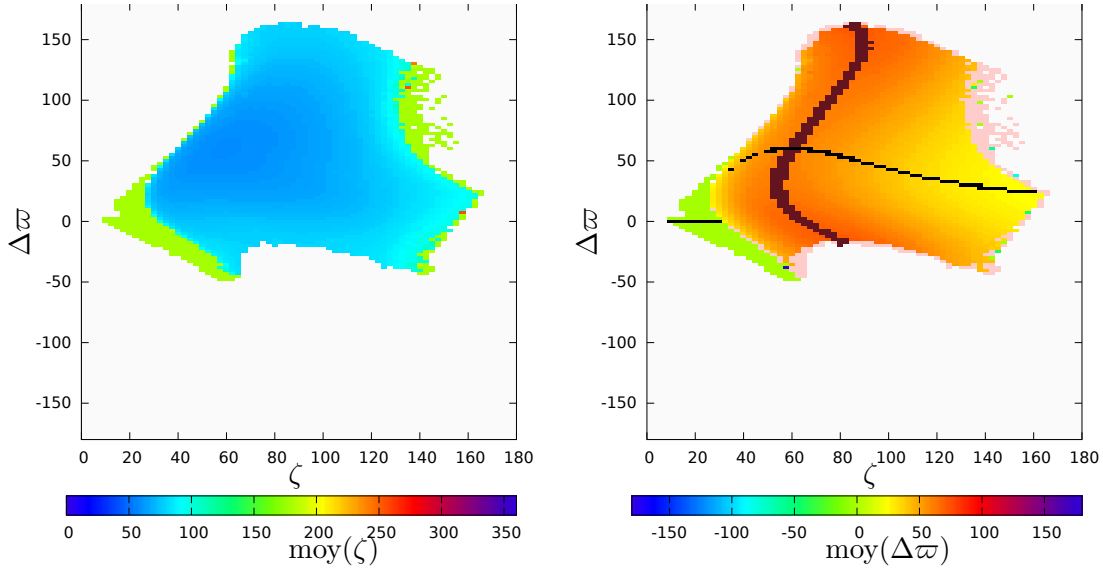


FIGURE 2.24 – Le code couleur représente la valeur moyenne de  $\zeta$  sur le graphe de gauche et  $\Delta\varpi$  sur le graphe de droite pour chaque orbite en prenant en condition initiale le résultat de l’algorithme représenté sur la figure 2.24. La couleur saumon est attribuée sur le graphe de droite quand  $\Delta\varpi$  circule. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^{\nu}$ , donc celles vérifiant la relation (2.44) avec  $\epsilon_{\nu} = 10^{-3.5}$  sont représentées en marron sur le graphe de droite. Les orbites proches de  $\overline{\mathcal{F}}^g$ , donc celles vérifiant la relation (2.43) avec  $\epsilon_g = 3^\circ$  sont représentées en noir sur le graphe de droite. Les orbites ayant une diffusion en demi-grand axe supérieur à  $\epsilon_a = 10^{-5.5}$  ont été représentées en gris.

espace des phases.

Nous rappelons que notre but est de représenter exhaustivement les orbites troyennes qui librent autour de l’équilibre de Lagrange excentrique situé en  $e_1 = e_2 = 0.4$  avec  $\zeta = \Delta\varpi = 60^\circ$ . Le plan de conditions initiales figure 2.20 ne génère aucune trajectoire librant autour de  $L_4$  excentrique car toutes les trajectoires intersectées par ce plan voient leur angle  $\Delta\varpi$  circuler. Le plan de conditions initiales figure 2.19 contient quant à lui des orbites du voisinage de  $L_4$ , ainsi que le point  $L_4$  lui-même. Cependant, la plupart des orbites de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^g$  ne sont pas représentées par ce plan : pour  $m_2 \neq m_1$ , ces orbites n’ont jamais  $e_1 = e_2$ . À l’inverse, nous pouvons voir que la variété de référence  $\mathcal{V}$  que nous avons construite semble être au voisinage de l’ensemble des membres de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^g$  (voir les pixels noirs sur la figure 2.24). On note également que la partie de la variété de référence construite dans le domaine des fers-à-cheval intersecte également la famille  $\overline{\mathcal{F}}_{HS}$ .

## Discussion

La variété  $\mathcal{V}$  obtenue avec l’algorithme décrit en section 2.6.2 semble répondre aux attentes. Il resterait à vérifier, avec une méthode similaire à celle utilisée en section 2.4.4 que l’ensemble des orbites librant autour de  $L_4$  passe bien au voisinage de  $\mathcal{V}$ .

On peut bien sûr appliquer cet algorithme pour l’ensemble des configurations coorbi-

tales : fer-à-cheval, quasi-satellite, etc. pour une valeur donnée du moment cinétique et des masses. Certains détails techniques sont à prendre en compte :

- On ne peut pas espérer, comme nous pouvons le faire pour  $m_2 = m_1$ , représenter l'ensemble des configurations passant par le plan  $a_1 = a_2$  sur un seul graphe en deux dimensions, en tout cas pas avec les coordonnées  $\zeta$  et  $\Delta\varpi$ . En effet, quand  $m_2 \neq m_1$ , pour un couple donné  $(\zeta, \Delta\varpi)$ , peut passer la variété représentative de deux configurations différentes, par exemple celle des orbites librant autour de  $L_4$  et celle des orbites librant autour de  $AL_4$  (pour des  $\Pi$  différents).
- Les orbites où  $\Delta\varpi$  circule doivent être traitées différemment. Toutes ces orbites passent par exemple par  $\Delta\varpi = 0$ , on peut donc remplacer la variété  $\Delta\varpi = 0$  par  $\Delta\varpi = 0$  et paramétrer la variété de conditions initiales par  $\zeta$  et  $\Pi$ .
- Certaines orbites peuvent voir  $\Delta\varpi$  s'annuler plus de deux fois par période  $2\pi/g$  sur leur orbite (c'est le cas par exemple de certaines orbites de la configuration  $G$ ). dans ce cas il faut bien "choisir" les points qui constitueront la variété de référence.

## 2.7 Dynamique au voisinage des équilibres elliptiques $\mathcal{F}_k^2$

Dans cette section, nous allons décrire la dynamique au voisinage des équilibres de Lagrange excentriques émergeant des points fixes circulaires  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  : les familles  $\mathcal{F}^2$ . Cette étude sera effectuée analytiquement. On se replace dans le problème moyen (non réduit), et on repart des hamiltoniens  $\overline{H}_{L_k}$  dont la partie quadratique diagonale est explicitée par les équations (2.8) et (2.10).

Les  $\mathcal{F}_k^2$  étant des familles de points fixes du problème moyen (familles des équilibres de Lagrange excentriques), nous avons expliqué en section 2.3.3 qu'il était possible de translater le hamiltonien le long de celles-ci afin de connaître la dynamique au voisinage d'une orbite donnée de ces familles. Nous allons commencer par calculer l'évolution des fréquences fondamentales le long des familles  $\mathcal{F}_3^2$  et  $\mathcal{F}_4^2$  au premier ordre en  $\varepsilon$  et à un ordre  $m$  en  $e_1$ . On calculera ensuite la position des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^j$  au voisinage des  $\mathcal{F}_k^2$  afin de confirmer les identifications des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^\nu$  et  $\overline{\mathcal{F}}_k^g$  effectuées dans le problème moyen réduit dans les sections précédentes.

### 2.7.1 Hamiltonien au voisinage de la famille $\mathcal{F}_4^2$

Nous partons du membre connu de cette famille situé en  $e_1 = 0$ , le point  $L_4$ . Le hamiltonien  $\overline{H}_{L_4}$ , dont la partie quadratique est exprimée eq. (2.8), est le hamiltonien au voisinage de ce point d'équilibre.  $\mathcal{F}_4^2$  vérifie  $z_0 = z_1 = 0$  (voir section 2.2). On effectue donc le changement de variable suivant :

$$\chi_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)(z'_0, \tilde{z}'_0, z'_1, \tilde{z}'_1, z'_2, \tilde{z}'_2) = (z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2) \quad (2.49)$$

où

$$z_2 = z_2^0(e_1) + z'_2, \quad \tilde{z}_2 = -i\overline{z_2^0(e_1)} + \tilde{z}'_2, \quad (2.50)$$

et l'identité pour les autres variables.

La valeur de la translation  $z_2^0(e_1)$  pour un  $e_1$  donné se calcule grâce à l'équation (2.12) :

$$z_2^0 = \frac{\sqrt{m'_1\Lambda_1} + \sqrt{m'_2\Lambda_2}}{\sqrt{2}\sqrt{m'_1 + m'_2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_1^2}} e^{-i\pi/3}. \quad (2.51)$$

Après translation, nous obtenons le hamiltonien suivant :

$$\overline{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1) = \overline{H}_{L_4} \circ \chi_{\mathcal{F}_4^2}^{-1}(e_1) = \overline{H}'_{\mathcal{F}_4^2}(e_1) + \mathcal{O}(e_1^{m+1}) \quad (2.52)$$

où chaque monôme de  $\overline{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$  est un polynôme en  $e_1$  d'ordre maximum  $m$ .

**Remarque 11.** Pour obtenir tous les termes de  $\overline{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$  à l'ordre  $m$  en  $e_1$  et à l'ordre  $p$  en les variables  $(z'_j, \tilde{z}'_j)$ , il faut calculer le hamiltonien  $\overline{H}_{L_4}$  jusqu'à l'ordre  $m + p$  avant d'effectuer le changement de variable  $\chi_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$ .

Pour avoir une idée claire de la dynamique dans le voisinage de la famille  $\mathcal{F}_4^2$ , nous allons diagonaliser  $\mathcal{Q}(e_1)$ , la partie quadratique du hamiltonien  $\overline{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$ . Pour ce faire, nous allons la diagonaliser degré par degré de  $e_1$ .  $\mathcal{Q}(0)$  est déjà diagonal, car identique à la partie quadratique de  $\overline{H}_{L_4}$ . Nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{Q}(e_1) = \mathcal{Q}_d + \sum_{l=1}^m e_1^l \mathcal{Q}_l, \quad (2.53)$$

où  $\mathcal{Q}_d$  est diagonal, et où les coefficients des  $\mathcal{Q}_l$  ne dépendent pas de  $e_1$ . Cette transformation est effectuée de manière itérative, où le monôme de  $\mathcal{Q}$  en  $e^l$  est diagonalisé au pas  $l$ . Chaque transformation élémentaire est le flot au temps 1 d'un hamiltonien  $\mathcal{W}_l$ , calculé de la manière suivante :

$$W_l = - \int \left( \mathcal{Q}_l^{(l-1)} - \mathcal{Q}_{l_d}^{(l-1)} \right) dt, \quad (2.54)$$

où  $\mathcal{Q}_{l_d}^{(l-1)}$  est la partie diagonale de  $\mathcal{Q}_l^{(l-1)}$ , en prenant  $\mathcal{Q}_l^{(0)} = \mathcal{Q}_l$ . Puis on calcule le nou-

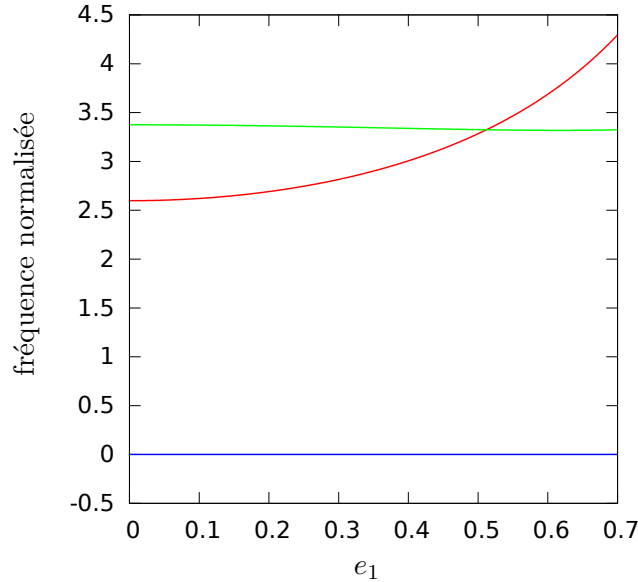


FIGURE 2.25 – évolution des valeurs propres le long de la famille  $\mathcal{F}_4^2$ .  $\nu/(\eta\sqrt{\varepsilon})$  en rouge,  $g/(\eta\varepsilon)$  en vert et  $g_2/(\eta\varepsilon)$  en bleu.  $m = 14$ .

veau hamiltonien  $\mathcal{Q}^{(l)}$  par application du flot de  $e_1^l W_l$  au temps 1. Par construction, cette opération diagonalise  $\mathcal{Q}^{(l)}$  jusqu'au degré  $l$  en  $e_1$ . Comme  $e_1$  est un petit paramètre, chaque changement de variable canonique est proche de l'identité. Celle-ci étant menée jusqu'au degré  $m$ , nous diagonalisons la partie quadratique du hamiltonien  $\mathcal{Q}^{(m)}$ . La composition

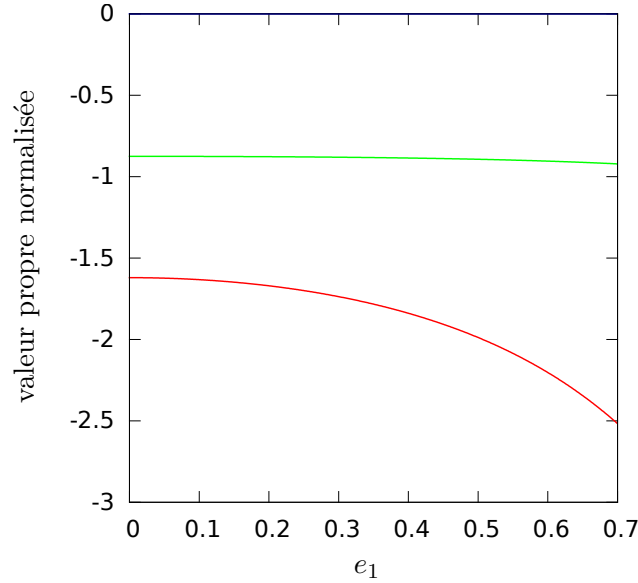


FIGURE 2.26 – évolution des valeurs propres le long de la famille  $\mathcal{F}_3^2$ .  $|\omega_0|/(\eta\sqrt{\varepsilon})$  en rouge,  $|\omega_1|/(\eta\varepsilon)$  en vert et  $|\omega_2|/(\eta\varepsilon)$  en bleu. la valeur propre  $\omega_0$  est réelle,  $\omega_1$  est imaginaire pure et  $\omega_2$  est nulle.  $m = 14$ .

des flots au temps 1 des hamiltoniens  $e\mathcal{W}_l$  peut alors être appliquée à l'ensemble du hamiltonien  $\overline{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$ . Nous obtenons le hamiltonien  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$ , dont la partie quadratique est diagonale. et le nouveau changement de variable proche de l'identité :

$$(z_j, \tilde{z}_j) = \chi_d(Z_j, \tilde{Z}_j). \quad (2.55)$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$  décrit la dynamique au voisinage de la famille  $\mathcal{F}_4^2$  à l'ordre  $m$  en  $e_1$ . La figure 2.25 montre l'évolution des valeurs propres  $\omega_j$  le long de cette famille on notera  $\omega_0 = -i\nu$ ,  $\omega_1 = -ig$  et  $\omega_2 = -ig_2$ , où  $\nu$ ,  $g$  et  $g_2$  sont des réels car toutes les directions sont elliptiques. Pour des excentricités faibles, on retrouve les résultats de Robutel et Pousse (2013).

De la même manière, on peut calculer le hamiltonien  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}_3^2}(e_1)$ , décrivant la dynamique dans le voisinage de  $\mathcal{F}_3^2$  et dont la partie quadratique est diagonale. La figure 2.25 montre l'évolution des valeurs propres  $\omega_j$  le long de cette famille.

## 2.7.2 Direction des familles $\overline{\mathcal{F}}_k^l$

Intéressons-nous maintenant aux directions des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^l$  en un point donné des  $\mathcal{F}_k^2$ . Comme précédemment, nous développons la méthode pour les familles émergent de  $L_4$ . Les familles émergent de  $L_5$  seront identiques à une symétrie près, et une méthode similaire sera appliquée pour les familles émergent de  $L_3$ .

### Voisinage de $\mathcal{F}_4^2$

Reprenons la partie quadratique du hamiltonien  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$ . Comme précédemment évoqué, les directions des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  et  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  en  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$  sont données respectivement par  $z_0 = 0$

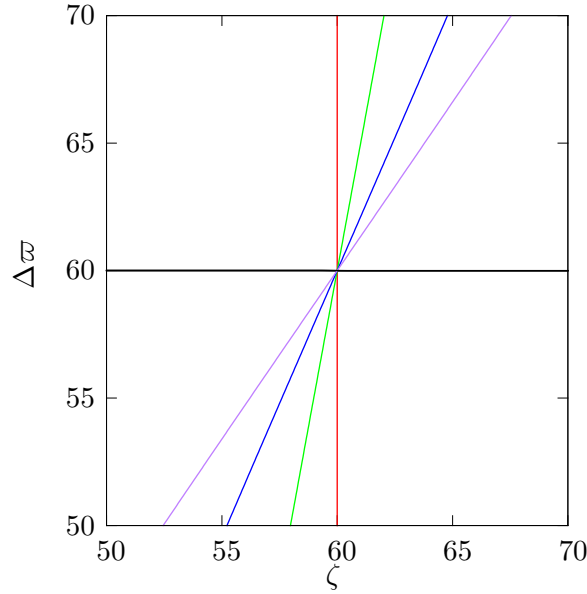


FIGURE 2.27 – approximation quadratique des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  et  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  pour  $m_1 = m_2 = 1 \cdot 10^{-6} m_0$  sur la variété  $\mathcal{P}$  définie par le jeu d'équations (2.58) au voisinage de  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$ , la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  est représentée en rouge pour  $e_1 = 0.001$ , en vert pour  $e_1 = 0.3$ , en bleu pour  $e_1 = 0.5$  et en violet pour  $e_1 = 0.7$ . La direction de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  est constante à l'ordre 2 en  $\mathfrak{R}(Z_1)$  et est représentée en noir.

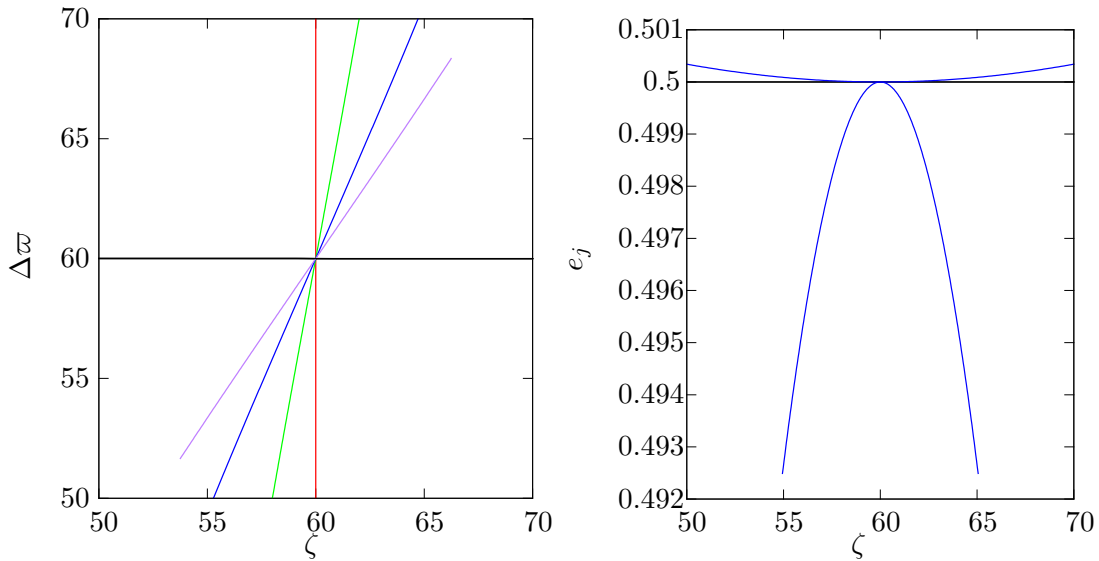


FIGURE 2.28 – Approximation quadratique des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  et  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  pour  $m_1 = 1 \cdot 10^{-7} m_0$  et  $m_2 = 19 \cdot 10^{-7} m_0$  sur la variété  $\mathcal{P}$  définie par le jeu d'équations (2.58) au voisinage de  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$ . Sur la figure de gauche, la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  est représentée en rouge pour  $e_1 = 0.001$ , en vert pour  $e_1 = 0.3$ , en bleu pour  $e_1 = 0.5$  et en violet pour  $e_1 = 0.7$ . La direction de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  est constante à l'ordre 2 en  $\mathfrak{R}(Z_1)$  et est représentée en noir. La figure de droite représente l'évolution des excentricités des corps  $m_1$  et  $m_2$  le long de ces coupes des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  en bleu et  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  en noir pour  $e_1 = 0.5$ .

et  $z_1 = 0$ . Afin de connaître leur position dans l'espace des phases initial  $(Z, z, x_j, \tilde{x}_j)$  nous devons exprimer ces variables en fonction des  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$ . Nous avons la relation suivante :

$$(Z, z, x_j, \tilde{x}_j) = \chi_{L_4} \circ \chi_{\mathcal{F}_4^2} \circ \chi_d(e_1)(Z_j, \tilde{Z}_j). \quad (2.56)$$

Nous obtenons donc l'expression des variables  $(Z, z, x_j, \tilde{x}_j)$  comme des polynômes de degré 2 en  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$  et  $m$  en  $e_1$ . Nous pouvons par exemple écrire, pour  $z$  dans la direction de  $\overline{\mathcal{F}_4^0}$  :

$$z = \sum_{l \in \{1, \dots, m\}, |k_1| + |k_2| + |\tilde{k}_1| + |\tilde{k}_2| = 2} c_{l, k_1, k_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2} e_1^l Z_1^{k_1} \tilde{Z}_1^{\tilde{k}_1} Z_2^{k_2} \tilde{Z}_2^{\tilde{k}_2} \quad (2.57)$$

Nous obtenons donc une expression des membres la famille  $\overline{\mathcal{F}_4^0}$  au voisinage de  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$  à l'ordre  $m$  en  $e_1$  et 2 en  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$ .

Afin de visualiser l'approximation quadratique de  $\overline{\mathcal{F}_4^0}$  (de dimension 4) dans le voisinage de  $\mathcal{F}_4^2$ , nous allons calculer son intersection avec la variété  $\mathcal{P}$  (de dimension 3) :

$$\begin{cases} J_1(x_j, \tilde{x}_j) = J_{1,0}, \\ \Im(x_1) = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \quad (2.58)$$

où  $J_1$  est la valeur du moment cinétique total du système :

$$J_1 = (\Lambda_1^0 + \Lambda_2^0 - i(x_1 \tilde{x}_1 + x_2 \tilde{x}_2))/2 \quad (2.59)$$

et  $J_{1,0}$  sa valeur en  $e_2 = e_1$ . Notons que la définition choisie pour  $\mathcal{P}$  est celle des variétés de référence (pour le cas  $m_1 = m_2$ ) que nous avons étudié dans les sections précédentes. L'intersection de ces deux variétés est dans le cas général de dimension 1. Nous obtenons donc un système de trois équations polynomiales en  $Z_1, \tilde{Z}_1, Z_2$  et  $\tilde{Z}_2$ . nous rappelons que  $\tilde{Z}_j = -i\bar{Z}_j$ . Le système (2.58) permet donc d'obtenir une expression pour l'ensemble de ces variables en fonction d'un seul paramètre. Nous prendrons la partie réelle de  $Z_1, \Re(Z_1)$ , pour la famille  $\overline{\mathcal{F}_4^0}$ , et  $\Re(Z_0)$  pour la famille  $\overline{\mathcal{F}_4^1}$ . Comme nous sommes au voisinage de la famille  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$ , les variables  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$  sont petites. Nous pouvons donc résoudre le système d'équations (2.58) degré par degré : on résout d'abord le système en tronquant les polynômes à l'ordre 1, on obtient alors une expression des  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$  du type  $Z_j = c_1 \Re(Z_1)$ . On injecte ensuite cette solution dans le système (2.58) tronqué à l'ordre 2 des polynômes en cherchant une modification de l'expression des  $Z_j$  de taille  $(\Re(Z_1))^2$ . On obtient donc  $Z_j = c_1 \Re(Z_1) + c_2 (\Re(Z_1))^2$ .

De cette manière, nous obtenons l'approximation quadratique de l'intersection  $\overline{\mathcal{F}_4^0} \cap \mathcal{P}$  et  $\overline{\mathcal{F}_4^1}$  à l'ordre 2 en  $\Re(Z_1)$ . Les figures 2.27 et 2.28 montrent la direction de ces familles au voisinage de  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$  pour plusieurs valeurs de  $e_1$  dans le plan donné par le système (2.58). La figure 2.27 montre le cas de deux masses égales, alors que  $m_2 = 19 \times m_1$  sur la figure 2.28. Dans le cas de masses égales, la coupe des familles  $\overline{\mathcal{F}_4^0}$  et  $\overline{\mathcal{F}_4^1}$  effectuée par le système d'équations (2.58) reste sur la variété  $e_1 = e_2$ , comme c'est le cas pour la famille de points fixes  $\mathcal{F}_4^2$ . Cette propriété disparaît quand les coorbitaux ont des masses différentes, comme l'illustre le graphe de droite de la figure 2.28.

### Voisinage de $\mathcal{F}_3^2$

Une approche similaire peut être effectuée pour le voisinage de  $\mathcal{F}_3^2(e_1)$ . La seule différence avec celui de  $\mathcal{F}_4^2(e_1)$  est que nous n'avons pas la relation  $\tilde{Z}_j = -i\bar{Z}_j$ . Un algorithme



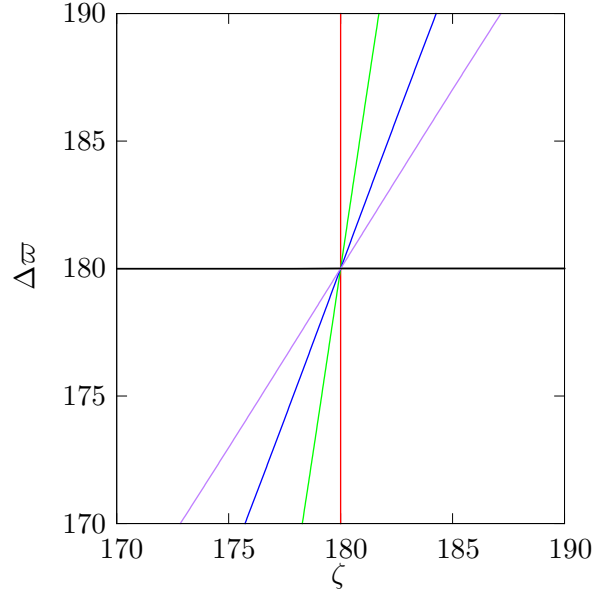


FIGURE 2.29 – approximation quadratique des familles  $\overline{\mathcal{F}}_3^0$  et  $\overline{\mathcal{F}}_3^1$  pour  $m_1 = m_2 = 1 \cdot 10^{-6} m_0$  sur la variété  $\mathcal{P}$  définie par le jeu d'équations (2.58) au voisinage de  $\mathcal{F}_3^2(e_1)$ , la famille  $\overline{\mathcal{F}}_3^0$  est représentée en rouge pour  $e_1 = 0.001$ , en vert pour  $e_1 = 0.3$ , en bleu pour  $e_1 = 0.5$  et en violet pour  $e_1 = 0.7$ . La direction de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_3^1$  est constante sur  $\mathcal{F}_3^2(e_1)$  à l'ordre 2 en  $|Z_1|$  et est représentée en noir.

similaire à celui qui vient d'être décrit peut cependant également être utilisé. En pratique le paramètre choisi pour le parcours de ces familles sera  $|Z_1|$ . La figure 2.29 montre la direction de ces familles au voisinage de  $\mathcal{F}_3^2(e_1)$  dans le plan donné par le système (2.58) pour plusieurs valeurs de  $e_1$ .

Il est possible de calculer l'expression des familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^l$  dans un voisinage des  $\overline{\mathcal{F}}_k^l$  à un ordre plus élevé. Dans le cadre de cette étude, on se limitera au voisinage  $\mathcal{F}_4^2$  car les orbites dans le voisinage de  $\mathcal{F}_3^2$  sont généralement instables et présentent donc moins d'intérêt.

### 2.7.3 Forme normale au voisinage d'un point de $\mathcal{F}_4^2$

Repartons du hamiltonien  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1)$  (obtenu par le changement de variable 2.55) à l'ordre  $m$  en  $e_1$  et  $p$  en les variables  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$  dont la partie quadratique est diagonale. Nous sommes ici dans le cas où la fréquence  $\omega_2$  est nulle, et la famille  $\mathcal{F}_4^2$  est une famille de points fixes (section 2.3.2). Nous obtenons donc une forme normale de la forme :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}_4^2}(e_1) = \sum_{d=2}^p \left( \sum_{k_0+k_1+k_2+\bar{k}_2=d} \left( C_{k_0, k_1, k_2, \bar{k}_2} (Z_0 \tilde{Z}_0)^{k_0} (Z_1 \tilde{Z}_1)^{k_1} Z_2^{k_2} \tilde{Z}_2^{\bar{k}_2} \right) \right). \quad (2.60)$$

Notons que les termes en  $Z_2$  et  $\tilde{Z}_2$  n'apparaissent pas dans l'expression du hamiltonien au voisinage des équilibres circulaires, et proviennent des termes croisés lors de la translation (2.21).

Pour obtenir cette forme normale on élimine degré par degré tous les termes que nous ne voulons pas voir apparaître par le biais d'un changement de variable bien choisi. Comme pour la diagonalisation de la partie quadratique du hamiltonien, on effectue ce changement

de variable par composition des flots au temps un de  $p$  hamiltoniens  $\mathcal{W}_p$  (Meyer et Hall, 1992). On note ce changement de variable

$$\begin{aligned} (Z_j, \tilde{Z}_j) &= \chi_{\mathcal{N}}(I_j, \theta_j), \\ &= (\sqrt{2I_j} e^{i\theta_j}, \sqrt{2I_j} e^{-i\theta_j}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

La forme (2.60) peut, par un dernier changement de variable, être exprimée en variables action-angles. On obtient alors, à l'ordre  $p$  en  $I_j$  et  $m$  en  $e_1$  :

$$\mathcal{N}'_{\mathcal{F}_4^2}(e_1) = \sum_{d=2}^p \left( \sum_{2k_1+2k_2+k_3+\bar{k}_3=d} \left( C_{k_1, k_2, k_3, \bar{k}_3} I_1^{2k_1} I_2^{2k_2} I_3^{k_3+\bar{k}_3} e^{i(k_3-\bar{k}_3)\theta_3} \right) \right). \quad (2.62)$$

avec le changement de variable :

$$\begin{aligned} (Z_j, \tilde{Z}_j) &= \chi_{\mathcal{N}'}(I_j, \theta_j), \\ &= (\sqrt{2I_j} e^{i\theta_j}, \sqrt{2I_j} e^{-i\theta_j}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Cette forme permet d'identifier la position des  $\overline{\mathcal{F}}_4^l$  au voisinage de  $\mathcal{F}_4^2$ . Une utilisation rigoureuse de cette forme normale nécessite de calculer son rayon de convergence<sup>6</sup>. Dans cette étude nous nous contenterons de calculer les premiers termes de la forme normale afin d'approximer les  $\overline{\mathcal{F}}_4^l$  au voisinage de  $\mathcal{F}_4^2$ .

#### 2.7.4 $\overline{\mathcal{F}}_4^l$ au voisinage de $\mathcal{F}_4^2$

Nous avons vu en section 2.7.2 comment déterminer l'intersection des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^l$  avec la variété  $\mathcal{P}$  dans les variables elliptiques. Pour le hamiltonien à l'ordre  $p$  en les variables  $(Z_j, \tilde{Z}_j)$ , c'est sous la forme normale (2.60) que ces directions apparaissent de manière triviale. Nous procédons donc ici au même algorithme que en section 2.7.2 en ajoutant le changement de variable  $\chi_{\mathcal{N}}$ .

La figure 2.30 montre l'évolution des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^l$  vérifiant les équations (2.58) et paramétrées par  $\Re(Z_1)$ . Ces familles sont représentées pour  $p = 1$  (dots),  $p = 3$  (line) and  $p = 5$  (+). Nous pouvons voir que dans le cas de deux coorbitaux de masse différente, ces familles sortent de la variété  $e_1 = e_2$  dès que l'on quitte l'équilibre de Lagrange. Sur cette figure, 3 points de l'espace des phases sont identifiés par le symbole 'x'. Ces points sont pris comme conditions initiales (avec le jeu d'équations 2.58) pour les intégrations du problème à trois corps dont l'évolution temporelle est présentée sur la figure 2.31.

Rappelons que  $g = \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ . Puisque ici  $\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-6}$ , les échelles de temps semi-rapide et séculaire sont bien distinctes, avec  $P_g/P_\nu \approx 700$ . La trajectoire ayant pour condition initiale la croix verte (représentée en haut de la figure 2.30, pour laquelle on prendra en condition initiale  $e_1 = e_2 = 0.4$ ) est sur une orbite à priori quelconque du voisinage de  $\mathcal{F}_4^2(0.4)$ . Sur cette trajectoire,  $\Delta\varpi$  et les excentricités évoluent principalement avec la fréquence  $g$ , alors que  $\zeta$  est impactée à la fois par les échelles de temps semi-rapide et séculaire. La trajectoire bleue (représentée au centre de la figure 2.30), quant à elle, fait partie de l'expression de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  à l'ordre  $p = 5$  de la forme normale. On s'attend donc à ce que l'ensemble des paramètres représentés n'évolue que sur l'échelle de temps

6. En pratique la série diverge, on peut cependant estimer l'ordre optimal (celui qui minimise le reste), voir Morbidelli (2002)

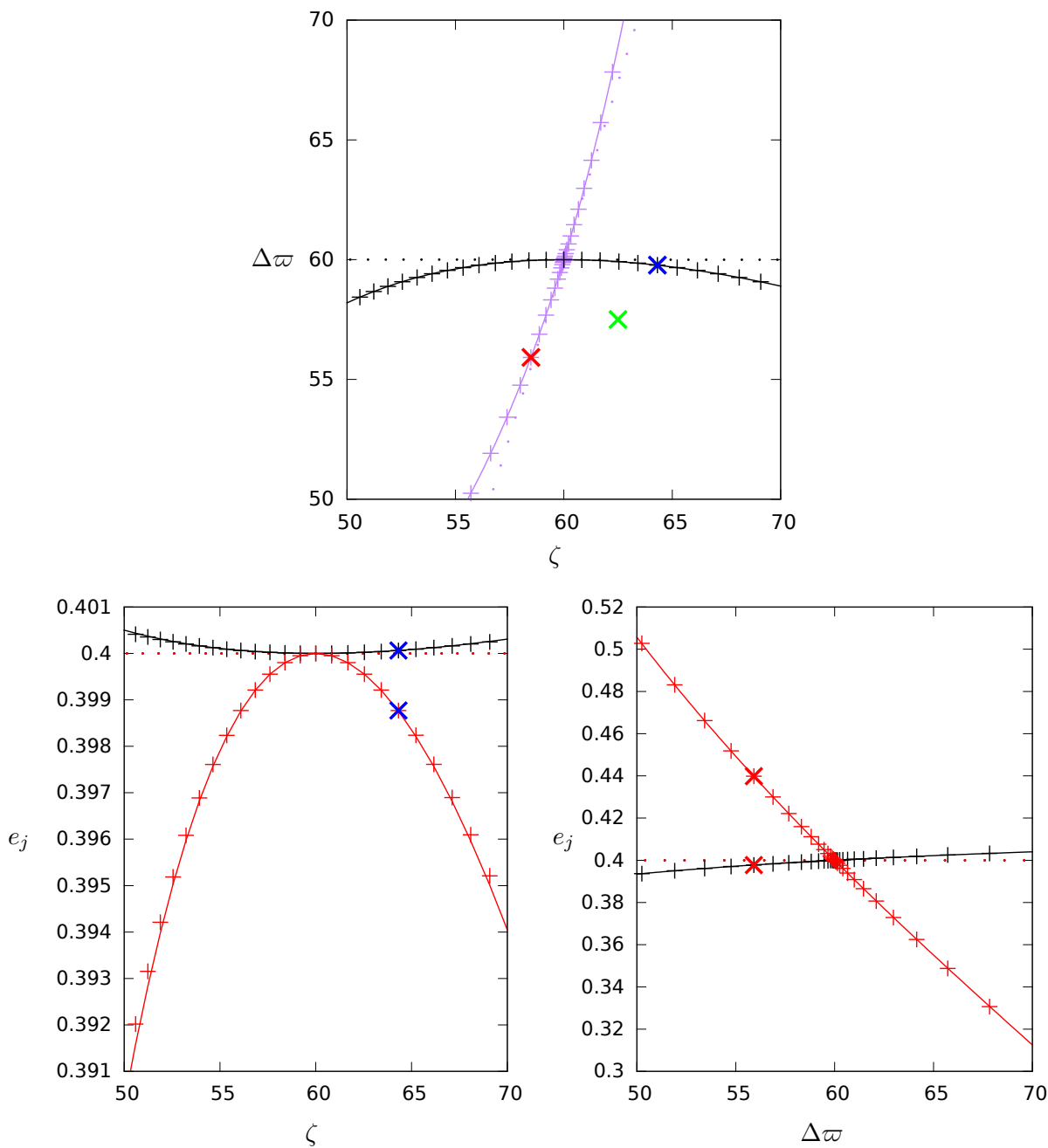


FIGURE 2.30 – approximation des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^l$  vérifiant les équations (2.58) et paramétrées par  $\Re(Z_1)$ , pour  $m_2 = 19m_1$ . Ces familles sont représentées pour  $p = 1$  (dots),  $p = 3$  (line) and  $p = 5$  (+). Sur le graphe du haut :  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  en violet et  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  en noir. Sur les graphes du bas :  $e_1$  en rouge et  $e_2$  en noir, le long de  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  à gauche et  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$  à droite. Les 'x' représentent les conditions initiales pour les intégrations de la figure 2.31.

séculaire. À l'inverse, les conditions initiales de la trajectoire rouge (représentée en bas de la figure 2.30), fait partie de l'expression de la famille  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$  à l'ordre  $p = 5$  de la forme normale. On s'attend donc à ce que l'ensemble des paramètres représentés n'évolue que sur l'échelle de temps semi-rapide.

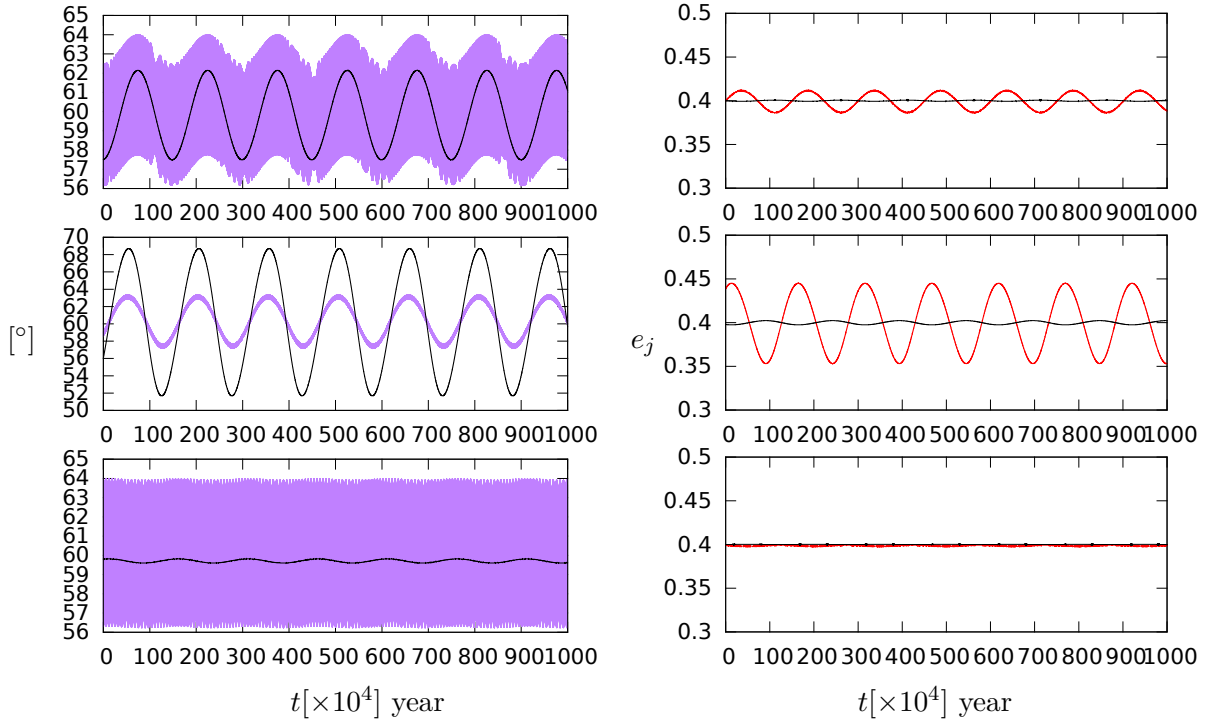


FIGURE 2.31 – Intégration des trajectoires dont les conditions initiales sont représentées par des 'x' sur la figure 2.30. Sur la ligne du haut, la trajectoire identifiée par les croix vertes, avec  $e_1 = e_2 = 0.4$  en conditions initiales. Sur la ligne du centre, les croix bleues. Cette trajectoire est dans le voisinage de  $\overline{\mathcal{F}}_4^1$ . Et sur la ligne du bas, la trajectoire identifiée par les croix rouges. Cette trajectoire est dans le voisinage de  $\overline{\mathcal{F}}_4^0$ . La colonne de gauche représente l'évolution des angles  $\Delta\varpi$  (noir) et  $\zeta$  (violet) la colonne de droite représente l'évolution de  $e_1$  (rouge) et de  $e_2$  (noir). les abscisses représentent le temps en dizaine de millier de périodes orbitales. pour ces trois orbites  $m_2 = 19m_1 = 19 \times 10^{-7}m_0$ .

La détermination des familles  $\overline{\mathcal{F}}_4^l$  par cette méthode est approximative : la trajectoire bleue comporte de faibles variations semi-rapides dans l'évolution de  $\zeta$ , et la trajectoire rouge comporte de faibles variations de  $\Delta\varpi$  et des  $e_j$  sur une échelle de temps séculaire. Néanmoins, ces variations sont faibles par rapport à une orbite générique, et peuvent être dues en partie à la différence (de taille  $\varepsilon$ ) entre la valeur des conditions initiales dans le problème moyen (là où elles ont été estimées) et leur valeur dans le problème complet (là où elle ont été intégrées). On considèrera donc que les familles déterminées par la forme normale sont au voisinage de leur position exacte dans l'espace des phases et que leur position déterminée ici ne reste valable que très localement. L'expression de ces familles  $\overline{\mathcal{F}}_k^l$  permet cependant de confirmer que les familles mises en avant par les méthodes semi-analytiques et numériques décrites en section 2.4.5 sont bien les mêmes objets que les familles définies au voisinage des équilibres de Lagrange circulaires dans la section 2.2.

## Chapitre 3

# Co-orbitaux circulaires inclinés

Dans ce chapitre, nous étudions l'évolution des différentes configurations coorbitales du cas circulaire quand l'inclinaison mutuelle entre les deux planètes augmente. Cela a un intérêt notable pour la détection d'exoplanètes coorbitales : si l'inclinaison mutuelle est non négligeable, il est probable qu'une planète transite mais pas son compagnon troyen. Il est donc intéressant de pouvoir contraindre, grâce à un argument de stabilité, les valeurs possibles des paramètres orbitaux d'un éventuel compagnon troyen.

Nous avons montré en section 1.1.2 que la variété  $e_1 = e_2 = 0$  est stable par le flot du Hamiltonien moyen. Nous pouvons donc nous intéresser à la dynamique des coorbitaux circulaires inclinés. Ce problème moyen comporte 3 degrés de libertés représentés par les variables canoniques conjuguées  $(Z, \zeta)$ ,  $(y_1, \tilde{y}_1)$  et  $(y_2, \tilde{y}_2)$ .

### 3.1 Réduction du problème

Suivant Poincaré (1892) et Robutel (1995), nous allons effectuer la réduction de Jacobi. Celle-ci utilise l'invariance du moment cinétique afin de réduire le problème de deux degrés de liberté supplémentaires en s'affranchissant de la longitude des nœuds et des inclinaisons et en introduisant un paramètre supplémentaire : le moment cinétique total du système. Cette réduction consiste à nous placer dans un référentiel tournant (non uniformément) dont le plan  $Oxy$  coïncide avec le plan invariant perpendiculaire au moment cinétique total et qui tourne avec la ligne des nœuds qui est commune aux deux corps dans le plan invariant (dans ce plan,  $\Omega_2 = \Omega_1 + \pi$ ). Si nous utilisons les variables canoniques de Delaunay définies dans le repère lié au plan invariant par :

$$\begin{aligned} L_j &= \sqrt{\mu_j a_j}, & l_j &= M_j, \\ \Theta_j &= L_j \cos i_j, & \theta_j &= \Omega_j, \end{aligned} \quad (3.1)$$

dans le cas où  $e_1 = e_2 = 0$ , le moment cinétique total s'écrit :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_1 L_1 \sin i_1 \sin \theta_1 + \beta_2 L_2 \sin i_2 \sin \theta_2 \\ -\beta_1 L_1 \sin i_1 \cos \theta_1 - \beta_2 L_2 \sin i_2 \cos \theta_2 \\ \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Or dans le repère lié au plan invariant, le moment cinétique est porté par la direction  $Oz$ , nous obtenons donc le jeu d'équations suivant Robutel (1995) :

$$\begin{cases} \beta_1 L_1 \sin \theta_1 - \beta_2 L_2 \sin \theta_2 = 0 \\ \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 = C \\ \theta_1 - \theta_2 = \pi \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc, en effectuant le changement de variable canonique suivant :

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2, & \psi_1 &= (\theta_1 + \theta_2)/2, \\ \Psi_2 &= \beta_1 \Theta_1 - \beta_2 \Theta_2, & \psi_2 &= (\theta_1 - \theta_2)/2,\end{aligned}\tag{3.4}$$

où les variables  $\Psi_1 = C$  et  $\psi_2 = \pi/2$  sont constantes dans le repère lié au plan invariant. En écrivant  $\chi_{PI}$  le changement de variable canonique entre les coordonnées de Poincaré et les variables  $(\Psi_j, \psi_j)$ , nous pouvons déduire que le Hamiltonien moyen  $\overline{\mathcal{H}}_{PI}$  défini par :

$$\overline{\mathcal{H}}_{PI} = \overline{\mathcal{H}} \circ \chi_{PI},\tag{3.5}$$

ne dépend pas des variables  $\psi_1$  et  $\Psi_2$ . En effet :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_{PI}}{\partial \psi_1} &= -\dot{\Psi}_1 = 0, \\ \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_{PI}}{\partial \Psi_2} &= \dot{\psi}_2 = 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

$\overline{\mathcal{H}}_{PI}$  ne dépend donc que des variables  $(Z, \zeta, \psi_2, \Psi_1)$ . Or les variables  $\psi_2$  et  $\Psi_1$  sont ici ignorables car leur variable conjuguée n'apparaît pas dans l'expression du Hamiltonien. Le Hamiltonien  $\overline{\mathcal{H}}_{PI}$  est donc intégrable et est paramétré par la valeur de  $C$  ( $\psi_2$  valant  $\pi/2$  dans tout les cas). Par analogie au cas circulaire, on peut également s'attendre à ce que le paramètre de masse  $\varepsilon$  n'agisse que comme un facteur d'échelle de temps dans le cas du problème moyen réduit. Ceci ne sera pas démontré ici mais les diverses simulations numériques tendent à confirmer cette hypothèse.

Les variations de  $\Psi_2$  dépendent quant à elles de la dynamique du degré de liberté  $(Z, \zeta)$ . Les relations (3.7) et (3.4) permettent d'écrire (Robutel, 1995) :

$$\begin{cases} \beta_1 \Theta_1 = \frac{C}{2} + \frac{\beta_1^2 L_1^2 - \beta_2^2 L_2^2}{2C} \\ \beta_2 \Theta_2 = \frac{C}{2} - \frac{\beta_1^2 L_1^2 - \beta_2^2 L_2^2}{2C} \end{cases}\tag{3.7}$$

La quantité  $\cos i_j$  varie donc comme  $\frac{\beta_1^2 L_1^2 - \beta_2^2 L_2^2}{2C\beta_j L_j}$ . Nous pouvons estimer la taille des variations des  $\cos i_j$  en calculant ce terme à l'ordre 1 en  $Z$  :

$$\frac{\beta_1^2 L_1^2 - \beta_2^2 L_2^2}{2C\beta_j L_j} = \frac{\Lambda_1^{02} - \Lambda_2^{02}}{2C\Lambda_1^0} + Z \frac{(\Lambda_1^0 + \Lambda_2^0)(2 - (\Lambda_1^0 - \Lambda_2^0)/\Lambda_1^0)}{2C\Lambda_1^0}\tag{3.8}$$

Ce terme comporte donc une partie constante et un terme linéaire en  $Z$ . En considérant que  $m_1 \leq m_2$ , le terme linéaire est borné par :

$$\left| \frac{(\Lambda_1^0 + \Lambda_2^0)(2 - (\Lambda_1^0 - \Lambda_2^0)/\Lambda_1^0)}{2C\Lambda_1^0} \right| < 2 \frac{\left( \frac{\Lambda_2^0}{\Lambda_1^0} + \left( \frac{\Lambda_2^0}{\Lambda_1^0} \right)^2 \right)}{C}\tag{3.9}$$

On ne peut conclure ici pour des conditions initiales quelconques : en effet le moment cinétique peut être nul, par exemple en prenant  $i_1 = i_2 = 90^\circ$  et  $m_1 = m_2$ . Intéressons-nous à des inclinaisons modérées : en prenant par exemple  $\max(i_1, i_2) < \pi/3$  Nous avons l'inégalité suivante :

$$C > (\Lambda_1^0 + \Lambda_2^0)/2\tag{3.10}$$

et nous pouvons donc conclure que :

$$\left| \frac{(\Lambda_1^0 + \Lambda_2^0)(2 - (\Lambda_1^0 - \Lambda_2^0)/\Lambda_1^0)}{2C\Lambda_1^0} \right| < \frac{1}{\Lambda_1^0} \left( 1 + \frac{\Lambda_2^0}{\Lambda_1^0} \right).\tag{3.11}$$

Pour des inclinaison modérées et des masses comparables,  $\cos i_j$  subit des variations de taille  $Z$ .

D'autre part, on rappelle que l'inclinaison mutuelle  $J$  des deux co-orbitaux est définie par :

$$\cos J = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(2\psi_2) \quad (3.12)$$

donc, dans le plan invariant, nous avons simplement  $J = i_1 + i_2$ . De plus nous avons, pour le moment cinétique total (Robutel, 1995) :

$$C^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + 2\Lambda_1\Lambda_2 \cos J \quad (3.13)$$

## 3.2 Familles émergeant des équilibres de Lagrange circulaire

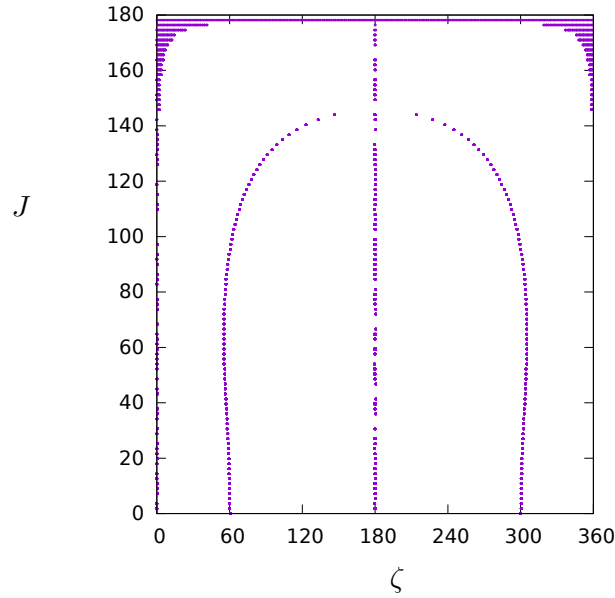


FIGURE 3.1 – Trace des familles de points fixes du problème moyen réduit émergeant des équilibres de Lagrange circulaire. On identifie les endroits de la variété  $a_1 = a_2$  et  $e_1 = e_2 = 0$  où  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} = 0$  pour  $m_1 = m_2$ .

De manière similaire à l'étude semi-analytique effectuée dans le cas des co-orbitaux coplanaires, nous pouvons explorer l'espace des phases à la recherche des familles émergeant des points  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  dans la direction verticale. Le Hamiltonien du problème moyen dans le plan invariant  $\overline{\mathcal{H}}_{PI}$  comprenant un unique degré de liberté associé aux variables conjuguées  $Z$  et  $\zeta$ , nous pouvons aisément définir une variété représentative pour une valeur donnée du moment cinétique total. Pour cette valeur du moment cinétique, les points fixes du problème moyen réduit sont donnés par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial Z} \mathcal{H}_{PI} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}_{PI} = 0. \quad (3.14)$$

A l'instar du cas coplaire, pour  $m_1 = m_2$  on fait l'hypothèse suivante :  $\frac{\partial}{\partial Z} \mathcal{H}_{PI} = 0$  partout sur la variété  $Z = 0$ . Nous avons donc à vérifier où  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}_{PI} = 0$  sur la variété  $Z = 0$ . Cette vérification sera faite sur une approximation numérique du Hamiltonien moyenné, comme en section 2.4.5. La variété  $Z = 0$  étant de dimension 1 pour le problème moyen

réduit, nous pouvons représenter l'évolution de ces familles de points fixes en fonction du moment cinétique total (ou, de manière équivalente pour des masses données, en fonction de l'inclinaison mutuelle  $J$ ). Les points où  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}_{PI}$  s'annule sont représentés sur la figure 3.1.

La coupe  $J = 0$  représente le cas circulaire plan : on retrouve les équilibres de Lagrange  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  en  $180^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $300^\circ$ . Quand  $J$  augmente, la famille issue de  $L_3$  reste à  $\zeta$  constant, alors que la position des familles issues de  $L_4$  et  $L_5$  évolue en  $\zeta$ , et semble tendre vers la famille émergente de  $L_3$  vers  $J \approx 145^\circ$ . Ces résultats sont similaires à ceux obtenu par Marchal (2009) dans le cas du problème restreint circulaire.

### 3.3 Dynamique et stabilité des co-orbitaux circulaires inclinés

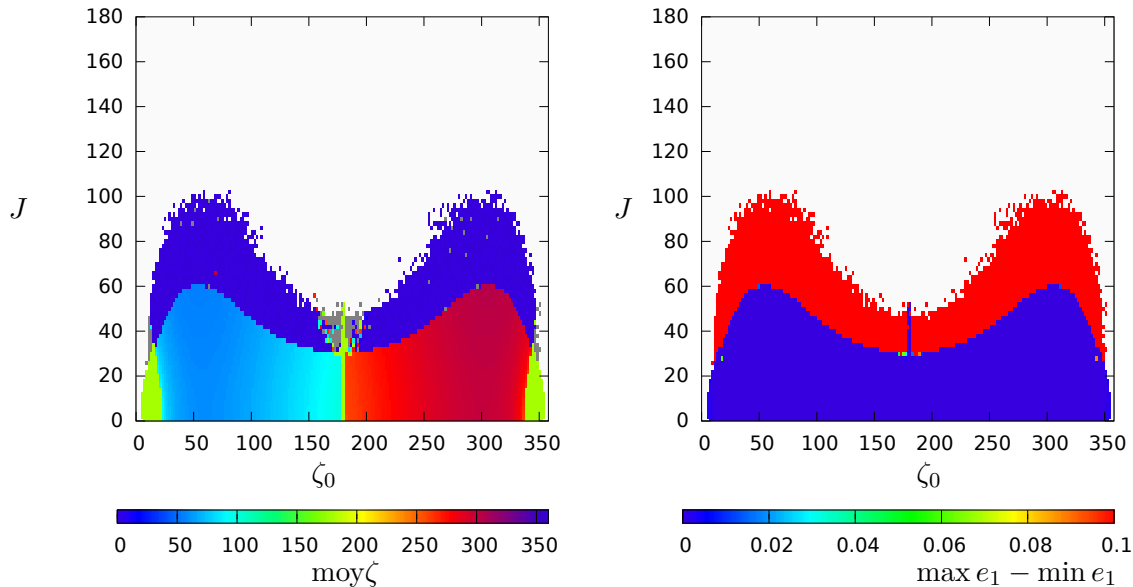


FIGURE 3.2 – Co-orbitaux inclinés ayant pour conditions initiales  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = \Omega_1 = 0$  et  $i_1, i_2$  et  $\Omega_2$  de manière à être dans le plan invariant.  $m_1 = m_2 = 10^{-5}m_0$ .

Nous allons intégrer les trajectoires issues de plans de conditions initiales afin d'avoir un aperçu de l'espace des phase (voir la section 1.3 pour les informations concernant l'intégrateur). Le Hamiltonien moyen réduit  $\overline{\mathcal{H}}_{PI}$  ne possède qu'un degré de liberté représenté par les variables  $(Z, \zeta)$ . Comme exposé en section 1.2.2 et 2.4.1, l'ensemble de ces orbites peut être représenté par les trajectoires issue de la variété  $\dot{\zeta} = 0$ . A l'instar du cas coplanaire, on fait l'approximation que cette variété coïncide avec le plan  $Z = 0$ . On exclut donc toute orbite ne passant pas par le plan  $Z = 0$  (par exemple l'équilibre de Lagrange circulaire lorsque  $m_1 \neq m_2$ , mais on en reste  $\varepsilon$  proche). Puisque parcourir l'ensemble des valeurs de  $\zeta$  possible sur la droite  $Z = 0$  suffit à représenter l'ensemble des configurations pour une valeur du moment cinétique donné, on représente en figure 3.4 la valeur initiale de  $\zeta$  en abscisse et celle de  $J$  en ordonnée. Pour le reste des conditions initiales, on prend  $a_1 = a_2 = 1$  ua,  $\lambda_1 = 0^\circ$ ,  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $\Omega_1 = 0^\circ$ ,  $\Omega_2 = 180^\circ$ , et on calcule  $i_1$  et  $i_2$  grâce aux équations (3.7) afin de se placer dans le plan invariant. Pour la colonne de



gauche de la figure 3.4 nous avons  $m_2 = m_1 = 1 \times 10^{-4}m_0$  et pour la colonne de droite  $m_2 = 19m_1 = 19 \times 10^{-5}m_0$  de manière à ce que  $\mu = 2 \times 10^{-4}$  dans les deux cas. Selon la ligne, le code couleur représente la moyenne de l'angle  $\zeta$ , l'amplitude de variation maximale  $\Delta i_1 = \max i_1 - \min i_1$  et  $\Delta e_1 = \max e_1 - \min e_1$ . La trajectoire partant de chaque condition initiale a été intégrée pendant  $1 \times 10^6$  an avec un pas de 0.01 an.

Sur chaque graphe pour  $J = 0$  se trouve le cas circulaire plan : la dynamique est bien connue et expliquée en section 1.2.2. Cette ligne nous permet d'identifier aisément les différentes configurations qui existent à faible inclinaison mutuelle : les régions troyennes, pour lesquelles  $\zeta$  libre autour de  $60^\circ$  ou  $300^\circ$ , et les fers-à-cheval librant autour de  $\zeta = 180^\circ$ . On traverse le domaine des fers-à-cheval en des zones centrées en  $\zeta \approx 20^\circ$  et  $\approx 340^\circ$ , mais aussi dans le voisinage l'équilibre  $L_3$  circulaire.

Quand  $J$  augmente, la taille respective de ces domaines évolue, et la coupe du domaine des fers-à-cheval n'est plus d'épaisseur discernable avant que l'inclinaison mutuelle n'atteigne  $40^\circ$ . Le domaine de stabilité des configurations troyennes est quant à lui délimité par une séparatrice qui sera décrite ci-après. Au-delà de cette séparatrice, dans le domaine prograde ( $J < 90^\circ$ ), une région d'orbites chaotiques apparaît (voir figures B.4, ligne du haut). Ces orbites diffusent lentement et ne semblent pas stable à très long termes. Dans le cas de planètes à masse différentes, une autre région stable apparaît pour des orbites rétrogrades ( $J > 90^\circ$ ). Ces orbites, centrées en  $\zeta = 60^\circ$  ou  $300^\circ$  et  $J = 150^\circ$  sont mises en évidence dans les travaux de Morais et Namouni (2016) pour le problème restreint (voir figure B.4, ligne du bas). Entre ces deux régions se trouve une autre configuration d'orbites chaotiques qui diffuse également lentement (voir figure B.4, ligne du milieu).

Dans les deux zones chaotiques, les hypothèses utilisées en section 3.1 ne sont pas valables car le mouvement n'est pas quasi-périodique. La dynamique sur la variété  $e_1 = e_2 = 0$  du problème moyen n'est donc pas représentative de la dynamique sur cette même variété dans le problème complet. Comme nous pouvons le voir sur les figures 3.4 et B.4, l'excentricité peut être excitée.

### 3.3.1 Limite du domaine troyen

Dans cette section, nous cherchons à identifier ce qui entraîne la transition du domaine troyen au domaine chaotique visible sur les figures 3.4 quand  $J$  augmente. Rappelons que ces intégrations numériques sont celles du problème à trois corps complet et que par conséquent, il s'agit d'un problème à 6 degrés de liberté, que nous réduisons à 5 en choisissant des conditions initiales telles que le repère inertiel possède deux axes dans le plan invariant du problème. La dynamique de problème est donc régie par 5 fréquences. Le moyen mouvement  $n$  et la fréquence de libration semi-rapide  $\nu$  s'identifient aisément en effectuant l'analyse en fréquence des quantités  $\exp^{i\lambda_1}$  et  $\zeta$ . La fréquence de circulation des nœuds ascendants  $s$  s'identifie également aisément car il s'agit de la fréquence de plus haute amplitude dans la décomposition de la variable de Poincaré  $y_1$ .

Les fréquences  $g_1$  et  $g_2$  associées au mouvement des périhélie et à l'évolution des excentricités sont plus difficiles à identifier, car les excentricités sont prises nulles en conditions initiales pour l'ensemble des trajectoire étudiées dans ce chapitre et n'évoluent que très faiblement dans les zones quasi-périodiques (voir l'amplitude de l'évolution de  $e_1$ , figure 3.4). Pour identifier ces fréquences, on procède de la manière suivante : on effectue l'analyse en fréquence de la variable de Poincaré  $x_1$  pour un jeu de conditions initiales donné. Cette variable est de caractéristique 1, elle n'admet donc que des termes de caractéristique 1 dans son développement.  $n$  et  $s$  sont de caractéristique 1 alors que  $\nu$  est de caractéristique 0. On choisit de définir  $g_1$  et  $g_2$  comme des fréquences de caractéristique 1 également. La

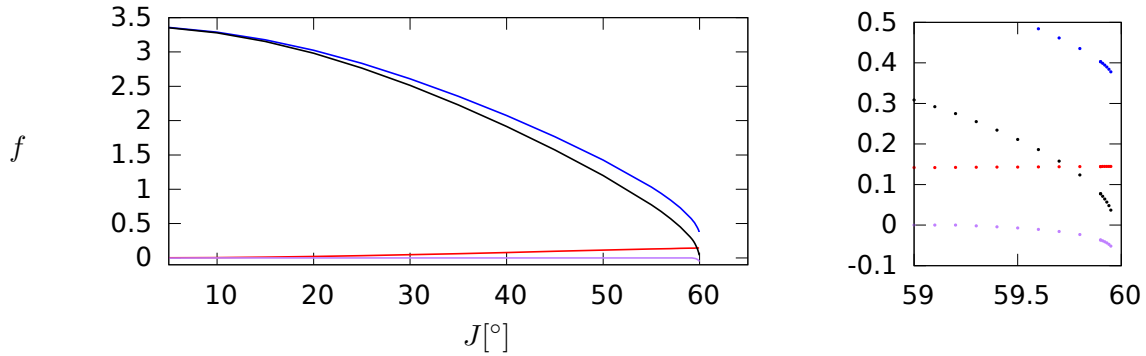


FIGURE 3.3 – Evolution des fréquences pour des conditions initiales où seul  $J$  évolue. Le graphe de droite représente un zoom pour  $J \in [59^\circ, 60^\circ]$ .  $m_2 = m_1 = 10^{-4}m_0$ ,  $\zeta = 60^\circ$ , les autres conditions initiales sont identiques à celles des figures 3.4. les fréquences représentées sont  $s$  (rouge),  $g_1$  (bleu) et  $g_2$  (violet). Toutes les fréquences sont normalisées par  $\varepsilon n$ . En noir est représentée la combinaison de caractéristique nulle  $(2s - g_1 - g_2)/(\varepsilon n)$ . Notons qu'on retrouve, quand  $J$  tend vers 0,  $g_1/(n\varepsilon) \approx 27/8$  et  $g_2 = s = 0$  comme c'est le cas dans de voisinage le l'équilibre  $L_4$  circulaire.

décomposition de  $x_1$  se fait donc avec des termes de la forme  $C \exp^{k_0\nu + k_1n + k_2s + k_3g_1 + k_4g_2}$  avec  $k_0$  quelconque,  $k_2$  pair et  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$  impaire. On choisit d'identifier  $g_1$  et  $g_2$  de manière à ce que  $\sum |k_j|$  soit minimal et que  $|g_1| > |g_2|$ . On prolonge la détermination de ces fréquences par continuité aux conditions conditions initiales proches.

La transition entre le domaine troyen et le domaine chaotique ne dépend pas de l'orientation du repère choisi, l'éventuelle résonance qui entraîne ce changement implique donc des combinaisons de fréquences de caractéristiques nulles. Sur la figure 3.3 sont représenté l'évolution des fréquences  $s$ ,  $g_1$  et  $g_2$  quand  $J$  augmente pour  $\zeta = 60^\circ$  fixé. ces fréquences tendent vers  $2s = g_1 + g_2$  quand  $J$  approche de la séparatrice mise en évidence sur les figures 3.4. Cette séparatrice peut être liée à la résonance de Kozai ( $2s = 2g$  dans le problème restreint).

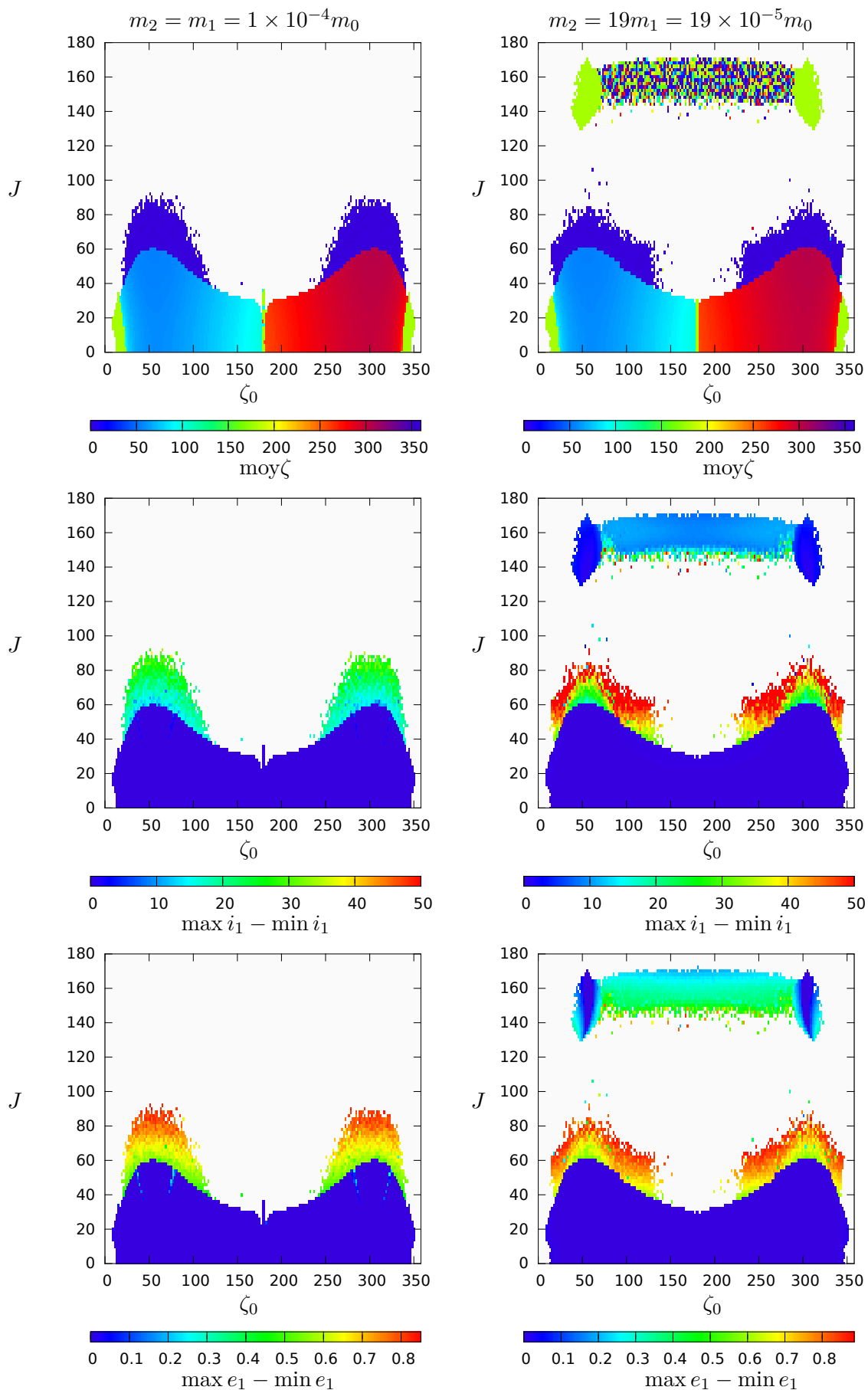


FIGURE 3.4 – Co-orbitaux inclinés ayant pour conditions initiales  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = \Omega_1 = 0$  et  $i_1, i_2$  et  $\Omega_2$  de manière à être dans le plan invariant.



## Chapitre 4

# Détection des coorbitaux quasi-circulaires

Ce chapitre est dédié aux méthodes de détection des exoplanètes en résonance coorbitale. Depuis la découverte de la première exoplanète (Wolszczan et Frail, 1992), une grande diversité de systèmes a été découverte, dont certains sont en résonance de moyen mouvement (MMR). Certaines de ces configurations, comme la MMR 2/1, sont très présentes dans les systèmes connus, alors qu'aucun système en configuration coorbitale n'a été découvert jusqu'à maintenant. Laughlin et Chambers (2002) ont introduit deux processus pouvant former ces exo-planètes coorbitales : (i) la diffusion due aux interactions entre les planètes et (ii) l'accrétion *in situ* au voisinage des points  $L_4$  et  $L_5$  d'une planète déjà existante.

Dans le cas (i), le profil de la densité du disque de gaz semble impacter le rapport de masse entre les coorbitaux : dans leurs simulations, Giuppone *et al.* (2012) forment principalement des coorbitaux de masses comparables, alors que Cresswell et Nelson (2008, 2009) obtiennent une grande diversité de rapport de masse. Dans cette dernière étude, les auteurs forment des coorbitaux dans  $\approx 30\%$  des systèmes planétaires générés par leurs simulations. Ces coorbitaux se forment généralement en configuration fer-à-cheval, puis l'amplitude de libration est amortie par le disque, ce qui entraîne une transition en configuration troyenne. L'accrétion de gaz semble renforcer les écarts de masses entre les coorbitaux, le plus massif des deux atteignant une masse de l'ordre de celle de Jupiter alors que le moins massif reste en dessous de 70 masses terrestres. Les coorbitaux formés dans leur modèle ont généralement une inclinaison et une excentricité assez faible ( $e < 0.02$ ).

Dans le cas (ii), les simulations de Lyra *et al.* (2009) forment des troyens allant jusqu'à 5-20 masses terrestres au voisinage des points  $L_4$  et  $L_5$  de jupiters.

Les modèles qui génèrent des configurations coorbitales dues à la dissipation dans le disque entraînent généralement la migration des coorbitaux vers le centre du système. Cette migration tend à augmenter l'amplitude de la libration de l'angle résonant. L'effet de la dissipation dû au gaz et aux effets de marée sur les configurations coorbitales est mal connu. Pierens et Raymond (2014) constatent que dans leur modèle les coorbitaux de masses égales (super-terre jusqu'à saturne) sont fortement perturbés en cas de longue phase de migration, et Rodríguez *et al.* (2013) concluent sous certaines hypothèses que les effets de marée déstabilisent les coorbitaux de masses comparables proches de l'étoile. Les coorbitaux peuvent également être perturbés par la présence d'autres planètes, en particulier quand ils traversent une résonance en moyen mouvement avec une planète massive lors des phases migratoires du système planétaire (Morbidelli *et al.*, 2005; Robutel et Boddossian, 2009). De plus, les configurations fer-à-cheval sont davantage susceptibles d'être

perturbées par des résonances que les orbites troyennes car la fréquence fondamentale de libration peut être très différente en fonction des conditions initiales choisies (voir figure 1.2).

Les études de formation et d'évolution de systèmes planétaires montrent donc que des planètes en configuration coorbitale peuvent exister, mais n'apportent pour l'instant pas de contrainte sur l'orbite ou sur la masse de ces coorbitaux indépendamment d'hypothèses faites sur les conditions initiales du système. Dans ce chapitre, on se limitera donc aux contraintes imposées par la stabilité des configurations dans le problème à trois corps non dissipatif.

Les exo-planètes coorbitales induisent un signal souvent semblable à celui d'autres configurations orbitales pour les méthodes basiques de détection indirecte (vitesse radiale - RV, transit, astrométrie, variation du temps de transit - TTV). Des méthodes spécifiques peuvent cependant être développées afin d'extraire la signature de coorbitaux pour chacune de ces techniques. Ces méthodes s'appuient sur des aspects de la dynamique coorbitale et peuvent être séparées en deux groupes : les méthodes observant le mouvement de l'étoile (RV, astrométrie) et les méthodes mesurant la diminution du flux de lumière qui nous provient de l'étoile quand une des planètes passe devant (transit et TTV). Les méthodes RV et astrométrie dépendent donc du mouvement du barycentre des coorbitaux alors que transit et TTV dépendent de la position de la planète observée.

#### 4.1 Mouvement du barycentre

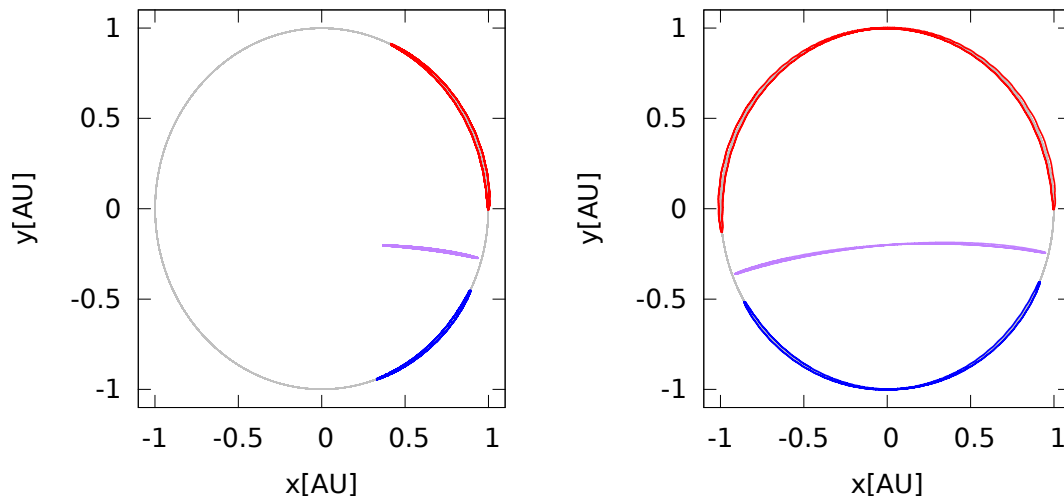


FIGURE 4.1 – Motion of the two co-orbital bodies (red and blue) and their barycenter (purple) in a co-rotating frame with frequency  $n$ . Tadpole (left) and horseshoe (right).  $\delta = 0.6$ . Here  $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$  and the planets are located at  $1 \text{ AU}$  from the star. Getting rid of the influence of  $n$ , one can see the long term motion of the barycenter of the planets.  $P_V$  is the period of the periodic trajectories represented by the coloured lines. See the text for more details.

C'est par le biais du mouvement de leur barycentre que les coorbitaux influent sur les

mesures de vitesse radiale ou d'astrométrie d'une étoile. La position de l'étoile par rapport au barycentre du système est donnée par ( $\mathbf{r}_j = x_j + iy_j$ ) :

$$\mathbf{r}_0 = -\mu[(1 - \delta)\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2], \quad (4.1)$$

avec  $\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2}$  et  $\mathbf{r}_j = r_j \exp^{if_j}$  où les  $r_j$  et les  $f_j$  sont donnés par les équations (1.44). Dans le cas circulaire, à l'ordre 0 en  $\mu$  et en choisissant l'origine du temps telle que  $y_1(0) = 0$ , la projection de la position  $\mathbf{r}_0$  dans la direction  $x$  s'écrit :

$$\Re(\mathbf{r}_0) = -a\mu[(1 - \delta) \cos(nt + \delta(\zeta(t) - \zeta(0))) + \delta \cos(nt + (\delta - 1)\zeta(t) - \delta\zeta(0))], \quad (4.2)$$

Sur un temps court devant la fréquence fondamentale de libration  $\nu$ ,  $\zeta$  peut être considéré constant. En faisant cette hypothèse, l'équation (4.2) est équivalente à :

$$\Re(\mathbf{r}_0) = C \cos(nt + \phi), \quad (4.3)$$

où  $C = a \frac{m_{eq}}{m_0 + m_{eq}}$  est l'amplitude des variations de position et

$$\begin{aligned} m_{eq} &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \zeta} \\ &= (m_1 + m_2) \sqrt{(1 - \delta)^2 + \delta^2 + 2(1 - \delta)\delta \cos \zeta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

est la masse équivalente d'une planète seule en orbite keplerienne circulaire et de même demi-grand axe  $a$  autour de l'étoile observée. Pour obtenir la vitesse de l'étoile dans la direction  $x$ , on dérive l'équation (4.3) par rapport au temps :

$$\Re(\dot{\mathbf{r}}_0) = K \sin(nt + \phi), \quad (4.5)$$

où  $K = an \frac{m_{eq}}{m_0 + m_{eq}}$ . Si on prend en compte l'inclinaison  $I$  de la ligne de visée par rapport au plan de l'orbite,  $K = an \frac{m_{eq}}{m_0 + m_{eq}} \sin I$ .

Si la libration des coorbitaux n'est pas perceptible à cause d'une trop faible amplitude ou d'une fréquence trop lente par rapport à l'étendue temporelle des observations, le mouvement qu'ils induisent sur l'étoile est indiscernable de celui induit par une seule planète sur une orbite circulaire. On peut vérifier que cela reste vrai à l'ordre 1 en excentricité, voir la lettre en annexe C.2.

Les mesures de vitesses radiales et astrométriques d'un tel système sont donc identiques à celles d'une seule planète fictive sur une orbite circulaire dont la masse dépend de la valeur instantanée de l'angle  $\zeta$  et du rapport  $\delta$  et est toujours inférieure à la somme des masses des coorbitaux. Dans le cas extrême où  $\zeta = \pi$  et  $\delta = 1/2$  la masse de la planète équivalente est nulle.

Considérons maintenant un temps suffisamment long pour voir l'évolution de  $\zeta$ . Laughlin et Chambers (2002) ont remarqué que le signal de vitesse radiale induit par des coorbitaux circulaires est semblable à une sinusoïde modulée en amplitude. Ceci est équivalent à une variation sur une période  $P_\nu$  de la masse de la planète fictive précédemment décrite (4.4). La figure 4.1 représente le mouvement du barycentre des coorbitaux pour une configuration troyenne et une configuration en fer-à-cheval. Quand le barycentre se rapproche de l'étoile, l'amplitude des variations de position de l'étoile diminue. L'amplitude de la modulation du signal dépend principalement de  $\delta$  et de l'amplitude de libration de  $\zeta$  (eq. 4.4). La position de l'étoile dans les cas de la figure 4.1 est tracée sur la figure 4.2. En première approximation, la FFT d'un signal modulé se compose d'un pic central à la fréquence rapide (ici le moyen mouvement moyen  $\bar{n}$ ) et de deux pics symétriques séparés du pic central par la fréquence plus lente de la modulatrice (ici  $\nu$ ).

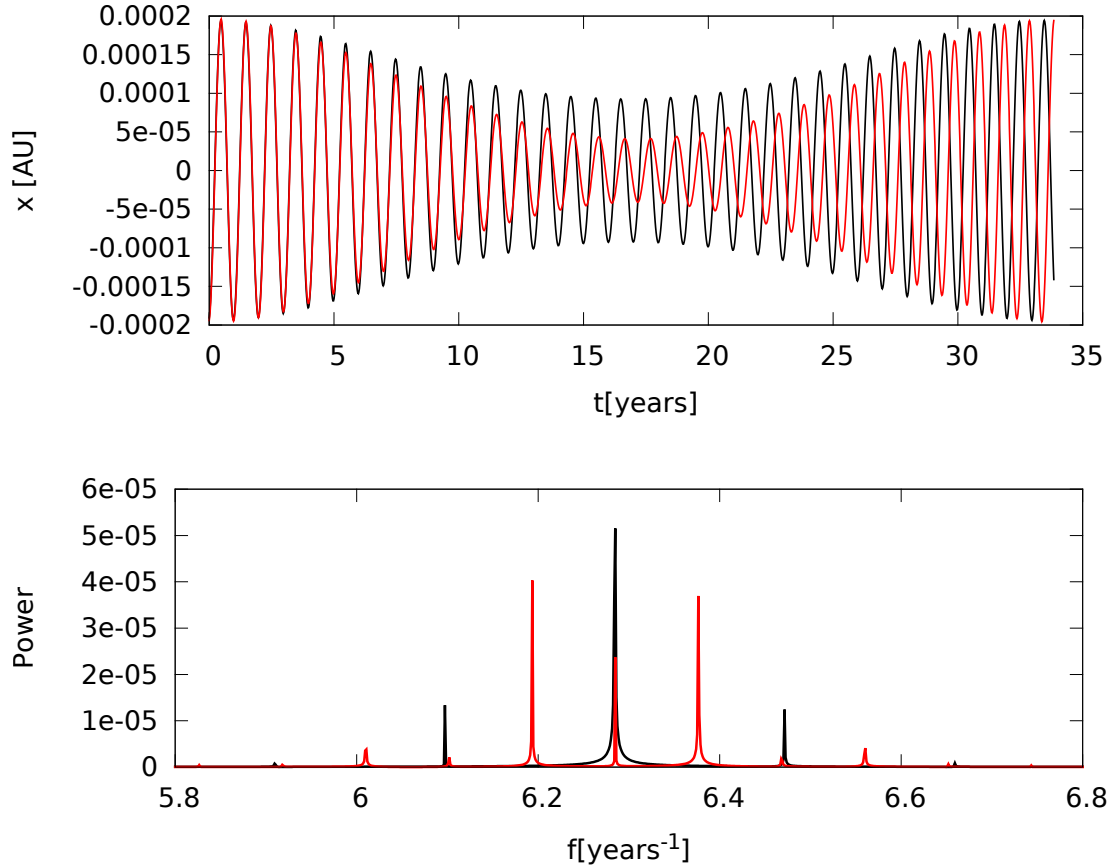


FIGURE 4.2 – Motion of the star in the configurations of Fig. 4.1 in the direction  $x$  in the inertial frame. In black is the tadpole orbit and in red the horseshoe. The top graph represents the evolution of the position of the star over time and the bottom one is its spectrum. In those examples, the libration period of the horseshoe orbits is about twice the period of the tadpole orbits. See the text for more details.

Cette signature particulière est présente dans les signaux de vitesse radiale et d'astrométrie. Elle a été étudiée dans l'article Leleu *et al.* (2015) disponible en Annexe C.1. Il y est décrit un algorithme permettant d'extraire la signature de la modulation d'un signal. Pour identifier cette signature dans le cas d'exoplanètes coorbitales, il faut observer le système sur des temps de l'ordre de la période de libration. Il faut également que l'amplitude de libration, ainsi que la masse du plus petit des coorbitaux, soient suffisamment importantes. De plus, nous montrons que les caractéristiques principales du signal peuvent être inversées afin d'obtenir les paramètres du système coorbital. L'inversion est partielle dans le cas de fer-à-cheval et complète dans le cas d'une configuration troyenne, où nous pouvons également déterminer l'inclinaison des coorbitaux par rapport à la ligne de visée, et donc leur masse. L'article se termine par une illustration de la méthode proposée sur des exemples réalistes.



## 4.2 Transit

La détectabilité par transit d'une planète sur une orbite circulaire autour d'une étoile de rayon  $R_*$  avec un instrument donné dépend de son rayon  $R$ , de son demi-grand axe  $a$  et de son inclinaison à la ligne de visée  $I$ . On dira qu'une planète transite si la projection de son centre de masse dans un plan orthogonal à la ligne de visée a une intersection non nulle avec la projection de l'étoile sur ce même plan. Par défaut on parlera du transit primaire où la planète est entre l'observateur et l'étoile, sauf si le contraire est précisé.

### 4.2.1 transit des deux coorbitaux

Si deux coorbitaux sont sur des orbites coplanaires, soit les deux planètes transitent, soit aucune ne transite. Les deux coorbitaux peuvent également transiter dans le cas où leur inclinaison mutuelle est non nulle, auquel cas le double transit a plus de chance de se produire si l'inclinaison mutuelle est faible, si les planètes sont proches de l'étoile et si leur ligne des nœuds dans le plan invariant est proche de la ligne de visée. Dans ce cas, une configuration coorbitale peut être détectée en mesurant des transits aux instants ( $k \in \mathbb{N}$ ) :

$$t_{1,k} = t_i + kP_n + \delta \frac{\zeta(t_{1,k})P_n}{2\pi} \text{ et } t_{2,k} = t_i + kP_n + (\delta - 1) \frac{\zeta(t_{2,k})P_n}{2\pi}. \quad (4.6)$$

où  $t_i$  est la phase du premier transit et  $P_n$  la période orbitale. Notons que si rien ne permet de différencier les transits des deux planètes (profondeur du transit, durée ou formes d'entrée/sortie) et que  $\zeta = \pi$  (en configuration fer-à-cheval), alors les deux coorbitaux peuvent être confondus avec une planète seule avec une période de  $P_n/2$ .

Dans le cas où une planète est détectée et l'autre est à la limite d'être détectable, Janson (2013) propose une méthode basée sur des diagrammes en rivière qui permettent de faire ressortir le signal de coorbitaux à la limite de la sensibilité instrumentale, voir Fig. 4.3.

### 4.2.2 transit d'un des coorbitaux

Considérons maintenant que nous observons le transit d'une seule planète, et que nous voulons savoir si celle-ci possède un compagnon coorbital. L'absence de détection par transit du compagnon peut provenir de son trop faible rayon ou d'une inclinaison mutuelle non nulle avec la planète qui transite. En effet, nous avons vu au Chapitre 3 qu'il existait des configurations coorbitales stables pour d'importantes valeurs de l'inclinaison mutuelle.

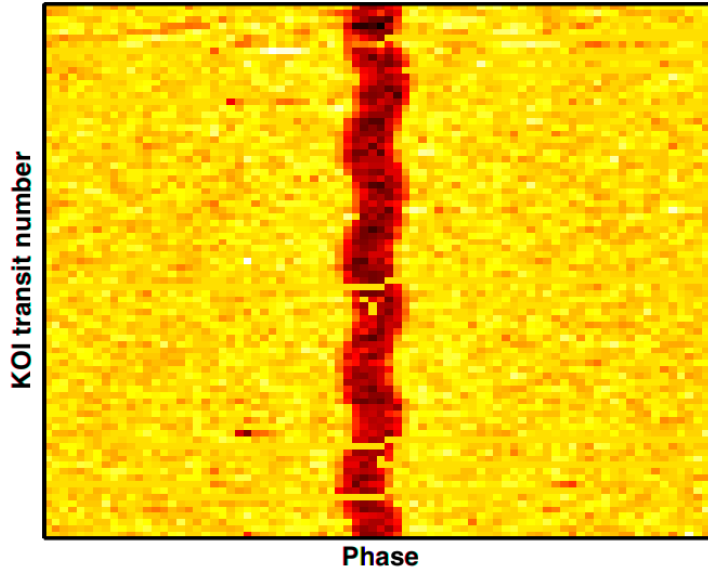
Dans le cas où une seule des planètes transite, les instants des transits sont donnés par exemple par  $t_{1,k}$ , équation (4.6). Deux transits successifs de la même planète sont séparés de :

$$t_{k+1} - t_k = P_n + \delta(\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)) \frac{P_n}{2\pi} \quad (4.7)$$

On ne connaît pas à priori  $P_n$ , la période de l'orbite de la planète observée. Si on n'observe que deux transits successifs, on fait une erreur de  $\delta(\zeta(t_{1,k+1}) - \zeta(t_{1,k})) \frac{P_n}{2\pi}$  sur la période orbitale de la planète. La détection de davantage de transits permet d'étudier les TTV (variation du temps de transit). Si on mesure trois transits successifs, l'écart de temps entre les transits  $k$  et  $k+1$  et les transits  $k+1$  et  $k+2$  s'écrit :

$$t_{k+2} + t_k - 2t_{k+1} = \delta(\zeta(t_{k+2}) + \zeta(t_k) - 2\zeta(t_{k+1})) \frac{P_n}{2\pi}. \quad (4.8)$$

On rappelle que l'évolution de  $\zeta$  est lente devant la période orbitale ( $\nu \propto \sqrt{\mu}n$ ). Il est donc préférable, après avoir estimé  $P_n$  à  $\delta\sqrt{\mu}$  près, d'attendre plusieurs périodes orbitales et de



**Figure 1.** General example of a river diagram. Shown here is a section of a diagram centered on a phase of 0.0, for the quasi-periodic transits of KOI-103.01. The approximately sinusoidal transit timing variations of KOI-103.01 creates a wiggled vertical trace along the diagram. The particular case of KOI-103.01 is discussed in more detail in Section 3.1.

FIGURE 4.3 – Diagramme en rivière proposé par Janson (2013). Chaque ligne correspond à une période orbitale centrée sur l’instant moyen du transit et la couleur indique le flux lumineux reçu de l’étoile. On voit ici une oscillation de l’instant du transit primaire (TTV). Si un compagnon troyen transite et a un rayon suffisamment important, une courbe sombre oscillant autour de  $\pm 60^\circ$  devrait apparaître sur ce graphe.

comparer l’instant effectif du transit avec l’instant prédit pour une orbite keplerienne. Au maximum, on peut mesurer un écart temporel de :

$$\max t_k - \min t_k = \delta(\zeta_{\max} - \zeta_{\min}) \frac{P_n}{2\pi}, \quad (4.9)$$

si les transits sont mesurés aux extremums de la libration (donc des mesures séparées de  $\approx P_n/\sqrt{\mu}$ ). Cette méthode ne fonctionne que si l’amplitude de libration de  $\zeta$  est non nulle. Le signal tend vers 0 avec  $m_1/m_2$  si on observe  $m_2$ . Par ailleurs, cette mesure seule ne permet pas de distinguer l’amplitude de libration  $\zeta_{\max} - \zeta_{\min}$  de la répartition des masses  $\delta$ . On définit l’application :

$$t(k) = t_k - kP_n, \quad (4.10)$$

où  $P_n$  peut être approximé par l’équation (4.7), ou déterminé comme la moyenne des intervalles entre deux transits. Vokrouhlický et Nesvorný (2014) ont montré que l’étude de cette fonction permet d’identifier la configuration coorbitale du système observé, notamment dans le cas de fer-à-cheval.

### 4.3 Transit et vitesse radiale

Dans le cas où seule la planète  $m_1$  transite, la combinaison avec des mesures de vitesse radiale peut permettre d’identifier des systèmes coorbitaux, même avec des mesures réparties sur un temps court devant la période de libration de l’angle résonant.

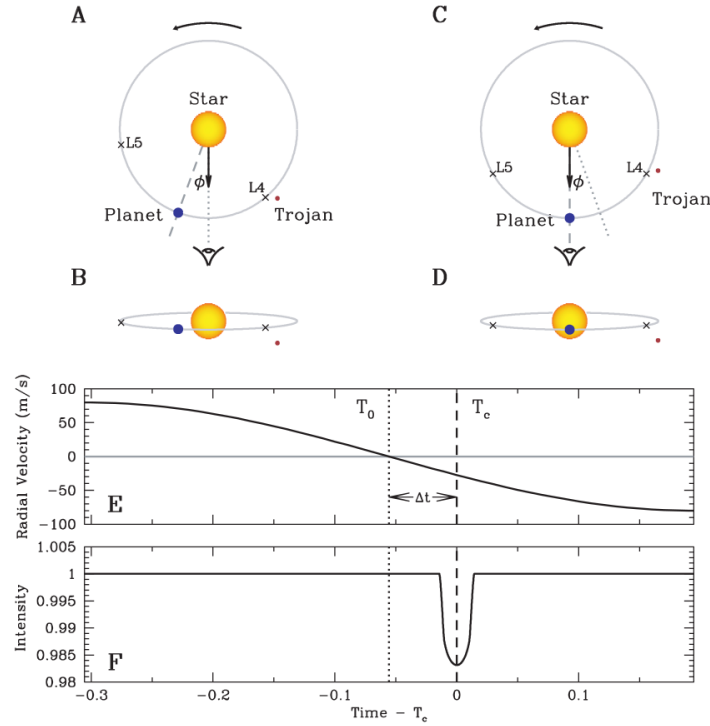


FIGURE 4.4 – Illustration de la méthode de Ford et Gaudi (2006). Le  $\phi$  représenté ici est identique à la phase de l'équation (4.3). Les graphes A et B représentent l'instant  $T_0$  où les vitesses radiales valent leur valeur moyenne et où la planète fictive passe par la ligne de visée. Les graphes C et D représentent l'instant  $T_e$  de transit effectif, où la planète  $m_1$  passe par la ligne de visée.

Cette méthode, proposée par Ford et Gaudi (2006) dans le cas de coorbitaux en configuration équilatérale circulaire, confronte la date effective du transit d'une planète avec la date prédite par les mesures de vitesses radiales. Prenons par exemple une planète seule sur une orbite circulaire autour de l'étoile. Si celle-ci transite, la date du milieu du transit coïncide avec l'instant où la vitesse radiale de l'étoile vaut sa valeur moyenne.

D'autre part, si la planète qui transite a un compagnon coorbital, alors la vitesse radiale mesurée atteint sa valeur moyenne à l'instant  $T_0$ , lorsque la planète équivalente  $m_{eq}$  décrite en section 4.1 passe dans la ligne de visée. La planète qui transite, quant à elle, passera dans la ligne de visée avant ou après cet instant à la date  $T_e$ . On mesure donc l'écart de temps  $\Delta t$  :

$$\Delta t = |T_e - T_0| = \frac{\phi(\zeta, \delta)}{2\pi} P_n. \quad (4.11)$$

où  $\phi$ , l'angle entre  $m_1$  et la position du barycentre des deux planètes, est représenté sur la figure 4.4.

### Au voisinage de l'équilibre de Lagrange circulaire coplanaire

On rappelle qu'on observe le transit de la planète  $m_1$ . Si  $m_2 > m_1$  ou  $m_2 \approx m_1$ , alors  $\Delta t \geq P_n/12$  est facilement détectable.

Considérons maintenant que  $m_2 \ll m_1$  ( $\delta \ll 1$ ) et que les coorbitaux sont proches

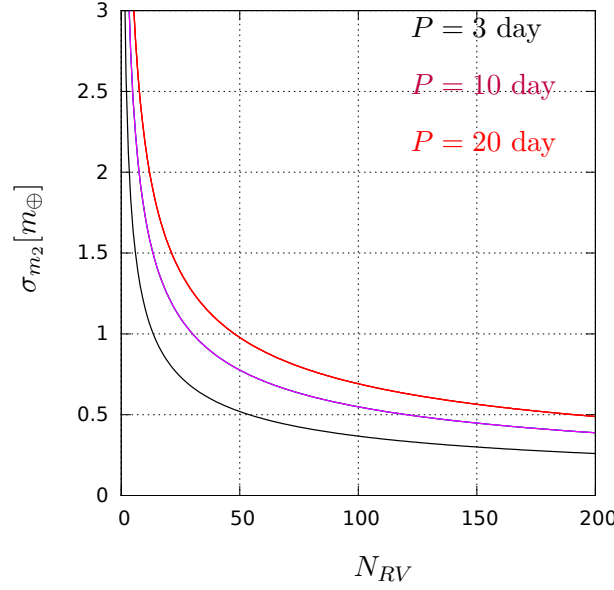


FIGURE 4.5 – Écart-type de la détermination de la masse d'un compagnon coorbital  $m_2 \ll m_1$  situé en  $\zeta = \pm 60^\circ$  en fonction du nombre de point de vitesse radiale ( $N_{RV}$ ). On a pris ici  $\sigma_{VR} = 1$  m/s.

de la configuration équilatérale.  $\phi$  devient (Ford et Gaudi, 2006) :

$$\Delta t = \pm \frac{\sqrt{3}\delta P_n}{4\pi}. \quad (4.12)$$

On cherche à identifier la limite inférieure de détection, donc l'écart type sur la mesure de la masse du compagnon troyen  $m_2$ . De l'équation (4.12) nous obtenons :

$$\sigma_{m_2} = 6(m_1 + m_2) \frac{\sigma_{\Delta t}}{P}, \quad (4.13)$$

Cette expression fait intervenir l'imprécision sur la mesure de  $\Delta t$ . On considère que cette imprécision est la somme de l'imprécision sur la mesure  $T_e$  et  $T_0$ , et que le transit est mesuré par une série de mesures photométriques continues prises avec un pas  $\Gamma$  et une incertitude gaussienne  $\sigma_{ph}$ , alors l'incertitude sur l'instant du milieu d'un transit est donnée par (Ford et Gaudi, 2006) :

$$\sigma_{T_e} = \left(\frac{t_e}{2\Gamma}\right)^{1/2} \sigma_{ph} \left(\frac{R_*}{R}\right)^2, \quad (4.14)$$

où  $R_*$  et  $R$  sont les rayons de l'étoile et de la planète, et  $t_e$  le temps d'entrée/sortie de la projection de la planète dans la projection de l'étoile. Ford et Gaudi (2006) ont considéré que  $\sigma_{T_e}$  était négligeable devant  $\sigma_{T_0}$  ( $\sigma_{T_e} \approx 10$  s pour les précisions instrumentales de 2006).

D'autre part, si on considère  $N_{RV}$  mesures de vitesses radiales réparties uniformément sur la phase orbitale avec une erreur gaussienne d'écart type  $\sigma_{RV}$ , l'incertitude sur le temps  $T_0$  tend vers (Ford et Gaudi, 2006) :

$$\sigma_{T_0} = \left(\frac{1}{2\pi^2 N_{RV}}\right)^{1/2} \frac{P_n \sigma_{RV}}{K}, \quad (4.15)$$

où  $P$  est la période orbitale et  $K \approx 2\pi m_{eq}/m_0 P_n^{1/3}$  (à l'ordre 1 en  $m_{eq}$ , équation 4.4). Une bonne détermination de  $T_0$ , donc de  $\Delta t$  et de  $m_2$  demande donc l'acquisition de nombreux points de vitesse radiale. En remplaçant  $\sigma_{\Delta t} \approx \sigma_{T_0}$  par l'expression (4.15), on obtient :

$$\sigma_{m_2} = \frac{\sigma_{RV}}{N_{RV}^{1/2}} P_n^{1/3} \frac{3}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_1 + m_2}{m_{eq}} m_0. \quad (4.16)$$

Or, dans le cas  $m_1 \gg m_2$ , la masse équivalente tend vers  $m_1$ . nous avons donc :

$$\sigma_{m_2} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{\sigma_{RV}}{N_{RV}^{1/2}} P_n^{1/3} m_0 + \mathcal{O}(m_2/m_1). \quad (4.17)$$

Cet écart type donne une information sur l'erreur commise sur la masse de  $m_2$  (si cette erreur est gaussienne, mais on ne rentrera pas dans les détails ici). Elle donne donc également la masse limite de détection d'un compagnon troyen pour la planète observée : si un décalage  $\Delta t$  supérieur à 3 sigma est observé, alors le test est positif avec une certitude de 99.7%. De la même manière, pour un jeu de mesures donné, on pourra détecter avec une certitude de 99.7% la présence ou l'absence d'un compagnon coorbital de masse  $3*\sigma_{m_2}$  (en supposant une configuration circulaire équilatérale).

**Remarque 12.**  $\sigma_{m_2}$  ne dépend pas de la masse des coorbitaux. Cela peut paraître contre-intuitif car  $\Delta t$  augmente quand  $m_1$  diminue à  $m_2$  fixé (voir équation 4.12). Cependant, l'erreur sur la détermination de  $T_0$ , et donc de  $\Delta t$ , augmente quand  $m_1$  diminue.

La figure 4.5 donne l'évolution de l'écart type  $\sigma_{m_2}$  en masse terrestre fonction du nombre de points de vitesse radiale ( $N_{RV}$ ), pour trois valeurs de  $P_n$  et une précision sur les vitesses radiales de 1 m/s. Pour des périodes orbitales de quelques jours, une précision de l'ordre d'une masse terrestre est atteignable avec un nombre de points de vitesses radiales raisonnable ( $N_{VR} \approx 100$ ).

## Discussion

La mesure d'un décalage entre le transit prédit par les vitesses radiales et le transit effectif permet donc d'identifier des systèmes contenant potentiellement des configurations coorbitales. Cependant, ce décalage peut également être induit par l'excentricité mal déterminée de la planète qui transite.

Nous abordons ce problème dans une lettre (annexe C.2). Nous commençons par généraliser la méthode de Ford et Gaudi (2006) à l'ordre 1 en excentricité, pour toutes valeurs des masses des coorbitaux et toute valeur de l'angle résonant  $\zeta$ . Nous montrons qu'à l'ordre 1 en excentricité, les vitesses radiales induites par des coorbitaux sont équivalentes à celles induites par une planète seule sur une orbite keplerienne (nous montrons également que cela n'est plus valable à l'ordre 2). Nous discutons la dégénérescence entre le décalage induit par un compagnon coorbital de faible masse et l'excentricité de la planète qui transite et nous donnons, en fonction de l'erreur de mesure sur l'excentricité, la masse maximale que peut avoir un compagnon coorbital non détecté dans le cas incliné et faiblement excentrique.



## Chapitre 5

# Résonances spin-orbites dans le problème planétaire à trois corps plan

L'objet de ce chapitre est l'étude de la rotation d'un corps asymétrique indéformable dans le problème planétaire à trois corps plan. On y développe une méthode visant à déterminer la position et la taille des différentes résonances spin-orbites présentes dans l'espace des phases, permettant de prédire la position des zones de libration, circulation, ou d'évolution chaotique du spin d'un corps. La taille relative des îles de résonance donne une indication sur la probabilité de capture d'un corps en résonance spin orbite en cas de dissipation.

On s'intéresse au cas simplifié où le corps tourne autour de son axe principal d'inertie qui est perpendiculaire au plan de son orbite. Cela représente le cas où l'obliquité du corps a déjà évolué vers son état d'équilibre, que nous supposons être nul. Comme nous pouvons le voir dans l'article Correia *et al.* (2015) la prise en compte de l'évolution de l'obliquité peut grandement augmenter la taille des régions chaotiques, même si la position et la taille relative des îles de résonance spin-orbite restent inchangées dans la plupart des cas.

### 5.1 Formulation Hamiltonienne de l'équation de la rotation plane

Sous l'hypothèse de rotation autour de l'axe d'inertie maintenu perpendiculaire au plan de l'orbite, la rotation du corps peut être décrite par un angle unique, que nous appelons  $\theta$ . L'équation du mouvement de  $\theta$  est donnée par les équations canoniques associées au Hamiltonien  $\mathcal{H}$  données par Danby (1962) :

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - \frac{3}{4} \frac{B - A}{C} \mathcal{G} \sum_{i=0,2} m_i \frac{\cos 2(\theta - \Psi_i)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i\|^3}, \quad (5.1)$$

où  $\Psi_i$  est l'angle entre la direction  $x$  et la droite reliant les centres de gravité du corps tournant et du corps  $i$ , et  $I$  (resp.  $T$ ) est la variable canoniquement associée à  $\theta$  (resp. au temps  $t$ ).  $A < B < C$  sont les moments d'inertie du corps tournant. Ceux-ci sont considérés constants dans cette étude (corps rigide). Pour plus de commodité, l'équation

(5.1) peut s'écrire :

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - \frac{3B - A}{4C} \mathcal{G} \Re \left[ \sum_{i=0,2} \left( m_i \frac{e^{-i2\Psi_i}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i\|^3} \right) e^{i2\theta} \right]. \quad (5.2)$$

Tout d'abord, il est clair que si le mouvement des trois corps considéré est chaotique, les équations canoniques associées au Hamiltonien (5.2) ne décriront que des solutions chaotiques. Nous considérerons donc par la suite que le mouvement des trois corps est quasi-périodique, et donc que la quantité complexe

$$\sum_{i=0,2} \left( m_i \frac{e^{-i2\Psi_i}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i\|^3} \right) \quad (5.3)$$

peut se décomposer sur la base des fréquences fondamentales associées au mouvement du problème des trois corps :  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^{n_f}$ , avec  $n_f$  le nombre de fréquences fondamentales du problème. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{i=0,2} \left( m_i \frac{e^{-i2\Psi_i}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i\|^3} \right) = \sum_{j \geq 0} \hat{\rho}_{\eta_j}^2 e^{i(2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi_j)}, \quad (5.4)$$

avec  $2\eta_j \in \mathbb{Z}^{n_f}$ ,  $\langle \eta_j, \varsigma \rangle$  le produit scalaire usuel entre les vecteurs  $\eta_j$  et  $\varsigma$  et  $\hat{\rho}_{\eta_j} \in \mathbb{R}_+$ , où :

$$\hat{\rho}_{\eta_j}^2 e^{i\phi_j} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{i=0,2} \left( \frac{m_i e^{i2(-\Psi_i - \langle \eta_j, \varsigma \rangle t)}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i\|^3} \right) dt. \quad (5.5)$$

En injectant l'expression (5.4) dans le Hamiltonien (5.2) et en notant

$$\rho_{\eta_j} \equiv \frac{3}{2} \mathcal{G} \sqrt{\frac{B - A}{C}} \hat{\rho}_{\eta_j}, \quad (5.6)$$

nous obtenons le Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - \sum_{j \geq 0} \frac{\rho_{\eta_j}^2}{2} \cos(2\theta + 2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi_j). \quad (5.7)$$

$\mathcal{H}$  peut être vu comme le Hamiltonien d'une somme de pendules centrés en  $\dot{\theta} = \langle \eta_j, \varsigma \rangle$ , et de demi-largeur  $\rho_{\eta_j}$ . Dans le cas d'une orbite keplerienne excentrique, la seule fréquence présente est le moyen mouvement  $n$ . Dans ce cas, il y a une famille de résonances spin-orbites centrées en  $\dot{\theta} = pn$ , avec  $2p \in \mathbb{Z}$  et  $n$  le moyen mouvement de ce corps (Colombo, 1965; Goldreich et Peale, 1966). Dans le cas général d'une orbite quasi-périodique, nous avons potentiellement beaucoup plus d'îles de résonance dans l'espace des phases.

## 5.2 Description de l'espace des phases

On définit trois états possibles pour la rotation du corps : la libration, lorsque le corps évolue en résonance spin-orbite (on définit la résonance exacte comme un cas particulier de libration), la rotation chaotique, lorsque le spin est imprévisible, et la circulation, lorsque le corps est en dehors des deux états précédents. La nature dynamique d'une région donnée de l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$  dépend de la proximité des résonances voisines



et de leur épaisseur respective (Chirikov, 1979). On définit la distance entre le centre de deux résonances de la manière suivante :

$$\epsilon_j^k = |\langle \eta_j - \eta_k, \varsigma \rangle|. \quad (5.8)$$

Selon le critère de recouvrement de Chirikov, l'interaction entre deux résonances voisines peut être de trois sortes :

(a) quand  $(\rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}) \ll \epsilon_j^k$ , les deux îles sont bien séparées, et seules leurs séparatrices sont entourées d'une fine zone chaotique. La plupart des trajectoires au voisinage de ces îles sont donc quasi-périodiques. Si on considère une faible dissipation, le spin peut être capturé dans une de ces résonances. Plus l'île est large, plus la probabilité d'y être capturé est importante (Goldreich et Peale, 1966).

(b) quand  $(\rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}) \gg \epsilon_j^k$ , les deux îles se recouvrent totalement. La dynamique résultante est celle d'un pendule modulé (voir Morbidelli, 2002, page 224). Adaptons l'étude menée par Morbidelli (2002) à l'interaction de deux résonances voisines, indicées  $j$  et  $k$ . La restriction du Hamiltonien (5.7) à ces résonances s'écrit :

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - \frac{\rho_{\eta_j}^2}{2} \cos(2\theta + 2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi_j) - \frac{\rho_{\eta_k}^2}{2} \cos(2\theta + 2\langle \eta_k, \varsigma \rangle t + \phi_k). \quad (5.9)$$

Ce qui, après quelques transformations trigonométriques, est équivalent à :

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - A(t) \cos(2\theta + 2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi'). \quad (5.10)$$

où  $\phi'$  dépend de l'ensemble des paramètres, et :

$$A(t) = \sqrt{\frac{\rho_{\eta_j}^4}{4} + \frac{\rho_{\eta_k}^4}{4} + \frac{\rho_{\eta_j}^2 \rho_{\eta_k}^2}{2} \cos(\epsilon_j^k t + \phi_k - \phi_j)}. \quad (5.11)$$

De manière générale, l'expression (5.10) est moins limpide que (5.9). Cependant, lorsque  $\epsilon_j^k$  est petit devant la fréquence de libration dans l'île de résonance, c'est à dire :

$$\epsilon_j^k \ll \min(\sqrt{A(t)}) = \sqrt{\left| \frac{\rho_{\eta_j}^2}{2} - \frac{\rho_{\eta_k}^2}{2} \right|}, \quad (5.12)$$

nous pouvons faire l'approximation d'invariance adiabatique (Henrard, 1982; Morbidelli, 2002) pour  $A(t)$ . Dans ce cas, l'expression (5.10) est celle d'un pendule modulé, dont l'épaisseur de l'île de libration varie sur la période  $P_{\epsilon_j^k} = 2\pi/\epsilon_j^k$  d'une amplitude égale à  $\max(A(t)) - \min(A(t)) = \min(\rho_{\eta_j}^2, \rho_{\eta_k}^2)$ . Sur une échelle de temps courte par rapport à la période  $P_{\epsilon_j^k}$ , nous pouvons considérer une valeur instantanée pour  $A(t)$ , afin de déterminer si notre système se trouve dans une zone de circulation, de libration, ou au voisinage de la séparatrice de l'île de résonance. Cependant, en considérant la rotation sur un temps plus long, l'ensemble de l'espace des phases balayé par la séparatrice est chaotique, comme chaque point de cette région de l'espace des phases est à tour de rôle dans un état de circulation, de libration, ou bien au voisinage de la séparatrice.

(c) quand la distance entre le centre de deux résonances est comparable avec la somme de leurs deux demi-épaisseurs non perturbées ( $\epsilon_j^k \approx \rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}$ ), il y a apparition d'une zone

chaotique d'épaisseur significative (Chirikov, 1979; Murray et Dermott, 1999), comme c'est le cas pour la rotation d'Hyperion, dans le cas d'une orbite Keplerienne excentrique (Wisdom *et al.*, 1984).

Décrire l'espace des phases du problème considéré s'avère donc difficile, car il faut connaître l'ensemble des  $\rho_{\eta_j}$  qui sont de manière générale de nombre infini. Cependant, dans la plupart des cas, l'amplitude des termes de la décomposition (5.4) décroît. Cette décroissance peut être plus ou moins lente, mais elle permet néanmoins de ne considérer qu'un nombre fini de termes. En effet, à partir d'un certain rang les termes sont soit d'amplitude négligeable par rapport à leur séparation en fréquence (cas b), mais avec des îles de résonances très petites, avec des probabilités de capture proportionnelles à leur largeur ; soit ils ne font que perturber légèrement la taille de la zone chaotique autour de la séparatrice d'îles de largeur plus élevée, en créant une zone chaotique de taille comparable à leur propre largeur (cas c). On peut donc avoir un bon aperçu de la dynamique au voisinage d'une résonance spin-orbite excentrique (Keplerienne, de la forme  $\dot{\theta} = k\eta/2$ ) en ne considérant que les îles de largeur comparable avec l'île la plus large présente, étant le terme de plus grande amplitude de la décomposition (5.4).

Pour que des perturbations orbitales aient un impact significatif sur l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$ , il faut donc que la décomposition (5.4) possède des termes supplémentaires par rapport au cas keplerien de taille significative et une séparation fréquentielle non négligeable par rapport à la taille des îles. Ce dernier critère est généralement relatif à l'échelle de temps considérée : sur un temps de l'ordre de la période orbitale, l'évolution de l'excentricité n'a aucun effet sur l'espace des phases, mais celle-ci peut générer d'importantes zones chaotiques sur des temps séculaires (Leleu *et al.*, 2016, en annexe). Reprenant l'expression (5.2), on étudiera deux cas pouvant faire apparaître des fréquences comparables avec la taille des résonances spin-orbites kepleriennes : Le cas d'une étoile et de deux planètes en résonance en moyen mouvement, où  $m_0 \gg \max(m_1, m_2)$  (section 5.2.1), et le cas de deux étoiles et d'une planète  $(m_0, m_2) \gg m_1$  (section 5.2.2).

### 5.2.1 Système planétaire

Considérons un système comprenant un corps significativement plus massif que les autres, tel une étoile  $m_0$ , et deux corps gravitant autour sur des orbites perturbées stables sans être en résonance en moyen mouvement,  $m_1$  et  $m_2$ . Tant que les deux planètes restent suffisamment éloignées (en dehors de la sphère de Hill), l'impact du potentiel gravitationnel induit directement par la planète 2 sur la rotation de la planète 1 est négligeable devant le potentiel de l'étoile. Cependant, la dynamique de l'angle  $\theta$  est perturbée indirectement par la planète  $m_2$  : elle perturbe l'orbite du corps tournant, ce qui modifie l'expression du terme  $i = 0$  dans la somme (5.3).

Dans le cas non résonant, les fréquences impliquées dans la dynamique orbitale de chacun des corps sont les moyens mouvements  $n_j = \mathcal{O}(1)$ , et fréquences séculaires associées à l'évolution de leur excentricité et de leur inclinaison  $g_j = \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $s_j = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , où  $\varepsilon$  est de taille  $\frac{m_1+m_2}{m_0}$ . Nous avons donc  $(n_1, n_2) \gg (g_1, g_2, s_1, s_2)$ . La séparation fréquentielle des îles de résonance induites par ces fréquences ( $\varepsilon_j^k = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ) est dans la plupart des cas négligeable par rapport à la largeur des îles de résonance induites par les termes kepleriens du développement (ça n'est pas le cas quand  $\rho_{\eta_j} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  mais cela implique que la largeur des îles de résonance considérées sont très faibles).

Dans le cas de fortes variations de l'excentricité ou de l'inclinaison avec des fréquences

$g_j$  et  $s_j$ , la séparation des échelles de temps impliquées dans la dynamique nous permet de considérer l'excentricité, l'inclinaison et leurs angles associés comme des invariants adiabatiques. Si on s'intéresse à la rotation du corps sur un temps court devant des temps séculaires, on peut négliger l'évolution de ces variables. L'impact de l'évolution des invariants adiabatiques peut ensuite être étudié : les séparatrices balayent la région de l'espace des phases qui se situe entre leurs valeurs extrémales.

Dans le cas planétaire résonant, en plus des échelles de temps évoquées précédemment intervient celle de l'angle résonant de fréquence fondamentale  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ . Cette libration orbitale crée des îles de résonance spin-orbites centrées en  $\dot{\theta} = kn/2 + p\nu/2$  avec  $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$  qui viennent s'ajouter aux familles de résonances spin-orbites kepleriennes  $\dot{\theta} = kn/2$  ( $\epsilon_j^k = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ ). Cette séparation angulaire est trop faible pour qu'il y ait une modification significative de l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$  pour des corps à très forte asymétrie tels que les satellites co-orbitaux de Saturne, mais les modifications de l'espace des phases deviennent très importantes pour des co-orbitaux qui auraient des caractéristiques proches de la terre.

L'article Leleu *et al.* (2016) (annexe C.3) détaille l'espace des phases de l'angle de rotation  $\theta$  d'une planète ayant un compagnon co-orbital dans le cas plan excentrique. Nous y montrons l'apparition des familles de résonances en  $n$ ,  $\nu$  et  $g$  et étudions l'impact de l'amplitude de libration et de l'excentricité sur la position et la taille des îles. Nous montrons notamment que pour de larges amplitudes de libration, les îles de résonances centrées en  $\dot{\theta} = kn/2 + p\nu/2$  peuvent devenir prépondérantes par rapport aux résonances spin-orbites kepleriennes.

### 5.2.2 Cas binaire

Dans le cas  $(m_0, m_2) \gg m_1$ , à l'exception du cas où  $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \ll \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ , le potentiel des deux étoiles doit être pris en compte pour l'étude de la rotation en plus de leurs effets sur l'orbite du corps. Cependant, si l'orbite de la planète 1 reste suffisamment proche d'une orbite keplerienne (on rappelle que la méthode développée ici est valable dans le cas d'orbites quasi-périodiques), comme par exemple dans le cas circumbinaire où le demi grand-axe de la planète est grand devant celui de la binaire, ou dans le cas où la planète tourne autour d'une des étoiles, on peut dans un premier temps négliger l'effet des perturbations orbitales sur la rotation : l'effet dominant est la somme des potentiels gravitationnels des deux étoiles.

Considérons le cas circumbinaire, où le corps tournant a une orbite proche d'une orbite keplerienne. notons  $n$  le moyen mouvement du corps tournant et  $n_b$  le moyen mouvement de la binaire. Les résonances spin-orbites apparaissent en  $\dot{\theta} = kn/2 + p(n_b - n)/2$  avec  $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$  (Correia *et al.*, 2015) (Annexe C.4). Dans le cas où  $n_b$  est comparable à  $n$ , de nouvelles îles apparaissent par rapport au cas keplerien. La largeur de ces îles augmente quand  $n_b$  se rapproche de  $n$ , ce qui modifie complètement l'espace des phases. L'article Correia *et al.* (2015) traite par exemple le cas des satellites circumbinaires du système Pluton-Charon. Dans cette lettre, on montre que le modèle analytique considérant le potentiel des deux corps massifs et des orbites circulaires donne des résultats similaires à l'intégration numérique du problème à trois corps et des équations de la rotation. On verra également que selon sa valeur initiale, l'obliquité peut fortement augmenter la taille des zones chaotiques dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$ .



# Résumé et discussion

Après le rappel de résultats concernant la dynamique coorbitale dans le problème circulaire plan dans le chapitre 1, nous avons étudié le problème excentrique plan dans le chapitre 2, puis le problème circulaire incliné dans le chapitre 3.

Dans le cas excentrique plan nous nous sommes intéressés à l'évolution de l'espace des phases à mesure que l'excentricité des coorbitaux augmentait. Dans les premières sections, nous avons introduit les familles d'orbites quasi-périodiques de dimension non maximale  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  qui émergent des équilibres de Lagrange circulaires. Nous avons ensuite réduit le problème à deux degrés de liberté : un degré associé à la libration de l'angle résonant  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$ , et un degré associé à l'évolution séculaire de la différence des périhélie  $\Delta\varpi$  et des excentricités. Dans cet espace moyen réduit, nous avons introduit les variétés représentatives : des variétés de conditions initiales de dimension 2, choisies de manière à ce que les trajectoires qui en sont issues représentent un volume significatif de l'espace des phases de dimension 4. Nous montrons notamment que dans le cas où les coorbitaux sont de masses égales, le plan défini par  $e_1 = e_2$  et  $a_1 = a_2$  représente effectivement une part significative des orbites coorbitales pour une valeur fixée du moment cinétique. Puis nous proposons des critères numériques et semi-analytiques permettant d'identifier la position des familles  $\overline{\mathcal{F}}$  (et donc  $\mathcal{F}$  à l'intersection de celles-ci) dans l'ensemble de l'espace des phases. L'établissement de ces critères porte sur la séparation entre l'échelle de temps semi-rapide (associée à  $\zeta$ ), et l'échelle de temps séculaire (associée à  $\Delta\varpi$ ). Nous utilisons ensuite ces critères dans le cas  $m_1 = m_2$ . Grâce à ceux-ci, nous montrons que les changements de topologie intervenant lorsque l'excentricité des coorbitaux augmente sont liés à l'évolution des familles  $\overline{\mathcal{F}}$ . De plus, nous montrons que mis à part dans le domaine quasi-satellite, à mesure que l'excentricité et les masses des coorbitaux augmentent, les régions stables semblent se limiter au voisinage des familles  $\overline{\mathcal{F}}$ . Les changements majeurs mis en évidence dans le cas de coorbitaux à masses égales apparaissent également pour des coorbitaux de masses différentes. Cependant, en plus des différentes configurations présentes dans le cas  $m_1 = m_2$ , une partie significative de l'espace des phases est occupée par des orbites où l'angle  $\Delta\varpi$  circule. Enfin, nous calculons analytiquement la position des  $\overline{\mathcal{F}}$  dans le voisinage des familles  $\mathcal{F}$  afin de valider leur mise en évidence numérique.

Dans le chapitre 3, nous effectuons la réduction de Jacobi afin de représenter la dynamique des coorbitaux circulaires inclinés par un hamiltonien à 1 degré de liberté. Nous appliquons ensuite des méthodes similaires à celles utilisées dans le chapitre 2. Nous étudions notamment l'évolution des familles émergentes des équilibres de Lagrange circulaires et la limite de stabilité des configurations troyennes lorsque l'inclinaison mutuelle des deux coorbitaux augmente.

Il reste encore beaucoup à faire dans les deux cas étudiés (le cas excentrique plan et le cas circulaire incliné). Dans le cas circulaire incliné, la réduction à un degré de liberté permet l'étude exhaustive de l'espace des phases dans le problème moyen réduit. Dans le

cas excentrique plan, pour  $m_1 = m_2$ , il reste à affiner la vérification des variétés représentatives : une vérification plus approfondie dans la direction de la variable  $\Pi$  (associées aux excentricités), mais également dans la direction de la variable  $Z$  (associée aux demi-grand axes) : vérifier qu'il n'existe pas de configurations où  $a_1 \neq a_2$  sur toute l'orbite. Ces vérifications, dans un espace à deux paramètres, doivent être possible afin de se rapprocher de l'exhaustivité pour des valeurs fixées des masses et du moment cinétique.

Dans le cas  $m_1 \neq m_2$ , nous donnons en section 2.6.2 un algorithme permettant de construire une variété de référence pour une configuration orbitale donnée. Cet algorithme a été utilisé pour l'ensemble des configurations troyennes, fer à cheval et quasi-satellite pour une valeur du moment cinétique  $J_1 = J_1(e_1 = e_2 = 0.4)$ . Il reste à adapter l'algorithme pour les orbites où  $\Delta\varpi$  circule, puis à vérifier (également dans l'espace à deux paramètres  $\Pi$  et  $Z$ ) que chaque orbite de l'espace des phases passe bien par la variété de référence d'une des configurations connues.

S'attaquer au problème excentrique incliné avec cette méthode est envisageable, mais nécessiterait de considérer des variétés représentatives de dimension 3 (la moitié du nombre de dimension de l'espace moyen réduit), on perdrait donc l'avantage de pouvoir représenter sur des graphes en deux dimensions la dynamique d'un espace de dimension supérieure. Mais cela n'empêche pas l'étude des familles  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  dans ce cas.

Nous pouvons également utiliser cette approche pour d'autres problème. Par exemple, identifier de manière semi-analytique ou numérique les familles d'orbites quasi-périodiques de dimension non maximale émergeant des points d'équilibres d'autres résonances en moyen mouvement afin d'observer leur évolution quand les paramètres orbitaux des planètes changent. Cela peut permettre, dans certains cas, de faire le lien avec des modifications de l'espace des phases.

Dans le chapitre 4, nous abordons la détection des exoplanètes coorbitales quasi-circulaires. Nous rappelons que les études sur leur formation et leur évolution ne permettent pas à ce jour de contraindre les éléments orbitaux ou la masse de telles exoplanètes. Nous rappelons ensuite les différentes méthodes de détection adaptées au cas coorbital. On développe particulièrement le cas des vitesses radiales, ainsi que leur combinaison avec des mesures de transit. Nos travaux sur ces deux méthodes sont fournis en annexe. La détection de coorbitaux par vitesse radiale, astrométrie, ou variation du temps de transit nécessite d'identifier la signature de la libration de  $\zeta$  dans le signal. Dans le cas contraire, le signal est équivalent à celui d'une planète seule (cela reste vrai à l'ordre 1 en excentricité pour les vitesses radiales, voir la lettre pour plus de détails). Pour pouvoir identifier cette signature, il faut observer sur des temps de l'ordre de la période de libration. Il faut également que l'amplitude de libration, ainsi que la masse du plus petit des deux coorbitaux, soient suffisamment importantes. L'observation de la libration n'est plus nécessaire si on peut combiner des mesures de vitesses radiales avec les mesures de transits : l'instant du transit prédit par les vitesses radiales est différent de l'instant effectif de transit de la planète si le signal de vitesses radiales à été induit par des coorbitaux. Cependant ce déphasage peut également être dû à une erreur dans la prédiction de l'instant transit à cause d'une mauvaise détermination de l'excentricité de la planète. Nous abordons ce problème dans la lettre en annexe.

La prochaine étape est évidemment l'application de ces méthodes sur des systèmes concrets. Cela est déjà en cours dans le cadre du projet TROY<sup>1</sup>. L'amélioration de ces techniques, quant à elle, nécessite d'approfondir la connaissance de l'impacte de l'excentricité et de l'inclinaison sur le signal, ainsi que de développer des techniques fines de

1. <http://www.sc.eso.org/~jlillobo/troy/index.html>

traitement du signal et de ‘fit’ pour faire ressortir la signature coorbitale. Mais ce n’est pas tout : il est nécessaire de comprendre comment nous pouvons confirmer la détection d’exoplanètes coorbitales, notamment en combinant différentes techniques entre elles et en étudiant quelles autres configurations peuvent induire des signatures semblables à celles des configurations coorbitales. D’autre part, une étude de stabilité adaptée aux voisinage des paramètres orbitaux et de la masse estimée d’une planète détectée peut grandement contraindre les paramètres orbitaux d’un éventuel compagnon troyen de cette planète.

Pour finir, on décrit dans le chapitre 5 une méthode permettant d’étudier l’effet de perturbations orbitales sur les résonances spin-orbites d’un corps indéformable dans le problème planétaire à trois corps plan. Nous appliquons cette méthode dans deux cas : le cas coorbital excentrique, et le cas circumbinaire. Ces travaux sont disponibles en annexe. Dans ces deux cas, la dynamique du système comporte des fréquences fondamentales qui peuvent être comparables au moyen mouvement du corps tournant. Cela entraîne l’apparition de nouvelles résonances spin-orbites qui viennent s’ajouter à celles du cas keplerien. Dans certains cas, ces nouvelles résonances sont de taille comparable à celle des résonances képlériennes. Selon les paramètres orbitaux et la forme du corps tournant, cela entraîne soit l’apparition de larges zones chaotiques, soit de nouvelles configurations d’équilibre dans lesquelles le spin du corps tournant peut être capturé en présence de forces dissipatives.

D’autre part, nous avons vu que dans le cas circumbinaire l’ajout d’une obliquité initiale non nulle entraînait une très forte augmentation de la taille des zones chaotiques de l’espace des phases. Il serait intéressant de quantifier cela, et de l’expliquer à partir d’un formalisme adapté.

*Outside of a dog, a book is a man's best friend.  
Inside of a dog it's too dark to read.*

---

GROUCHO MARX



# Bibliographie

- BATYGIN, K. et MORBIDELLI, A. (2013). Analytical treatment of planetary resonances. *Astron. Astrophys.*, 556:A28.
- BEAUGÉ, C. et ROIG, F. (2001). A semianalytical model for the motion of the trojan asteroids : Proper elements and families. *Icarus*, 153:391–415.
- CHARLIER, C. V. L. (1906). Über den Planeten 1906 TG. *Astronomische Nachrichten*, 171:213.
- CHIRIKOV, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, 52:263–379.
- COLOMBO, G. (1965). Rotational Period of the Planet Mercury. *Nature*, 208:575.
- CORREIA, A. C. M., LELEU, A., RAMBAUX, N. et ROBUTEL, P. (2015). Spin-orbit coupling and chaotic rotation for circumbinary bodies. Application to the small satellites of the Pluto-Charon system. *Astron. Astrophys.*, 580:L14.
- CRESSWELL, P. et NELSON, R. P. (2008). Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *aap*, 482:677–690.
- CRESSWELL, P. et NELSON, R. P. (2009). On the growth and stability of Trojan planets. *Astron. Astrophys.*, 493:1141–1147.
- DANBY, J. (1962). *Fundamentals of celestial mechanics*.
- DELISLE, J.-B., LASKAR, J. et CORREIA, A. C. M. (2014). Resonance breaking due to dissipation in planar planetary systems. *A&A*, 566:A137.
- DELISLE, J.-B., LASKAR, J., CORREIA, A. C. M. et BOUÉ, G. (2012). Dissipation in planar resonant planetary systems. *A&A*, 546:A71.
- DERMOTT, S. F. et MURRAY, C. D. (1981). The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. I - Theory. *Icarus*, 48:1–11.
- DVORAK, R. (2006). Exchange orbits in planetary systems. In SULI A., Freistetter F., P. A., éditeur : *Proc. Fourth Austrian Hungarian Workshop on Celestial Mechanics.*, pages 63–74.
- ÉRDI, B. (1977). An asymptotic solution for the trojan case of the plane elliptic restricted problem of three bodies. *Celestial Mechanics*, 15:367–383.
- ÉRDI, B., NAGY, I., SÁNDOR, Z., SÜLI, Á. et FRÖHLICH, G. (2007). Secondary resonances of co-orbital motions. *MNRAS*, 381:33–40.

- FORD, E. B. et GAUDI, B. S. (2006). Observational Constraints on Trojans of Transiting Extrasolar Planets. *apjl*, 652:L137–L140.
- GARFINKEL, B. (1976). A theory of the Trojan asteroids. *Celestial Mechanics*, 14:301–306.
- GARFINKEL, B. (1978). Theory of the Trojan asteroids. II. *Celestial Mechanics*, 18:259–275.
- GASCHEAU, G. (1843). Examen d’une classe d’équations différentielles et application à un cas particulier du problème des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 16(7):393–394.
- GIUPPONE, C. A., BEAUGÉ, C., MICHTCHEKNO, T. A. et FERRAZ-MELLO, S. (2010). Dynamics of two planets in co-orbital motion. *MNRAS*, 407:390–398.
- GIUPPONE, C. A. Benitez-Llambay, P., et BEAUGÉ, C. (2012). Origin and detectability of co-orbital planets from radial velocity data. *MNRAS*.
- GOLDREICH, P. et PEALE, S. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. *aj*, 71:425.
- HADJIDEMETRIOU, J. D., PSYCHOYOS, D. et VOYATZIS, G. (2009). The 1/1 resonance in extrasolar planetary systems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 104:23–38.
- HADJIDEMETRIOU, J. D. et VOYATZIS, G. (2011). The 1/1 resonance in extrasolar systems. Migration from planetary to satellite orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 111:179–199.
- HENRARD, J. (1982). The adiabatic invariant - The use in celestial mechanics. In SZE-BEHELY, V., éditeur : *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, volume 82 de *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, pages 153–171.
- HENRARD, J. et CARANICOLAS, N. D. (1989). Motion near the 3/1 resonance of the planar elliptic restricted three body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 47:99–121.
- JANSON, M. (2013). A Systematic Search for Trojan Planets in the Kepler Data. *apj*, 774:156.
- LASKAR, J. (1989). Les variables de poincaré et le developpement de la fonction perturbatrice. Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes S026, Groupe de travail sur la lecture des Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.
- LASKAR, J. (1990). The chaotic motion of the Solar System. A numerical estimate of the size of the chaotic zone. *Icarus*, 88:266–291.
- LASKAR, J. (1999). Introduction to frequency map analysis. In SIMÓ, C., éditeur : *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, NATO ASI, pages 134–150. Kluwer, Dordrecht.
- LASKAR, J. et ROBUTEL, P. (1995). Stability of the planetary three-body problem I : Expansion of the planetary hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62:193–217.
- LASKAR, J. et ROBUTEL, P. (2001). High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80:39–62.
- LAUGHLIN, G. et CHAMBERS, J. E. (2002). Extrasolar Trojans : The Viability and Detectability of Planets in the 1 :1 Resonance. *Astron. J.*, 124:592–600.

- LELEU, A., ROBUTEL, P. et CORREIA, A. C. M. (2015). Detectability of quasi-circular co-orbital planets. Application to the radial velocity technique. *Astron. Astrophys.*, 581:A128.
- LELEU, A., ROBUTEL, P. et CORREIA, A. C. M. (2016). On the rotation of co-orbital bodies on eccentric orbits. *Cel. Mech.*
- LYRA, W., JOHANSEN, A., KLAHR, H. et PISKUNOV, N. (2009). Standing on the shoulders of giants. Trojan Earths and vortex trapping in low mass self-gravitating protoplanetary disks of gas and solids. *aap*, 493:1125–1139.
- MARCHAL, C. (2009). Long term evolution of quasi-circular Trojan orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:53–67.
- MEYER, K. R. et HALL, G. R. (1992). *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the n-body problem*. Springer-Verlag.
- MICHTCHENKO, T. A., FERRAZ-MELLO, S. et BEAUGÉ, C. (2006). Modeling the 3-d secular planetary three-body problem. *Icarus*, 181:555–571.
- MIKKOLA, S., INNANEN, K., WIEGERT, P., CONNORS, M. et BRASSER, R. (2006). Stability limits for the quasi-satellite orbit. *MNRAS*, 369:15–24.
- MORAIS, M. H. M. (1999). A secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.*, 350:318–326.
- MORAIS, M. H. M. (2001). Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.*, 369:677–689.
- MORAIS, M. H. M. et NAMOUNI, F. (2013). Retrograde resonance in the planar three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117:405–421.
- MORAIS, M. H. M. et NAMOUNI, F. (2016). A numerical investigation of coorbital stability and libration in three dimensions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 125: 91–106.
- MORBIDELLI, A. (2002). *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*. Taylor & Francis, London, 2002, ISBN 0415279399.
- MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K. et GOMES, R. S. (2005). Chaotic capture of Jupiter’s Trojan asteroids in the early Solar System. *Nature*, 435:462–465.
- MURRAY, C. D. et DERMOTT, S. F. (1999). *Solar system dynamics*.
- NAMOUNI, F. (1999). Secular Interactions of Coorbiting Objects. *Icarus*, 137:293–314.
- NAUENBERG, M. (2002). Stability and Eccentricity for Two Planets in a 1 :1 Resonance, and Their Possible Occurrence in Extrasolar Planetary Systems. *Astron. J.*, 124:2332–2338.
- PÁEZ, R. I. et EFTHYMIPOULOS, C. (2015). Trojan resonant dynamics, stability, and chaotic diffusion, for parameters relevant to exoplanetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 121:139–170.
- PIERENS, A. et RAYMOND, S. N. (2014). Disruption of co-orbital (1 :1) planetary resonances during gas-driven orbital migration. *mnras*, 442:2296–2303.

- POINCARÉ, H. (1892). *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, volume I. Gauthier Villars Paris, reprinted by Blanchard, 1987.
- ROBERTS, G. (2002). Linear stability of the elliptic Lagrangian triangle solutions in the three-body problem. *JDIFE*, 182:191–218.
- ROBUTEL, P. (1995). Stability of the planetary three-body problem II : Kam theory and existence of quasiperiodic motions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62:219–261.
- ROBUTEL, P. et BODOSSIAN, J. (2009). The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids - II. What happens for different configurations of the planetary system. *MNRAS*, 399:69–87.
- ROBUTEL, P. et GABERN, F. (2006). The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids I : Long-term stability and diffusion. *MNRAS*, 372:1463–1482.
- ROBUTEL, P. et LASKAR, J. (2001). Frequency map and global dynamics in the solar system I : Short period dynamics of massless particles. *Icarus*, 152:4–28.
- ROBUTEL, P., NIEDERMAN, L. et POUSSE, A. (2015). Rigorous treatment of the averaging process for co-orbital motions in the planetary problem. *ArXiv e-prints*.
- ROBUTEL, P. et POUSSE, A. (2013). On the co-orbital motion of two planets in quasi-circular orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 117:17–40.
- RODRÍGUEZ, A., GIUPPONE, C. A. et MICHTCHEKNO, T. A. (2013). Tidal evolution of close-in exoplanets in co-orbital configurations. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 117:59–74.
- SMITH, B. A., REITSEMA, H. J., FOUNTAIN, J. W. et LARSON, S. M. (1980). Saturn’s Inner Co-Orbital Satellites. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 12 de BAAS, page 727.
- SYNNOTT, S. P., PETERS, C. F., SMITH, B. A. et MORABITO, L. A. (1981). Orbits of the small satellites of Saturn. *Science*, 212:191.
- VOKROUHLICKÝ, D. et NESVORNÝ, D. (2014). Transit Timing Variations for Planets Co-orbiting in the Horseshoe Regime. *ApJ*, 791:6.
- WISDOM, J., PEALE, S. J. et MIGNARD, F. (1984). The chaotic rotation of Hyperion. *Icarus*, 58:137–152.
- WOLF, M. (1906). Photographische Aufnahmen von kleinen Planeten. *Astronomische Nachrichten*, 170:353.
- WOLSZCZAN, A. et FRAIL, D. A. (1992). A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355:145–147.

## Annexe A

# Matrices de Passage

Afin de s'affranchir de la partie linéaire en  $Z$ , on effectue le changement de variable suivant :

$$\chi^{(1)}(z, Z^{(1)}, x_j, \bar{x}_j) = (z, Z, x_j, \bar{x}_j) \quad (\text{A.1})$$

où

$$Z^{(1)} = Z + h_Z / (2h_{Z^2}). \quad (\text{A.2})$$

Pour la suite, on reprendra la notation  $Z$  pour  $Z^{(1)}$  :. Nous obtenons donc  $h_Z = 0$ . Le changement de variable suivant,  $\chi_{L_k}$ , a pour but de diagonaliser la partie quadratique du Hamiltonien au voisinage de l'équilibre circulaire  $L_k$ . On remarque que les variables  $(z, Z)$  et  $(x_j, \bar{x}_j)$  sont découplées, la matrice de passage du changement de variable suivant prend donc la forme :

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)} & 0_{2 \times 4} \\ {}^t 0_{2 \times 4} & B_j^{(2)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -i \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} & -\frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

avec  $\alpha = (h_z / h_Z)^{1/4}$  et

$$B_4^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1^0 + \Lambda_2^0}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_2} \exp^{i\pi/3} & 0 & \sqrt{m_1} \exp^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \exp^{-i\pi/3} & 0 & \sqrt{m_1} \exp^{-i\pi/3} \\ -\sqrt{m_1} & 0 & \sqrt{m_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m_1} & 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

et pour  $L_3$  :

$$B_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_2} & 0 & \sqrt{\Lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Lambda_2} & 0 & \sqrt{\Lambda_1} \\ \sqrt{\Lambda_1} & 0 & -\sqrt{\Lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Lambda_1} & 0 & -\sqrt{\Lambda_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

On donne par ailleurs :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} & -i \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$\chi_{L_k}$  s'écrit donc :

$$\chi_{L_k}(z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2) = (z, Z, x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2) \quad (\text{A.8})$$

où

$${}^t(z, Z, x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2) = P^{(2)} {}^t(z_0, \tilde{z}_0, z_1, \tilde{z}_1, z_2, \tilde{z}_2). \quad (\text{A.9})$$



Annexe B

Exemples d'orbites

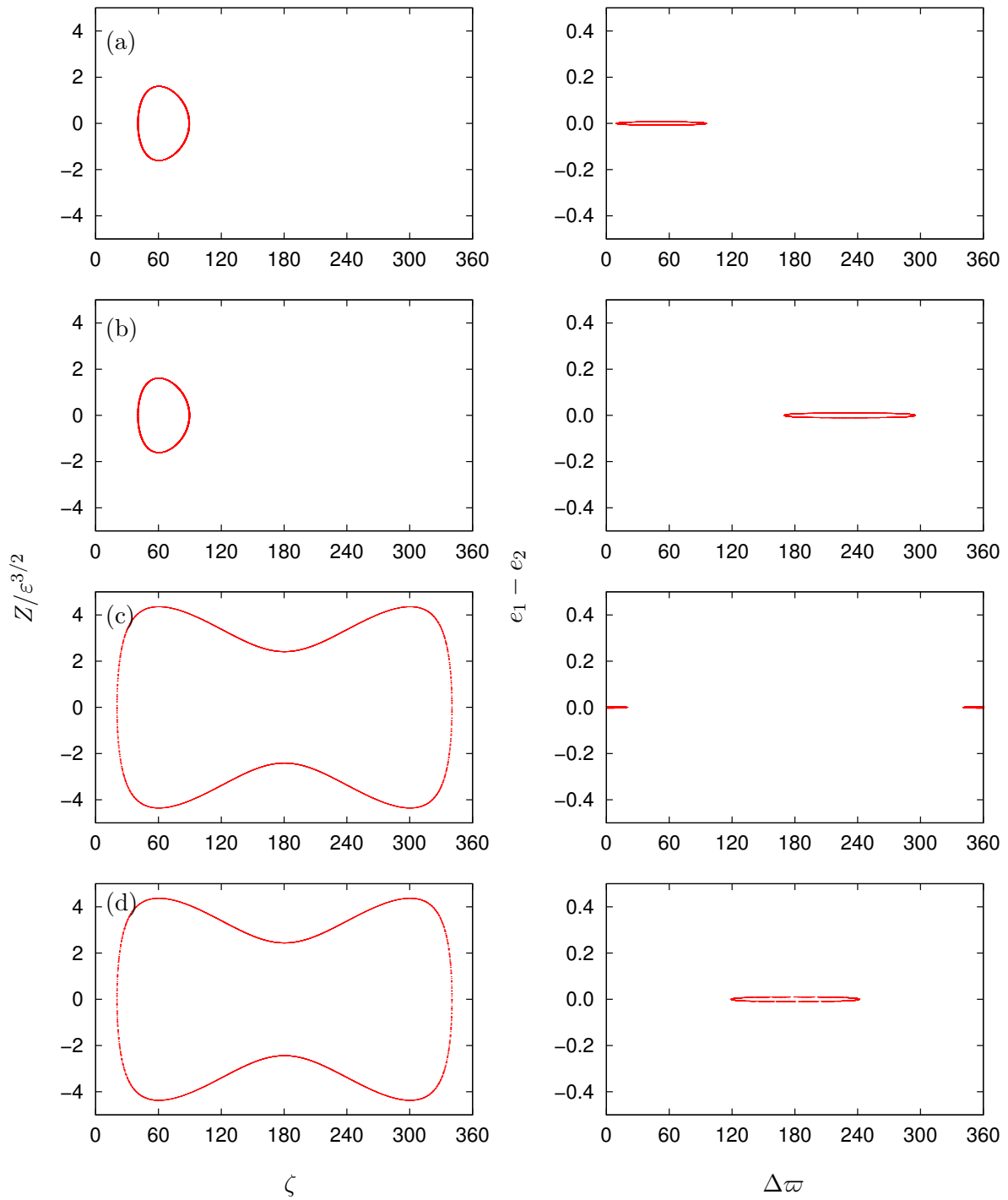


FIGURE B.1 – Trajectoires issues du plan de conditions initiales de la figure 2.5. (a) :  $\zeta = 40^\circ, \Delta\varpi = 100^\circ$ ; (b) :  $\zeta = 40^\circ, \Delta\varpi = 170^\circ$ ; (c) :  $\zeta = 20^\circ, \Delta\varpi = 20^\circ$ ; (d) :  $\zeta = 20^\circ, \Delta\varpi = 120^\circ$



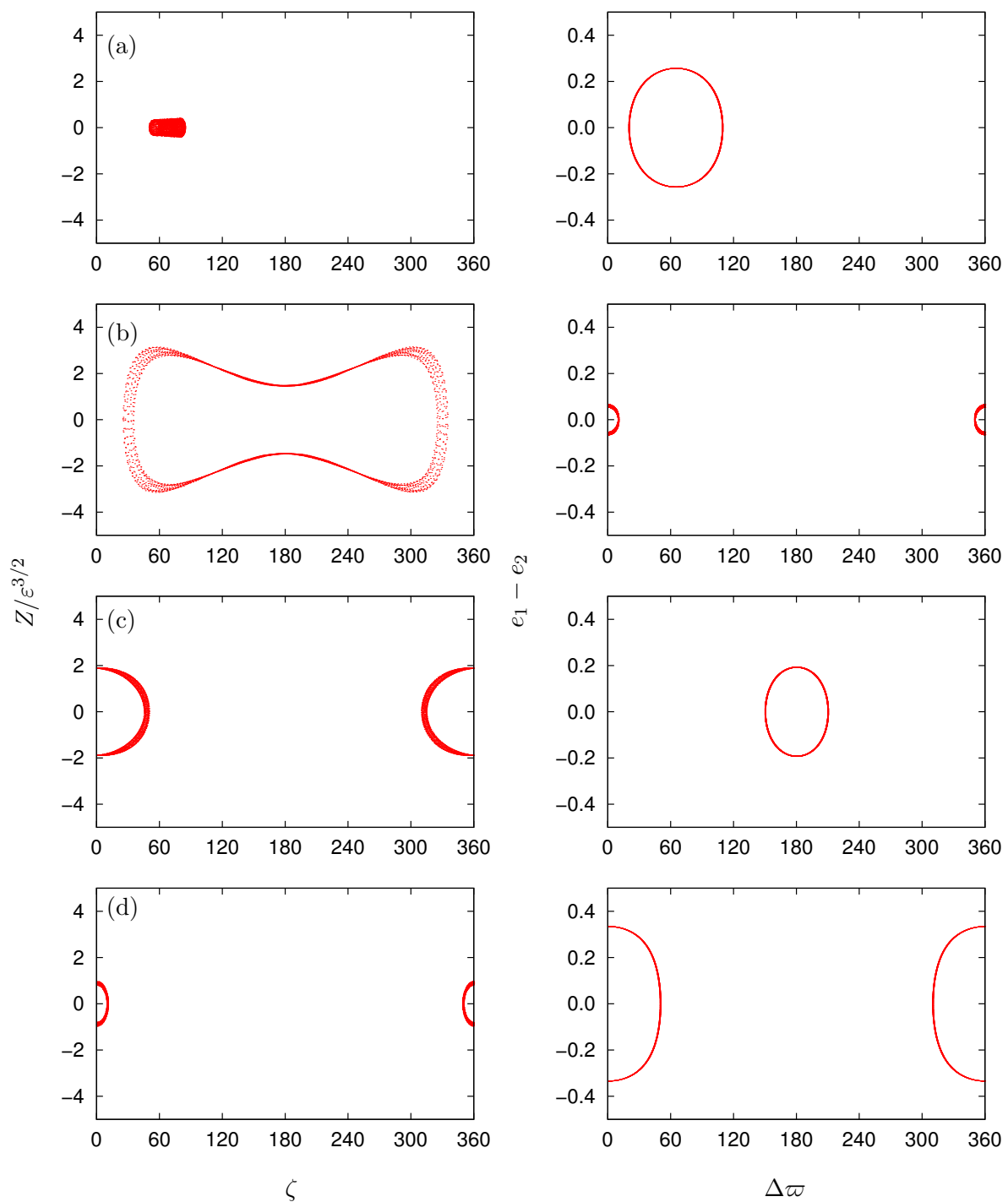


FIGURE B.2 – Trajectoires issues du plan de conditions initiales de la figure 2.6. (a) :  $\zeta = 55^\circ, \Delta\varpi = 20^\circ$ ; (b) :  $\zeta = 20^\circ, \Delta\varpi = 10^\circ$ ; (c) :  $\zeta = 50^\circ, \Delta\varpi = 160^\circ$ ; (d) :  $\zeta = 10^\circ, \Delta\varpi = 50^\circ$

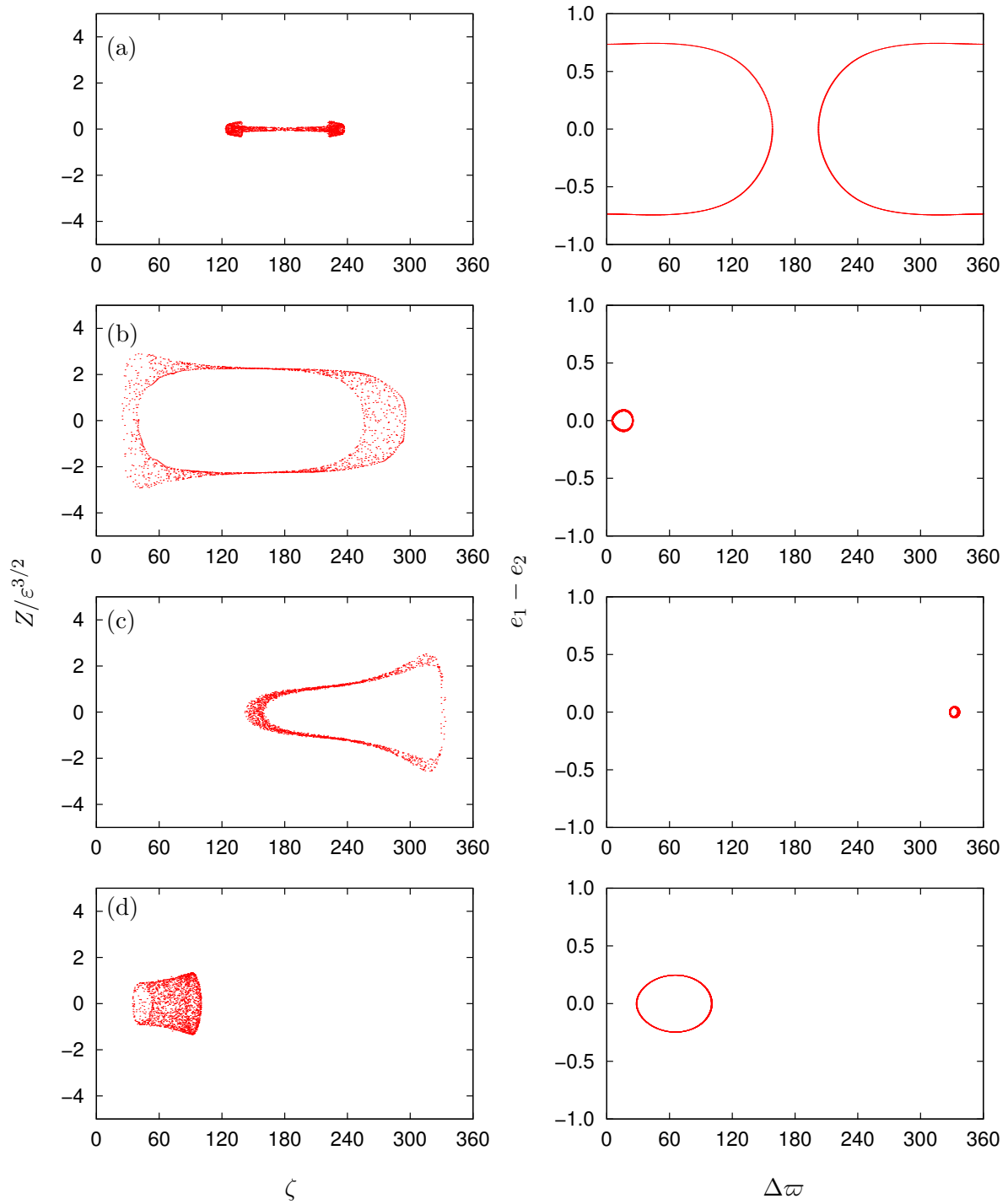


FIGURE B.3 – Trajectoires issues du plan de conditions initiales de la figure 2.9. (a) :  $\zeta = 136^\circ, \Delta\varpi = 158^\circ$ ; (b) :  $\zeta = 40^\circ, \Delta\varpi = 5^\circ$ ; (c) :  $\zeta = 150^\circ, \Delta\varpi = -25^\circ$ ; (d) :  $\zeta = 100^\circ, \Delta\varpi = 100^\circ$

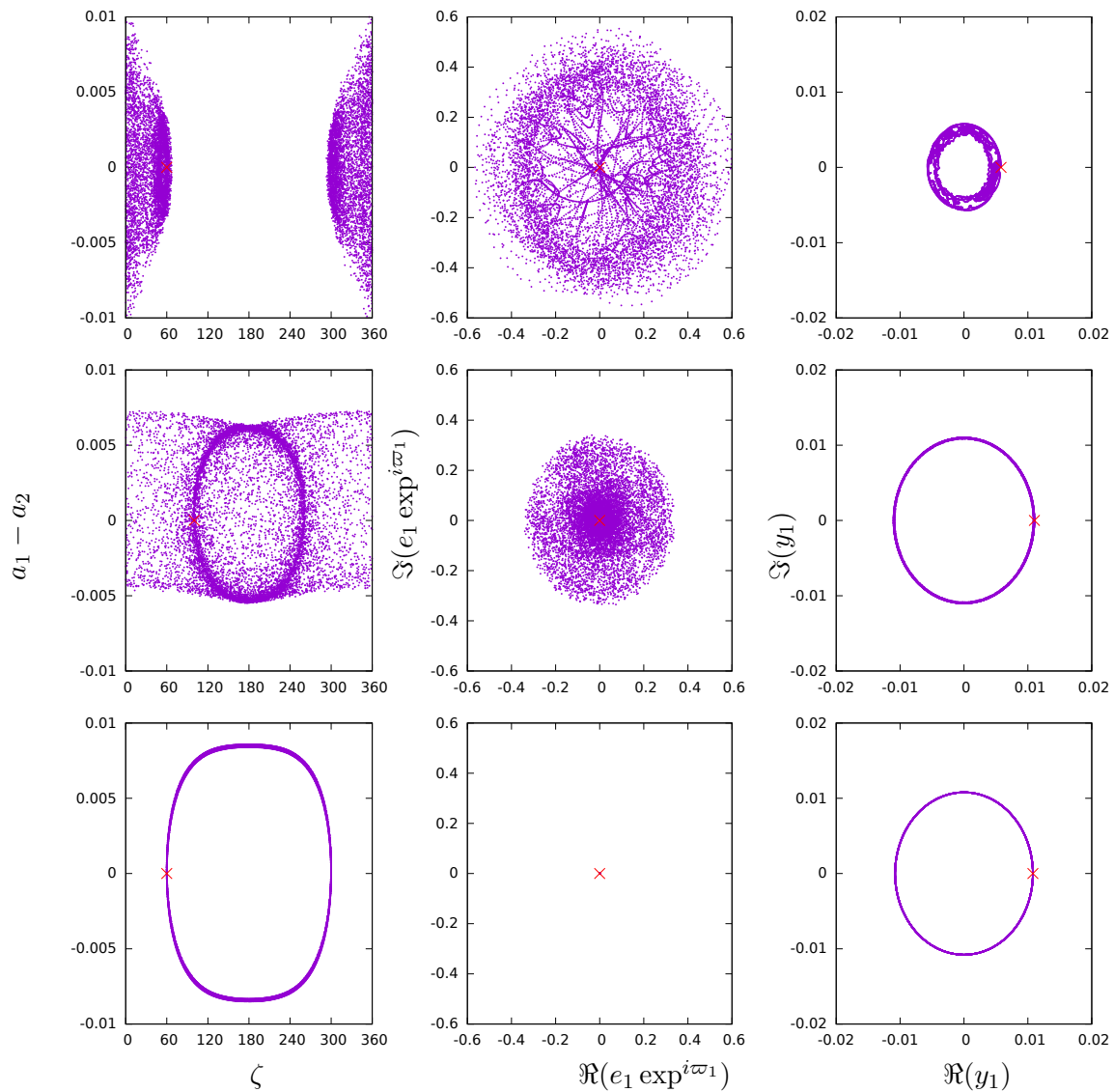


FIGURE B.4 – Orbites ayant pour condition initiale dans le plan invariant  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ , pour la ligne du haut :  $\zeta = 60^\circ$ ,  $J = 65^\circ$  ; pour la ligne du milieu  $\zeta = 100^\circ$ ,  $J = 160^\circ$  ; et pour la ligne du bas  $\zeta = 60^\circ$ ,  $J = 150^\circ$ . La condition initiale est indiquée par une croix rouge et le reste de la trajectoire par des points violets tous les 50 an. la durée de chaque intégration est de 500000 an.



## Annexe C

# Publications

### C.1 Détection de coorbitaux par vitesse radiale

# Detectability of quasi-circular co-orbital planets. Application to the radial velocity technique.

A. Leleu\*      P. Robutel\*      A.C.M. Correia\*<sup>†</sup>

March 28, 2016

## Abstract

Several celestial bodies in co-orbital configurations exist in the solar system. However, co-orbital exoplanets have not yet been discovered. This lack may result from a degeneracy between the signal induced by co-orbital planets and other orbital configurations. Here we determine a criterion for the detectability of quasi-circular co-orbital planets and develop a demodulation method to bring out their signature from the observational data. We show that the precision required to identify a pair of co-orbital planets depends only on the libration amplitude and on the planet's mass ratio. We apply our method to synthetic radial velocity data, and show that for tadpole orbits we are able to determine the inclination of the system to the line of sight. Our method is also valid for planets detected through the transit and astrometry techniques.

## 1 Introduction

Lagrange (1772) found an equilibrium configuration for the three-body problem where the bodies are located at the vertices of an equilateral triangle. For relatively small eccentricities, the libration around the stable Lagrangian equilibrium points  $L_4$  and  $L_5$  is one of the two possible configurations of a stable co-orbital system, called a tadpole orbit (by analogy with the restricted three-body problem, we define  $L_4$  as the equilibrium point when the less massive planet is  $60^\circ$  ahead of the more massive one and  $L_5$  when it is behind). The first object of this kind was observed by Wolf (1906), the asteroid Achilles, which shares its orbit with Jupiter around  $L_4$ . At present, more than 6000 bodies in tadpole orbits are known in the solar system (MPC 2014). For objects in the second configuration, called a horseshoe orbit after the shape the trajectories of the bodies in the corotating frame, the libration encompasses the equilibrium points  $L_4$ ,  $L_5$ , and  $L_3$ . A single example is known, for a pair of satellites of Saturn (see Dermott & Murray 1981b).

The Lagrangian equilibria points are stable if the masses of the planets are low enough. In the quasi-circular case, Gascheau (1843) showed that there is a stability condition for the Lagrangian equilibrium

$$\frac{m_0 m_1 + m_1 m_2 + m_0 m_2}{(m_0 + m_1 + m_2)^2} < \frac{1}{27} \approx 0.037, \quad (1)$$

where  $m_0$  is the mass of the star, and  $m_1$  and  $m_2$  the mass of the co-orbital planets. The mass repartition between the two co-orbitals has a small impact on the stability. Within this limit, Gascheau's criterion guarantees the stability of the linearized

---

\*IMCCE, Observatoire de Paris - PSL Research University, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Lille 1, CNRS, 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>†</sup>Departamento de Física, I3N, Universidade de Aveiro, Campus de Santiago, 2810-193 Aveiro - Portugal  
E-mail: adrien.leleu@obspm.fr; philippe.robutel@obspm.fr and correia@ua.pt

equations in the vicinity of  $L_4$  or  $L_5$ . The lower the masses of the co-orbitals with respect to the total mass, the larger is the possible libration amplitude. The horseshoe domain is stable when the planets have a Saturn-mass or less (Laughlin & Chambers 2002).

For eccentric orbits, the range of stable mass ratios between the co-orbital and the central body decreases as the eccentricity increases (Roberts 2000; Nauenberg 2002). Moreover, an additional co-orbital configuration exists in the eccentric case, called quasi-satellite, as the co-orbitals seem to gravitate around each other in the rotating frame. For high eccentricities, co-orbitals have a much larger stable domain for quasi-satellites than for tadpole or horseshoe configurations (Giuppone et al. 2010).

Since the discovery of the first exoplanets (Wolszczan & Frail 1992), a great diversity of systems has been found, some of them in mean motion resonances (MMR). A few of these resonant systems are highly populated (like the 2/1 MMR), but so far no system has been identified in a co-orbital configuration (1/1 MMR). However, many theoretical works suggest that co-orbital exoplanets may also exist. Laughlin & Chambers (2002) introduced two possible processes that form these systems: (i) planet-planet gravitational scattering and (ii) accretion in situ at the L4-L5 points of a primary.

The assumptions made on the gas disc density profile in scenario (i) can either lead to systems with a high diversity of mass ratio (Cresswell & Nelson 2008) or to equal mass co-orbitals when a density jump is present (Giuppone et al. 2012). In their model, Cresswell & Nelson (2008) form co-orbitals in over 30% of the runs. Initially in horseshoe configurations, the co-orbital systems are generally damped into tadpole configurations. The co-orbitals formed by this process usually have very low inclinations and eccentricities ( $e < 0.02$ ).

Lyra et al. (2009) showed that in scenario (ii), up to 5-20 Earth-mass planets may form in the tadpole of a Jupiter-mass primary. For existing co-orbitals, the gas accretion seems to increase the mass difference between co-orbitals, the more massive of the two reaching Jovian mass while the starving one stays below  $70M_{\oplus}$  (Cresswell & Nelson 2009).

Models that produce co-orbital planets due to dissipation within a disc may also experience significant inward migration. Such migration increases the libration amplitude of trojan planets for late migrating stages with low gas friction. This may lead to instability, but the damping of the disc usually forces the libration to remain small. Equal mass co-orbitals (from super-Earths to Saturns) are heavily disturbed during large scale orbital migration (Pierens & Raymond 2014). In some cases, Rodríguez et al. (2013) have shown as well that long-lasting tidal evolution may perturb equal mass close-in systems. Overall, significantly different mass trojans may thus be more common, especially in close-in configurations.

Co-orbital planets can also be disturbed in the presence of additional planetary companions, in particular by a significantly massive planet in another MMR with the co-orbitals (Morbidelli et al. 2005; Robutel & Bodossian 2009). Moreover, horseshoe orbits are more easily disturbed than tadpole orbits owing to the higher variation of frequencies in the system with respect to the libration amplitude (Robutel & Pousse 2013).

Detecting co-orbital planets is not an easy task because the signatures of each body are usually superimposed. The transit method can solve this degeneracy, either by observing both co-orbitals transiting (Janson 2013), or when only one co-orbital is transiting by coupling with another detection method (Ford & Gaudi 2006). When the libration amplitude is large enough, the transit timing variation (TTV) method can also find co-orbital candidates even when only one body is transiting (Janson 2013; Vokrouhlický & Nesvorný 2014).

If the bodies are exactly at the Lagrangian equilibrium point (with no libration), the radial velocity (RV) signal is the same as for a single planet, overestimating the mass of the system by  $\approx 13\%$  (Dobrovolskis 2013). Laughlin & Chambers (2002) showed that the libration of co-orbitals modulates the RV signal from the star, allowing

them to determine a co-orbital system from a simulated RV signal. [Cresswell & Nelson \(2009\)](#) estimated that for the co-orbitals obtained in their simulation, this modulation is 10% – 20% of the total amplitude of the signal. [Giuppone et al. \(2012\)](#) showed that a short-term RV signal (duration inferior to the period of libration) did not allow co-orbitals to be distinguished from an eccentric planet or from two planets in 2/1 MMR ([Goździewski & Konacki 2006](#); [Anglada-Escudé et al. 2010](#)).

Theoretical and numerical studies seem to agree that tadpole and horseshoe co-orbitals tend to have low eccentricities and mutual inclinations. In addition, in the solar system we observe among the moons of Saturn ([Dermott & Murray 1981b](#), and references therein) three co-orbital systems, all with inclinations  $< 1^\circ$  and eccentricities  $< 0.01$ . Jupiter’s trojans have a mean inclination of about  $\approx 12^\circ$  and eccentricities below 0.3. We thus conclude that quasi-circular orbits are a good approximation for many co-orbital systems. As the study of quasi-circular and coplanar orbits is easier than the full case, in this paper we restrict our analysis to this simpler situation. We first give a brief overview of the co-orbital dynamics and an analytical approximation of the co-orbital motion valid for small eccentricities. In section 3 we derive an analytical method that can be used to extract the signature of co-orbitals from the motion of the host star. In section 4 we exemplify our method with the radial velocity technique using synthetic data, and we conclude in the last section.

## 2 Co-orbital dynamics

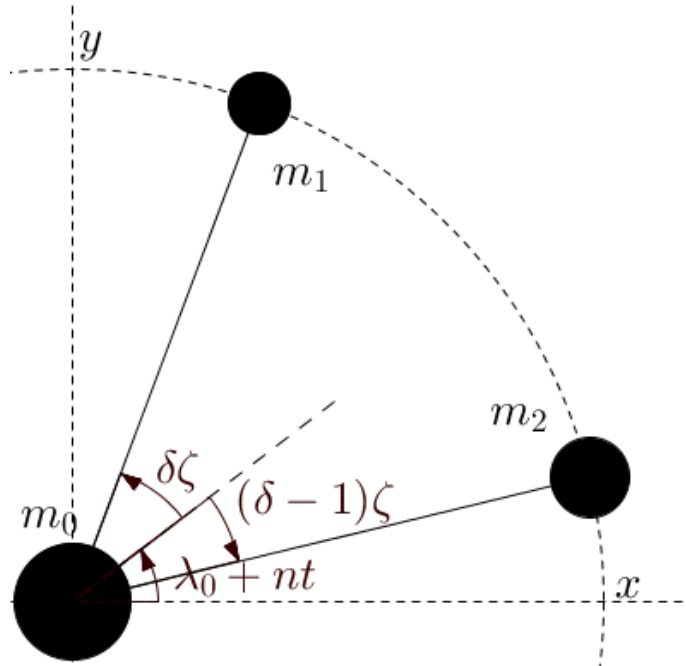


Figure 1: Reference angles represented for the circular co-orbital system with respect to an inertial frame  $(x, y)$ .  $m_0$  is the mass of the central star,  $m_1$  and  $m_2$  the masses of the co-orbitals.  $r_i$  is the distance of the co-orbital  $i$  to the central star, and  $\lambda_i$  its true longitude. Following equation (3) one can write  $\lambda_i$  as a function of  $\lambda_0$ ,  $\zeta$ , and of the mass ratio  $\delta$ .

We denote  $m_0$  the mass of the central star, and  $m_1$  and  $m_2$  the masses of the co-orbital planets. Adapting the theory developed by [Érdi \(1977\)](#) for the restricted three-body problem to the case of three massive bodies, and neglecting the quantities



of second order and more in

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2)$$

the mean longitudes  $\lambda_i$  and the semi-major axes  $a_i$  of the co-orbitals can be approximated by the expressions (see [Robutel et al. 2011](#))

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &\approx nt + \delta\zeta(t) + \lambda_0, & \lambda_2(t) &\approx nt - (1 - \delta)\zeta(t) + \lambda_0, \\ a_1(t) &\approx a \left(1 - \delta\frac{2}{3}\frac{\dot{\zeta}(t)}{n}\right), & a_2(t) &\approx a \left(1 + (1 - \delta)\frac{2}{3}\frac{\dot{\zeta}(t)}{n}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $n$  is the averaged mean motion of the barycentre of  $m_1$  and  $m_2$ ,  $\lambda_0$  is a constant equal to the initial value of the barycentre of the longitudes  $(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2)/(m_1 + m_2)$ , and

$$\delta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

At first order in  $\mu$ , we have the constant quantity  $a = (1 - \delta)a_1 + \delta a_2$ , which can be seen as the mean semi-major axis, and is linked to  $n$  by Kepler's third law  $n^2 a^3 = G(m_0 + m_1 + m_2)$ , where  $G$  is the gravitational constant. Finally, the variable  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$  satisfies the second-order differential equation

$$\ddot{\zeta} = -3\mu n^2 \left[1 - (2 - 2\cos\zeta)^{-3/2}\right] \sin\zeta, \quad (5)$$

which is one of the most common representations of the co-orbital motion (see [Morais 1999](#), and references therein). For small eccentricities, it describes the relative motion of the two bodies and is valid as long as the co-orbital bodies are not too close to the collision ( $\zeta = 0$ ).

Equation (5) is invariant under the symmetry  $\zeta \mapsto 2\pi - \zeta$ , so the study of its phase portrait can be reduced to the domain  $(\zeta, \dot{\zeta}) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$  (see Fig. 2) (this symmetry will be developed later on). The equilibrium point located at  $(\zeta, \dot{\zeta}) = (\pi/3, 0)$  corresponds to one of the two Lagrangian equilateral configurations<sup>1</sup>, which are linearly stable for sufficiently small planetary masses (see below). Another equilibrium point, whose coordinates are  $(\pi, 0)$ , corresponds to the unstable Eulerian collinear configuration of the type  $L_3$ . The separatrices emanating from this last unstable point split the phase space in three different regions: two corresponding to the tadpole trajectories surrounding one of the two Lagrangian equilibria (in red in Fig. 2), and another one corresponding to the horseshoe orbits that surround the three above-mentioned fixed points (in blue in Fig. 2).

As shown in Figure 2, any trajectory given by a solution of equation (5) can be entirely determined by the initial conditions  $(t_0, \zeta_0)$  such that  $\zeta(t_0) = \zeta_0$  and  $\dot{\zeta}(t_0) = 0$ , where  $\zeta_0$  is the minimum value of  $\zeta$  along the trajectory, and  $t_0$  the first positive instant for which the value  $\zeta_0$  is reached.

The possible values of  $\zeta_0$ , represented by the purple horizontal line in Figure 2, are included in the interval  $]0^\circ, 60^\circ]$ ;  $\zeta_0 = 60^\circ$  corresponds to the equilateral configuration where  $m_1$  is the leading body and  $m_2$  is the trailing one<sup>2</sup>. The tadpole orbits are associated with  $\zeta_0 \in ]\zeta_s, 60^\circ[$ ,  $\zeta_s \approx 23.9^\circ$  being associated with the separatrix, while  $\zeta_0$  ranges from  $\zeta_s$  to 0 for horseshoe orbits. As a result, the shape of the trajectory of the relative motion (as the libration amplitude of the resonant angle  $\zeta$ ) is entirely determined by the quantity  $\zeta_0$ .

In contrast,  $t_0$  and  $n\sqrt{\mu}$  are necessary to know the exact position on the trajectory, and in particular, the amplitude of the variations of the semi-major axes. We can

<sup>1</sup>The coordinates of the other equilateral point are  $(5\pi/3, 0)$ . The permutation of the index 1 and 2 of the planets allows the two equilateral configurations to be exchanged.

<sup>2</sup>The permutation of these two bodies exchanges the two equilateral configurations, which are located at  $\zeta = \pi/3$  and  $\zeta = 5\pi/3$ , respectively.

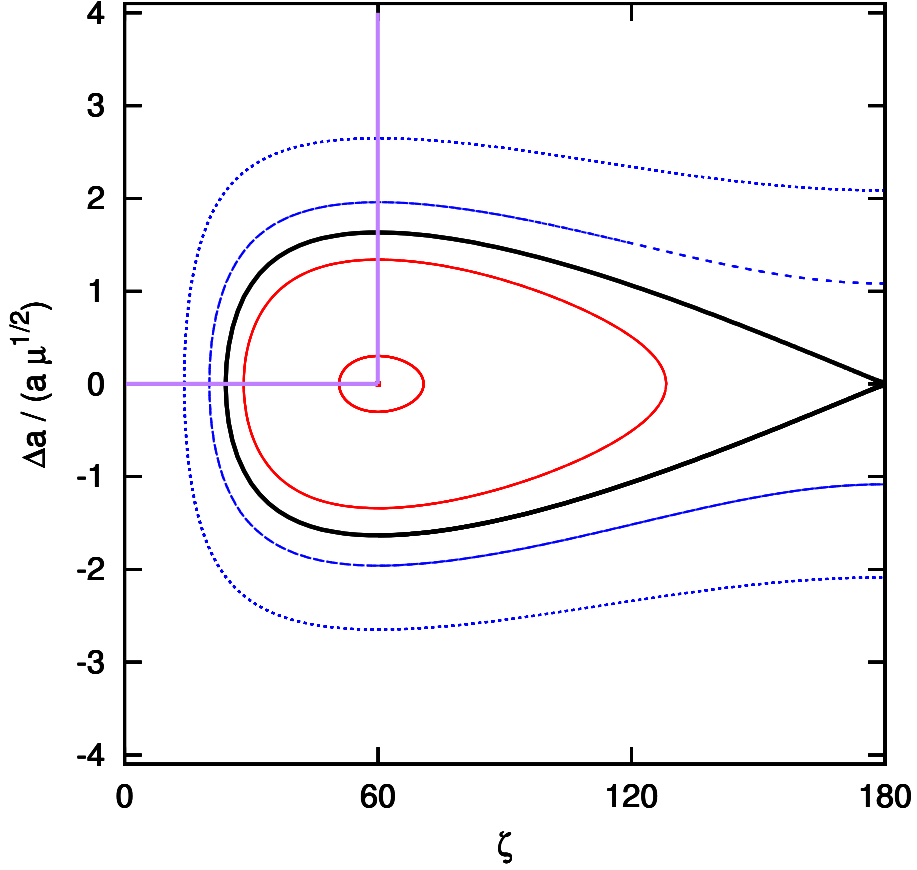


Figure 2: Phase portrait of equation (5). The separatrix (black curve) splits the phase space in two different domains: inside the separatrix the region associated with the tadpole orbits (in red) and the horseshoe domain (blue orbits) outside. The phase portrait is symmetric with respect to  $\zeta = 180^\circ$ . The horizontal purple segment indicates the range of variation of  $\zeta_0$  while the vertical one shows the section used as initial condition to draw Fig. 5. See the text for more details.

rewrite equation (5) by rescaling the time with  $\tau = \sqrt{\mu}nt$ ,

$$\frac{d^2\tilde{\zeta}}{d\tau^2} = -3 \left[ 1 - (2 - 2\cos\tilde{\zeta})^{-3/2} \right] \sin\tilde{\zeta}, \quad (6)$$

where  $\tilde{\zeta}(\tau) = \zeta(t)$ . As a consequence, this differential equation does not depend on  $n\sqrt{\mu}$ . Its solutions are solely determined by the initial conditions  $\tau_0 = \sqrt{\mu}nt_0$  and  $\tilde{\zeta}(\tau_0) = \tilde{\zeta}_0 \equiv \zeta_0$ .

In a small vicinity of the Lagrangian equilibria, the frequencies of the motion are close to

$$\nu_0 = n\sqrt{\frac{27}{4}\mu}. \quad (7)$$

More generally, excluding the separatrix, the solutions of equation (5) (respectively (6)) are periodic. The associated frequency, denoted by  $\nu$  (respectively  $\tilde{\nu}$ ), depends on the considered trajectory. However, the time-normalized frequency associated with equation (6),

$$\tilde{\nu} = \nu/(n\sqrt{\mu}), \quad (8)$$

depends only on  $\zeta_0$  ( $\tilde{\nu}$  is plotted versus  $\zeta_0$  in Fig. 3). In tadpole configurations, this dimensionless frequency remains almost constant in the vicinity of the Lagrangian

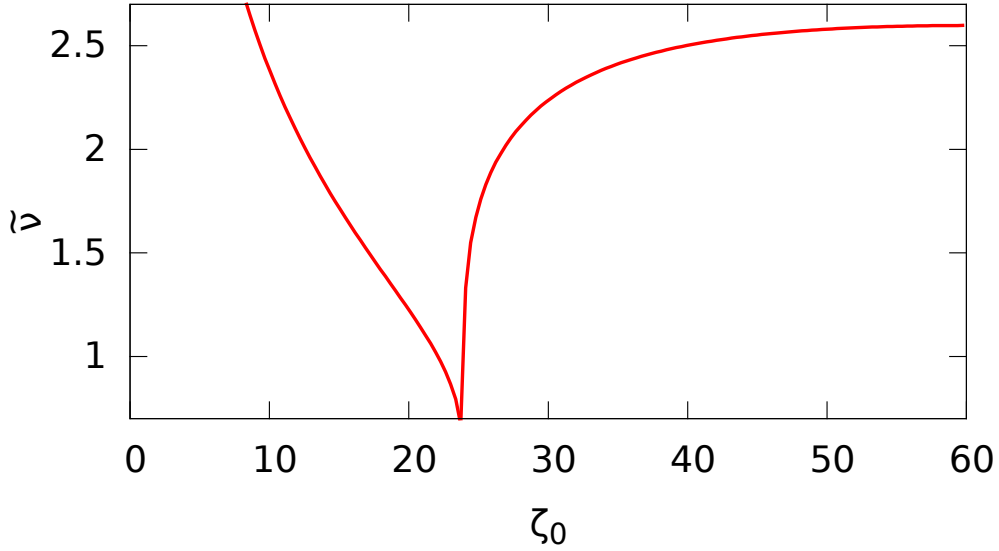


Figure 3: Variation of the libration frequency  $\tilde{\nu}$  versus  $\zeta_0 = \tilde{\zeta}_0$ . The frequency is taken over the purple horizontal line in Fig. 2. Inside the tadpole region, the libration frequency decreases from  $\sqrt{27/4}$  at  $L_4$  ( $\zeta_0 = 60^\circ$ ) to 0 on the separatrix ( $\zeta_0 = \zeta_s \approx 23.9^\circ$ ). In the horseshoe domain ( $\zeta_0 < \zeta_s$ ) the frequency increases from 0 on the separatrix to infinity when the two planets get closer because the approximations leading to Eq. (5) are not valid close to the collision (see [Robutel & Pousse 2013](#)).

equilibrium  $\nu \approx \nu_0$  (Eq. 7) and tends to 0 as the separatrix is reached at  $\zeta_0 = \zeta_s$ . In horseshoe configurations,  $\nu$  can take any value. In Figure 3, one can see that far from the separatrix,  $\tilde{\nu}$  is always of order unity. This imposes that the variations of the difference of the longitudes,  $\zeta$ , are slow with respect to the orbital time scale, i.e.  $\nu \ll n$ . It turns out that  $\dot{\zeta}(t)/n \ll 1$  and as a consequence, the quantities  $a_j$  can be approximated by  $a$  (Eq. 3). Thus, in the circular planar case, at order 0 in  $\nu$ , the position of  $m_1$  and  $m_2$  in the heliocentric system  $\mathbf{r} = (x + iy)$  are given by

$$\mathbf{r}_1 = ae^{i\delta\zeta}e^{i(nt+\lambda_0)}, \text{ and } \mathbf{r}_2 = ae^{-i(1-\delta)\zeta}e^{i(nt+\lambda_0)}. \quad (9)$$

Within the same approximation, we can also write the derivative of previous equation, which gives us the heliocentric velocity of the co-orbitals

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = inae^{i\delta\zeta}e^{i(nt+\lambda_0)}, \text{ and } \dot{\mathbf{r}}_2 = inae^{-i(1-\delta)\zeta}e^{i(nt+\lambda_0)}. \quad (10)$$

While searching for co-orbital bodies, the stability of each configuration also needs to be taken into account. In order to determine the influence of the planetary masses on the global stability of planar co-orbital systems, we show the results of two numerical simulations indicating the width of the stable co-orbital region in different directions. In Figure 4, we consider two planets orbiting around a star of mass  $m_0 = 1 M_\odot$ , with fixed initial elements  $a_1 = a_2 = 1$  au,  $e_1 = e_2 = 0.05$ , and  $\lambda_1 = \varpi_1 = 0$ , and we vary the initial element  $\lambda_2 = \varpi_2 = -\zeta_0$  in  $[0^\circ, 60^\circ]$  and their masses  $m_1 = m_2 = \mu m_0/2$ , with  $\mu/2 \in [10^{-8}, 10^{-1}]$ . For each set of initial conditions, the system is integrated over 5 Myr using the symplectic integrator SABA4 ([Laskar & Robutel 2001](#)) with a time-step of 0.0101 year.

Strongly chaotic systems or systems that quit the co-orbital resonance before the integration stops are removed from the computation. In this case, in Figure 4 white

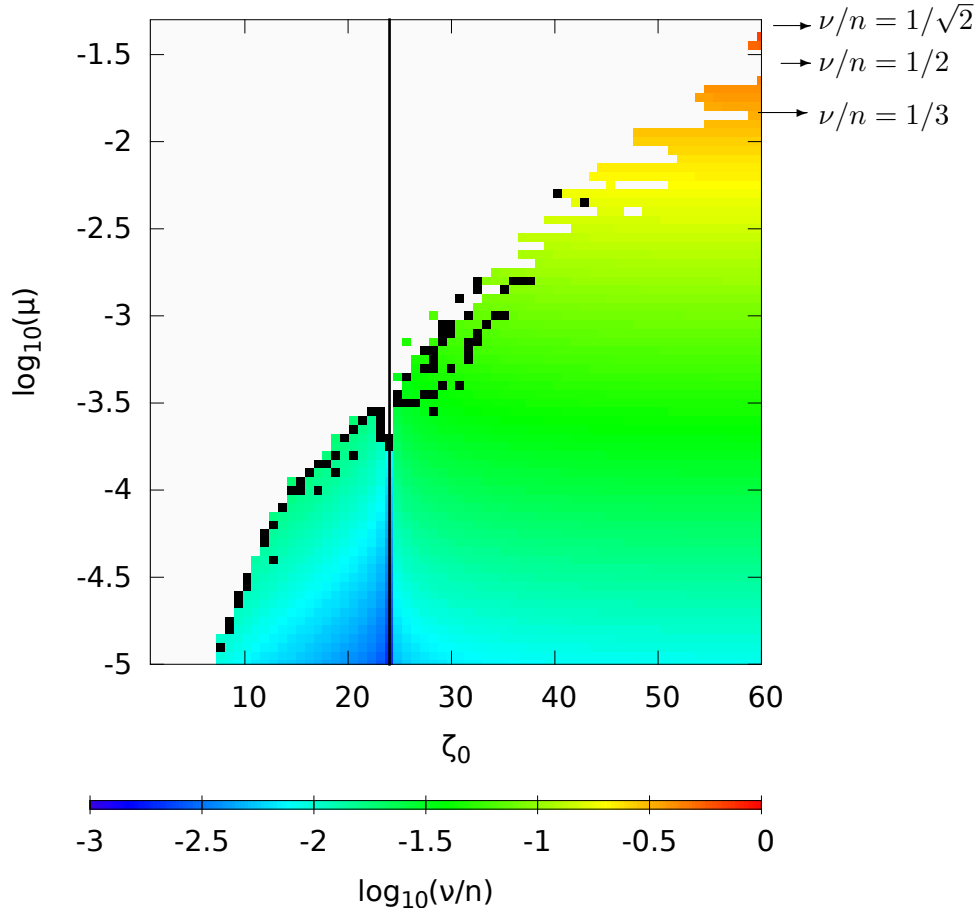


Figure 4: Stability of co-orbitals as a function of  $\log_{10}(\mu)$  and  $\zeta_0$ . The initial conditions are chosen as  $t_0 = 0$  ( $\Delta a/a = 0$ ) and  $\zeta_0 \in [0^\circ, 60^\circ]$ : purple horizontal line in Figure 2. In black is the separatrix between the tadpole and the horseshoe domain. The stability criteria of Gascheau (1843), corresponding to  $\nu/n = 1/\sqrt{2}$ , has been indicated. We also show the vicinity of two of the main resonances between  $\nu$  and  $n$ : the 1/2 resonance (see Roberts 2000) and the 1/3. The colour code indicates the value of the libration frequency, i.e.  $\log_{10}(\nu/n)$ .

dots are assigned to their initial parameters  $(\zeta_0, \mu)$ . This strong short-term instability is mainly due to the overlapping of low-order secondary resonances (Páez & Efthymiopoulos 2015). After the elimination of these initial conditions, long-term diffusion along secondary resonances may also destabilize the co-orbital systems on a much longer time scale. Measuring the temporal variation of the libration frequency identifies this diffusion (Laskar 1990, 1999). The black dots indicate a relative variation of over  $10^{-6}$  between the first and second half of the 5 million years integration (to compare with  $\approx 10^{-10}$  for the long-term stable configurations). They are mainly located in the vicinity of the separatrix and near the ejection boundary. In the remaining regions, the small variation of the frequency  $\nu$  guarantees, in most cases, the stability for a billion years (Robutel & Gabern 2006). For long-term stable systems, a colour depending on its libration frequency  $\nu$  is assigned to regular resonant co-orbital systems (see the colour code at the bottom of Figure 4). We observe that for large planetary masses, slightly lower than the limit value  $\mu \approx 0.037$  (Gascheau 1843), the stability region is extremely small and strongly perturbed by low-order secondary resonances. The chaos generated by the main secondary resonances, namely the  $\nu = n/2$ ,

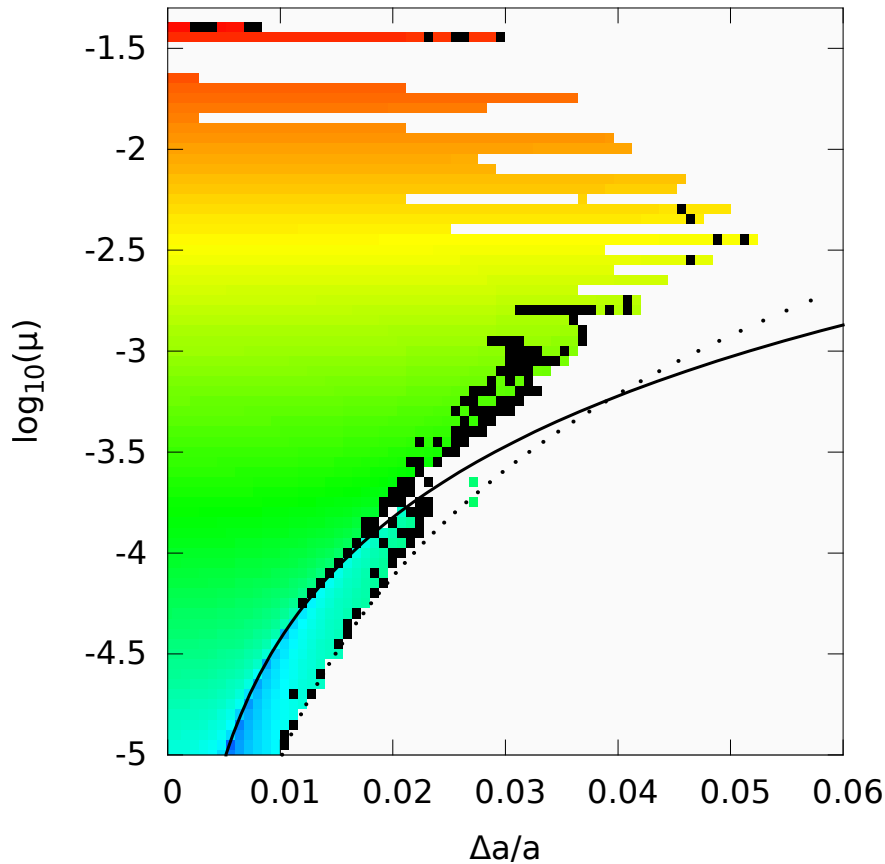


Figure 5: Stability of co-orbitals as a function of  $\log_{10}(\mu)$  and  $\Delta a/a$ . The initial conditions are  $\zeta_0 = \pi/3$  and  $\Delta a/a \in [0, 0.06]$ : vertical purple line in Figure 2. The black line indicates the separatrix between the tadpole and the horseshoe domains. The dots follow a curve  $\Delta a \propto \mu^{1/3}$ , delimiting the stability region of the horseshoe domain. The colour code indicates the value of the libration frequency, i.e.  $\log_{10}(\nu/n)$  (see Figure 4 for the scale).

$\nu = n/3$ , and  $\nu = n/4$ , shrink the stability region significantly, reducing it to a small region near the equilateral configuration (see Roberts 2002; Nauenberg 2002). As  $\mu$  decreases, the width of the stable tadpole region increases, and the destabilizing influence of the secondary resonances becomes dominant only on the boundary of the stability region (see Páez & Efthymiopoulos 2015; Robutel & Gabern 2006; Érdi et al. 2007, for the restricted problem). When  $\mu \approx 3 \times 10^{-4} \approx 2M_{\text{Saturn}}/M_{\odot}$ , the whole tadpole domain becomes stable, except for a small region around the separatrix ( $\zeta_0 = \zeta_s \approx 23.9^\circ$ ). On the other side of the separatrix, for  $\zeta_0 < \zeta_s$ , stable horseshoe orbits start to appear (see Laughlin & Chambers 2002). For lower planetary masses, the size of the horseshoe orbital domain increases as  $\mu$  decreases, to reach the outer boundary of the Hill sphere at a distance to the separatrix of the order of  $\mu^{1/3}$  (see Robutel & Pousse 2013).

In Figure 5 we show another section of the co-orbital region. Instead of varying the angle  $\zeta_0$ , we change the initial value of the difference of the semi-major axes from the equilateral equilibrium  $L_4$  towards the outside of the co-orbital region (vertical purple line in Fig. 2). More precisely, the initial conditions of the planetary systems are  $e_1 = e_2 = 0.05$ ,  $\lambda_1 = \varpi_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \varpi_2 = \pi/3$ , and  $a_j = 1 - (-1)^j \Delta a$  with  $\Delta a \in [0 : 0.06]$ . As they do in figure 4, the planetary masses vary as  $m_1 = m_2 = \mu m_0/2$ ,

with  $\mu/2 \in [10^{-8}, 10^{-1}]$ .

The tadpole domaine lies above the solid black line corresponding to the equation  $\Delta a = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}$  (Robutel & Pousse 2013). In this case, contrarily to the  $\zeta_0$  direction where the width of the stable tadpole region is a monotonous function of  $\mu$ , the extent of the stability region reaches a maximum for  $\Delta a/a \approx 0.052$  at  $\mu = 3.5 \times 10^{-3}$  and then tends to zero with  $\mu$  as indicated by the above-mentioned curve. For lower values of  $\mu$ , the size of this region decreases until  $\mu$  reaches the value for which horseshoe orbits begins to be stable. After these critical masses, the two domains shrink together but at a different rate. The asymptotical estimates of the tadpole's width in this direction is of the order of  $\mu^{1/2}$  (black solid line in Fig. 5), while an estimation for the horseshoe region is of the order of  $\mu^{1/3}$  (black dashed line in Fig. 5, corresponding to the equation  $\Delta a = 0.47\mu^{1/3}$ ) has been fitted to the lower bound of the stable horseshoe region (see Robutel & Pousse 2013, for more details). As a consequence, the stability domain of the horseshoe configurations becomes larger than the tadpole domain when the planetary masses tend to zero (Dermott & Murray 1981a).

### 3 One planet or two co-orbitals?

In some particular situations, co-orbital planets can be identified independently from the orbital libration: when both planets are transiting (Janson 2013) or when we combine data from transits with radial velocities (Ford & Gaudi 2006). However, in general the detection of co-orbitals requires identifying the effect of the libration in the data. Vokrouhlický & Nesvorný (2014) showed that the TTV of only one of the co-orbital planets is enough if the libration is large. Laughlin & Chambers (2002) showed that the libration induced by co-orbital can have an important effect on the radial velocity of a star, while Giuppone et al. (2012) showed that co-orbitals can be mistaken for a single planet if the data span is short with respect to the libration period.

In the previous section we saw that co-orbital planets can be stable for large libration amplitudes, depending on the parameter  $\mu$  (see Figures 2 and 4). However, the libration period is always longer than the orbital period of the bodies (see the colour code in Figure 4). The faster  $\zeta$  librates, the higher the chances of detecting the co-orbital bodies, because this reduces the time span needed to detect the libration. We write  $P_\nu$  the period associated to the libration frequency  $\nu$ . The value of  $P_\nu$  decreases when  $\mu$  and  $n$  increase (see equation (7) and Figure 3). Therefore, high mass ratios and the proximity to the star maximize the detectability of co-orbitals, although high mass ratios also lead to the instability of most of the co-orbital configurations (Figure 4). Hereafter we consider that the time span of the observations is always longer than  $P_\nu$ .

#### 3.1 Signals induced by co-orbital planets

Most important observational techniques used to detect exoplanets (transits, radial-velocity, astrometry) are indirect, i.e. we do not directly observe the planets, but rather their effect on the host star. In order to get an idea of the effect of the libration of co-orbital planets on the star, we take two examples of co-orbital configurations (see Figure 6) with the following initial conditions:  $\lambda_1 = 0^\circ$ ,  $a_1 = a_2 = 1 AU$ ,  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $m_1 = 0.8 \cdot 10^{-4} M_\odot$  (red), and  $m_2 = 1.2 \cdot 10^{-4} M_\odot$  (blue). In the left graph,  $\zeta_0 = 25^\circ$ , leading to a large amplitude tadpole orbit, and in the right graph,  $\zeta_0 = 23^\circ$ , leading to a horseshoe orbit. The position of the barycentre of the system composed of the two planets is represented in purple. With  $\mu = 2 \times 10^{-4}$  and  $\zeta_0$  near the separatrix, these two examples are at the limit of the stability domain, but give a clear idea of what we can expect.

In Figure 7 we show the projection of the stellar orbit on the  $x$ -axis for these two configurations. We observe that the signal induced by the Keplerian motion of the

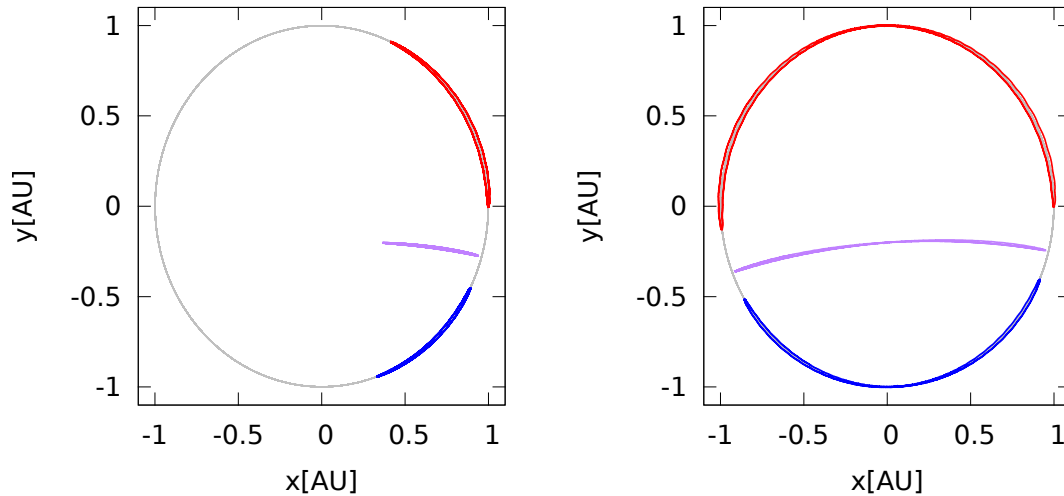


Figure 6: Motion of the two co-orbital bodies (red and blue) and their barycentre (purple) in a co-rotating frame with frequency  $n$ . Tadpole (left) and horseshoe (right).  $\delta = 0.6$ . Here  $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$  and the planets are located at 1 AU from the star. By eliminating the influence of  $n$ , one can see the long-term motion of the barycentre of the planets.  $P_\nu$  is the period of the periodic trajectories represented by the coloured lines. See the text for more details.

co-orbitals is indeed modulated over a period of libration of the resonant angle  $\zeta$ . This phenomenon was described by Laughlin & Chambers (2002) in the case of a radial velocity signal. It is due to the oscillation, with a frequency  $\nu$ , of the distance between the barycentre of the two planets and the star, clearly visible in Figure 6. The larger the amplitude of variation of  $\zeta$ , the larger the amplitude of modulation. For a given  $\zeta_0$  value, the maximum oscillation amplitude is achieved when  $\delta = 1/2$ , that is, for  $m_1 = m_2$ . In the horseshoe configuration,  $\delta = 1/2$  leads the barycentre of  $m_1$  and  $m_2$  to pass by the position of  $m_0$ , periodically cancelling the signal.

The bottom panel of Figure 7 shows the spectrum of those signals. The features of the spectrum of a modulated signal appear clearly: one peak located at the high frequency  $n$  and harmonics located on both sides  $n + p\nu$ , where  $p$  is an integer and  $\nu$  is the frequency of the modulation. In general, the peaks located in  $n$  and  $n \pm \nu$  are the ones with the largest amplitude. However, there is an exception when the signal is at the limit of the over-modulation, that is, when the peak located in  $n$  disappears. This can happen only in the horseshoe configuration when  $m_1 \approx m_2$ . In this case, the main components of the spectrum would be two peaks separated by  $2\nu$  and the system would then be easier to identify. In this paper we focus on the possibility of detecting the main three peaks.

### 3.2 Motion of a star hosting co-orbital planets

If the centre of mass of the system is at rest, the position of a star hosting two co-orbital planets is given by (in barycentric coordinates)

$$\mathbf{r}_0 = \mu[(1 - \delta)\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2], \quad (11)$$

where  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$  are given by equations (9). Since  $\zeta(t)$  is a periodic function with frequency  $\nu$ , we can expand the terms  $e^{i\delta\zeta}$  in Fourier series as

$$e^{i\delta\zeta} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(\delta, \zeta_0, t_0) e^{ip\nu t}, \quad (12)$$

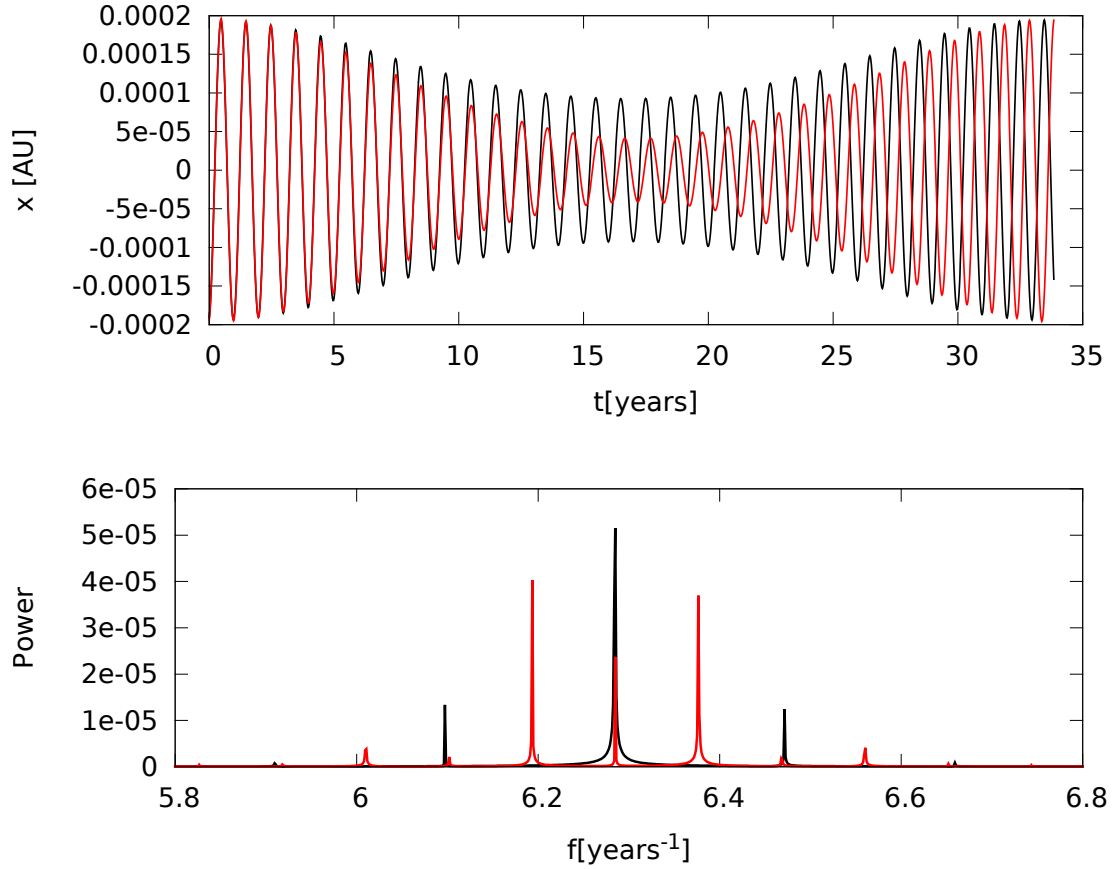


Figure 7: Motion of the star in the configurations of Fig. 6 in the direction  $x$  in the inertial frame. In black is the tadpole orbit and in red the horseshoe. The top graph represents the evolution of the position of the star over time and the bottom graph its spectrum. In these examples, the libration period of the horseshoe orbits is about twice the period of the tadpole orbits. See the text for more details.

where  $c_p(\delta, \zeta_0, t_0)$  is a complex coefficient. Replacing equation (9) and (12) into equation (11), we get

$$\mathbf{r}_0 = \mu a \sum_{p \in \mathbb{Z}} |C_p| e^{i(p\nu t + nt + \lambda_0 + \varphi_p)}, \quad (13)$$

with

$$C_p = (1 - \delta) c_p(\delta, \zeta_0, t_0) + \delta c_p(\delta - 1, \zeta_0, t_0), \quad (14)$$

and

$$\varphi_p = \arg(C_p). \quad (15)$$

For the velocity, we thus have (at order 0 in  $\nu$ )

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = i\mu a n \sum_{p \in \mathbb{Z}} |C_p| e^{i(p\nu t + nt + \lambda_0 + \varphi_p)}. \quad (16)$$

For instance, if the observational data is acquired through astrometry, we get the projection of equation (13) on the plane of the sky, while for radial velocities we use the projection of equation (16) in the line of sight.

The stellar motion can be expressed as the sum of a signal of frequency  $n$ , which we call the “Keplerian component”, and other signals of frequency  $n + p\nu$ , which we call the



“modulating components”. For simplicity, we consider only the two main modulation components  $p = \pm 1$ , which are the ones with the largest amplitude, hence the ones that are easier to detect. We thus introduce the quantity  $S(t)$ , which represents a projection of  $\mathbf{r}_0$  (equation (11)) or  $\dot{\mathbf{r}}_0$  (equation (16)) over an observable direction, restricted to its main two components,

$$S(t) = K(t) + M(t) , \quad (17)$$

where

$$K(t) = \bar{S} + S_0 \cos(nt + \phi_0) , \quad (18)$$

and

$$\begin{aligned} M(t) &= S_1 \cos((n + \nu)t + \phi_1) \\ &+ S_{-1} \cos((n - \nu)t + \phi_{-1}) , \end{aligned} \quad (19)$$

where  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ , and  $\phi_{-1}$  depend on  $\varphi_{-1,0,1}$ ,  $\lambda_0$ , and the direction of the projection. Our purpose is to check if the Keplerian signal that we have detected is modulated, and if our data can be approximated by a signal under the form  $S(t)$ .

### 3.3 Demodulation

We assume that the Keplerian part of the signal is well determined ( $S_0$  and  $\bar{S}$  terms in equation (18)), otherwise it would be impossible to look for something else. However, the modulating signal ( $S_1$  and  $S_{-1}$ ) can be hidden in the noise. In order to isolate the effect of the modulation, we suggest using a frequency mixing method similar to the one used in the demodulation of radio signals. This method is called “superheterodyne” and was introduced by [Armstrong \(1914\)](#). It consists in multiplying the modulated signal by a signal that has the same frequency as the carrier. As a result, we obtain a peak at the modulating signal’s period in the spectrum. We propose using this method on data from co-orbital systems, but it can also be used on any other modulated signal produced by a different source (e.g. [Morais & Correia 2008](#)).

We consider a set of  $N$  observational data measurements. We denote  $t_k$  the time of each observation and  $s_k$  the corresponding observed measurement. First, we fit the data with a simple sinusoidal function that contains only the Keplerian part  $K(t)$  (Eq. 18). This provides us with an initial approximation for  $\bar{S}$ ,  $S_0$ ,  $n$ , and  $\phi_0$ . Then, we perform a transformation on the raw data  $s_k$  to subtract the Keplerian part,

$$s'_k = s_k - K(t_k) , \quad (20)$$

and then, to isolate the modulation frequency,

$$\tilde{s}_k = s'_k \cos(nt_k + \phi) , \quad (21)$$

where  $\phi$  is an arbitrary phase angle. This modified data set can be fitted with a similarly modified function

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t) &= [S(t) - K(t)] \cos(nt + \phi) = M(t) \cos(nt + \phi) \\ &= \frac{S_1}{2} \cos((2n + \nu)t + \phi_1 + \phi) \\ &+ \frac{S_{-1}}{2} \cos((2n - \nu)t + \phi_{-1} + \phi) \\ &+ \hat{S}_1 \cos(\nu t + \Delta\phi) + \Delta S \cos(\nu t + \phi - \phi_{-1}) , \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\hat{S}_1 = S_1 \cos(\bar{\phi} - \phi) , \quad \Delta S = \frac{S_{-1} - S_1}{2} , \quad (23)$$

$$\bar{\phi} = \frac{\phi_{-1} + \phi_1}{2} , \quad \Delta\phi = \frac{\phi_{-1} - \phi_1}{2} . \quad (24)$$

The libration frequency  $\nu$  is now clearly separated from the Keplerian frequency  $n$ . As we will see in the following sections, we have  $\Delta S \ll S_1$ . The libration contribution can therefore be fitted by the term in  $\hat{S}_1$ , and the signal is maximized if we are able to choose  $\phi = \bar{\phi}$ . However,  $\bar{\phi}$  is a priori unknown, so we propose computing the  $\tilde{s}_k$  for two values of  $\phi$  dephased by  $\pi/2$ , for example  $\phi = \phi_0$  and  $\phi = \phi_0 + \pi/2$ . By proceeding in this way, in the worst case we get  $\bar{\phi} - \phi = \pi/4$ , corresponding to a minimum amplitude of  $S_1/\sqrt{2}$ . Moreover, by taking the ratio of the fitted amplitudes with the two  $\phi$  values, we can additionally estimate  $\bar{\phi}$ , and thus  $\phi_{\pm 1} = \bar{\phi} \mp \Delta\phi$ .

The initial determination of  $n$  using equation (18) always has an error  $\epsilon_n$ , which leads to the splitting of the libration term in  $\nu$  into two terms in  $\nu \pm \epsilon_n$ . Since these two frequencies are very close to each other, the Fast Fourier Transform (FFT) usually shows a widened peak around  $\nu$ , preventing an optimal determination of  $\nu$ ,  $S_1$ , and  $\Delta\phi$ . Therefore, once we have some estimations for these parameters, in the last step of the demodulation process, we return to the original data set  $s_k$ , and directly fit it with the full equation  $S(t)$  (equation (17)), using the previously determined  $\bar{S}$ ,  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_{-1} = S_1$ ,  $n$ ,  $\nu$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ , and  $\phi_{-1}$  as initial values for the fit.

## 4 Detection using the radial-velocity technique

In this section we apply the general method described previously to the case where the data is acquired through the radial-velocity technique. In this case, the data corresponds to the projection of equation (16) in the line of sight, given by an arbitrary direction  $e^{i\theta} \sin I$  in the space (Murray & Correia 2011)

$$v_r(t) = \dot{\mathbf{r}}_0 \cdot e^{i\theta} \sin I = \alpha \sum_{p \in \mathbb{Z}} |C_p| \cos(p\nu t + nt + \phi_p), \quad (25)$$

where

$$\alpha = \mu a n \sin I, \quad \text{and} \quad \phi_p = \varphi_p + \pi/2 - \theta + \lambda_0. \quad (26)$$

We note that equation (25) could also be the projection of equation (13) over a direction in the plane of the sky (for example in the case of an astrometric measurement). Within our approximation that would only change the value of the parameter  $\alpha$ . However, most of our results on the detectability do not depend on this parameter, thus hold true for any measurement technique. For reasons of clarity, we return to the example of the radial velocity measurements.

Considering only the first harmonics of equation (25), one can identify the RV signal to the equation (17), which is

$$\begin{aligned} v_r(t) = & \bar{S} + S_0 \cos(nt + \phi_0) + S_{-1} \cos((n - \nu)t + \phi_{-1}) \\ & + S_1 \cos((n + \nu)t + \phi_1), \end{aligned} \quad (27)$$

with  $S_p = \alpha |C_p|$ . We can therefore apply the demodulation process from section 3.3 to extract the orbital information from the observational data. Our aim now is to determine which configurations can be detected for a given precision in the RV observations, and explain how to retrieve the orbital parameters from the  $S_p$  and  $\phi_p$  parameters.

### 4.1 Detectability

We introduce the following quantity

$$A_m = \frac{S_1 + S_{-1}}{2S_0} = \frac{|C_1| + |C_{-1}|}{2|C_0|}, \quad (28)$$

which represents the power of the modulation terms with respect to the Keplerian term. When we search for co-orbital planets, the product  $S_0 A_m$  must be distinguishable from the noise.

#### 4.1.1 Detection near the Lagrangian equilibrium

We consider a system in a tadpole configuration with a low libration amplitude. In this case we can use a linear approximation for  $\zeta$  near the Lagrangian equilibrium. Within this approximation, we can obtain an explicit expression for  $v_r(t)$  in terms of the orbital parameters. We introduce the small parameter  $z = \zeta_0 - \pi/3$  and write

$$\zeta(t) = \frac{\pi}{3} + z \cos(\nu(t - t_0)). \quad (29)$$

At first order in  $z$  and using equation (10), the derivative of equation (11) becomes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 = & -i\mu an \left[ (1 - \delta)(1 + i\delta z \cos(\nu(t - t_0))) \right. \\ & \left. + \delta(1 + i(1 - \delta)z \cos(\nu(t - t_0)))e^{-i\frac{\pi}{3}} \right] e^{i(nt + \lambda_0 + \delta\frac{\pi}{3})}. \end{aligned} \quad (30)$$

Following equation (25), we project equation (30) in the line of sight, and identify the terms appearing in equation (27) as

$$S_0 = \alpha \sqrt{1 - \delta(1 - \delta)}, \quad (31)$$

$$S_1 = S_{-1} = \alpha \frac{\sqrt{3}\delta(1 - \delta)}{2} z, \quad (32)$$

which allow us to compute  $A_m$  as well:

$$A_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta(1 - \delta)}{\sqrt{1 - \delta(1 - \delta)}} z. \quad (33)$$

When  $m_0 \gg m_2 \geq m_1$  the modulation terms can be simplified as

$$S_1 = S_{-1} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\beta}{m_0} zan \sin I, \quad (34)$$

where  $\beta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  is the reduced mass of the planets' subsystem. We thus see that the power in these terms is proportional to  $\beta$  and to the angular separation from the Lagrangian equilibrium  $z$ . The detection is therefore maximized for large libration amplitudes and planets with large similar masses ( $m_1 \approx m_2$ ). Nevertheless, we note that for planetary systems with mass ratios very different from one, for instance,  $m_1/m_2 \ll 1$ , the reduced mass converges to the mass of the smaller planet ( $\beta = m_1$  in this case), while for equal mass planets it converges to  $\beta = m_1/2$ . As a consequence, although planets with large equal masses are easier to detect than planets with small equal masses, a small mass planet is two times easier to detect if it is accompanied by a large mass planet rather than another small similar mass planet.

#### 4.1.2 Detection in any tadpole or horseshoe configuration

For large libration amplitudes, we cannot have an explicit expression for  $S_p$  with respect to the orbital parameters. Nevertheless, similarly to the linear case, we can prove that  $A_m$  and  $|C_0|$  depend only on  $\zeta_0$  and  $\delta$ . Indeed, since  $c_p$  are Fourier coefficients of the expression of  $e^{i\delta\zeta}$ , see equation (12), we can write

$$c_p(\delta, \zeta_0, t_0) = \frac{\nu}{2\pi} \int_{-\pi/\nu}^{\pi/\nu} e^{i\delta\zeta(t-t_0)} e^{-ip\nu t} dt, \quad (35)$$

or, in terms of  $\tau$  (see section 2),

$$c_p(\delta, \zeta_0, t_0) = \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \int_{-\pi/\tilde{\nu}}^{\pi/\tilde{\nu}} e^{i\delta\tilde{\zeta}(\tau-\tau_0)} e^{-ip\tilde{\nu}\tau} d\tau, \quad (36)$$

where  $\tau_0 = t_0/(n\sqrt{\mu})$ . Since  $\tilde{\nu}$  depends only on  $\zeta_0$ , it turns out that

$$c_p(\delta, \zeta_0, t_0) = c_p(\delta, \zeta_0, 0)e^{-ip\tilde{\nu}\tau_0} = c_p(\delta, \zeta_0, 0)e^{-ip\nu t_0}. \quad (37)$$

As a result, the dependence of  $c_p$  on  $\tau_0$  is explicit. Using the definition of  $C_p$  given by equation (14), we see that  $|C_p|$ , and consequently  $A_m$ , do not depend on  $t_0$ .

The dependence of  $A_m$  and  $|C_0|$  on the parameters  $(\delta, \zeta_0)$  is shown in Figures 9 and 10 for tadpole configurations and in Figure 11 for horseshoe configurations. These figures were obtained by integrating the differential equation (5) satisfied by  $\zeta$ , with initial conditions  $(\zeta(0), \dot{\zeta}(0)) = (\zeta_0, 0)$ . The outputs of these integrations were then replaced into the expression of  $\hat{\mathbf{r}}_0$  for a given set of  $\delta$  (Eq. 10). For each simulation, the spectrum of a projection of  $\hat{\mathbf{r}}_0$  has been computed in order to get the value of the displayed quantities. These quantities have also been computed from three-body direct integrations, which give the same results.

The RV signal that we obtain for the general cases follows the trends of the linear approach. For given values of  $a$ ,  $\mu$ , and  $\delta$ , the detectability of a co-orbital system increases as the amplitude of the libration of  $\zeta$  increases, i.e. when  $\zeta_0$  decreases. This is still true when  $\zeta_0$  crosses the separatrix. When  $\delta$  tends to 1 or 0, the modulation peak disappears and the signal is similar to the one induced by a single planet. For a given  $\zeta_0$ ,  $A_m$  reaches its maximum when  $\delta = 1/2$ . In the horseshoe case, the modulating terms have higher amplitudes than the Keplerian term for  $0.35 \lesssim \delta \lesssim 0.65$ , the Keplerian term being cancelled when  $\delta$  tends to  $1/2$ .

We showed at the end of the previous section that a planet of mass  $m_1$  (fixed) will be easier to detect if its co-orbital companion is significantly more massive ( $m_2 \gg m_1$ ), rather than  $m_2 \approx m_1$ . This holds true in the horseshoe domain, as shown in Appendix A.2.

### 4.1.3 Detectability for a given data set

While searching for co-orbital companions of an already detected planet, it is possible to put some constraints on what we can expect to observe, based on the observational limitations. In addition to the main Keplerian signal, characterized by  $K_0$  and  $P_n$ , we also know the time span of the observations,  $T$ , and the precision of the instrument,  $\epsilon$ .

The modulation signal of a co-orbital configuration is detectable if  $A_m K_0 > \epsilon$  (Eq. 28). Thus, the detection of a co-orbital companion can only occur for

$$\frac{1}{A_m} < \frac{K_0}{\epsilon}. \quad (38)$$

We also know that the libration period  $P_\nu$  is proportional to the orbital period  $P_n$  (Eq. 8, Fig. 3). One complete libration period can only be contained in the data when  $P_\nu > T$ , therefore

$$\frac{P_\nu}{P_n} > \frac{T}{P_n}. \quad (39)$$

The parameter  $A_m$  depends on  $\delta$  and  $\zeta_0$ , while the ratio  $P_\nu/P_n$  depends on  $\zeta_0$  and  $\mu$ . The detectability of a co-orbital configuration therefore depends on the mass of both planets and on the libration amplitude.

In Figure 8 we show the ratio  $K_0/\epsilon$  as a function of the ratio  $T/P_\nu$ , which correspond to the observable quantities. We denote  $m_2$  the most massive of the two planets (which is the main contributor to  $K_0$  and  $\mu$ ), and  $m_1$  the mass of the less massive planet that we are looking for. We fix  $m_2/m_0 = 10^{-3}$  (which is near the maximum value allowed for the stability of co-orbital systems) and show the detection limits for three different values of  $m_1$ . Co-orbital companions below each threshold limit can be ruled out.

These detection limits are constrained by the observational limitations ( $\epsilon$  and  $T$ ), but also by the stability of the co-orbital systems, which is parametrized by the values

of  $\zeta_0$ . As  $\zeta_0 \rightarrow \pi/3$  (Lagrange point, with no libration amplitude) or  $m_1/m_2 \rightarrow 0$ , we have that  $K_0/\epsilon > 1/A_m \rightarrow \infty$ . On the other hand, as  $\zeta_0 \rightarrow 0$ , the chances of detection increase (the libration amplitude increases), but the system also tends to become unstable (Fig. 4).

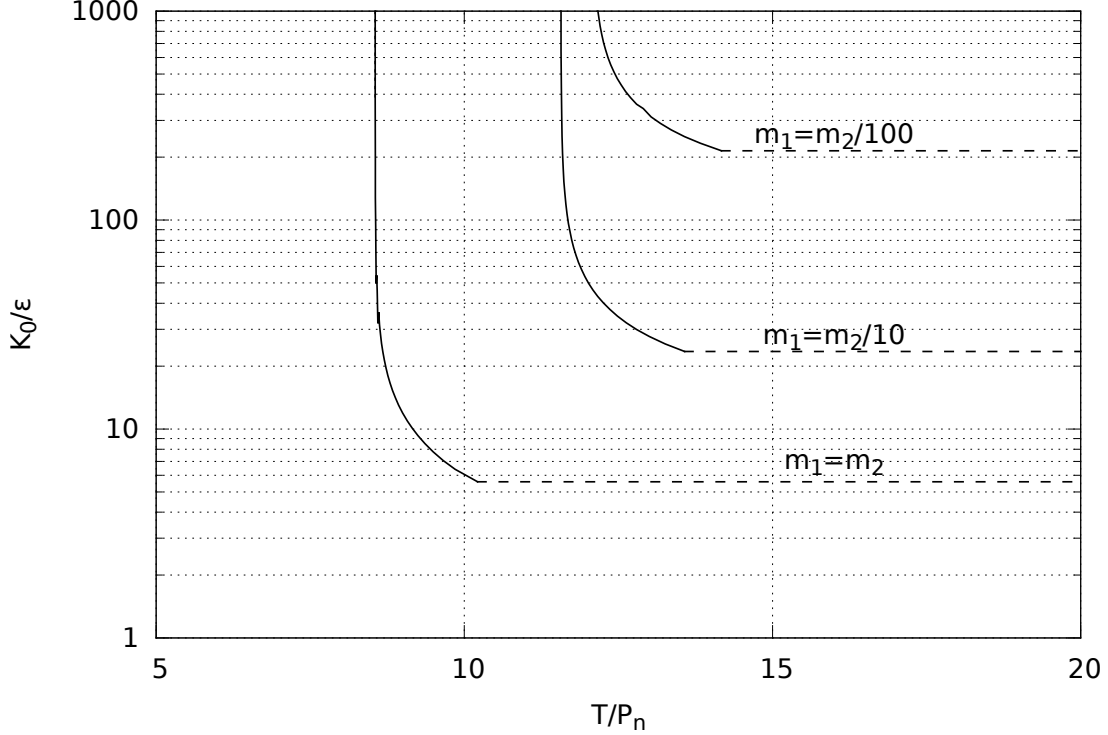


Figure 8: Detectability of a co-orbital companion for  $m_2/m_0 \approx 10^{-3}$ . For a given data set  $(K_0/\epsilon, T/P_n)$ , co-orbital companions with a mass  $m_1$  can only be detected if they lie above the respective threshold limit.

## 4.2 Characterization of the co-orbital system

The orbits of the co-orbital planets are fully characterized by the quantities  $n$ ,  $\nu$ ,  $a$ ,  $\zeta_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $t_0$ , and  $\sin I$ . In addition, assuming that the mass of the star is known, we can determine the mass of the planets through  $\mu$  and  $\delta$ . The frequencies  $n$  and  $\nu$  are directly obtained when we fit the data with our model (Eq. 27), while  $a$  is obtained by the third Kepler law from  $n$ . Since  $\tilde{\nu}$  depends only on  $\zeta_0$  (Fig. 3), for each configuration there is a bijective map that links  $\mu$  and  $\zeta_0$  given by

$$\sqrt{\mu} = \frac{\nu}{\tilde{\nu}(\zeta_0)n}, \quad (40)$$

where  $\tilde{\nu}$  is defined by equation (8). We are thus left with five parameters,  $\zeta_0$  (or  $\mu$ ),  $\delta$ ,  $\lambda_0$ ,  $t_0$ , and  $\sin I$ , that need to be determined in order to characterize the system.

We can start looking for the shape of the orbit rather than the exact trajectories of the planets as a function of time. Therefore, we ignore by now all quantities that depend on  $\lambda_0$  and  $t_0$ , i.e. we restrict our analysis to  $A_m$  (Eq. 28) and  $|C_0|$  (Eq. 37).

We define the quantity  $\Psi$  as

$$\Psi = 2(\bar{\phi} - \phi_0) = \phi_1 + \phi_{-1} - 2\phi_0, \quad (41)$$

with  $\phi_p = \lambda_0 + \arg(C_p) + \pi/2 - \theta$  (Eq. 26). Thus

$$\Psi = \arg(C_1(\delta, \zeta_0, t_0)) + \arg(C_{-1}(\delta, \zeta_0, t_0)) - 2 \arg(C_0(\delta, \zeta_0, t_0)) . \quad (42)$$

From equation (37), we know that  $\arg(C_p(\delta, \zeta_0, t_0)) = \arg(C_p(\delta, \zeta_0, 0)) - p\nu t_0$ . Hence  $\Psi$  depends only on  $\zeta_0$  and  $\delta$ . One can show that any quantity defined as a function of  $\phi_p$  with  $p \in \{-1, 0, 1\}$  and independent of  $t_0$  and  $\lambda_0$  is a function of  $\Psi$ .

The parameters  $A_m$ ,  $|C_0|$ , and  $\Psi$  evolve in a different way depending on the orbital configuration of the system (tadpole or horseshoe). We thus need to split our analysis for these two different configurations.

#### 4.2.1 Characterization near the Lagrangian equilibrium

In the linear case, we can entirely determine the trajectories of the co-orbitals analytically. According to equations (31) and (32), the amplitudes  $S_0$  and  $S_1 = S_{-1}$  depend on  $\alpha$ ,  $\zeta_0$ , and  $\delta$ . By identifying the phases angles appearing in equation (27) to the data and then comparing with expression (30), we get three additional equations

$$\phi_0 = \lambda_0 + \delta \frac{\pi}{3} - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}\delta}{2-\delta}\right) , \quad (43)$$

and

$$\phi_{\pm 1} = \lambda_0 + \delta \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \mp \nu t_0 . \quad (44)$$

These three equations, combined with the equations (31) and (32) lead to a system of five equations of the form  $(S_0, S_1, \phi_0, \phi_1, \phi_{-1}) = F(\alpha, \delta, \zeta_0, \lambda_0, t_0)$ , where  $F$  is a non-linear function of the five unknown parameters. We can thus get an explicit expression for these parameters from the observational data. Then, the expression of  $\nu$  near the Lagrangian equilibrium (Eq. 7) can be used to get the value of  $\mu$ . Finally, the inclination  $I$  can be deduced from the definition of  $\alpha$  (Eq. 26):

$$\sin I = \frac{\alpha}{\mu a n} . \quad (45)$$

We can thus remove the classic  $\mu \sin I$  degeneracy in this case and fully determine the exact masses of the planets and their trajectories in space.

Replacing expressions (43) and (44) for  $\phi_p$  in the expression of  $\Psi$  (Eq. 41) gives

$$\Psi = 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{3}\delta}{2-\delta}\right) - \frac{\pi}{3} , \quad (46)$$

i.e. near the Lagrangian equilibrium  $\Psi$  only depends on  $\delta$ . Since  $0 \leq \delta \leq 1$ , we have  $\Psi \in [-\pi/3, \pi/3]$ , and for  $\delta = 1/2$  we get  $\Psi = 0$ , which corresponds to equal mass planets.

#### 4.2.2 Large amplitude tadpole orbits

As discussed in section 4.1.2, for large libration amplitudes it is not possible to obtain an explicit expression for the orbital parameters from the  $S_p$  terms. The same applies to the phase angles  $\phi_p$ . However, for tadpole configurations it is still possible to inverse the problem using implicit functions and to fully characterize the orbits from the modulation terms in equation (27).

In Figure 9, we show iso-values of the parameters  $\zeta_0$  and  $\delta$  with respect to the quantities  $A_m$  and  $\Psi$  (see section 4.1.2 for more details). For tadpole orbits, we see that each couple  $(A_m, \Psi)$  corresponds to a unique couple  $(\zeta_0, \delta)$ . One can thus determine the values of  $\zeta_0$  and  $\delta$  directly from  $A_m$  and  $\Psi$ .

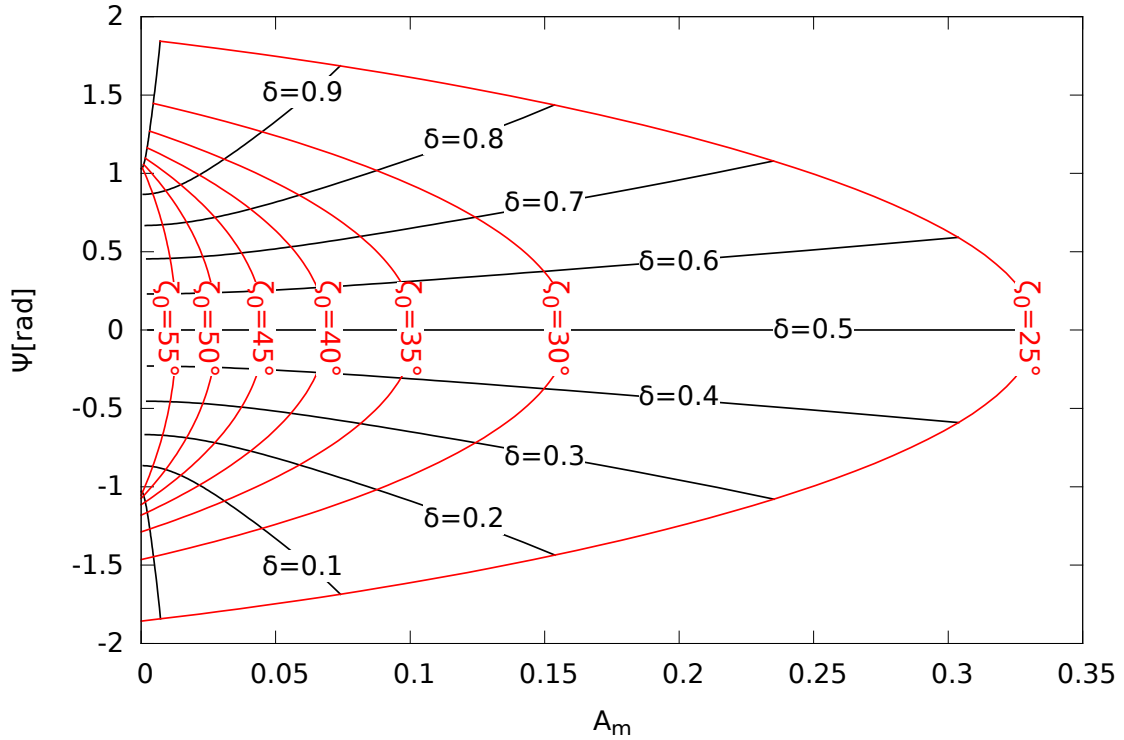


Figure 9: Level curves of  $\delta$  (black) and  $\zeta_0$  (red) for the tadpole configuration, with respect to  $A_m$  and  $\Psi$ . See the text for more details.

We also know that  $|C_0(\delta, \zeta_0)|$  depends only on  $\zeta_0$  and  $\delta$  (see section 4.1.2). In Figure 10 we show iso-values of  $|C_0|$ . Since  $S_0 = \alpha|C_0|$ , we can directly obtain the value of  $\alpha$  from  $(\zeta_0, \delta)$ , and hence from  $(A_m, \Psi)$ . We can thus determine  $\sin I$  (Eq. 45), since  $\mu$  is linked to  $\zeta_0$  through expression (40). The parameters  $\delta$ ,  $\zeta_0$ ,  $\mu$ , and  $\sin I$  are then fully determined for the tadpole configuration.

Finally, similarly to the linear case (section 4.1.1), for a given  $\delta$  one can show that  $\phi_0$  is a bijective map for  $\lambda_0 \in [0, 2\pi/n[$ , and  $\phi_1 - \lambda_0$  is a bijective map for  $t_0 \in [0, 2\pi/\nu[$  (see equations (43) and (44)). The values of  $\lambda_0$  and  $t_0$  are therefore determined by the values of  $\phi_0$  and  $\phi_1$ . Then, one can use equations (3) and (5) to obtain the orbital parameters of the co-orbitals.

### 4.2.3 Horseshoe orbits

For the horseshoe configuration, it is also not possible to obtain explicit expressions for the orbital parameters from the  $S_p$  terms. However, a symmetry in  $\zeta$  allows us to compute this (see Appendix A.1):

$$\Psi = \arg(C_1) + \arg(C_{-1}) - 2\arg(C_0) = \pi . \quad (47)$$

Since  $\Psi$  is constant in horseshoe configurations, we cannot use it to get an additional constraint on the couple  $(\delta, \zeta_0)$ .

In Figure 11 we plot  $|C_0|$  and  $A_m|C_0| = (|C_1| + |C_{-1}|)/2$  versus  $\delta$  (see section 4.1.2 for more details). The graphs are symmetric in  $\delta = 1/2$ . One can see that these quantities vary significantly with  $\delta$ , but are almost constant in regard to  $\zeta_0$  (different colour curves in Fig. 11), except near  $\delta = 1/2$  for  $A_m|C_0|$ . Thus, we can assume an average value for  $\zeta_0$  in the horseshoe domain. From this average value, we get approximated values of  $\delta$  and  $\alpha$  by knowing  $A_m$  and  $|C_0|$ . Then, we can obtain approximated values for the parameters  $t_0$  and  $\lambda_0$  from  $\phi_0$  and  $\phi_1$ , as explained in the tadpole case.

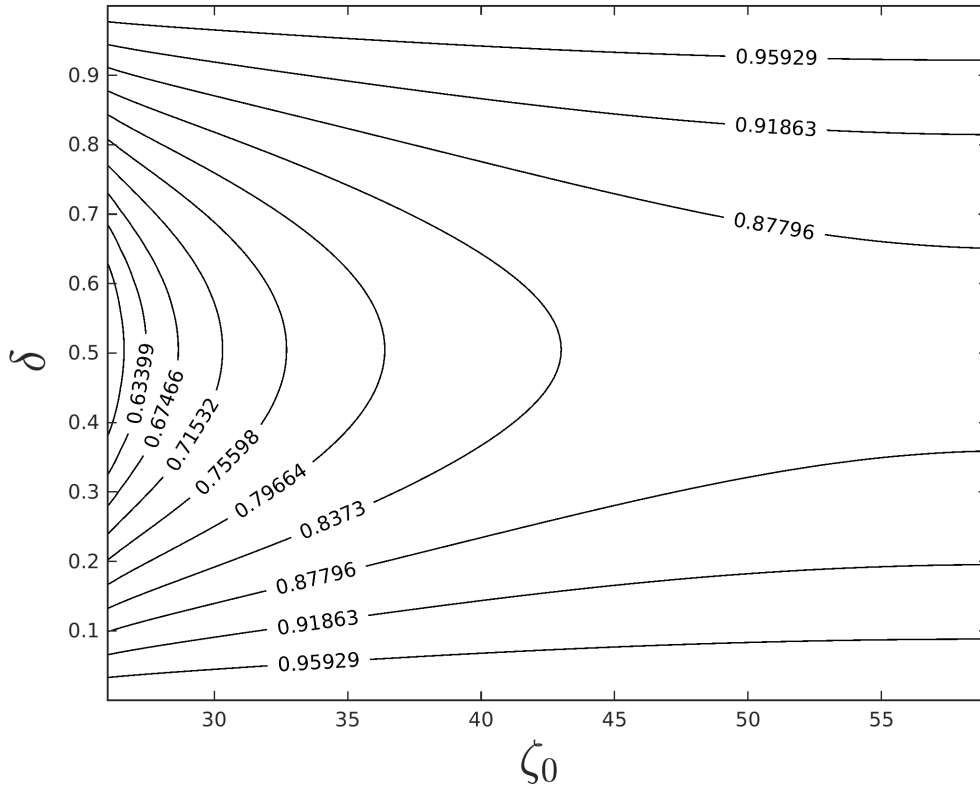


Figure 10: Level curves of  $|C_0|$  for the tadpole configuration with respect to  $\zeta_0$  and  $\delta$ . See the text for more details.

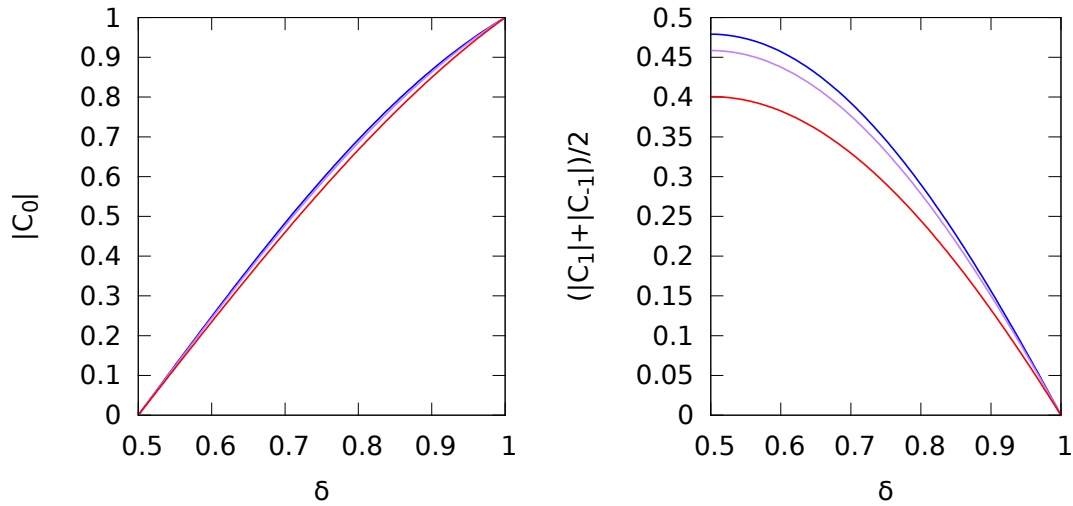


Figure 11: *Left:*  $|C_0|$  with respect to  $\delta$  in the horseshoe configuration. As  $A_m(\delta = 1/2) = +\infty$ , we plot the quantity  $A_m|C_0|$ . *Right:*  $A_m|C_0|$  versus  $\delta$  in the horseshoe configuration. These quantities are symmetric with respect to  $\delta = 0.5$ . red:  $\zeta_0 = 23^\circ$ , purple:  $\zeta_0 = 19^\circ$ , blue:  $\zeta_0 = 15^\circ$ . See the text for more details.



However, the degeneracy in  $\mu \sin I$  remains, because of the strong dependence of  $\tilde{\nu}$  on  $\zeta_0$  in the horseshoe domain (see Fig. 3). One of the ways to get this information is to consider higher order harmonics in the expansion of the radial velocity, equation (25). However, as these harmonics are about 10 times smaller than  $S_1$ , much more accurate data is required.

#### 4.2.4 Tadpole or horseshoe?

Since the method that we use to determine the orbital parameters of a co-orbital system depends on its configuration (tadpole or horseshoe), it is legitimate to ask whether it is possible to know the configuration type before we choose one method or another for reducing the observational data.

Once the signature of a co-orbital system is detected (by the observation of a modulation in the radial-velocity data) we can compute  $\Psi$  from equation (42). One can see from equation (58) that  $\Psi = \pi$  in the horseshoe configuration, while  $\Psi \in [-2, 2]$  in the tadpole configuration (Fig. 9). Since the domains for  $\Psi$  are exclusive in the different configurations, by computing  $\Psi$  we can immediately distinguish between a horseshoe and a tadpole configuration.

When the detected signal is at the limit of the instrumental precision, the phases can be improperly determined. In this case, one can always compute  $A_m$  using expression (28). As shown in Appendix A.2,  $A_m$  ranges within  $[0, +\infty[$  in the horseshoe configuration. In the tadpole configuration,  $A_m$  reaches its maximum value for  $\delta = 1/2$  and  $\zeta_0$  near the separatrix. We can see in Fig. 9 that this quantity remains below  $1/3$ . Therefore,  $A_m > 1/3$  is also a sufficient condition to know that a co-orbital system is in a horseshoe configuration.

### 4.3 Application to synthetic data

We now apply the methods developed in the previous sections to two concrete situations of stars hosting a pair of co-orbital planets in quasi-circular orbits, one for tadpole and another for horseshoe orbits. In Table 1 we list the initial osculating orbital elements for these two hypothetical systems orbiting a solar-mass star. We then generate synthetic radial-velocity data for these systems by numerically integrating the equations of motion using an n-body model. In order to create a realistic data set, we use the same observational dates taken for the HD 10180 system (Lovis et al. 2011) to simulate the acquisition days, and associate with each measurement a Gaussian error with  $\sigma = 1$  m/s. These synthetic data sets contain 160 measurements spanning 4600 days and correspond to an instrumental precision of  $\sim 1$  m/s. The orbital periods of the planets are around 11.5 days in both examples, such that we can observe at least three complete libration cycles over the length of the observations.

#### 4.3.1 Tadpole orbits

Our tadpole system is composed of two Saturn-like planets at 0.1 au (comparable masses and eccentricities). The individual RV amplitudes of both planets are  $K \sim 10$  m/s, well above the instrument precision. Therefore, the signatures of the planets can be easily identified in the data, and we use this example to illustrate how to retrieve the complete set of orbital parameters listed in Table 1 with our method.

In Figure 12 (a), we show a generalized Lomb-Scargle periodogram of the radial velocity data (Zechmeister & Kürster 2009). The Keplerian component of the signal with a period  $P_n \approx 11$  days can clearly be identified. We fit the raw data with a Keplerian function (Eq. 18) and obtain an initial estimation for  $P_n \approx 11.46$  days,  $\bar{S} \approx 6.5$  m/s,  $S_0 \approx 61.1$  m/s, and  $\phi_0 \approx 341.6^\circ$ . We then subtract the Keplerian contribution to the data and obtain a modified data set  $s'_k$  (Eq. 20). In Figure 12 (b),

Table 1: Osculating orbital elements for a given date of two hypothetical co-orbital systems orbiting a solar-mass star.

param.	tadpole		horseshoe	
	planet 1	planet 2	planet 1	planet 2
$m [M_{\oplus}] \dots$	200	100	17.15	3.00
$a$ [au] . . . . .	0.0987	0.1013	0.1	0.1
$\lambda$ [deg] . . . . .	0	300	0	339
$e$ . . . . .	0.05	0.05	0	0
$\varpi$ [deg] . . . . .	0	300	0	0
$I$ [deg] . . . . .	60	60	90	90
$\bar{S}$ [ $km.s^{-1}$ ]	6.500		6.500	
$\bar{a}$ [au] . . . . .	0.09955		0.10000	
$\zeta_0$ [deg] . . . . .	37.00		21.00	
$\delta$ . . . . .	0.3333		0.1488	

we show a periodogram of this modified data. We observe that the main peak with a period of approximately 11 days is replaced by two nearby smaller peaks. This is a clear indication of the presence of a modulation, each peak corresponding to the  $n \pm \nu$  terms (Eq. 27).

In order to better determine the libration frequency, we modify the data again following expression (21) adopting  $\phi = \phi_0 = 341.6^\circ$  and  $\phi = \phi_0 + \pi/2 = 71.6^\circ$ . In Figures 12 (c) and 12 (d) we show the periodograms of  $\tilde{s}_k$  for these two transformations, respectively. In both transformations we observe that the peak around 11 days is replaced by some power at the periods near 5 and 150 days, corresponding to the frequencies  $2n$  and  $\nu$ , respectively (Eq. 22). However, while for  $\phi = \phi_0$  the maximum power is observed for  $\nu$  (Fig. 12 c), for  $\phi = \phi_0 + \pi/2$  it is observed for  $2n$  (Fig. 12 d). From expression (23), we see that the amplitude  $\hat{S}_1$  associated with the term with frequency  $\nu$  is reduced by

$$\hat{S}_1(\phi) = S_1 \cos(\bar{\phi} - \phi) = S_1 \cos\left(\frac{\Psi}{2} + \phi_0 - \phi\right). \quad (48)$$

For tadpole orbits we have  $\Psi \sim 0$  (Fig. 9), which means that  $\bar{\phi} \sim \phi_0$  (Eq. 41). Therefore,  $\hat{S}_1$  is maximized for  $\phi \sim \phi_0$  and minimized for  $\phi \sim \phi_0 + \pi/2$  (Eq. 48). Performing a FFT to  $\tilde{s}_k$  allows us to estimate  $P_\nu \approx 154.66$  days,  $S_1 \approx 4.23$  m/s, and  $\Delta\phi \approx -116.5^\circ$ . We can also estimate  $\bar{\phi}$  (and hence  $\phi_1$  and  $\phi_{-1}$ ) using the ratio between the two amplitudes

$$\bar{\phi} = \phi_0 + \arctan\left(\frac{\hat{S}_1(\phi_0 + \pi/2)}{\hat{S}_1(\phi_0)}\right) \approx -4.66^\circ. \quad (49)$$

Finally, adopting these values as initial parameters, we refit the raw data  $s_k$  by performing a minimization of expression (27) using the Levenberg-Marquardt method (e.g. Press 1992). The results corresponding to the minimum of  $\chi^2$  are shown in Table 2.

From the observational parameters listed in Table 2, we can obtain the corresponding orbital parameters using the inversion method explained in section 4.2.2. The osculating orbital elements are then obtained through the equations (3) and (5). The results are given Table 3. Except for the eccentricities and the longitudes of the pericentre, which cannot be determined with a Keplerian circular orbit approximation (Eq. 18), we obtain a very good agreement for the remaining parameters (cf. Table 1).

We can still improve the quality of the fit in a last step, by performing an adjustment to the data using the direct n-body equations of motion (e.g. Correia et al. 2010). By adopting the orbital parameters listed in Table 3 as the starting point, the algorithm converges rapidly to the best fit. The results are given in Table 4. This last step slightly improves the orbital parameters obtained previously (lower  $\chi^2$  and

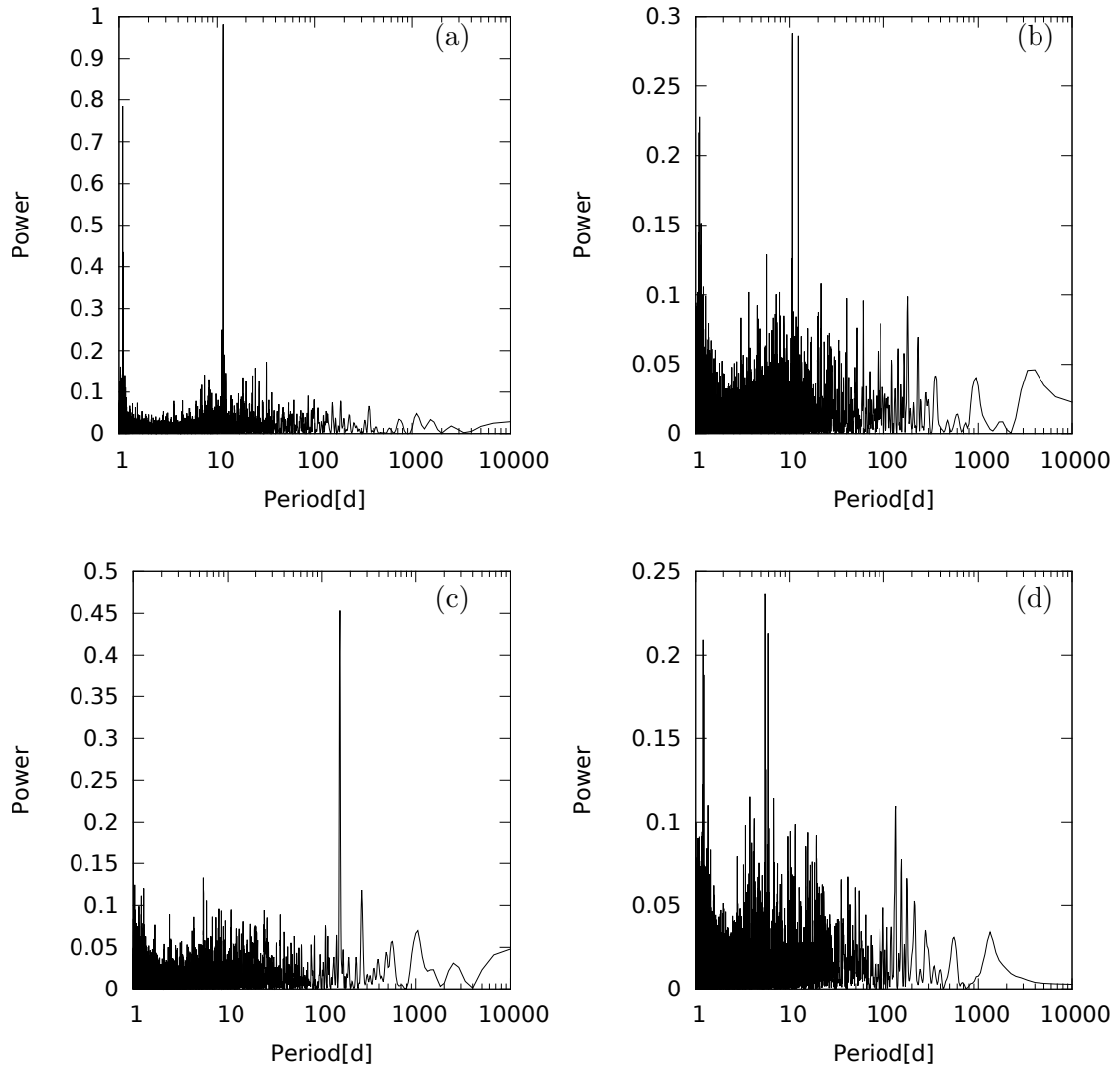


Figure 12: Periodograms of the synthetic radial velocity of the tadpole configuration presented in Table 1. (a) raw data  $s_k$ ; (b) modified data  $s'_k$ , after the subtraction of the Keplerian signal (Eq. 20); (c) modified data  $\tilde{s}_k$  with  $\phi = \phi_0$  (Eq. 21); and (d) modified data  $\tilde{s}_k$  with  $\phi = \phi_0 + \pi/2$  (Eq. 21).

rms), because it is able to additionally fit the eccentricities and the longitudes of the pericentre. We note, however, that the n-body algorithm is only able to converge to the correct orbital solution because it used the parameters from Table 3 as starting point. Indeed, the phase space of co-orbital planets has many other local minima that provide alternative solutions that are not real.

### 4.3.2 Horseshoe orbits

Our horseshoe system is composed of a Neptune-mass and a 3 Earth-mass planet at 0.1 au. It is at the limit of detection, since the individual RV amplitudes of each planet are  $K = 4.85$  m/s and  $K = 0.85$  m/s, respectively. With this example we intend to show the limitations of our method.

In Figure 13 (a), we show a generalized Lomb-Scargle periodogram of the RV data. As for the tadpole example in the previous section (Fig. 12), the Keplerian component

Table 2: Fitted parameters using expression (27).

param.	tadpole	horseshoe
$P_n$ [day]...	$11.4599 \pm 10^{-4}$	$11.5492 \pm 5 \cdot 10^{-4}$
$P_\nu$ [day]...	$154.66 \pm 0.06$	$1340 \pm 19$
$\bar{S}$ [km/s]..	$6.5001 \pm 10^{-4}$	$6.5001 \pm 10^{-4}$
$S_0$ [m/s]...	$61.1 \pm 0.1$	$4.9 \pm 0.1$
$S_1$ [m/s]...	$4.23 \pm 0.09$	$1.2 \pm 0.1$
$S_{-1}$ [m/s]..	$4.23 \pm 0.09$	$1.2 \pm 0.1$
$\phi_0$ [deg]...	$341.6 \pm 0.1$	$22.93 \pm 1.69$
$\phi_1$ [deg]...	$266.4 \pm 1.8$	$309.3 \pm 6.4$
$\phi_{-1}$ [deg]..	$33.3 \pm 2.1$	$280.2 \pm 7.9$
$\sqrt{\chi^2}$ .....	2.570	1.613
rms [ $m \cdot s^{-1}$ ]	2.8217	1.8489
$A_m$ .....	0.069	0.247
$\Psi$ [deg]....	-23.5	183.64

Table 3: Osculating orbital elements obtained through the inversion of the harmonic terms fitted to the observational data (Table 2). The elements marked with \* cannot be determined with the Keplerian circular orbit approximation (Eq. 18), so they have been fixed at constant values. \*\* indicates that the displayed mass is the lowest possible value ( $m \sin I$ ).

param.	tadpole		horseshoe	
	planet 1	planet 2	planet 1	planet 2
$m [M_\oplus]$	226.4	101.6	18.19**	2.74**
$a$ [au]..	0.099	0.101	0.1002	0.0987
$\lambda$ [deg].	1.380	303.5	5.10	320.78
$e$ .....	0*	0*	0*	0*
$\varpi$ [deg]	0*	0*	0*	0*
$I$ [deg].	59.85	59.85	90*	90*
$\bar{a}$ [au]..	0.09948		0.09999	
$\zeta_0$ [deg]	38.01		18.5*	
$\delta$ .....	0.3440		0.1309	

of the signal can clearly be identified for a period  $P_n \approx 11$  days. We thus fit the raw data with a Keplerian function (Eq. 18) obtaining an initial estimation for  $P_n \approx 11.55$  days,  $\bar{S} \approx 6.5$  km/s,  $S_0 \approx 4.9$  m/s, and  $\phi_0 \approx 23^\circ$ , subtract its contribution to the data, and obtain a modified data set  $s'_k$  (Eq. 20). However, unlike the tadpole case, in the new periodogram of the residual data, there is no clear peak above the noise (Fig. 13 b). Therefore, such a system can easily be mistaken with a system hosting a single planet at 11 days.

We can nevertheless apply our method to search for the traces of a co-orbital companion. We thus modify the data  $\tilde{s}_k$  according to expression (21) adopting  $\phi = \phi_0 = 23^\circ$  and  $\phi = \phi_0 + \pi/2 = 113^\circ$ . In Figures 13 (c) and 13 (d) we show the periodograms corresponding to these transformations, respectively. For  $\phi = \phi_0$  the periodogram is very similar to the one with the residual data (Fig. 13 b), so we conclude there is nothing else above the noise in the data. However, for  $\phi = \phi_0 + \pi/2$  the scenario is completely different as a significant peak appears around 1500 days, corresponding to the libration frequency (Fig. 13 d). Indeed, for horseshoe orbits we have  $\Psi = \pi$  (Eq. 58), which means that  $\bar{\phi} = \phi_0 + \pi/2$  (Eq. 41). Therefore,  $\hat{S}_1$  is null for  $\phi = \phi_0$  and maximized for  $\phi = \phi_0 + \pi/2$  (Eq. 48).

Performing a FFT to  $\tilde{s}_k$  allow us to estimate  $P_\nu \approx 1340$  days,  $S_1 \approx 1.2$  m/s, and  $\Delta\phi \approx 295^\circ$ . Adopting these values as initial parameters, we refit the raw data  $s_k$  with expression (27). The results corresponding to the minimum of  $\chi^2$  are shown in

Table 4: Best fitted orbital solution using the direct n-body equations of motion, and adopting the orbital parameters listed in Table 3 as the starting point.

param.	tadpole		param.	horseshoe	
	planet 1	planet 2		planet 1	planet 2
$m [M_{\oplus}] \dots$	$195.68 \pm 0.31$	$100.40 \pm 0.35$	$m [M_{\oplus}] \dots$	$18.79 \pm 0.008$	$2.99 \pm 0.005$
$a [\text{au}] \dots\dots$	$0.099 \pm 6 \cdot 10^{-5}$	$0.101 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	$a [\text{au}] \dots\dots$	$0.100 \pm 2 \cdot 10^{-5}$	$0.099 \pm 7 \cdot 10^{-5}$
$\lambda [\text{deg}] \dots\dots$	$2.3 \pm 1.7$	$306 \pm 5$	$\lambda [\text{deg}] \dots\dots$	$4.69 \pm 2.83$	$318.42 \pm 8.56$
$e \dots\dots\dots$	$0.056 \pm 0.003$	$0.049 \pm 0.003$	$e \dots\dots\dots$	$0.000 \pm 10^{-3}$	$0.000 \pm 10^{-3}$
$\varpi [\text{deg}] \dots\dots$	$0.01 \pm 0.04$	$304.2 \pm 0.4$	$\varpi [\text{deg}] \dots\dots$	$0.000 \pm 10^{-3}$	$0.000 \pm 10^{-3}$
$I [\text{deg}] \dots\dots$	$65 \pm 2$	$57 \pm 3$	$I [\text{deg}] \dots\dots$	$90^*$	$90^*$
$\bar{a} [\text{au}] \dots\dots$		0.09953	$\bar{a} [\text{au}] \dots\dots$		0.1000
$\zeta_0 [\text{deg}] \dots\dots$		37.40	$\zeta_0 [\text{deg}] \dots\dots$		21.57
$\delta \dots\dots\dots$		0.3391	$\delta \dots\dots\dots$		0.1371
$\sqrt{\chi^2} \dots\dots$		1.652	$\sqrt{\chi^2} \dots\dots$		1.595
$\text{rms} [m.s^{-1}]$		1.8770	$\text{rms} [m.s^{-1}]$		1.8513

Table 2. Comparing these results to the tadpole case, we observe that the uncertainty associated with the  $S_p$  and  $\phi_p$  terms is larger, but still near 1 m/s, which corresponds to the considered precision of the instrument. Our method is therefore able to extract any information on the existence of a co-orbital companion, provided that the information on the libration terms is accessible in the data.

Once the existence of a co-orbital companion is confirmed, we can determine the corresponding orbital parameters. The parameter  $\zeta_0$  (which gives the departure of the semi-major axis and the mean longitudes from their mean value) has a low impact on the orbital parameters and cannot be easily determined in horseshoe configuration (see section 4.2.3). However, its value is constrained by the stability of the system: in the horseshoe configuration, it ranges between its lowest stable value for  $\mu_{min} = \mu \sin I$ , in our case  $\approx 6 \times 10^{-5}$  (see Fig. 4), and the separatrix. We therefore have  $\zeta_0 \in [13^\circ, 24^\circ]$ . We take  $\zeta_0 = 18.5^\circ$  (average value on this interval) and compute the corresponding orbital parameters. We obtain a system close to the original one (Tab. 3).

In the horseshoe case, we cannot determine either the eccentricities and the longitudes of the pericentre, because we used a Keplerian circular orbit approximation (Eq. 18), or the inclination to the line of sight, because we only fit the first three harmonics (Eq. 27). In a final step, we perform an adjustment to the data using the direct n-body equations of motion, and we obtain a similar adjustment (Tab. 4).

## 5 Discussion and conclusion

In this paper we have revisited the dynamics of quasi-circular co-orbital planets. By computing their gravitational effect on the parent star, we have found a simple method for detecting this kind of planets, provided that the orbital libration can be seen in the observational data. Indeed, when the star is accompanied by co-orbital planets, in addition to the Keplerian orbital motion, there is a modulation at a longer period, corresponding to the libration frequency. Therefore, commonly used methods for signal demodulation (see section 3.3) can also be applied to co-orbital systems, allowing the amplitude and the frequency of the modulation to be identified more accurately.

Every time a modulation is observed in the motion of a single planet, an inquiry should be made to check if it can correspond to the libration induced by another co-orbital planet. In this paper, we explain a way to quantify which co-orbital configurations can be expected: for stability reasons, we can put boundaries for pairs of the parameters  $(\mu, \zeta_0)$ ; for data span duration reasons, we can estimate the frequency of libration  $\nu$ , depending on  $(n, \mu, \zeta_0)$ ; for measurement precision reasons, we can estimate the amplitude of the modulating peaks, which depends on the parameters  $(\mu, n, \delta, \zeta_0)$ .

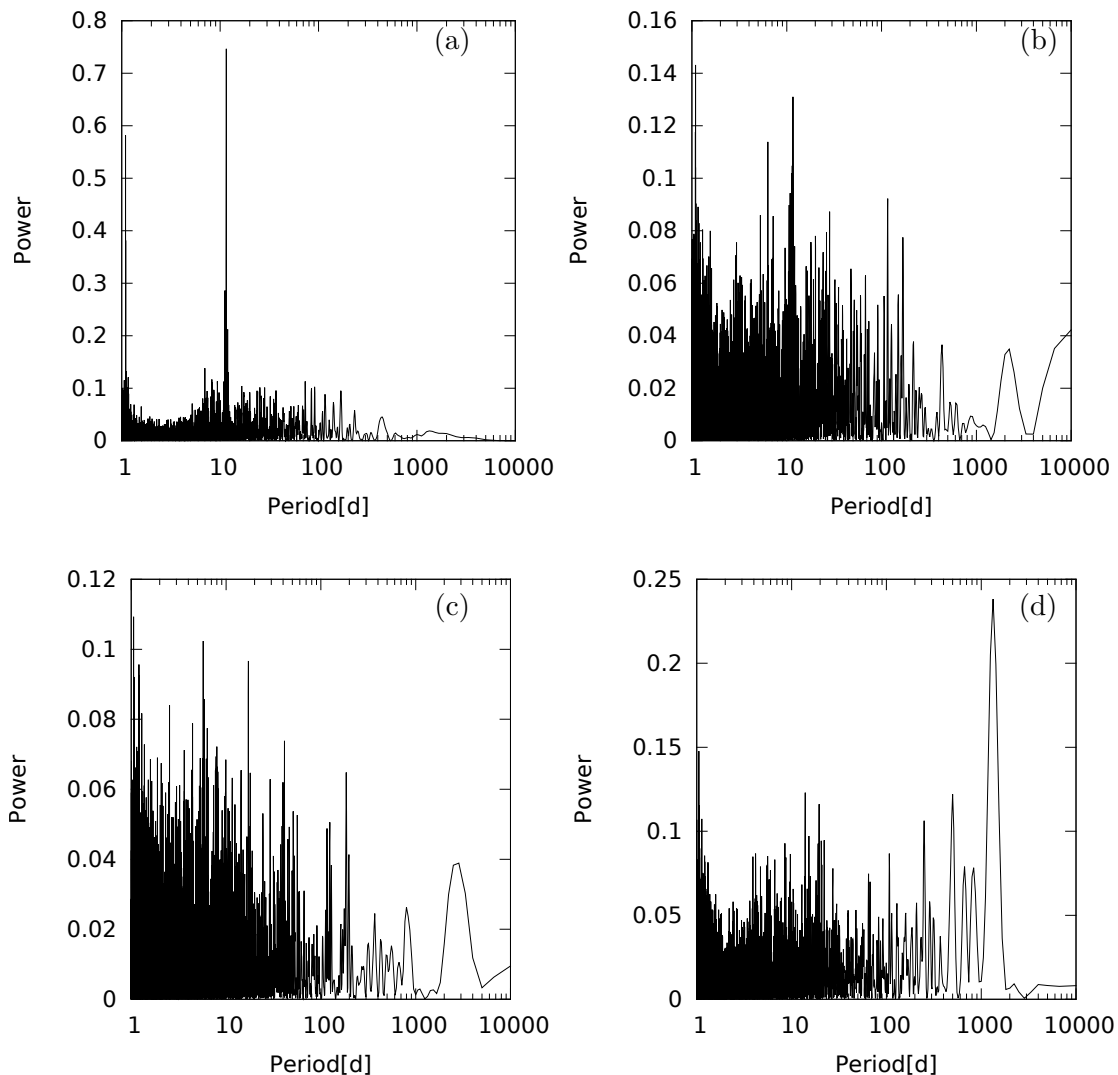


Figure 13: Periodograms of the synthetic radial velocity of the horseshoe configuration presented in Table 1. (a) raw data  $s_k$ ; (b) modified data  $s'_k$ , after the subtraction the Keplerian signal (Eq. 20); (c) modified data  $\tilde{s}_k$  with  $\phi = \phi_0$  (Eq. 21); and (d) modified data  $\tilde{s}_k$  with  $\phi = \phi_0 + \pi/2$  (Eq. 21).

For reasons of clarity, we exemplify our method in the case of a radial velocity signal. However, our results are valid for any other method that measures a projection of the stellar motion. We have shown that the relative amplitude of the modulation signal depends only on the distance to the Lagrangian equilibrium,  $\zeta_0$ , and mass ratio,  $\delta$ . Therefore, the detection of co-orbital planets is enhanced for large libration amplitudes around the Lagrangian equilibrium (i.e. small  $\zeta_0$  values), and for planetary masses equally distributed between the two co-orbitals ( $\delta \approx 1/2$ ).

In order to reduce the data, we proposed a direct inversion from the periodograms of the signal to the osculating elements of the system. For systems in the tadpole configuration we are able to determine the inclination of the orbital plane with respect to the plane of the sky and hence the true masses of the planets (and not only the minimum masses). In the horseshoe case this is not possible without considering higher harmonics for the modulation.

acknowledgements: *We acknowledge support from CIDMA strategic project UID/MAT/04106/2013. The “conseil scientifique de l’Observatoire de Paris” is acknowledged for their financial support.*

## A Symmetries

Equation (5), respectively (6), possesses several symmetries. We use two of them to study analytically some features of the horseshoe configuration. On the one hand, we have the symmetry with respect to  $\dot{\zeta} = 0$  ( $\Delta a/a = 0$  in Fig. 2):

$$\zeta(-(t - t_0)) = \zeta(t - t_0) . \quad (50)$$

On the other hand, we have the central symmetry of the phase space  $(\zeta, \Delta a/a)$  in  $\zeta = \pi$  and  $\Delta a/a = 0$ :

$$\zeta\left(t - t_0 + \frac{\pi}{\tilde{\nu}}\right) = 2\pi - \zeta(t - t_0) . \quad (51)$$

Similar expressions can be obtained for  $\hat{\zeta}$ . In the tadpole configuration, these symmetries exist as well, but the symmetry (51) maps a vicinity of  $L_4$  to a vicinity of  $L_5$ .

We can use these symmetries to simplify the expression of the coefficients  $C_p$  given by equation (14). Our purpose is to study the values of  $A_m(\delta, \zeta_0)$  and  $\Psi(\delta, \zeta_0)$ . Since none of them depends on the value of  $\tau_0$ , we take  $\tau_0 = 0$  from now on. The coefficients  $c_p$  (Eq. 36) become

$$c_p = c_p(\delta, \zeta_0, 0) = \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \int_{-\pi/\tilde{\nu}}^{\pi/\tilde{\nu}} e^{i\delta\tilde{\zeta}(\tau)} e^{-ip\tilde{\nu}\tau} d\tau . \quad (52)$$

Since we took  $\tau_0 = 0$ ,  $e^{-i\delta\zeta}$  is an even function in the case of a horseshoe orbit. Hence  $e^{-ip\tilde{\nu}\tau}$  becomes  $\cos(p\tilde{\nu}\tau)$  in the expressions of the  $C_p$ . By splitting this expression into two integrals and changing  $\tau$  to  $\tau + \pi/\tilde{\nu}$  in the first one, we get

$$c_p = \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\tilde{\nu}}} \left[ e^{i\delta\tilde{\zeta}(\tau + \frac{\pi}{\tilde{\nu}})} e^{-ip\pi} + e^{i\delta\tilde{\zeta}(\tau)} \right] \cos(p\tilde{\nu}\tau) d\tau . \quad (53)$$

Then, using the symmetry given by expression (51), the previous integral simplifies as

$$c_p = \frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\tilde{\nu}}} \left[ e^{i\delta(2\pi - \tilde{\zeta}(\tau))} e^{-ip\pi} + e^{i\delta\tilde{\zeta}(\tau)} \right] \cos(p\tilde{\nu}\tau) d\tau, \quad (54)$$

hence

$$c_p = \frac{\tilde{\nu}}{\pi} e^{i\pi(\delta - \frac{p}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{\tilde{\nu}}} \cos(\delta(\pi - \tilde{\zeta}(\tau)) - \frac{p\pi}{2}) \cos(p\tilde{\nu}\tau) d\tau. \quad (55)$$

As a consequence, using equation (14), we get for  $p = 0$

$$C_0 = \frac{\tilde{\nu}}{\pi} e^{i\delta\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\tilde{\nu}}} \left[ (1 - \delta) \cos(\delta(\pi - \tilde{\zeta}(\tau))) - \delta \cos((\delta - 1)(\pi - \tilde{\zeta}(\tau))) \right] d\tau , \quad (56)$$

and for  $q = \pm 1$

$$C_q = \frac{\tilde{\nu}}{\pi} e^{i(\delta\pi - \frac{q\pi}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{\tilde{\nu}}} \left[ (1 - \delta) \sin(\delta(\pi - \tilde{\zeta}(\tau))) - \delta \sin((\delta - 1)(\pi - \tilde{\zeta}(\tau))) \right] \cos(q\tilde{\nu}\tau) d\tau . \quad (57)$$

We obtain  $C_1 = C_{-1}$ .

### A.1 Computation of $\Psi$

From equation (56), we have  $\arg(C_0(\delta)) = \delta\pi$  if  $\delta \in [0, 1/2[$  and  $\delta\pi + \pi$  if  $\delta \in ]1/2, 1]$ . Since  $\arg(C_1) = \arg(C_{-1}) = (\delta - 1/2)\pi$  (Eq. 57), we conclude that for any horseshoe configuration

$$\Psi = \arg(C_1) + \arg(C_{-1}) - 2\arg(C_0) = \pi, \quad (58)$$

i.e.  $\Psi$  is constant and equal to  $\pi$ .

### A.2 Computation of $A_m$

Generally, the  $|C_q|$  (Eq. 57) does not have an explicit expression. However,  $A_m$  can be computed for some specific values of  $\delta$ . We denote  $C_q^\delta = C_q(\delta, \zeta_0, 0)$ . For  $\delta = 1/2$ , we have

$$C_q^{1/2} = \frac{\tilde{\nu}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\tilde{\nu}}} \left[ \sin((\pi - \tilde{\zeta}(\tau))/2) \right] \cos(q\tilde{\nu}\tau) d\tau. \quad (59)$$

The amplitude of the first harmonics ( $q = \pm 1$ ) of the Fourier series of an odd function is not null. Thus, since from expression (56) we have that  $|C_0^{1/2}| = 0$ , we can conclude that in the horseshoe configuration  $A_m(\frac{1}{2}, \zeta_0) = \infty$  (Eq. 28). Similarly, one can also see from equations (56) and (57) that  $A_m(0, \zeta_0) = A_m(1, \zeta_0) = 0$ .

## B Mass ratios

In section 4.1.1, we have shown that in the vicinity of the Lagrangian equilibrium, a planet with mass  $m_1$  is easier to identify when its co-orbital companion is much more massive ( $m_1 \ll m_2$ ) rather than when  $m_1 \approx m_2$ . We show here that this result holds true in the horseshoe configuration. Using the symmetries (50) and (51), one can rewrite  $C_1$  (Eq. (57)) as

$$C_1 = \frac{2\tilde{\nu}}{\pi} e^{i(\delta\pi - \frac{\pi}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2\tilde{\nu}}} \left[ (1 - \delta) \sin(\delta(\pi - \tilde{\zeta}(\frac{\pi}{2\tilde{\nu}} - \tau))) - \delta \sin((\delta - 1)(\pi - \tilde{\zeta}(\frac{\pi}{2\tilde{\nu}} - \tau))) \right] \sin(\tilde{\nu}\tau) d\tau. \quad (60)$$

For a mass  $m_1$ , we want to compare the quantity  $S_1 = A_m S_0 = \alpha |C_1|$  in the case of  $m_1 = m_2$  ( $\delta = 1/2$ ) against the case when  $m_1 \ll m_2$  ( $\delta \approx 1 - m_1/m_2 = 1 - \epsilon$ ). Writing  $X(\tau) = \pi - \tilde{\zeta}(\frac{\pi}{2\tilde{\nu}} - \tau)$ , from equation (57) we have

$$|C_1^{1/2}| = \left| \frac{2\tilde{\nu}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\tilde{\nu}}} [\sin(X(\tau)/2)] \sin(\tilde{\nu}\tau) d\tau \right|, \quad (61)$$

and at first order in  $\epsilon$ , equation (57) yields

$$|C_1^{1-\epsilon}| = \left| \epsilon \frac{2\tilde{\nu}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\tilde{\nu}}} [X(\tau) + \sin(X(\tau))] \sin(\tilde{\nu}\tau) d\tau \right|. \quad (62)$$

We have  $X(0) = 0$  and  $X(\frac{\pi}{2\tilde{\nu}}) = \pi - \zeta_0$ . One can show that  $X$  is a monotonous function in the interval  $\tau \in [0, \pi/(2\tilde{\nu})]$ , hence  $\sin(X/2)$  and  $X + \sin(X)$  are a positive function in this interval. Moreover, for  $X \in [0, \pi]$ , we have the following inequality:

$$\pi \sin(X/2) \leq (X + \sin(X)) \leq 4 \sin(X/2). \quad (63)$$

Since  $\sin(\tilde{\nu}\tau)$  is also a positive function on the considered interval, the inequality in equation (63) holds true when we multiply each term by  $\sin(\tilde{\nu}\tau)$  and integrate over  $\tau \in [0, \pi/(2\tilde{\nu})]$ . Finally, we get

$$\pi C_1^{1/2} \leq C_1^{1-\epsilon} / \epsilon \leq 4 C_1^{1/2}. \quad (64)$$



When  $\delta = 1/2$ , we have  $\mu \approx 2m_1/m_0$ , while when  $\delta = 1 - \epsilon$ , we get  $\mu \approx m_1/(\epsilon m_0)$ . Multiplying equation (64) by  $\alpha$ , we obtain

$$\frac{\pi}{2} S_1^{1/2} \leq S_1^{1-\epsilon} \leq 2S_1^{1/2}. \quad (65)$$

We finally conclude that in the horseshoe case, for a given mass  $m_1$ , the co-orbital couple  $(m_1, m_2)$  is up to two times easier to identify when  $m_1 \ll m_2$  rather than when  $m_1 \approx m_2$ .

## References

- Anglada-Escudé, G., López-Morales, M., & Chambers, J. E. 2010, *apj*, 709, 168
- Armstrong, E. 1914, Wireless receiving system., uS Patent 1,113,149
- Correia, A. C. M., Couetdic, J., Laskar, J., et al. 2010, *aap*, 511, A21
- Cresswell, P. & Nelson, R. P. 2008, *aap*, 482, 677
- Cresswell, P. & Nelson, R. P. 2009, *Astron. Astrophys.*, 493, 1141
- Dermott, S. F. & Murray, C. D. 1981a, *Icarus*, 48, 1
- Dermott, S. F. & Murray, C. D. 1981b, *Icarus*, 48, 12
- Dobrovolskis, A. R. 2013, *Icarus*, 226, 1635
- Érdi, B., Nagy, I., Sándor, Z., Süli, Á., & Fröhlich, G. 2007, *MNRAS*, 381, 33
- Ford, E. B. & Gaudi, B. S. 2006, *apjl*, 652, L137
- Gascheau, G. 1843, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 16, 393
- Giuppone, C. A., Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2010, *MNRAS*, 407, 390
- Giuppone, C. A. Benitez-Llambay, P., , & Beaugé, C. 2012, *MNRAS*
- Goździewski, K. & Konacki, M. 2006, *apj*, 647, 573
- Janson, M. 2013, *apj*, 774, 156
- Lagrange. 1772, *Œuvres complètes* (Gouthier-Villars, Paris (1869))
- Laskar, J. 1990, *Icarus*, 88, 266
- Laskar, J. 1999, in *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, ed. C. Simó, NATO ASI (Dordrecht: Kluwer), 134–150
- Laskar, J. & Robutel, P. 2001, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80, 39
- Laughlin, G. & Chambers, J. E. 2002, *Astron. J.*, 124, 592
- Lovis, C., Ségransan, D., Mayor, M., et al. 2011, *aap*, 528, A112
- Lyra, W., Johansen, A., Klahr, H., & Piskunov, N. 2009, *aap*, 493, 1125
- Morais, M. H. M. 1999, *Astron. Astrophys.*, 350, 318
- Morais, M. H. M. & Correia, A. C. M. 2008, *aap*, 491, 899
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. S. 2005, *Nature*, 435, 462

- MPC. 2014, <http://www.minorplanetcenter.org/>
- Murray, C. D. & Correia, A. C. M. 2011, Keplerian Orbits and Dynamics of Exoplanets, ed. S. Seager, 15–23
- Nauenberg, M. 2002, *Astron. J.*, 124, 2332
- Páez, R. I. & Efthymiopoulos, C. 2015, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 121, 139
- Pierens, A. & Raymond, S. N. 2014, *mnras*, 442, 2296
- Press, N. A. 1992, *Journal of the British Astronomical Association*, 102, 62
- Roberts, G. 2002, *JDIFE*, 182, 191
- Roberts, G. E. 2000, *Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics (HAMSYS-98)*, 303
- Robutel, P. & Bodossian, J. 2009, *MNRAS*, 399, 69
- Robutel, P. & Gabern, F. 2006, *MNRAS*, 372, 1463
- Robutel, P. & Pousse, A. 2013, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 117, 17
- Robutel, P., Rambaux, N., & Castillo-Rogez, J. 2011, *Icarus*, 211, 758
- Rodríguez, A., Giuppone, C. A., & Michtchenko, T. A. 2013, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 117, 59
- Vokrouhlický, D. & Nesvorný, D. 2014, *apj*, 791, 6
- Wolf, M. 1906, *Astronomische Nachrichten*, 170, 353
- Wolszczan, A. & Frail, D. A. 1992, *Nature*, 355, 145
- Zechmeister, M. & Kürster, M. 2009, *aap*, 496, 577

## C.2 Détection de coorbitaux par vitesse radiale et transit

# Detection of co-orbital exoplanets by combining RV and transit measurement

A. Leleu<sup>1</sup>, P. Robutel<sup>1</sup>, A. C. M Correia<sup>2,1</sup>, and J. Lillo-Box<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *IMCCE, Observatoire de Paris - PSL Research University, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Lille 1, CNRS, 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France*

<sup>2</sup> *CIDMA, Departamento de Física, Universidade de Aveiro, Campus de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal*

<sup>3</sup> *Chile - ESO*

5 August 2016

## ABSTRACT

### 1 INTRODUCTION

Quasi-circular co-orbital exoplanets can be identified from radial velocity measurements alone if we can extract from the signal the signature of the libration of the resonant angle (Leleu et al. 2015). In case we cannot, Ford & Gaudi (2006) suggested to combine the radial velocity with transit measurements of one of the planet to get rid of the degeneracy between a single planet and two coorbitals: the instant of transit expected from the radial velocity is different from the actual time of transit if the radial velocity is not induced by the transiting planet alone. However, this difference can also be due to the eccentricity of the single planet. In this work, we generalise the method of Ford & Gaudi (2006) to any value of the resonant angle  $\zeta$ , and we consider the effect of the eccentricities (at first order). In section 5, we discuss in which case we can get rid of the degeneracy between the eccentricity of the single planet and the presence of a co-orbital companion.

### 2 FRAME

In a reference frame where the  $z$ -axis is coincident with the observer's line-of-sight, the position of a planet with respect to the star is given by (Fig. 1):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R}_z(\Omega)\mathcal{R}_x(I) \begin{pmatrix} r \cos \ell \\ r \sin \ell \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where  $r$  is the distance between the planet and the star,  $\mathcal{R}$  is the standard rotation matrix about a given axis,  $\Omega$  is the longitude of the node,  $I$  is the inclination angle between the reference plane and the orbital plane,  $\omega$  is the argument of the pericentre,  $f$  is the true anomaly, and  $\ell = \omega + f$ . Thus

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \ell - \sin \Omega \cos I \sin \ell \\ \sin \Omega \cos \ell + \cos \Omega \cos I \sin \ell \\ \sin I \sin \ell \end{pmatrix}. \quad (2)$$

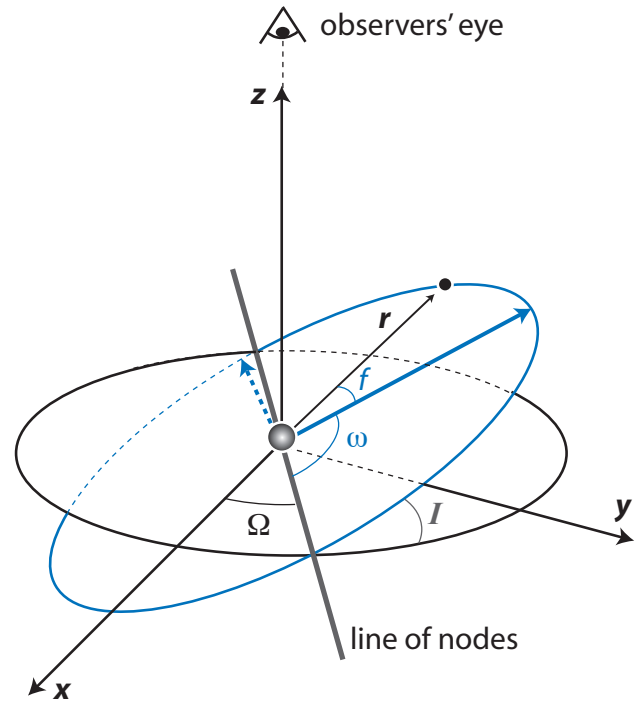


Figure 1.

whose derivative is given by

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \ell - \sin \Omega \cos I (\cos \ell + e \cos \omega) \\ \cos \Omega \cos I (\cos \ell + e \cos \omega) - \sin \Omega \sin \ell \\ \sin I (\cos \ell + e \cos \omega) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where  $a$  is the semi-major axis,  $n$  is the mean motion, and  $e$  is the eccentricity.

2 *A. Leleu et al.*

### 3 TRANSIT

If both co-orbital transits, no specific method is required. Let us consider that only the planet 1 is observed transiting. With  $R_0$  and  $R_1$  the radius of the star and of the planet, respectively, we consider that  $m_1$  transits if the center of mass of the planet passes through the cone of light:

$$x_1^2 + y_1^2 < R_0^2. \quad (4)$$

From equation (2) we have:

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2(1 - \sin^2 \ell_1 \sin^2 I_1) \quad (5)$$

For simplicity, we assume that the origin of time  $t = 0$  is the time of the mid-transit. This instant is given by the time when the function  $x_1^2 + y_1^2$  is minimum. We have:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1^2 + y_1^2) &= 2(x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1) \\ &= \frac{2anr_1 \sin \ell_1}{\sqrt{1 - e_1^2}} (e_1 \cos^2 I_1 \cos \omega_1 - \sin^2 I_1 \cos \ell_1). \end{aligned} \quad (6)$$

$\frac{d}{dt}(x_1^2 + y_1^2) = 0$  is hence equivalent to:

$$\cos \ell_1 = e_1 \cos \omega_1 \cot^2 I_1. \quad (7)$$

If  $m_1$  transits,  $I_1$  is close to  $\pi/2$ . Denoting  $I_1' = \pi/2 - I_1$ , we have that  $e_1 \cos \omega_1 \cot^2 I_1 = \mathcal{O}(e_1 I_1'^2)$ , which is a negligible quantity. We thus conclude that  $\cos \ell_1 \approx 0$  for  $t = 0$ .

From Kepler's equation, at first order in  $e_1$ , we can also write (Murray & Dermott 1999)

$$\cos \ell_1 = \cos \lambda_1 + e_1 [\cos(2\lambda_1 - \omega_1) - \cos \omega_1] + \mathcal{O}(e_1^2), \quad (8)$$

where  $\lambda_1 = nt + \varphi_1$ , and  $\varphi_1$  is a phase angle. For circular orbits ( $e_1 = 0$ ), we have  $\varphi_1 = \pi/2$  (Fig. 1), since  $\cos \varphi_1 = \cos \ell_1 = 0$  when  $t = 0$ . When  $e_1$  is small,  $\varphi_1$  is still close to  $\pi/2$ , and can thus be expressed as  $\varphi_1 = \pi/2 + e_1 \varphi'$ . Replacing in expression (8), at first order in  $e_1$ , we get for  $t = 0$ :

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - 2e_1 \cos \omega_1 + \mathcal{O}(e_1^2, e_1 I_1'^2). \quad (9)$$

### 4 RADIAL VELOCITY

In this section we show that, at order one in the eccentricities, the radial velocity induced by two co-orbitals is equivalent to the signal induced by a single planet on a Keplerian orbit if we can neglect the effect of the libration of the resonant angle.

The radial velocity of the star  $m_0$  induced by the planet  $k$  with mass  $m_k$  is given by (Eq. (3))

$$v_k = -\frac{m_k}{M} \dot{z}_k = -K_k (\cos \ell_k + e_k \cos \omega_k), \quad (10)$$

with  $M = m_0 + \sum_k m_k$  ( $m_2 = 0$  in the case of a single planet), and

$$K_k = \frac{m_k n_k a_k \sin I_k}{M \sqrt{1 - e_k^2}}. \quad (11)$$

For small eccentricities, we can simplify  $v_k$  (Eq. (10)) using expression (8) with  $\lambda_k = n_k t + \varphi_k$ . The radial velocity induced by a single planet on a Keplerian orbit is hence, at first order in the eccentricity, of the form:

$$v_k = A_1 \cos(nt + \theta_1) + A_2 \cos(2nt + \theta_2), \quad (12)$$

With:

$$\begin{aligned} A_1 &= K_k & A_2 &= e_k K_k, \\ \theta_1 &= \varphi_k & \theta_2 &= 2\varphi_k - \omega_k. \end{aligned} \quad (13)$$

If we sum the contribution of two planets on Keplerian orbits, the radial velocity of the star becomes:

$$v_r = \sum_k v_k. \quad (14)$$

In the quasi-circular co-orbital case, the semi-major axis of the planets librate around their mean value  $\bar{a}$  with a frequency  $\nu \propto \sqrt{\mu}\eta$ , with  $\mu = (m_1 + m_2)/M$  and  $\eta$  the mean mean-motion associated to  $\bar{a}$ . The amplitude of the libration goes from 0 at the Lagrangian equilibrium, up to  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  in the tadpole domain and  $\mathcal{O}(\mu^{1/3})$  in the horseshoe domain (Erdi 1977; Robutel & Pousse 2013). Note that horseshoe co-orbitals are stable only for  $\mu$  lower than  $\approx 2 \times 10^{-4}$ . For a pair of co-orbital planets we hence have  $n_1 - n_2 = \mathcal{O}(\mu^\alpha, e_k^2)$  where  $1/2 \leq \alpha$  for tadpole co-orbitals and  $1/3 \leq \alpha \leq 1/2$  for the horseshoe configuration.

There are two possible scenarii (excluding the horseshoe case with measurements over a time span long with respect to  $1/\mu^{1/3}$  but short with respect to  $1/\sqrt{\mu}$ ): either the time span is short with respect to the libration frequency  $\nu$  and we do not have the frequency resolution to distinguish  $n_1$  from  $n_2$ , or the time span is longer than  $2\pi/\nu$ . In the latter, the harmonics of the radial velocity signal are located at  $p\eta + q\nu$  with  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  (see Leleu et al. 2015, for the circular case). The harmonics for  $q \neq 0$  have larger amplitude if the co-orbitals librate with a large amplitude and if their masses are similar. If we can distinguish these harmonics, we can identify co-orbitals from radial velocity alone (Leleu et al. 2015). If not, in any case we can write:  $\lambda_k = nt + \varphi_k + \mathcal{O}(\mu^\alpha, e_k^2)$ .

Computing the radial velocity induced by the two co-orbitals, we hence sum cosines that have the same frequency. At order one in the eccentricities, we obtain an expression which is equivalent to (12), with:

$$\begin{aligned} A_1 e^{i\theta_1} &= -\sum_k K_k e^{i\varphi_k}, \\ A_2 e^{i\theta_2} &= -\sum_k K_k e_k e^{i(2\varphi_k - \omega_k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

At first order in eccentricity, the radial velocity induced by two co-orbitals is hence equivalent to the signal induced by a single planet on a Keplerian orbit of mean motion  $n$  whose orbital parameters are:

$$\begin{aligned} K &= A_1 & e &= A_2/A_1, \\ \phi &= \theta_1 & \omega &= 2\theta_1 - \theta_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Note that this equivalence is broken at order 2 in eccentricity: the next term in the expansion (12) is  $A_3 \cos(3nt + \theta_3)$ . In the single planet case, we have

$$A_3 = \frac{9}{8} \frac{A_2^2}{A_1} + \mathcal{O}(e^4). \quad (17)$$

For eccentric co-orbitals, eq. (17) holds only for peculiar values of the orbital parameters, for example  $e_1 = e_2$  and  $\lambda_1 - \lambda_2 = \omega_1 - \omega_2$ . In most cases, if we can determine  $A_3$  we can solve the degeneracy between a single planet at co-orbitals.

## 5 RADIAL VELOCITY AND TRANSIT

For moderate mutual inclination and at order one in eccentricity we have (Leleu et al. 2015):

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \zeta + \mathcal{O}(\mu, e^2, e\sqrt{\mu}), \quad (18)$$

where  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$  is the resonant angle, and  $\varphi_1$  is given eq. (9).

If we cannot see the impact of the evolution of  $\zeta$  on the RV signal, either because its amplitude of libration is negligible or because the libration is slow with respect to the time span of the measurement, we can consider  $\zeta$  constant.

Let us consider now that we observe the transit of a planet around a star, and that the RV measurement of this star is consistent with the signal induced by a single planet on a Keplerian orbit (eq. 12). As previously mentioned, we define  $t = 0$  at the instant of the transit of the planet 1. From the RV signal, we compute the quantity<sup>1</sup>  $\tan \theta_1$  (eq. 12).

If the RV signal is induced by the single transiting planet, we would measure (eq. 14 and 9):

$$\tan \theta_1 = \tan \varphi_1 = 2e_1 \cos \omega_1 + \mathcal{O}(e_1^2), \quad (19)$$

However, if the RV signal is induced by both the transiting planet and a co-orbital companion, we measure (eq. 15 and 16)

$$\tan \theta_1 = \tan \varphi = \frac{K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2}{K_1 \sin \varphi_1 + K_2 \sin \varphi_2}, \quad (20)$$

hence, using equations (9) and (18):

$$\tan \theta_1 = H(1 + 2e_1 \cos \omega_1 H) + 2e_1 \cos \omega_1 + \mathcal{O}(e_1^2), \quad (21)$$

with

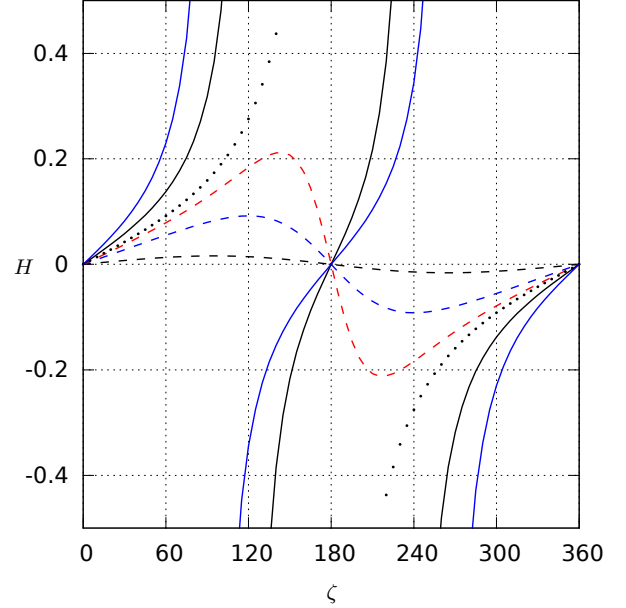
$$H = \frac{K_2 \sin \zeta}{K_1 + K_2 \cos \zeta}. \quad (22)$$

Note that  $\tan \theta_1 = H$  in the circular case. The quantity  $H$  is plotted figure 2. If we can estimate the quantity  $e_1 \cos \omega_1$ , and if we measure a value of  $\tan \theta_1$  significantly different from this quantity, then the observed system is a strong candidate to harbour co-orbitals.

If we can observe the secondary transit of the transiting planet, we can estimate directly the quantity  $e_1 \cos \omega_1$  by comparing the duration between primary and secondary transits Zhou et al. (2016).

If we do not have access to the secondary transit, we process as follow: we consider at first that we are observing the radial velocity induced by a single planet. from the equations (12) and (14) we can estimate (or at least put an upper limit) to the value of  $2e_1 \cos \omega_1$  that we should measure. If we measure a value of  $\tan \theta_1$  significantly different from this quantity, then the observed system is a strong candidate to harbour co-orbitals. (repetition, a retravailler)

With this method, we can also detect the absence of trojan companion. Let us consider the example of a signal



**Figure 2.** Evolution of the quantity  $H$  with respect to the value of  $\zeta$  and  $K_2/K_1$ . dashed lines:  $K_2/K_1 = 0.1$  (black),  $0.5$  (blue) and  $0.8$  (red); back dots  $K_2/K_1 = 1$ ; continuous lines:  $K_2/K_1 = 2$  (black) and  $10$  (blue).

induced by what we think is a single planet of 1 Jupiter mass. We know that if the signal is actually induced by two co-orbitals, the sum of the mass of the co-orbitals is at least 1 Jupiter mass (Leleu et al. 2015). We also know that the maximum amplitude of libration that can have a stable co-orbital orbit depends on the mass of the co-orbitals: the more massive, the lower the maximum amplitude of libration. In our example, we hence know that for stability reason  $\zeta = [35, 120] \cup [240, 325]$ . With  $\zeta$  within this range, if  $H$  is small with respect to 1, it implies that  $K_2$  is small with respect to  $K_1$  (see figure 2). From equation (21), we obtain:

$$\tan \theta_1 = \varepsilon \sin \zeta + 2e_1 \cos \omega_1 + \mathcal{O}(e_1^2, \varepsilon e_1, \varepsilon^2), \quad (23)$$

with  $\varepsilon = K_2/K_1$ , and (eq. 15 and 16):

$$e_1 \cos \omega_1 = e \cos \omega + \mathcal{O}(e_1^2, \varepsilon e_1, \varepsilon^2). \quad (24)$$

If  $K_2 \ll K_1$ , we can hence use the determination of  $e$  and  $\omega$  from the RV data to estimate  $e_1$  and  $\omega_1$  at first order in  $e_1$ ,  $\varepsilon$ . In this case, the standard deviation of  $K_2$  is given by:

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\sigma_{\tan \theta_1}}{\min |\sin \zeta|}. \quad (25)$$

In our example, we obtain:

$$\sigma_\varepsilon \approx 1.75 \sigma_{\tan \theta_1}. \quad (26)$$

## REFERENCES

- Erdi B., 1977, *Celestial Mechanics*, 15, 367  
 Ford E. B., Gaudi B. S., 2006, *apjl*, 652, L137  
 Leleu A., Robutel P., Correia A. C. M., 2015, *Astron. Astrophys.*, 581, A128  
 Murray C. D., Dermott S. F., 1999, *Solar system dynamics*

<sup>1</sup> We estimate this quantity rather than  $\theta_1$  itself as it is the direct output of a linear fit of the data by a function  $A \cos nt + B \sin nt$ , since  $n$  is well constrained by the transit measurements. We hence obtain  $\tan \theta_1 = -A/B$  where  $A$  is expected to be small ( $\theta_1$  is close from  $\pi/2$ ).

4 *A. Leleu et al.*

Robutel P., Pousse A., 2013, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*,  
117, 17

### C.3 Rotation de coorbitaux excentriques



# On the rotation of co-orbital bodies in eccentric orbits

A. Leleu\*    P. Robutel\*    A.C.M. Correia\*<sup>†</sup>

March 28, 2016

## Abstract

We investigate the resonant rotation of co-orbital bodies in eccentric and planar orbits. We develop a simple analytical model to study the impact of the eccentricity and orbital perturbations on the spin dynamics. This model is relevant in the entire domain of horseshoe and tadpole orbit, for moderate eccentricities. We show that there are three different families of spin-orbit resonances, one depending on the eccentricity, one depending on the orbital libration frequency, and another depending on the pericenter's dynamics. We can estimate the width and the location of the different resonant islands in the phase space, predicting which are the more likely to capture the spin of the rotating body. In some regions of the phase space the resonant islands may overlap, giving rise to chaotic rotation.

## 1 Introduction

In 1772, Lagrange has found an equilibrium configuration where three bodies are located at the vertices of an equilateral triangle where they all move with the same orbital period. Gascheau (1843) has proved the stability of this configuration in the case of circular motion, providing a stability criteria for the masses of the bodies. There are two stable configurations for a quasi-circular co-orbital system: the tadpole orbits, where the two bodies librate around the Lagrangian equilibrium; and the horseshoe orbits, named after the shape the trajectories of the bodies describe in the rotating frame. These configurations are stable if the ratio between the sum of the masses of the co-orbitals and the total mass of the system is below  $1/27$  for tadpole orbit (Gascheau, 1843) and  $\approx 2 \times 10^{-4}$  for horseshoe orbits (see for example

---

\*IMCCE, Observatoire de Paris - PSL Research University, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Lille 1, CNRS, 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>†</sup>Departamento de Física, I3N, Universidade de Aveiro, Campus de Santiago, 2810-193 Aveiro - Portugal

E-mail: adrien.leleu@obspm.fr; philippe.robutel@obspm.fr and correia@ua.pt

Leleu et al., 2015). For eccentric co-orbitals, the previous configurations continue to exist, but more configurations are possible: quasi-satellite orbits, in which the two bodies appear to have a retrograde orbit around each other (Namouni, 1999; Mikkola et al., 2006); retrograde co-orbitals, where the co-orbitals orbit in opposite direction (Morais and Namouni, 2013); and anti-Lagrange orbits, which, with the eccentric Lagrangian equilibrium, correspond to the two planar Lyapunov families of orbit emanating from the circular Lagrangian equilibrium (Giuppone et al., 2010; Robutel and Pousse, 2013). The first body on a tadpole orbit was found at the  $L_4$  point of Jupiter (Wolf, 1906) and we presently know more than 6000 bodies of this kind in the solar system, in the frame of the restricted three body problem<sup>1</sup>. Bodies in the horseshoe configuration have been discovered around Saturn, where the co-orbitals have commensurable masses (Dermott and Murray, 1981). Until now, no long-term stable example of the three other co-orbitals configuration have been found.

For close-in bodies, tidal interactions slowly modify the rotation and the orbits (e.g. MacDonald, 1964; Correia, 2009). When the rotation rate and the mean motion have the same magnitude, the dissipative tidal torque may be counterbalanced by the conservative torque due to the axial asymmetry of the inertia ellipsoid. In the two-body problem, for circular orbits, the only possibility for the spin is to end at the synchronous resonance (Goldreich and Peale, 1966; Correia and Laskar, 2009). However, for eccentric orbits, the rotation rate can be locked in a half-integer commensurability with the mean motion, usually called spin-orbit resonance (Colombo, 1965; Goldreich and Peale, 1966; Correia and Laskar, 2009) or have a chaotic rotation, as it is the case for Hyperion (Wisdom et al., 1984a). In the co-orbital circular case, the presence of a co-orbital companion can also give rise to non-synchronous spin-orbit resonances due to the orbital libration around the Lagrangian point (see Correia and Robutel (2013)). In this paper we develop an analytic model for the planar rotation which can take into account both the effect of the eccentricity of the rotating body and the perturbation by a co-orbital. By setting the mass of the co-orbital companion to zero, we retrieve the results of Colombo (1965) for a Keplerian eccentric orbit. By setting the eccentricity to zero we retrieve the results of Correia and Robutel (2013) for circular co-orbitals. We then study the rotational dynamics for eccentric co-orbitals. The case of fixed value of the eccentricities and the longitudes of the perihelion is studied section 4, while the effect of the variation of these parameters is described in section 5.

---

<sup>1</sup><http://www.minorplanetcenter.org/>

## 2 The co-orbital dynamics

### 2.1 Equation of motion of the co-orbitals

We denote  $m_0$  the mass of the central body, and  $m_1$  and  $m_2$  the masses of the co-orbital bodies. At order one in the eccentricity  $e$ , The variable  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$  satisfies the second order differential equation:

$$\ddot{\zeta} = -3\mu n^2 \left[ 1 - (2 - 2 \cos \zeta)^{-3/2} \right] \sin \zeta , \quad (1)$$

with

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} . \quad (2)$$

This differential equation is one of the most common representations of

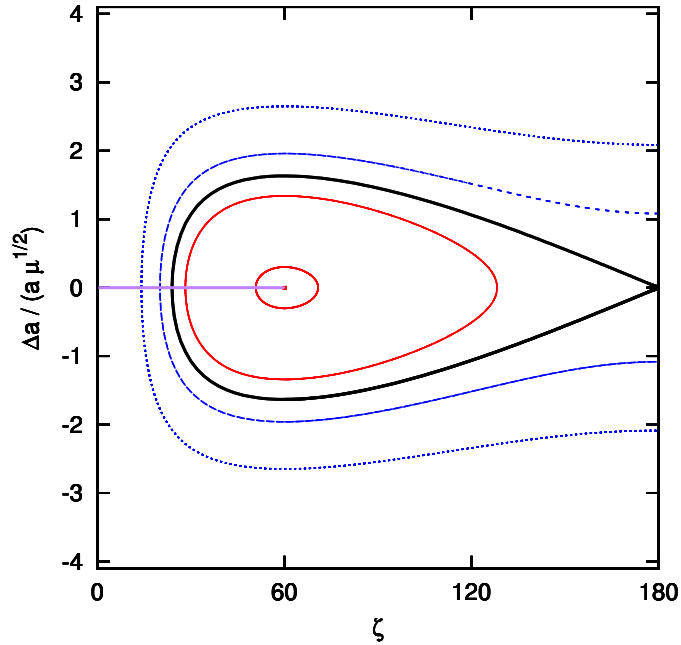


Figure 1: Phase portrait of equation (1). The vertical axis is equivalent to the variable  $u$  defined by Robutel and Pousse (2013), at the order 1 in the masses. The separatrix (black curve) splits the phase space in two different domains: inside the separatrix the region associated with the tadpole orbits (in red) and the horseshoe domain (in blue) outside. The phase portrait is symmetric with respect to  $\zeta = 180^\circ$ . The horizontal purple segment indicates the range of variation of  $\zeta_0$ . See the text for more details.

the coorbital motion (see Morais, 1999; Robutel et al., 2015, and references therein). It describes the relative motion of the two bodies and it is valid as long as the coorbital bodies are not too close to the collision ( $\zeta = 0$ ).

Since equation (1) is invariant under the symmetry  $\zeta \mapsto 2\pi - \zeta$ , the study of its phase portrait can be reduced to the domain  $(\zeta, \dot{\zeta}) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$  (see Fig. 1). The equilibrium point located at  $(\zeta, \dot{\zeta}) = (\pi/3, 0)$  corresponds to one of the two Lagrangian equilateral configurations<sup>2</sup>. In the vicinity of this equilibrium, at order one in  $(\zeta - \pi/3)$ , the frequency of the motion is close to (Charlier, 1906):

$$\nu = n\sqrt{\frac{27}{4}\mu}. \quad (3)$$

The other equilibrium, whose coordinates are  $(\pi, 0)$ , corresponds to the unstable Eulerian collinear configuration of the type  $L_3$ . The separatrices (in black in Figure 1) emanating from this last unstable point divide the phase space in three different regions: two corresponding to the tadpole trajectories surrounding one of the two Lagrange's equilibria (in red), and another corresponding to the horseshoe orbits, which encompasses the three above-mentioned fixed points (in blue). As shown in Fig. 1, any trajectory given by equation (1) can be entirely determined by the initial conditions  $(t_0, \zeta_0)$  such that  $\zeta(t_0) = \zeta_0$  and  $\dot{\zeta}(t_0) = 0$ , where  $\zeta_0$  is the minimum value of  $\zeta$  along the trajectory, and  $t_0$  the first positive instant for which the value  $\zeta_0$  is reached.

The possible values of  $\zeta_0$ , represented by the purple horizontal line on Figure 1, are included in the interval  $(0^\circ, 60^\circ]$ .  $\zeta_0 = 60^\circ$  corresponds to the equilateral configuration where  $m_1$  is the leading body and  $m_2$  the trailing one. The tadpole orbits correspond to  $\zeta_0 \in (\zeta_s, 60^\circ]$ , where  $\zeta_s \approx 23.9^\circ$  corresponds to the separatrix, while  $\zeta_0$  ranges from  $\zeta_s$  to 0 for horseshoe orbits.

The expressions of  $\lambda_j$  and  $a_j$ , the semi-major axis of the body  $j$ , are given by (Robutel et al., 2015):

$$\lambda_j = \frac{z_0}{2} + nt + (-1)^{j+1} \frac{m_k}{m_1 + m_2} \zeta + \mathcal{O}(\mu, e\sqrt{\mu}, e^2), \quad k \neq j \quad (4)$$

and

$$a_j = \bar{a} \left( 1 + (-1)^j \frac{2}{3} \frac{m_k}{m_1 + m_2} \frac{\dot{\zeta}}{n} \right) + \mathcal{O}(\mu, e\mu, e^2), \quad k \neq j, \quad (5)$$

where  $z_0$  is a constant that is determined by the value of  $\lambda_j$  at  $t = 0$ . Using the usual expansions in eccentricity power of the distance  $r_j$  between the star and the planet  $j$  and of its true longitude  $f_j$  given by:

$$r_j = a_j (1 - e_j \cos(\lambda_j - \varpi_j)) + \mathcal{O}(e^2), \quad f_j = \lambda_j + 2e_j \sin(\lambda_j - \varpi_j) + \mathcal{O}(e^2), \quad (6)$$

<sup>2</sup>the coordinates of the other point are  $(5\pi/3, 0)$ . The permutation of the index 1 and 2 of the planets allows to exchange the two equilateral configurations, which are linearly stable for small enough planetary masses (namely, if  $\frac{m_0 m_1 + m_1 m_2 + m_0 m_2}{(m_0 + m_1 + m_2)^2} < \frac{1}{27} \approx 0.037$ , see Gascheau, 1843).

and injecting (4) and (5) in these formulas, we get the expressions:

$$\begin{aligned} r_j &= \bar{a} \left( 1 - e_j \cos(\lambda_j - \varpi_j) + (-1)^j \frac{2}{3} \frac{m_k}{m_1 + m_2} \frac{\dot{\zeta}}{n} \right) + \mathcal{O}(\mu, e\mu, e^2), \\ f_j &= \lambda_j + 2e_j \sin(\lambda_j - \varpi_j) + \mathcal{O}(\mu, e\sqrt{\mu}, e^2), \end{aligned} \quad (7)$$

where  $\lambda_j$  is given by (4) and  $\zeta$  satisfies the differential equation (1). In expressions (7), the eccentricities and the longitudes of the periastron are not necessarily constant, but their variations occur on a much longer time-scale than the one associated to the variations of  $\zeta$ .

According to Robutel and Pousse (2013), in the vicinity of  $L_4$  or  $L_5$ , the temporal variations of  $X_j = e_j \exp(i\varpi_j)$  can be approximated by the expressions

$$X_1(t) = e^{i\zeta_L} \left( \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} z_1 e^{ig_1 t} + z_2 e^{ig_2 t} \right), \quad X_2(t) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} z_1 e^{ig_1 t} + z_2 e^{ig_2 t}. \quad (8)$$

where  $\zeta_L = \pi/3$  ou  $-\pi/3$  depending on the selected Lagrange configuration. The complex numbers  $z_1$  and  $z_2$  are two constants that can be determined by the initial values of  $X_1$  and  $X_2$ , and  $g_1$  and  $g_2$  are the two eigenfrequencies of the differential system associated to the  $X_i$ . If we introduce the quantities  $\rho_1, \rho_2$  and  $\varphi$  such that  $z_1 = \rho_1$  and  $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi}$ , the elliptic Lagrange family arises for  $\rho_1 = 0$  and  $\rho_2 > 0$ . The two eccentricities are equal and the apsidal lines are fixed with  $\varpi_1 - \varpi_2 = \zeta_L$ .

At the Lagrangian points one of the eigenfrequencies vanish, since these equilibria points are degenerated. More precisely, we have:

$$g_1 = \frac{27}{8} \frac{m_1 + m_2}{m_0} n, \quad g_2 = 0. \quad (9)$$

It is worth mentioning that the degeneracy is removed as soon as one moves away from the equilibrium point. Indeed, in the neighbourhood of the Lagrangian equilibrium, it can be shown that (Robutel and Pousse, 2013):

$$g_2 = \mathcal{O} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_0} \max(\zeta - \zeta_L)^2 \right). \quad (10)$$

Consequently, we are left with 4 different time-scales:  $2\pi/n = \mathcal{O}(1)$  associated to the orbital motions,  $2\pi/\nu = \mathcal{O}(1/\sqrt{\mu})$  which governs the variations of  $\zeta$  and of the semi-major axis  $a_j$ ,  $2\pi/g_1 = \mathcal{O}(1/\mu)$  corresponding to the secular variations of the eccentricities and  $\varpi_j$ , and  $2\pi/g_2$  which is associated to the precession of the perihelion and which is the slowest one (we always have  $g_2 \ll g_1$ , Robutel and Pousse, 2013). In the vicinity of this configuration, for  $0 < \rho_1 \ll \rho_2$ , the temporal variations of  $e_j$  and  $\varpi_j$  can be

approximated by:

$$\begin{aligned} e_j &= \rho_2 \left( 1 + (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{m_k \rho_1}{m_j \rho_2}} \cos(gt - \varphi) + \mathcal{O}_2 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right), \\ \varpi_j &\approx \delta_{j,1} \zeta_L + \varphi + g_2 t - (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{m_k \rho_1}{m_j \rho_2}} \sin(gt - \varphi) + \mathcal{O}_2 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

where  $g = g_1 - g_2 \approx g_1$ , and  $\delta_{j,1} = 1$  if  $j = 1$  and 0 otherwise. The two eccentricities are almost equal undergoing small periodic variations at the frequency  $g$  in opposition of phase. The two apsidal lines precess at a very low common frequency (and are fixed if  $\zeta = \zeta_L$ ), and librate at the frequency  $g$  with an amplitude of  $(\sqrt{m_1/m_2} + \sqrt{m_2/m_1})\rho_1\rho_2$ .

### 3 Spin Dynamics

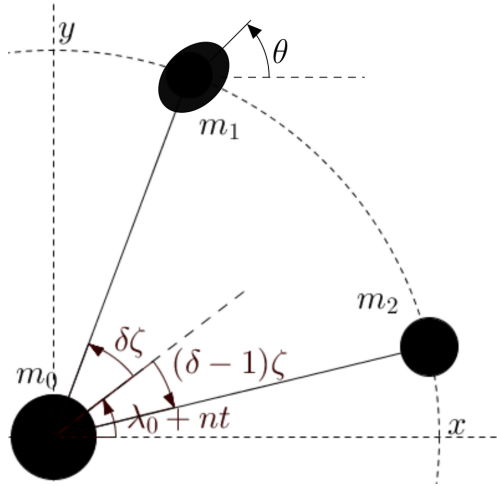


Figure 2: Reference angles represented for the circular coorbital system with respect to an inertial frame  $(x, y)$ .  $m_0$  is the mass of the central star,  $m_1$  and  $m_2$  the mass of the coorbitals.  $r_i$  is the distance of the coorbital  $i$  to the central star, and  $\lambda_i$  its true longitude.  $n$  is the mean motion of the planets' barycentre and  $\zeta = \lambda_1 - \lambda_2$ . Following equation (4) one can write  $\lambda_i$  as a function of  $\lambda_0$ ,  $\zeta$  and the mass ratio  $\delta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ .  $\theta$  is the rotation angle of  $m_1$ , defined with respect to an inertial frame, that will be used in the following sections.

We focus our study in the rotation of the body 1, since the co-orbital problem is symmetric. Thus, hereafter we drop the indices 1 ( $r_1$  becomes  $r$  etc.). We denote  $A < B < C$  the moments of inertia of the rotating

body. For simplicity, we assume that the body is rotating around its main inertia axis which is held perpendicular to the orbital plane. Therefore, the rotation of the body can be described by the rotation angle  $\theta$  (see Fig. 2). The equation of motion for  $\theta$  is given by the canonical equations associated with the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  given by (e.g. Danby, 1964)

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \left( \frac{\bar{a}}{r}(t) \right)^3 \cos 2(\theta - f(t)), \quad (12)$$

where  $f$  is the true longitude and

$$\sigma = n \sqrt{3 \frac{B-A}{C}} \quad (13)$$

is a measure of the axial asymmetry of the rotating body. This parameter is considered as constant in this study (rigid body).  $(B-A)/C$  for bodies of the solar system can be found in Appendix A.

For circular unperturbed Keplerian orbits,  $r = \bar{a}$  and  $f = nt$ , so the Hamiltonian (12) is equivalent to the equation of a simple pendulum and it is consequently integrable. The single resonant island is centred on  $\dot{\theta} = n$  and the maximum width of this island (in the direction of  $\dot{\theta}$ ) is  $2\sigma$ . This resonance is called the synchronous spin-orbit resonance.

In the co-orbital eccentric case, the equations of motion are not integrable. However, an eccentric orbit perturbed by a co-orbital companion remains quasi-periodic. As a consequence, the elliptic elements of the body can be expanded in a Fourier series whose frequencies are the fundamental frequencies of the orbit ( $n, \nu, g$  and  $g_2$ ), see section 2. Following the D'Alembert rules, the expansion of the time-dependent quantity  $\left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^3 e^{i2f}$  that appears in equation (12) can be written as:

$$\left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^3 e^{i2f} = \sum_{j \geq 0} \hat{\rho}_{\eta_j}^2 e^{i(2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi_j)}. \quad (14)$$

where  $\varsigma = (n - g_2, \nu, g) \in \mathbb{R}_+^3$ ,  $\eta_j = (p, q, s)$  with  $2\eta_j \in \mathbb{Z}^3$ ,  $\langle \eta_j, \varsigma \rangle = p(n - g_2) + q\nu + sg$ , and  $\hat{\rho}_{\eta_j} \in \mathbb{R}_+$  with:

$$\hat{\rho}_{\eta_j}^2 e^{i\phi_j} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^3 e^{i2(f - \langle \eta_j, \varsigma \rangle t)} dt. \quad (15)$$

Since  $g_2$  is small with respect to the other frequencies of the system (see section 2), and have for sole effect to slightly offset the frequency  $n$ , we consider from now on that  $n - g_2 \approx n$ . We refer to the spin-orbit resonances located in  $\dot{\theta} = pn$ , i.e. those with  $\eta_j = (p, 0, 0)$ , as ‘‘eccentric spin-orbit resonances’’, and ‘‘coorbital spin-orbit resonances’’ those located in  $\dot{\theta} = pn \pm q\nu$  ( $\eta_j = (p, q, 0)_{q \neq 0}$ ). Replacing equation (14) into equation (12) and denoting

$\rho_{\eta_j} \equiv \sigma \hat{\rho}_{\eta_j}$ , we get:

$$\mathcal{H} = T + \frac{I^2}{2} - \sum_{j \geq 0} \frac{\rho_{\eta_j}^2}{2} \cos(2\theta + 2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi_j). \quad (16)$$

$\mathcal{H}$  can be seen as the Hamiltonian of a quasi-periodically perturbed pendulum, whose forcing frequencies are  $n, \nu, g$  and  $g_2$ . This is a generalisation of the results by Colombo (1965) and Goldreich and Peale (1966), who showed that there is a whole family of eccentric spin-orbit resonances centred at  $\dot{\theta} = pn$  in the eccentric Keplerian case. Here we have a much larger family of spin-orbit resonances centred at  $\dot{\theta} = \langle \eta_j, \varsigma \rangle$  with half-width  $\rho_{\eta_j}$ . Since we generally have  $n \gg \nu \gg g \gg g_2$ , as long as  $\sigma \ll n$ , i.e. as long as the resonances do not overlap, it is possible to study the rotational dynamics in the vicinity of a particular eccentric spin-orbit resonance ( $\dot{\theta} = pn$ ), because it is not perturbed by the other eccentric spin-orbit resonances. Following Goldreich and Peale (1966), one can get an approximated integrable equation for the rotation in the vicinity of  $\dot{\theta} = pn$  by studying the angle  $\gamma_p$ , defined as:

$$\gamma_p \equiv \theta - pnt, \quad (17)$$

where  $p$  specifies the eccentric spin-orbit resonance that we are studying. For example,  $p = 1$  in the case of the synchronous resonance like the case of the Moon, and  $p = 3/2$  in the case of the 3:2 resonance of Mercury.

In order to adopt an autonomous Hamiltonian formulation which takes into account the different time-scales, we denote  $\lambda = nt$ ,  $\tau = \nu t$ ,  $v = gt$  and  $v_2 = g_2 t$ . We recall that  $n$  is the mean mean motion of the system,  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  is the fundamental frequency of the libration angle  $\zeta$ , and  $g = \mathcal{O}(\mu)$  and  $g_2 = \mathcal{O}(\mu)$  are the frequencies of libration and precession of the pericenter, respectively. In our study we consider only slightly eccentric orbits, and  $\mu \ll 1$ , we can thus neglect the terms of order  $\mu, e^2$  and  $\sqrt{\mu}e$  or above in the perturbation. The solution for  $\zeta$  in equation (1) can be rewritten as:

$$\zeta(t) = \zeta(\tau/\nu) = \hat{\zeta}(\tau). \quad (18)$$

In the case of co-orbital bodies, at first order in eccentricity, injecting (4) into equations (7) we have:

$$f = f_0 + nt + \delta \hat{\zeta}(\tau) + 2e(v) \sin u, \quad (19)$$

with  $u = \lambda - \varpi(v, v_2) + \delta \hat{\zeta}(\tau)$ ,  $\delta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ , and

$$\left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^3 = 1 + h(\lambda, \tau, v) + \mathcal{O}(\mu, e\sqrt{\mu}), \quad (20)$$

where

$$h(\lambda, \tau, v) = 2\frac{\nu}{n} \delta \hat{\zeta}'(\tau) - 3e(v) \cos u. \quad (21)$$



Using the conjugated variables  $(\gamma_p, \Gamma_p) = (\theta - pnt, \dot{\theta} - pn)$ ,  $(\lambda, \Lambda)$ ,  $(\tau, T)$ ,  $(v, \Upsilon)$  and  $(v_2, \Upsilon_2)$  the Hamiltonian (12) becomes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{O}(\mu, \sqrt{\mu}e, e^2), \quad (22)$$

with

$$\mathcal{H}_0 = n\Lambda + \nu T + g\Upsilon + g_2\Upsilon_2 + \frac{\Gamma_p^2}{2}, \quad (23)$$

and

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\sigma^2}{4}(1 + h(\lambda, \tau, v)) \cos 2(\gamma_p + (p-1)\lambda - \varpi(v, v_2) - \delta\hat{\zeta}(\tau) - 2e(v) \sin u). \quad (24)$$

The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  describes the motion of a rotating asymmetric body in a perturbed Keplerian orbit, at order 1 in  $e$ . As in equation (16), we can develop  $\mathcal{H}$  in a Fourier series, which gives:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \sum_{j \geq 0} \frac{\rho_{\eta_j}^2}{4} \cos(2\gamma_p + 2\langle \eta_j, \varsigma \rangle t + \phi_j) + \mathcal{O}(\mu, \sqrt{\mu}e, e^2). \quad (25)$$

### 3.1 Dynamical regimes

Following Chirikov (1979), the dynamics of the rotating body depends on the width of the resonant island  $\rho_{\eta_j}$  and on the distance between the center of the resonant islands. We define the distance between the center of two resonant islands as:

$$\epsilon_j^k = |\langle \eta_j - \eta_k, \varsigma \rangle|. \quad (26)$$

Chirikov's resonance overlap criterion states that when the sum of the two unperturbed half-widths is commensurate to the separation of the resonance center ( $\epsilon_j^k \approx \rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}$ ), large-scale chaos ensues (Chirikov (1979); Murray and Dermott (1999)) as it is the case for the rotation of Hyperion (Wisdom et al. (1984b)) in the eccentric Keplerian case.

When  $(\rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}) \ll \epsilon_j^k$  the islands are isolated and only small areas near the separatrix of the pendulums are chaotic. Most of the trajectories between those island are quasi-periodic. If we consider a weak dissipation, the rotation can be captured in one of those resonances. The wider the resonant island is, the higher are the probabilities of being captured in it (Goldreich and Peale (1966)).

Finally if  $(\rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}) \gg \epsilon_j^k$ , resonant islands totally overlap and we get the dynamics of a modulated pendulum (see Morbidelli, 2002, page 222). This situation is likely to occur when the Keplerian motion is perturbed by secular phenomena, for example by the precession of the orbits in the planetary case.

In the co-orbital case, the libration is on a semi-secular time scale. Let us consider two resonances separated by  $\epsilon_j^k = \nu/2$  (for example  $\eta_j = (1, 1/2, 0)$

and  $\eta_k = (1, 0, 0)$ ). As we will see in the following sections,  $\rho_{\eta_j}/\sigma \leq 1$ , thus  $(\rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}) < 2\sigma$ . In general, we have  $\sigma/n < 1$  and  $\nu/n \leq 0.1$ , depending on  $\mu$  and  $\zeta_0$  (Leleu et al., 2015). As a consequence, the resonant islands of two resonances separated by  $\epsilon_j^k = \nu/2$  can either be isolated, overlapping, or simply reduced to a single modulated resonance, depending on the values of  $\rho_{\eta_j}$  and  $\nu$ . Our purpose is thus to estimate the width of the spin-orbit resonances induced by the orbital frequencies  $n$ ,  $\nu$  and  $g$ .

### 3.2 Unperturbed Keplerian Orbits

One can obtain the Hamiltonian for the rotation of an asymmetric body on a single Keplerian orbit by simplifying the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  (Eq. 22). Indeed, by taking the mass of the perturbing body equal to 0 ( $\delta = 0$ ), we obtain

$$\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_0 - \frac{\sigma^2}{4}(1 - 3e \cos \lambda) \cos 2(\gamma_p + (p-1)\lambda - 2e \sin \lambda) + \mathcal{O}(e^2). \quad (27)$$

In order to study the spin dynamics near a specific eccentric spin-orbit resonance, we can fix  $p$ . We can thus write  $\mathcal{H}_K$  as:

$$\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_0(\Gamma_p, \Lambda) + \mathcal{H}_{1,p}(\gamma_p, \lambda) + \mathcal{O}(e^2), \quad (28)$$

with  $\mathcal{H}_{1,p}$  a periodic function of  $\lambda$ . We can thus develop  $\mathcal{H}_{1,p}$  as a Fourier series:

$$\mathcal{H}_{1,p}(\gamma_p, \lambda) = \bar{\mathcal{H}}_{1,p}(\gamma_p) + \sum_{k \neq 0} C_k(\gamma_p) \cos(k\lambda), \quad (29)$$

with  $k$  an integer, and

$$\bar{\mathcal{H}}_{1,p} = -\frac{\sigma^2}{4} X_p^{-3,2}(e) \cos 2\gamma_p + \mathcal{O}(e^2). \quad (30)$$

$X_p^{-3,2}(e) = \mathcal{O}(e^{2|p-1|})$  are the Hansen coefficients, given by:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{k_1} e^{ik_2 f} = \sum_{2p \in \mathbb{Z}} X_p^{k_1, k_2} e^{i2pM} \quad (31)$$

where  $M$  is the mean anomaly of the rotating body (Hansen, 1855). As we limited our description to the first order of eccentricity, only three of the first order resonances have non-null coefficients:  $X_1^{-3,2}(e) = 1 + \mathcal{O}(e^2)$ ,  $X_{1/2}^{-3,2}(e) = -\frac{e}{2} + \mathcal{O}(e^2)$  and  $X_{3/2}^{-3,2}(e) = \frac{7e}{2} + \mathcal{O}(e^2)$ .

For each individual eccentric resonances, we have  $|\dot{\gamma}_p| \ll n$ . We can thus average  $\mathcal{H}_K$  over  $\lambda$  to get

$$\bar{\mathcal{H}}_K = \mathcal{H}_0(\Gamma_p, \Lambda, T) + \bar{\mathcal{H}}_{1,p}(\gamma_p) + \mathcal{O}(e^2). \quad (32)$$

We can recognize in the expression of  $\bar{\mathcal{H}}_K$  the first terms of the family of the eccentric spin-orbit resonances located in  $\dot{\theta} = pn$  (Goldreich and Peale (1966)). For these resonances, we have  $\rho_{(p,0,0)} = \sigma \sqrt{|X_p^{-3,2}(e)|}$ .

## 4 Coorbital bodies with constant eccentricity

We now consider the co-orbital perturbations on a eccentric Keplerian orbit, for which  $e$  and  $\varpi$  can be considered as constant, either because their variations are too slow ( $g = \mathcal{O}(\mu)$ ), or because the amplitude of these variations can be neglected. We thus consider only the sets  $\eta_j = (p, q, 0) = (p, q)$ . Let us express the equation of rotation (12) as a function of  $\gamma_p$  and  $\zeta$ . Taking  $\varpi = 0$ ,  $\mathcal{H}_1$  (equation (24)) becomes:

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\sigma^2}{4}(1 + h(\lambda, \tau)) \cos 2(\gamma_p + (p-1)\lambda - \delta\hat{\zeta}(\tau) - 2e \sin u), \quad (33)$$

where

$$h(\lambda, \tau) = \frac{2\nu\delta\hat{\zeta}'(\tau)}{n} - 3e \cos(\lambda + \delta\hat{\zeta}(\tau)). \quad (34)$$

Similarly to the Keplerian case, at order one in  $e$  we can chose  $p \in \{1/2, 1, 3/2\}$  and average  $\mathcal{H}_1$  over  $\lambda$ , obtaining:

$$\overline{\mathcal{H}}_{1,p} = -\frac{\sigma^2}{4}[X_p^{-3,2}(e) + H_c(p)] \cos(2\gamma_p - 2p\hat{\zeta}(\tau)), \quad (35)$$

where the Hansen coefficients  $X_p^{-3,2}(e)$  are identical to the Keplerian case,  $H_c(1) = -\frac{2\delta\nu\hat{\zeta}'}{n}$  and  $H_c(1/2) = H_c(3/2) = 0$ .

Equation (1) is not integrable, so in general we cannot obtain an analytical expression of the  $\rho_{\eta_j}$  in the co-orbital case. Nevertheless, when  $\zeta_0$  is near to the Lagrangian equilibrium  $\zeta_L$ , we can find a simple approximate expression for  $\zeta$ , and express the  $\rho_{\eta_j}$  as functions of the initial parameters.

### 4.1 Near the Lagrangian Circular Equilibrium

We use a development of order 2 to understand the behaviour of the system for  $\zeta_0$  near  $\zeta_L$ , *i.e.*, in the vicinity the Lagrangian circular equilibrium point (we recall that  $\zeta_0$  is the minimal value reached by  $\zeta(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t)$  during a libration period, and  $\zeta_L = \pi/3$  for the  $l_4$  equilibrium and  $5\pi/3$  for the  $l_5$  one). We define  $z = \zeta_0 - \zeta_L$ , the departure from the Lagrangian equilibrium at  $t = 0$  and  $\frac{d\hat{\zeta}}{d\tau} = 0$ . A quadratic approximation of the solution of the equation (1) is:

$$\hat{\zeta}(\tau) = \zeta_L + \frac{3\sqrt{3}}{8}z^2 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{4}z)z \cos(\tau) - \frac{\sqrt{3}}{8}z^2 \cos(2\tau) + \mathcal{O}(z^3). \quad (36)$$

The constant term  $\zeta_L + \frac{3\sqrt{3}}{8}z^2$  can be absorbed by a redefinition of  $\lambda$  and  $\gamma_p$ , we thus neglect it from now on. At second order in  $z$ , the averaged part

of the Hamiltonian  $\overline{\mathcal{H}}_{1,p}$ , equation (35), becomes, for  $p = 1$ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_{1,p=1} = -\frac{\sigma^2}{4} & \left[ (1 - z^2\delta^2) \cos(2\gamma_1) + z\delta \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}z - \frac{\nu}{n}\right) \cos\left(2\gamma_1 + \tau - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ & + z\delta \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}z + \frac{\nu}{n}\right) \cos\left(2\gamma_1 - \tau - \frac{\pi}{2}\right) \\ & + \frac{z^2\delta}{2} \sqrt{\delta^2 + \frac{3}{16}} \cos(2\gamma_1 + 2\tau + \phi) \\ & \left. + \frac{z^2\delta}{2} \sqrt{\delta^2 + \frac{3}{16}} \cos(2\gamma_1 - 2\tau + \phi) \right] + \mathcal{O}(e^2, ez^2, z\mu), \end{aligned} \quad (37)$$

with  $\phi$  a phase depending on  $z$  and  $\delta = m_2/(m_1 + m_2)$ , and for  $p = 3/2$  or  $1/2$ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_{1,p} = -\frac{\sigma^2}{4} X_p^{-3,2}(e) & [\cos(2\gamma_p) + pz\delta \cos(2\gamma_p + \tau) \\ & + pz\delta \cos(2\gamma_p - \tau)] + \mathcal{O}(e^2, ez^2, z\mu). \end{aligned} \quad (38)$$

First, let us consider these results at first order in  $e$  and  $z$ . If  $e = 0$ , we get the expression in the quasi-circular case, as developed by Correia and Robutel (2013). In that paper, the authors studied the overlap between the synchronous resonant island  $\eta_j = (1, 0)$  and the island centred at  $\eta_j = (1, \pm 1/2)$ . Here we generalise the study to the vicinity of the eccentric spin-orbit resonances  $\eta_j = (1/2, 0)$  and  $\eta_j = (3/2, 0)$ .

In the unperturbed eccentric case, we recalled in the previous section that there were eccentric spin-orbit resonances centred at  $\eta_j = (p, 0)_{p \in \{1/2, 1, 3/2\}}$ . The libration of amplitude  $z$  around the Lagrangian equilibrium splits each of these eccentric resonances into three resonant islands as well. Equation (38) shows that we can approximate the phase portrait in the vicinity of each of the unperturbed eccentric spin-orbit resonances (1:1, 3:2 or 1:2) by an island of half-width  $\rho_{(p,0)} = \sqrt{X_p^{-3,2}(e)}\sigma$  centred at  $\eta_j = (p, 0)$  and two island of half-width  $\rho_{(p,\pm 1/2)} = \sqrt{pz\delta X_p^{-3,2}(e)}\sigma$  located at  $\eta_j = (p, \pm 1/2)$  (see Figure 5). The contribution of  $\hat{\zeta}'$  in the expression of  $h$  (equation (34)) is of order  $\nu/n = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , and we will neglect it from now on.

We can estimate for which values of the axial asymmetry of the rotation body  $\sigma$  the resonant islands in  $\eta_j = (p, 0)$  and  $\eta_k = (p, -1/2)$  begin to overlap. We recall that near the Lagrangian equilibrium,  $\nu = n\sqrt{27\mu}/2$ . Therefore, for these resonances  $\epsilon_j^k = n\sqrt{27\mu}/4$  and  $(\rho_{\eta_j} + \rho_{\eta_k}) = (1 + \sqrt{z\delta})\sigma\sqrt{X_p^{-3,2}(e)}$ . By using the definition of  $\sigma$  (equation (13)), one can

see that these resonant islands overlap when

$$\frac{B-A}{C} \approx \frac{9}{16\sqrt{X_p^{-3,2}(e)}}(1 - 2\sqrt{z\delta})\mu. \quad (39)$$

The interaction between two islands of first order in  $z$  is also theoretically possible, for example the islands  $\eta_j = (1, 1/2)$  and  $\eta_k = (3/2, -1/2)$  (see Figure 6). However, in order to get those two islands near to each other, we need to have  $\nu \approx n/2$ , which is near the stability limit  $\nu = n/\sqrt{2}$  given by Gascheau (1843). Moreover, in order to interact, these two islands also need to present large libration widths, but a simultaneously large amplitude  $z$  and a high frequency  $\nu$  is not possible for stability reasons (Leleu et al., 2015).

Due to the truncation of the terms of order  $ez^2$ , only the synchronous resonance is modified by the terms in  $z^2$  in this model. For large libration amplitudes  $z$ , co-orbital resonant islands of width proportional to  $z^2$  appear in  $\dot{\theta} = n \pm \nu$ , while the width of the synchronous island decreases (see Fig 4 and 5). In next section we will see that the trends of the quadratic model are confirmed for larger libration amplitudes, and a similar behaviour occurs in the vicinity of all eccentric spin-orbit resonances.

## 4.2 Tadpole and Horseshoe Configurations

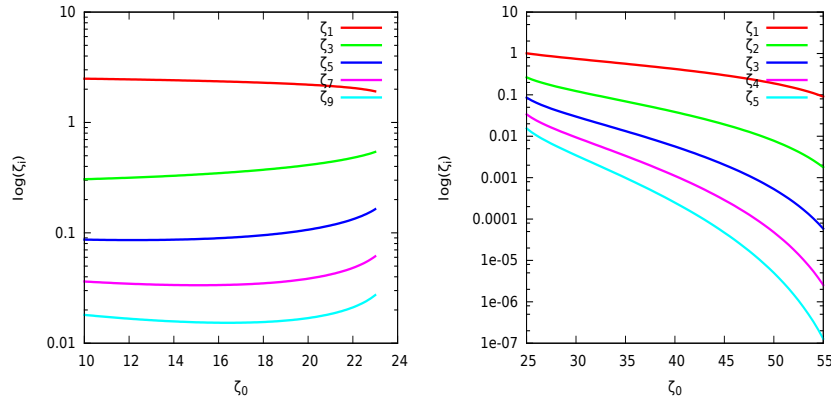


Figure 3: The five dominant coefficients of the Fourier expansion of  $\hat{\zeta}$ , equation (41). The  $\xi_l$  have been obtained by a numerical integration of equation (1) followed by a frequency analysis. They depend only on  $\zeta_0$ . On the left, in the horseshoe case, the symmetry of the orbit imposes that  $\xi_{2l} = 0$  (Robutel et al., 2012). On the right, we represented those coefficients for the tadpole configuration.

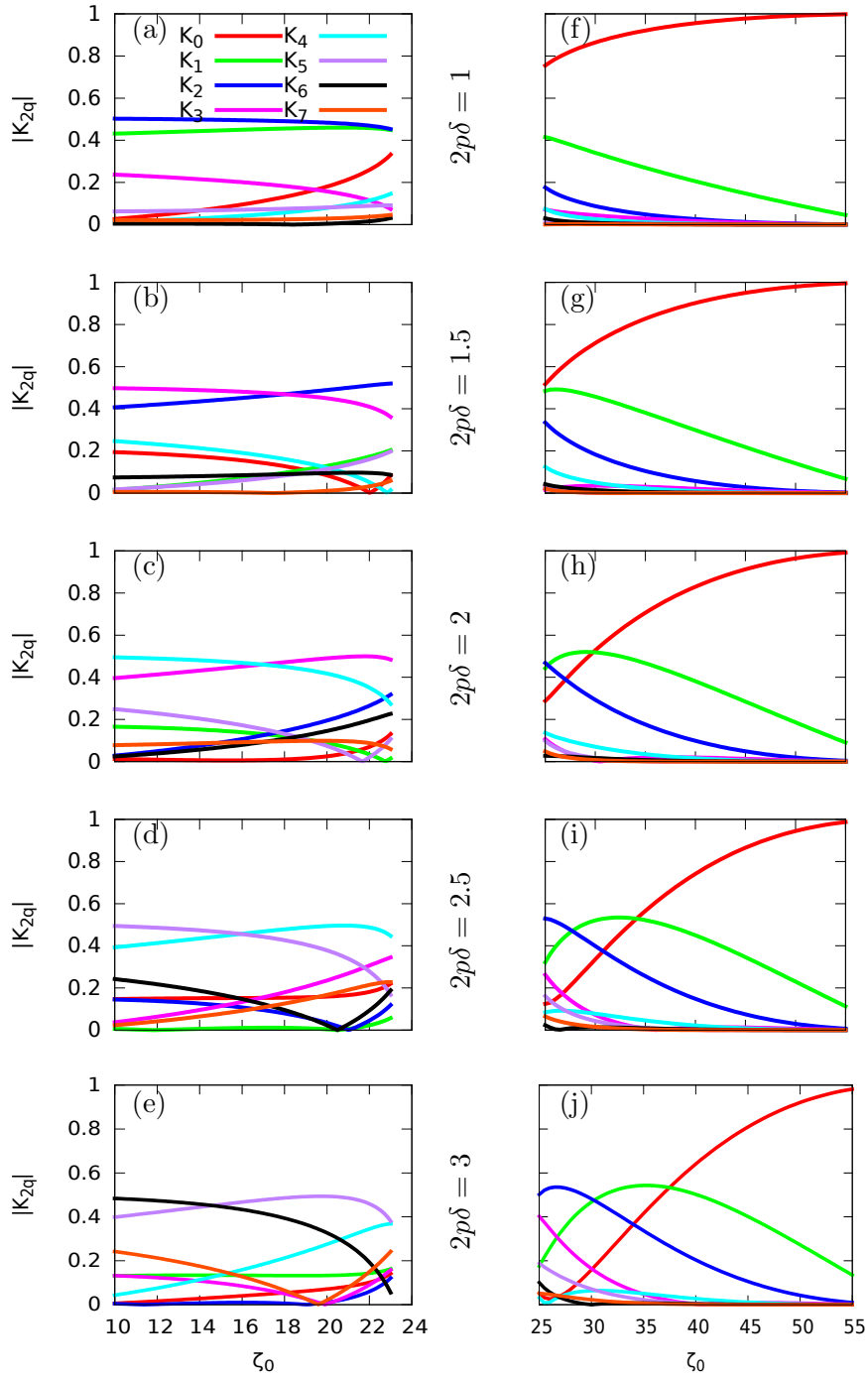


Figure 4: The seven firsts  $|K_{2q}|_{2q \in \mathbb{Z}}$  coefficients with respect to  $\zeta_0$  for the horseshoe on the left and for the tadpole orbits on the right. For (a) & (f) we have  $2p\delta = 1$ , for (b) & (g)  $2p\delta = 3/2$ , for (c) & (h)  $2p\delta = 2$ , for (d) & (i)  $2p\delta = 5/2$  and for (e) & (j)  $2p\delta = 3$ . see the text for more details.

We now describe the spin dynamics of the coorbital in the whole tadpole and horseshoe domains. To do so, we write the averaged part of the Hamiltonian  $\overline{\mathcal{H}}_p$  (35) under the form:

$$\overline{\mathcal{H}}_p = \mathcal{H}_0 - \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{\rho_{(p,q)}^2}{4} \cos(2\gamma_p + q\tau + \phi), \quad (40)$$

The explicit expression of this Hamiltonian given in section 4.1 is no more valid for  $\zeta_0 - \zeta_L \gg 1$ . In order to have a valid expression everywhere in the tadpole and horseshoe domain, we consider the Fourier expansion of the solution  $\hat{\zeta}(\tau)$  of equation (35).  $\hat{\zeta}$  being a real function of period  $2\pi$ , we can write:

$$\hat{\zeta} = \xi_0 + \sum_{l \geq 1} \xi_l \sin(l\tau + \varphi_l) \quad (41)$$

The coefficients  $\xi_l$  can be obtained numerically. In Figure 3 we show the evolution of the lower order  $\xi_l$  with respect to  $\zeta_0$ . Replacing equation (41) into (35) and neglecting the terms of order  $\sqrt{\mu}$  (see section 4.1), we can write:

$$\overline{\mathcal{H}}_{1,p} = -\frac{\sigma^2}{4} X_p^{-3,2}(e) \Re(e^{i2\gamma_p} e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)}). \quad (42)$$

Since  $e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)}$  is a periodic function with period  $2\pi$  in  $\tau$ , we can also expand it in Fourier series<sup>3</sup>

$$e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)} = \sum_{2q \in \mathbb{Z}} K_{2q}(p\delta, \zeta_0) e^{i(2q\tau + \Phi_{2q}^p)}, \quad (43)$$

and thus rewrite equation (42) as

$$\overline{\mathcal{H}}_{1,p} = -\frac{\sigma^2}{4} X_p^{-3,2}(e) \sum_{2q \in \mathbb{Z}} K_{2q}(p\delta, \zeta_0) \cos(2\gamma_p + 2q\tau + \phi). \quad (44)$$

By determining the  $K_{2q}$  coefficients, we can thus directly obtain the  $\rho_{\eta_j}$  from

$$\rho_{(p,q)} = \sigma \sqrt{X_p^{-3,2}(e) K_{2q}(p\delta, \zeta_0)}. \quad (45)$$

The coefficients  $K_{2q}$  are a function of the  $\xi_l$  appearing in eq. (41). Replacing equation (41) into  $e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)}$  gives

$$e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)} = e^{-i2p\delta\xi_0} e^{-i2p\delta \sum_{l \geq 0} \xi_l \sin(l\tau + \phi_l)}, \quad (46)$$

and thus

$$e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)} = e^{-i2p\delta\xi_0} \prod_{l \geq 1} e^{-i2p\delta\xi_l \sin(l\tau + \phi_l)}. \quad (47)$$

---

<sup>3</sup>Note that since  $\xi_l$  depends only on  $\zeta_0$ , the coefficients  $K_q$  depend only on the product  $p\delta$  instead of  $p$  and  $\delta$ .

By using the Bessel functions, we can further write:

$$e^{-i2p\delta\hat{\zeta}(\tau)} = e^{-i2p\delta\xi_0} \prod_{l \geq 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(-2p\delta\xi_l) e^{ik(l\tau + \phi_l)}. \quad (48)$$

where  $J_k$  is the  $k^{\text{th}}$  Bessel function. Replacing this last expression into the equation (42), we get:

$$K_{2q}(p\delta, \zeta_0) = \prod_{j=1}^{\infty} J_{k_j}(-2p\delta\xi_j(\zeta_0)), \quad \text{with } (k_1, k_2, \dots, k_j, \dots) / \sum_{j=1}^{\infty} jk_j = 2q. \quad (49)$$

We finally obtain an expression for the  $\rho_{(p,q)}$  through expression (45), which depends on the  $\xi_l$  (Eq. 41). Recalling the propriety of the Bessel function  $J_{-k} = (-1)^k J_k$ , we have  $|K_{-2q}| = |K_{2q}|$ .

In Figure 4 we plot several  $K_{2q}(p\delta, \zeta_0)$  coefficients as a function of  $\zeta_0$  for different values of  $p\delta$ . The  $\xi_l$  coefficients are obtained by integration of equation (1) followed by a frequency analysis of the solution with a truncation at  $l = 10$  (see the exponential decreasing of the  $\xi_l$  in  $l$ , Fig. 3). The fact that the coefficients  $K_{2q}$  depend only on  $p$  and  $\delta$  by the product  $p\delta$  yields an interesting result: the relative width of the resonant islands in the vicinity of the 1/2 resonance in the restricted case ( $\delta = m_2/(m_1 + m_2) \approx 1$ ) and in the vicinity of the 1:1 resonance with equal masses ( $\delta = 1/2$ ) are identical within our approximations, since in both cases  $2p\delta = 1$ . However, the width  $\rho_j$  of these islands differ because the Hansen coefficients  $X_p^{-3,2}(e)$  depend on  $p$ .

The amplitude of the  $K_{2q}$  in Fig. 4 indicates which resonant island is dominating in the vicinity of a given spin-orbit resonance. In the tadpole cases (panels *a* to *e*), we have most of the time a phase portrait similar to the one in the quasi-circular case (Correia and Robutel, 2013), or the one near the elliptic Lagrangian equilibrium (section 4.1), i.e., a dominating island at  $\eta_j = (p, 0)$  and smaller islands at  $\eta_j = (p, \pm q)$ , whose width decreases as  $q$  increases. The phase portrait of such case can be seen on Fig. 5 (left). Still in the tadpole configuration, far from the Lagrangian equilibrium, several resonant island may become of commensurable width. An example of this is shown in the right panel of the Figure 5, which corresponds to the same case shown in Fig. 4 (b) for  $\zeta_0 = 25^\circ$ . For high values of the product  $p\delta$  and far from the Lagrangian equilibrium, the width of the island centred at  $\eta_j = (p, 0)$  can even be small with respect to the island located in  $q = 1/2$  or  $q = 1$  (see for example Fig. 4 (e) for  $\zeta_0 = 25^\circ$ ). In the horseshoe configuration, the width of the eccentric spin-orbit resonance is always negligible with respect to the dominating islands at its vicinity. The largest islands are usually located in  $\eta_j = (p, \pm q)$ , with  $q$  different from zero. As the product  $p\delta$  increase, the islands further away from the eccentric resonance (thus for higher  $q$ ) become dominating.



As a result, the spin dynamics in the vicinity of  $\eta_j = (p, 0)$  is very different between tadpole and horseshoe orbits. In the tadpole configuration, the main resonant island is generally near the eccentric resonance, forming a large chaotic area centred at  $\eta_j = (p, 0)$  in the case of an overlap (Correia and Robutel, 2013). In the horseshoe case, the direct vicinity of the resonance  $\eta_j = (p, 0)$  is generally regular. In case of overlapping, chaotic areas arise from each side of  $\eta_j = (p, 0)$ , at a distance which increases with the product  $p\delta$ .

The overlapping of the resonant island can change the phase portrait of the rotation from separated resonant islands to chaotic rotation and even to a simple modulation of the islands of the unperturbed Keplerian case. Now that we have an expression of the width of the resonant islands centred at  $\eta_j = (p, q)$ , we can identify which parameters can give rise to a chaotic behaviour. Departing from a given system, there are two ways to increase the overlap of close-in resonances:

1) widen the resonant islands: by increasing  $\delta$ ; by increasing the asymmetry ( $\frac{B-A}{C}$ ) of the rotating body; by increasing  $e$ , which widens all the islands located at  $\eta_j = (p, q)_{p \neq 1}$ .

2) bring the resonant islands closer from each other:  $\nu$  is reduced when  $\mu$  decreases, since  $\nu$  is proportional to  $\sqrt{\mu}$  (equation 3).

Reducing  $\zeta_0$  has the double effect to widen the  $\eta_j = (p, q)_{q \neq 0}$  island in one hand, and to reduce  $\nu$  and thus bring the islands closer, on the other hand.

### 4.3 Numerical simulations

For a global view of the rotational dynamics we can use the Frequency Map Analysis (FMA) to represent the phase space (Laskar, 1993; Robutel and Laskar, 2001). This method is particularly adapted to our problem because the trajectories of the considered systems are close to quasi-periodic trajectories and their dynamics involve up to three fundamental frequencies ( $n$ ,  $\nu$  and  $g$ ), so we cannot use Poincaré sections.

In Figure 5 we plot one of these maps for the 3:2 resonance. The vertical axis shows  $\dot{\theta}/n$ , such that the center of the 3:2 resonance can be found at  $\dot{\theta}/n = 1.5$ . The horizontal axis is  $\gamma = \gamma_1$  modulo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . The range of  $\gamma$  can be reduced to this interval due to the symmetries of the body. The purpose of these simulations is to describe the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma)$  in order to identify the areas where  $\gamma$  librates, circulates or has a chaotic evolution. Each pixel corresponds to an initial condition in  $(\dot{\theta}/n, \gamma)$  for which the system is integrated using equation (12) for the rotational motion together with the equations for the planar three-body problem in heliocentric coordinates. The simulations are run over several times the longest time scale considered in the system, generally  $\mathcal{O}(2\pi/\nu)$  or  $\mathcal{O}(2\pi/g)$  (hence  $\propto 1/\sqrt{\mu}$  or  $\propto 1/\mu$  orbital periods, respectively). For each of those simulations, the main frequency  $f$

of  $e^{i\gamma}$  has been computed (see Robutel et al., 2012). The color of each pixel represents the first derivative of this frequency with respect to  $\dot{\theta}$ , i.e.,  $df/d\dot{\theta}$ . In the circulation region,  $f$  evolves almost linearly with respect to  $\dot{\theta}$ , thus the value of the derivative is almost constant. Inside the libration island,  $f$  is a constant, thus its derivative is equal to zero. Finally, at the separatrix between circulation and libration, and in the chaotic region,  $f$  is singular and so is its derivative.

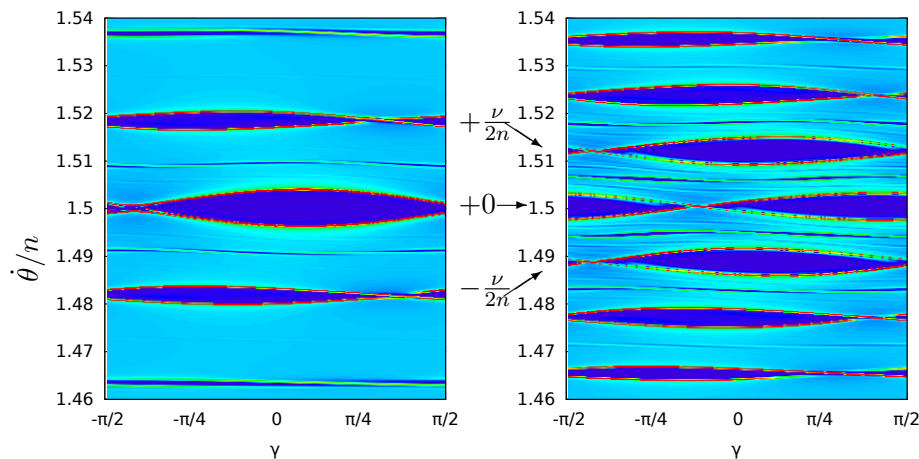


Figure 5: FMA of the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma_p)$  for two coorbitals in tadpole configurations. In both cases  $m_1 = m_2 = 1 \times 10^{-4} m_0$ ,  $e_1 = e_2 = 0.1$ , and  $\frac{B-A}{C} = 2 \times 10^{-5}$ . Looking at the vicinity of the 3:2 eccentric spin-orbit resonance, we have  $2p\delta = 1.5$ . On the left, we have  $\zeta_0 = 45^\circ$ ,  $\frac{\nu}{2n} \approx 0.018$ , the islands are thus located at  $\dot{\theta}/n = 1.5 \pm 0.018$ . On the right:  $\zeta_0 = 25^\circ$ ,  $\nu/(2n) \approx 0.011$ , the islands are thus located at  $\dot{\theta}/n = 1.5 \pm 0.011$ .  $(B-A)/C$  for bodies of the solar system can be found in Appendix A, Table 2.

#### 4.3.1 Tadpole orbits

We recall that a system is in a tadpole configuration when  $\zeta_0 \in (\zeta_s, \zeta_L]$ . We saw previously in the quadratic approximation (sections 4.1 and 4.2) that for  $\zeta_0$  close to  $\zeta_L$ , the eccentric spin-orbit resonance ( $\eta_j = (p, 0)$ ) is larger than the co-orbital resonances  $\eta_j = (p, q)_{q \neq 0}$  (see Fig. 5, left panel). Far from the Lagrangian equilibrium, (and especially for high values of  $2p\delta$ ), the width of the resonances  $\eta_j = (p, \pm 1/2)$  and  $\eta_j = (p, \pm 1)$  (island centred at  $\dot{\theta} = pn \pm \nu/2$  or  $\dot{\theta} = pn \pm \nu$ , respectively) can be as wide as the eccentric islands or even larger (see Fig. 4 and Fig. 5, right). Increasing the amplitude of libration gives also rise to higher order resonant island, in-between the previously described resonant island. The appearance of such islands can

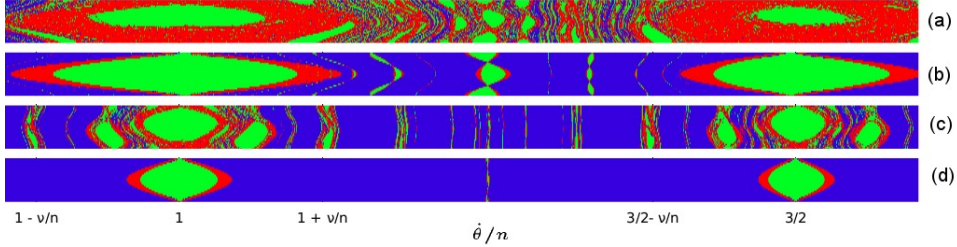


Figure 6: Frequency map of focused on the 1:1 to 3:2 resonances area. (a) and (c) represent a co-orbital configuration with  $\delta = 1/2$ ,  $\mu = 2 \times 10^{-3}$ ,  $e = 0.15$  and  $\zeta_0 = 45^\circ$ . For comparison, (b) and (d) represent the keplerian case ( $\delta = 0$ ).  $\frac{B-A}{C} = 5 \times 10^{-4}$  for (c) and (d) and  $\frac{B-A}{C} = 5 \times 10^{-3}$  for (a) and (b). Blue when  $\gamma$  circulate, green when it is trapped in a spin-orbit resonance and red when the rotation is chaotic. See the text for more details.

accelerate the transition to a chaotic phase portrait.

For unperturbed Keplerian orbits, chaotic rotation emerges when  $e$  and  $\sigma$  are large enough, as it is the case for Hyperion (Wisdom et al., 1984b). However, in the co-orbital case, the generalised chaos may have a different origin. In Figure 6 (b) and (d), we show the classic eccentric resonances described in section 3.2 for unperturbed Keplerian orbits. In this plot higher order resonances in  $e$  are also visible (for example  $\dot{\theta}/n = 5/4$ ). In Figure 6 (a) and (c) we show the previous two orbits while perturbed by a co-orbital companion. We observe that each member of the eccentric spin-orbit family, including the ones of higher order than one in  $e$ , give rise to co-orbital spin orbit resonances, fulfilling the phase space and potentially overlapping each other. Moreover, generalised chaotic rotation can be reached for lower values of  $\sigma$  in the co-orbital case than in the unperturbed Keplerian case. This is due to a much more populated phase space, ensuring the overlap of all the resonant islands between the 1:1 and the 3:2 resonances.

#### 4.3.2 Horseshoe orbits

For horseshoe orbits ( $\zeta_0 \in (0, \zeta_s)$ ), the phase portrait is different from tadpole orbits. In Figure 7 we look at the vicinity of the synchronous resonance  $\eta_j = (1, 0)$ , in a case where  $m_1 \ll m_2$ . As explained in section 4.2, in the horseshoe configuration the main resonant island is not centred at the synchronous resonance, but on each side, symmetrically with respect to  $\eta_j = (1, 0)$ . In this case, we have  $2p\delta = 2$  and  $\zeta_0 = 12^\circ$ , so the main resonances are for  $2q = 3$  and  $2q = 4$  (see Fig. 4 h), which are centred at  $\eta_j = (1, \pm 3/2)$  and  $\eta_j = (1, \pm 2)$ . In Figure 7 these resonances overlap, creating a chaotic area that encompass nearby resonances.

As for the synchronous resonance, in the vicinity of an eccentric spin-

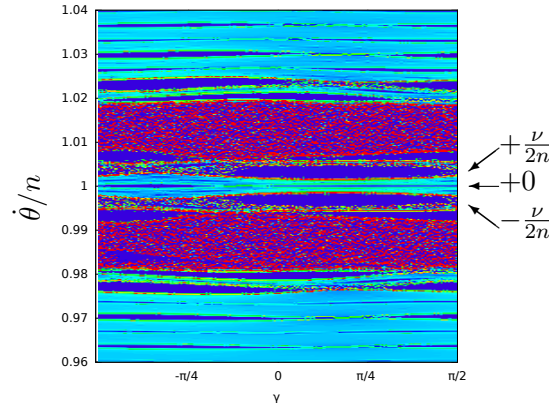


Figure 7: FMA of the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma_p)$  for two coorbitals on horseshoe configuration.  $e_1 = e_2 = 0.1$ ,  $\frac{B-A}{C} = 1 \times 10^{-5}$ .  $\zeta_0 = 12^\circ$ ,  $m_1 = 1 \times 10^{-7}m_0$  and  $m_2 = 1 \times 10^{-5}m_0$ . We focus here on the synchronous resonance with  $2p\delta = 2$ .  $\nu/(2n) \approx 0.0033$ , the islands are thus located at  $\dot{\theta}/n = 1 \pm k \times 0.0033$ , with  $k$  an integer.

orbit resonance  $(\eta_j = (p, 0)_{p \neq 0})$ , the main resonant island is not the eccentric resonance itself, since the order  $q$  of the dominating harmonics depends mainly on the product  $2p\delta$ . In Figure 8 we look at the vicinity of the 3:2 eccentric spin-orbit resonance for two different values of  $\delta$ . On the left panel, the two coorbital have the same mass, while on the right, we are in the restricted case  $m_1 \ll m_2$ . We thus have  $2p\delta = 3/2$  on the left and  $2p\delta = 3$  on the right. Accordingly to the graphs (g) and (j) of Fig. 4, the largest resonant islands are located at  $\eta_j = (3/2, \pm 1)$  and  $\eta_j = (3/2, \pm 3/2)$  for the equal masses and  $\eta_j = (3/2, \pm 5/2)$  and  $\eta_j = (3/2, \pm 3)$  in the restricted case. It is indeed what we observe on Figure 8. In both cases, the main resonant islands overlap, creating two chaotic area symmetric with respect to the eccentric spin-orbit resonance  $\eta_j = (3/2, 0)$ .

Overall, In the horseshoe domain, the eccentric spin-orbit resonances are of negligible width with respect to some of the co-orbital resonant islands under and above them. In addition, since horseshoe co-orbitals are stable only for  $\mu < 2 \times 10^{-4}$ , the resonant island are generally closer to each other than in the tadpole configuration ( $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ ). That is why, in the three examples we have chosen, the main resonant islands always overlap.

### 4.3.3 Quasi satellite

Although our model does not apply to the quasi-satellite case, they have a similar dynamics near the main eccentric spin-orbit resonances. i.e. resonant islands located in  $\dot{\theta} = n \pm \nu/2$ . In Figure 9 we show the vicinity of the 1:1

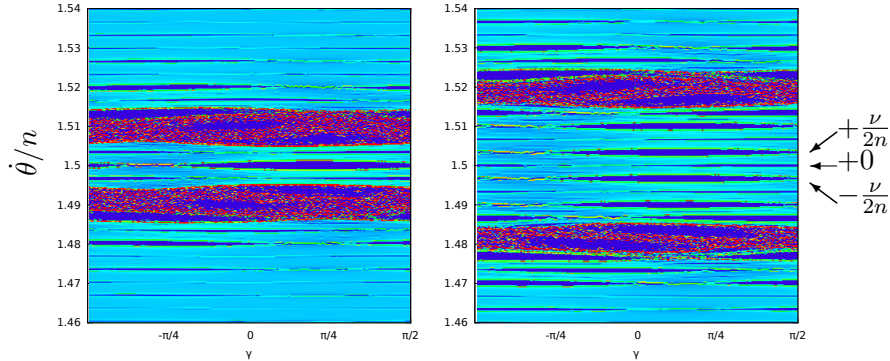


Figure 8: FMA of the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma_p)$  in the neighbourhood of the 3:2 spin-orbit resonance for two coorbitals in horseshoe configuration.  $e_1 = e_2 = 0.1$ ,  $\frac{B-A}{C} = 1 \times 10^{-5}$ .  $\zeta_0 = 12^\circ$  in both cases. On the left we have  $m_1 = m_2 = 5 \times 10^{-6} m_0$  ( $2p\delta = 3/2$ ). On the right we have  $m_1 = 1 \times 10^{-7} m_0$ ,  $m_2 = 1 \times 10^{-5} m_0$  ( $2p\delta = 3$ ).  $\nu/(2n) \approx 0.0033$ , the islands are thus located at  $\dot{\theta}/n = 1.5 \pm k \times 0.0033$ , with  $k$  an integer. See the text for more details.

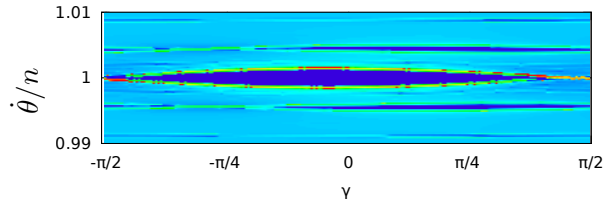


Figure 9: FMA of the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma_p)$  for two coorbitals in quasi-satellite configuration, near the synchronous resonance.  $m_1 = m_2 = 1 \times 10^{-6} m_0$ ,  $e_1 = e_2 = 0.2$ ,  $\frac{B-A}{C} = 1 \times 10^{-6}$ ,  $\varpi_1 - \varpi_2 = 180^\circ$  and  $\zeta_0 = 15^\circ$ . See the text for more details.

resonance for a quasi-satellite case. In this case  $\nu/(2n) = 4.3 \times 10^{-3}$ , thus the islands are located in  $\dot{\theta}/n = 1 \pm \nu/(4\pi) = 1 \pm 0.0043$ .

## 5 Coorbital bodies with variable eccentricity

Until now, we have been considering that  $e$  and  $\varpi$  are constant because either their variations are too small, either they are slow with respect to the considered time-scale. In general, the temporal evolution of  $e$  and  $\varpi$  depends on  $g$  and  $g_2$ . In the vicinity of the Lagrangian equilibrium, i.e., when the

variations of  $e$  are small, we can make the following approximation (Eq. 11):

$$e = e_0 + \Delta e \cos(gt) , \quad (50)$$

and

$$\varpi = \varpi_0 + w \sin(gt) + g_2 t . \quad (51)$$

As explained in section 3, we can neglect the effect of  $g_2$  on the spin dynamics. The value of  $\Delta e$  increases when the difference between the initial eccentricities of the orbits of the co-orbital bodies also increases (see Nauenberg, 2002). In addition,  $\Delta e$  also increases when  $\delta$  tends to 1 ( $m_1 \ll m_2$ ). We now head back to the general form of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  developed in section 3. By replacing the orbital variations given by expressions (50) and (51) in equation (24), we obtain a Hamiltonian that takes into account the variations of  $e$  and  $\varpi$ . At first order in  $w$  and  $\Delta e$ , following the method described in sections 3.2 and 4, we can split  $\mathcal{H}_1$  into a term which does not depend on  $\lambda$  and a term that has zero as mean value over  $\lambda$ . After averaging, for  $p = 1$ ,  $\overline{\mathcal{H}}_{1,p}$  becomes:

$$\overline{\mathcal{H}}_{1,p=1} = -\frac{\sigma^2}{4} \cos(2\gamma_1 - 2\delta\hat{\zeta}(\tau)) , \quad (52)$$

while for  $p = 3/2$  or  $1/2$  we have

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_{1,p} = -\frac{\sigma^2}{4} & \left[ X_p^{-3,2}(e_0) \cos(2\gamma_p - 2p\delta\hat{\zeta}(\tau)) \right. \\ & + X_p^{-3,2}\left(\frac{\Delta e + we_0}{2}\right) \cos(2\gamma_p - 2p\delta\hat{\zeta}(\tau) + gt) \\ & \left. + X_p^{-3,2}\left(\frac{\Delta e - we_0}{2}\right) \cos(2\gamma_p - 2p\delta\hat{\zeta}(\tau) - gt) \right] . \end{aligned} \quad (53)$$

As in the cases previously studied, the rotational dynamics in the vicinity of the synchronous resonance remains unchanged by the eccentricity variations at first order in  $\Delta e$  and  $w$ . However, the dynamics in the vicinity of the remaining eccentric spin-orbit resonances is modified by the variations of  $e$  and  $\varpi$ . We define  $\gamma_{p,\pm g} \equiv \gamma_p \pm gt$ . Then, each term of the equation (53) can be rewritten under the form of the equation (35). As a result, the  $\rho_{\eta_j}$  obtained in section 4.2 can also be adapted to this case. As we saw previously, if  $p = 1$ , only the  $\rho_{(1,q,0)}$  are not equal to zero and their values have been given in section 4.2. For  $p = 3/2$  or  $1/2$ , we get:

$$\begin{aligned} \rho_{(p,q,0)} &= \sigma \sqrt{X_p^{-3,2}(e_0) K_q^p(\delta, \zeta_0)} , \\ \rho_{(p,q,\pm 1/2)} &= \sigma \sqrt{X_p^{-3,2}\left(\frac{\Delta e \pm we_0}{2}\right) K_q^p(\delta, \zeta_0)} , \end{aligned} \quad (54)$$

while the width of the higher order resonant islands is negligible within our approximation. The variations of  $e$  and  $\varpi$  thus split the eccentric spin

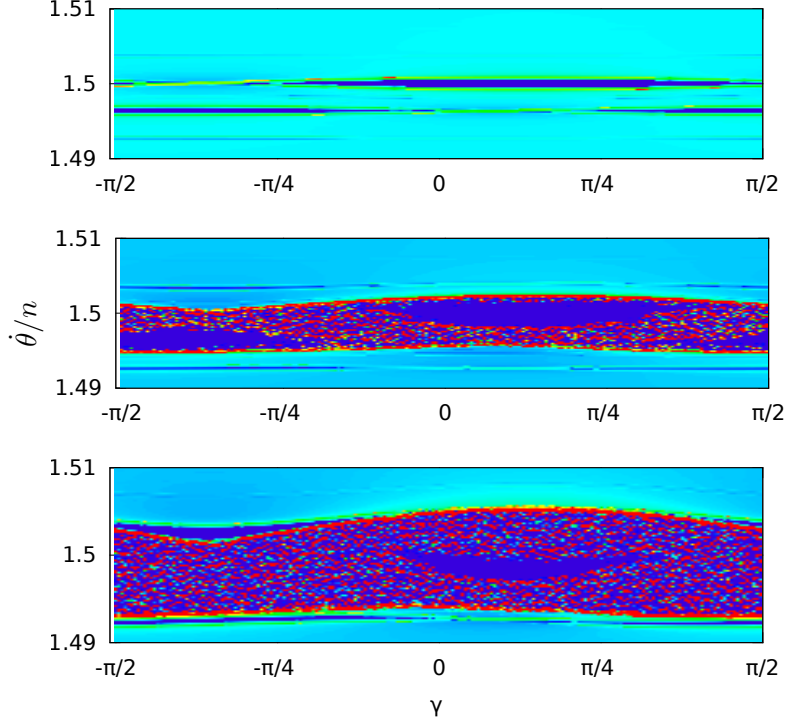


Figure 10: FMA of the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma_p)$  in the neighbourhood of the 3:2 spin orbit resonance, for two coorbitals on tadpole configuration.  $e_1 = 0.05$ ,  $e_2 = 0.1$ ,  $m_1 = m_2 = 1 \times 10^{-3}m_0$  and  $\zeta_0 = 45^\circ$ . We have  $\frac{B-A}{C} = 1 \times 10^{-6}$  on the top panel,  $1 \times 10^{-5}$  on the middle one and  $5 \times 10^{-5}$  on the bottom one. See the text for more details.

orbit resonance and the co-orbital spin-orbit resonances into 3 islands, whose center is separated by  $g/2$  in the  $\dot{\theta}$ -direction in the phase space. This new effect on the phase space is more significant for massive co-orbitals. Indeed, we recall that  $g = \mathcal{O}(\mu)$ , so the more massive the co-orbitals are, the larger the distance between the center of these islands, which increases their impact on the spin dynamics. The islands in  $\pm g/2$  are not symmetric, the island in  $+g/2$  is always bigger than the one in  $-g/2$ , which shrinks when  $\Delta e \approx e_0 w$ . The asymmetry can be seen in the Figure 10: we force  $e$  and  $\varpi$  to oscillate by adopting different initial eccentricities  $e_1 = 0.05$  and  $e_2 = 0.1$  for  $m_1$  and  $m_2$ , respectively. Focusing on the resonances located at  $\eta_j = (3/2, 0, s)$  with  $s \in \{-1/2, 0, 1/2\}$  we can see that the islands located at  $\pm g/2$  are asymmetric. As shown in equation (54), the island located at  $\eta_j = (p, q, -1/2)$  can be of zero-width, while the island located in  $\eta_j = (p, q, +1/2)$  can be of commensurate width with  $\eta_j = (p, q, 0)$ . On the top

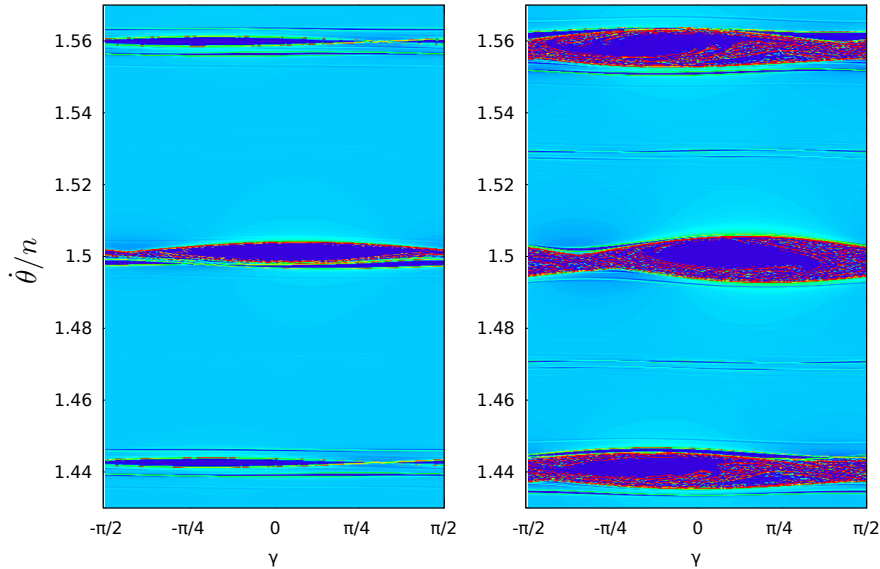


Figure 11: FMA of the phase space  $(\dot{\theta}/n, \gamma_p)$  in the neighbourhood of the 3:2 spin orbit resonance, for two coorbitals on tadpole configuration.  $e_1 = e_2 = 0.1$ ,  $\frac{B-A}{C} = 5 \times 10^{-5}$  and  $\zeta_0 = 45^\circ$  in both cases. On the left  $m_1 = m_2 = 1 \times 10^{-3}m_0$  and  $m_2 = 2 \times 10^{-3}m_0$ ,  $m_1 = 1 \times 10^{-5}$  on the right. See the text for more details.

panel, the islands at  $\pm g/2$  are separated from the main island, while on the two others the three island overlap, ensuring chaos.

In Figure 11 we show another two examples where  $g$  is large enough with respect to the island's width, such that it has an impact on the spin dynamics. Here the initial eccentricities have been taken equal, so their oscillation is moderate and the islands in  $s = 0$  are sensibly larger than the ones in  $s = \pm 1/2$ . In both graphs the main 3:2 island is located in  $\dot{\theta}/n = 1.5$ . The two coorbital spin-orbit resonances located at  $\eta_j = (3/2, \pm 1/2, 0)$  are easily identifiable at  $\dot{\theta}/n = 1.5 \pm \nu/2 = 1.5 \pm 0.06$ . The split of these 3 resonances into 6 additional resonances centred at  $\eta_j = (3/2, q, \pm 1/2)$  can be seen on the left panel, where  $\delta = 1/2$ :  $\dot{\theta}/n = 1.5 \pm g/2 = 1.5 \pm 0.0036$  and  $\dot{\theta}/n = 1.5 \pm \nu/2 \pm g/2$ . On the right panel, the resonance width has been increased by taking a higher value of  $\delta$  (increasing  $(B - A)/C$  would have the same effect). We obtain a phase space that is similar to the one obtained when  $e$  and  $\varpi$  were considered constant (Fig. 5). However, the overlap with the resonances in  $\eta_j = (p, q, \pm 1/2)$  widens considerably the chaotic border of the islands (Morbidelli, 2002, page 222).



## 6 Conclusion

The presence of a co-orbital companion leads to a perturbation of the true longitude at a frequency of order  $\nu = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . This variation splits the eccentric spin-orbit resonances into new families of co-orbital spin-orbit resonances. Depending on the orbit, on the mass of the two orbiting bodies and on the axial asymmetry of the rotating body, those resonances can give rise to additional resonant islands, a chaotic region, or just widen the separatrix of the already existing islands.

Considering a system of two coorbital planets around a star, one can devise some interesting scenarios: for two super-earth with low asymmetry, their  $\sigma$  is very small compared to  $\nu$ , thus their resonant islands are relatively thin and spaced from each other. On the contrary, for two earth-like planets, their  $\sigma$  is large enough to create wide chaotic area. For instance, for two Earth-like co-orbital planets,  $\nu$  and  $\sigma$  are commensurate ( $\sigma/n \approx 7 \times 10^{-3}$  and  $\nu/(2n) \approx 3.5 \times 10^{-3}$ ). Finally, if one of the planets is earth-like and the other is a gaseous giant, the phase space of the spin dynamics of the terrestrial planet consists in large separated resonant islands. More generally, due to the diversity of exoplanets and moons, any configuration is possible.

We have shown that co-orbital bodies with low libration amplitude of the resonant angle  $\zeta$  (tadpole orbits) are likely trapped in a spin-orbit resonance located close to the classic eccentric resonances of the unperturbed problem (Goldreich and Peale, 1966). As the libration amplitude of  $\zeta$  increases, the co-orbital resonant islands become of commensurable width with the eccentric resonances. In the horseshoe domain, the eccentric spin-orbit resonances are of negligible width with respect to some of the co-orbital resonant island under and above them. In this configuration, the vicinity of the eccentric resonance is generally regular, while it can be surrounded by two chaotic areas created by the overlapping of the main co-orbital resonances.

The co-orbital bodies also mutually perturb the eccentricities and the argument of perihelion of each orbit on a long time-scale of order  $\mathcal{O}(\mu)$ . The precession of the perihelion has no effect on the phase-space except a slight global offset in the direction of  $\hat{\theta}$ . However, the frequency  $g$ , which rules the libration of the perihelion and the oscillation of the eccentricity, splits both the eccentric spin-orbit families and the co-orbital spin-orbit families into a yet again new resonant family. Nevertheless, in this case the width of the resonant island depends on the variation of the eccentricity and on the argument of perihelion of the rotating body, while its separation to the eccentric or co-orbital spin-orbit resonance is  $g/(2n) = \mathcal{O}(\mu)$ . Therefore, usually these islands have an insignificant width, or only slightly widen the separatrix of the main resonant islands. However, for systems with low axial asymmetry (low  $\frac{B-A}{C}$ ) and massive co-orbital companions, such as gaseous giants, these resonances can have a significant impact on the spin dynamics.

## References

- Charlier, C. V. L. (1906). Über den Planeten 1906 TG. Astronomische Nachrichten, 171:213.
- Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. Phys. Rep., 52:263–379.
- Colombo, G. (1965). Rotational Period of the Planet Mercury. Nature, 208:575.
- Correia, A. C. M. (2009). Secular Evolution of a Satellite by Tidal Effect: Application to Triton. apjl, 704:L1–L4.
- Correia, A. C. M. and Laskar, J. (2009). Mercury’s capture into the 3/2 spin-orbit resonance including the effect of core-mantle friction. Icarus, 201:1–11.
- Correia, A. C. M. and Robutel, P. (2013). Spin-Orbit Coupling and Chaotic Rotation for Coorbital Bodies in Quasi-circular Orbits. Astro. physical Journal, 779:20.
- Correia, A. C. M. and Rodríguez, A. (2013). On the Equilibrium Figure of Close-in Planets and Satellites. Astro. physical Journal, 767:128.
- Danby, J. M. A. (1964). Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. Astron. Astrophys., 69:165.
- Dermott, S. F. and Murray, C. D. (1981). The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. I - Theory. Icarus, 48:1–11.
- Gascheau, G. (1843). Examen d’une classe d’équations différentielles et application un cas particulier du problème des trois corps. Comptes Rendus, pages 16, 393.
- Giuppone, C. A., Beaugé, C., Michtchenko, T. A., and Ferraz-Mello, S. (2010). Dynamics of two planets in co-orbital motion. MNRAS, 407:390–398.
- Goldreich, P. and Peale, S. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. aj, 71:425.
- Hansen, P. A. (1855). Entwicklung der products einer potenz des radius vectors mit dem sinus oder cosinus eines vielfachen der wahren anomalie in reihen. Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wissensch, IV, 182281.
- Lagrange (1772). Œuvres complètes VI, 272. Gouthier-Villars, Paris (1869).

- Laskar, J. (1993). Frequency analysis of a dynamical system. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56:191–196.
- Leleu, A., Robutel, P., and Correia, A. C. M. (2015). Detectability of quasi-circular co-orbital planets. Application to the radial velocity technique. Astron. Astrophys., 581:A128.
- MacDonald, G. J. F. (1964). Tidal Friction. Reviews of Geophysics and Space Physics, 2:467–541.
- Mikkola, S., Innanen, K., Wiegert, P., Connors, M., and Brassier, R. (2006). Stability limits for the quasi-satellite orbit. mnras, 369:15–24.
- Morais, M. H. M. (1999). A secular theory for Trojan-type motion. Astron. Astrophys., 350:318–326.
- Morais, M. H. M. and Namouni, F. (2013). Asteroids in retrograde resonance with Jupiter and Saturn. MNRAS, 436:L30–L34.
- Morbidelli, A. (2002). Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics . (London: Taylor & Francis).
- Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). Solar system dynamics. (Cambridge University Press).
- Namouni, F. (1999). Secular Interactions of Coorbiting Objects. Icarus, 137:293–314.
- Nauenberg, M. (2002). Stability and Eccentricity for Two Planets in a 1:1 Resonance, and Their Possible Occurrence in Extrasolar Planetary Systems. Astron. J., 124:2332–2338.
- Robutel, P. and Laskar, J. (2001). Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System I. Short Period Dynamics of Massless Particles. 152:4–28.
- Robutel, P., Niederman, L., and Pousse, A. (2015). Rigorous treatment of the averaging process for co-orbital motions in the planetary problem. ArXiv e-prints.
- Robutel, P. and Pousse, A. (2013). On the co-orbital motion of two planets in quasi-circular orbits. Celest. Mech. Dyn. Astron., 117:17–40.
- Robutel, P., Rambaux, N., and El Moutamid, M. (2012). Influence of the coorbital resonance on the rotation of the trojan satellites of saturn. Celest. Mech. Dyn. Astron., 113(1):1–22.
- Wisdom, J., Peale, S. J., and Mignard, F. (1984a). The chaotic rotation of Hyperion. Icarus, 58:137–152.

Wisdom, J., Peale, S. J., and Mignard, F. (1984b). The chaotic rotation of Hyperion. Icarus, 58:137–152.

Wolf, M. (1906). Photographische Aufnahmen von kleinen Planeten. Astronomische Nachrichten, 170:353.

## A Appendix

Table 1: Notations. All orbital elements are given in heliocentric coordinates, thus with respect to  $m_0$ 

variable	definition
$a_j$	semi-major axis of body $j$
$\lambda_j$	mean longitude of body $j$
$e_j$	eccentricity of body $j$
$\varpi_j$	argument of periastron of body $j$
$m_j$	mass of body $j$
$r_j$	distance between $m_0$ and $m_j$
$f_i$	true anomaly of body $j$
$\bar{a}$	mean semi-major axis of the co-orbital motion
$n$	mean mean motion, defined from $\bar{a}$
$\mu$	$= (m_1 + m_2)/(m_0 + m_1 + m_2)$
$\delta$	$= m_2/(m_1 + m_2)$
$\zeta$	$= \lambda_1 - \lambda_2$ semi-fast resonant angle
$\zeta_0$	minimum value of $\zeta$ on a given orbit
$\zeta_s$	value of $\zeta$ at the separatrix between tadpole and horseshoe
$\zeta_L$	value of $\zeta$ at the considered Lagrangian equilibrium
$z$	$= \zeta_0 - \zeta_L$
$\hat{\zeta}$	such that $\hat{\zeta}(\tau) = \zeta(\tau/\nu)$
$\nu$	fundamental frequency for the evolution of $\zeta$
$g_1$ and $g_2$	fundamental frequencies for the evolution of $(\varpi_1, \varpi_2)$
$g$	$= g_1 - g_2$
$\Delta\varpi$	$= \varpi_1 - \varpi_2$ slow resonant angle
$\theta$	rotation angle of $m_1$
$A, B, C$	moment of inertia of $m_1$
$\sigma$	$= n\sqrt{3(B-A)/C}$ asymmetry of the rotating body
$\varsigma$	$= (n - g_2, \nu, g) \in \mathbb{R}_+^3$ frequency vector
$\eta_j$	$= (p, q, s)$ with $2\eta_j \in \mathbb{Z}^3$ identification of a given resonance
$\rho_{\eta_j}$	width of the resonance $\eta_j$
$\gamma_p$	$29 \theta - pnt$
$\epsilon_j^k$	$=  \langle \eta_j - \eta_k, \varsigma \rangle $
$X_p^{-3,2}(e)$	Hansen coefficient defined eq. (31)
$\xi_l$	coefficient of the Fourier expansion of $\hat{\zeta}$
$J_k$	$k^{th}$ Bessel function

Table 2:  $(B-A)/C$  for bodies of the solar system (see Correia and Rodríguez, 2013; Robutel et al., 2012, and references therein). The  $(B-A)/C$  of the co-orbitals orbiting around Saturn are so large that their resonant islands totally overlap (Robutel et al., 2012).

body	$(B-A)/C$	status
Mercury	$8.1 \times 10^{-5}$	planet
Venus	$5.39 \times 10^{-6}$	planet
Earth	$1.57 \times 10^{-5}$	planet
Mars	$5.5 \times 10^{-4}$	planet
Moon	$2.2 \times 10^{-4}$	satellite
Io	$5.6 \times 10^{-3}$	satellite
Europa	$1.3 \times 10^{-3}$	satellite
Ganymede	$3.8 \times 10^{-4}$	satellite
Callisto	$1.0 \times 10^{-4}$	satellite
Rhea	$2.4 \times 10^{-3}$	satellite
Titan	$1.0 \times 10^{-4}$	satellite
Polydeuces	$2.2 \times 10^{-1}$	satellite (tadpole)
Helene	$1.3 \times 10^{-1}$	satellite (tadpole)
Telesto	$3.2 \times 10^{-1}$	satellite (tadpole)
Calypso	$2.7 \times 10^{-1}$	satellite (tadpole)
Janus	$1.0 \times 10^{-1}$	satellite (horseshoe)
Epimetheus	$3.0 \times 10^{-1}$	satellite (horseshoe)

## C.4 Rotation d'un corps circumbinaire

LETTER TO THE EDITOR

# Spin-orbit coupling and chaotic rotation for circumbinary bodies<sup>★</sup>

## Application to the small satellites of the Pluto-Charon system

Alexandre C. M. Correia<sup>1,2</sup>, Adrien Leleu<sup>2</sup>, Nicolas Rambaux<sup>3,2</sup>, and Philippe Robutel<sup>2</sup><sup>1</sup> CIDMA, Departamento de Física, Universidade de Aveiro, Campus de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal<sup>2</sup> ASD, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France<sup>3</sup> Université Pierre et Marie Curie, UPMC - Paris 06

Received ; accepted To be inserted later

**ABSTRACT**

We investigate the resonant rotation of circumbinary bodies in planar quasi-circular orbits. Denoting  $n_b$  and  $n$  the orbital mean motion of the inner binary and of the circumbinary body, respectively, we show that spin-orbit resonances exist at the frequencies  $n \pm kv/2$ , where  $v = n_b - n$ , and  $k$  is an integer. Moreover, when the libration at natural frequency has the same magnitude as  $v$ , the resonances overlap and the rotation becomes chaotic. We apply these results to the small satellites in the Pluto-Charon system, and conclude that their rotations are likely chaotic. However, the rotation can also be stable and not synchronous for small axial asymmetries.

**Key words.** celestial mechanics – planetary systems – planets and satellites: individual: Pluto-Charon

**1. Introduction**

Circumbinary bodies are objects that orbit around a more massive binary system. In the solar system, the small satellites of the Pluto-Charon system are the best example (e.g., Brozović et al. 2015). Planets orbiting two stars, often called circumbinary planets, have also been reported (e.g., Correia et al. 2005; Doyle et al. 2011; Welsh et al. 2012). Most of these bodies are close enough to the central binary to undergo tidal dissipation, which slowly modifies the rotation rate until it becomes close to the mean motion (e.g., MacDonald 1964; Correia et al. 2014).

For an object that moves in an eccentric orbit around a single massive body, the rotation rate can be captured in a half-integer commensurability with the mean motion, usually called a spin-orbit resonance (Colombo 1965; Goldreich & Peale 1966). Moreover, for very eccentric orbits or large axial asymmetries, the rotational libration width of the individual resonances may overlap, and the rotation becomes chaotic (Wisdom et al. 1984; Wisdom 1987). However, for nearly circular orbits, all these equilibria disappear and the only possibility for the spin is synchronous rotation (e.g., Correia & Laskar 2009).

When a third body is added to the classic two-body problem, the mutual gravitational perturbations introduce additional spin-orbit resonances at the perturbing frequency (Goldreich & Peale 1967; Correia & Robutel 2013). In the case of circumbinary bodies there is, in addition, a permanent misalignment of the long inertia axis of the rotating body from the radius vector pointing to each inner body (Fig. 1). The resulting torque on the rotating body's figure induces some rotational libration that may give rise to some unexpected behaviors for the rotation rate (Showalter & Hamilton 2015). In this Letter we investigate all possibilities for the rotation of circumbinary bodies, and apply them to the spin evolution of the small satellites of the Pluto-Charon system.

**2. Spin-orbit coupling**

We consider a planar three-body hierarchical system composed of a central binary with masses  $m_0$  and  $m_1$ , together with an external circumbinary companion with mass  $m$  (Fig. 1), where  $m \ll m_1 \leq m_0$ . For the orbits we use Jacobi canonical coordinates, with  $\mathbf{r}_b$  being the position of  $m_1$  relative to  $m_0$  (inner orbit), and  $\mathbf{r}$  the position of  $m$  relative to the center of mass of  $m_0$  and  $m_1$  (outer orbit). The body with mass  $m$  has principal moments of inertia  $A \leq B \leq C$  and angular velocity given by  $\boldsymbol{\omega}$ . In Appendix A we provide the full equations of motion for the spin. Since tidal dissipation usually damps the obliquity to zero (e.g., Hut 1980; Correia 2009), for simplicity, here we describe the motion for  $\boldsymbol{\omega}$  normal to the orbit. In absence of tides, the equation for the rotation angle,  $\theta$ , is then given by (Eq. (A.5))

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sigma^2}{2} \left[ (1 - \delta) \left( \frac{a}{r_0} \right)^3 \sin 2(\theta - f_0) + \delta \left( \frac{a}{r_1} \right)^3 \sin 2(\theta - f_1) \right], \quad (1)$$

where  $a$  and  $n$  are the semi-major axis and the mean motion of the outer orbit, respectively,  $(r_i, f_i)$  are the radial and the angular coordinates of  $\mathbf{r}_i$ ,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}_b \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (\delta - 1) \mathbf{r}_b, \quad (2)$$

$$\delta = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \text{and} \quad \sigma = n \sqrt{3 \frac{B - A}{C}}. \quad (3)$$

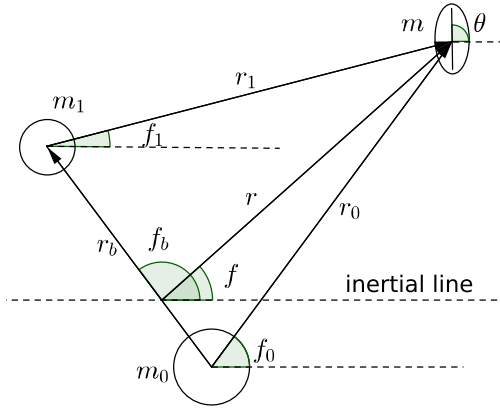
The parameter  $\delta$  is the mass ratio of the inner binary, while  $\sigma$  is approximately the frequency of small-amplitude rotational librations in an unperturbed synchronous resonance.

We can express  $r_0^{-3}$ ,  $\sin f_0$ , and  $\cos f_0$  as

$$r_0^{-3} = \|\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}_b\|^{-3} = r^{-3} \left( 1 + 2\delta \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_b}{\|\mathbf{r}\|^2} + \delta^2 \frac{\|\mathbf{r}_b\|^2}{\|\mathbf{r}\|^2} \right)^{-3/2}, \quad (4)$$

<sup>★</sup> Fig. 4 and Appendices A and B are available in electronic form at <http://www.aanda.org>





**Fig. 1.** Reference angles and coordinates. The system is coplanar and is composed of an inner binary with masses  $m_0$  and  $m_1$ , and an outer body  $m$  that rotates with angular velocity  $\omega$ .

and

$$e^{if_0} = e^{if} \left( 1 + \delta \frac{\|\mathbf{r}_b\|}{\|\mathbf{r}\|} e^{i(f_b - f)} \right) \left( 1 + 2\delta \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_b}{\|\mathbf{r}\|^2} + \delta^2 \frac{\|\mathbf{r}_b\|^2}{\|\mathbf{r}\|^2} \right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Similar expressions can be found for  $r_1^{-3}$ ,  $\sin f_1$ , and  $\cos f_1$ , if we replace  $\delta$  by  $(\delta - 1)$ . Therefore, since  $\|\mathbf{r}_b\| < \|\mathbf{r}\|$ , we can develop equation (1) in power series of  $r_b/r$ . In addition, for the hierarchical problem the orbits are approximately ellipses. Thus,  $r$  and  $r_b$  can also be expanded in terms of Hansen coefficients (e.g., Laskar & Boué 2010). We then rewrite equation (1) as

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{l,p,q} \beta_{l,p,q}(e, e_b, \delta, \alpha) \sin 2(\theta - pM - qM_b), \quad (6)$$

where  $e$  is the eccentricity;  $M$  is the mean anomaly;  $\beta_{l,p,q} \propto \alpha^l$ , with  $\alpha = a_b/a$ ; and  $p, q$  are half-integers. Spin-orbit resonances occur whenever  $\dot{\theta} = pn + qn_b$ . In Appendix B we provide the complete expression for equation (6) to the first order in the eccentricities and to the second order in  $\alpha$ .

### 3. Near circular orbits

For near circular orbits ( $e \approx 0$  and  $e_b \approx 0$ ), we can neglect both eccentricities, thus  $r \approx a$  and  $r_b \approx a_b$ . Retaining terms in  $\alpha^3$  in equation (6) gives

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & -\frac{\sigma^2}{2} \left[ \left( 1 + \frac{5}{4}\rho_2 \right) \sin 2\gamma \right. \\ & + \frac{3}{8}\rho_2 \sin(2\gamma - 2\phi) + \frac{35}{8}\rho_2 \sin(2\gamma + 2\phi) \\ & + \frac{15}{16}\rho_3 \sin(2\gamma - \phi) + \frac{35}{16}\rho_3 \sin(2\gamma + \phi) \\ & \left. + \frac{5}{16}\rho_3 \sin(2\gamma - 3\phi) + \frac{105}{16}\rho_3 \sin(2\gamma + 3\phi) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

where  $\gamma = \theta - M$ ,  $\phi = M_b - M$ ,

$$\rho_2 = \delta(1 - \delta)\alpha^2, \quad \text{and} \quad \rho_3 = \delta(1 - \delta)(1 - 2\delta)\alpha^3. \quad (8)$$

We see that we have several islands of rotational libration,

$$\dot{\gamma} = \dot{\theta} - n = 0, \pm\nu, \pm\nu/2, \pm 3\nu/2, \quad \text{with} \quad \nu = \dot{\phi} = n_b - n. \quad (9)$$

Each term individually behaves like a pendulum where the rotation can be trapped. Therefore, together with the classic synchronous equilibrium at  $\dot{\theta} = n$ , there are additional possibilities for the spin at the super- and sub-synchronous resonances  $\dot{\theta} = n + kv/2$ , with  $k \in \mathbb{Z}$ .

Terms with  $k \neq 0$  depend on  $\sigma^2$ ,  $\delta$ , and  $\alpha^2$ , that is, on the axial asymmetry of the body, on the mass ratio of the central binary, and on the semi-major axis ratio. Thus, for circumbinary bodies far from the inner binary ( $\alpha \ll 1$ ), the amplitude of these higher order terms decreases very quickly to zero. For  $\delta \approx 0$  (i.e.,  $m_1 \ll m_0$ ) we have  $\rho_2 = \rho_3 = 0$ , thus only the synchronous resonance subsists, as in the classic circular two-body problem (e.g., Goldreich & Peale 1966). The effect of the binary mass ratio is maximized for  $\delta = 1/2$  (i.e.,  $m_0 = m_1$ ), but only for the second order resonances (terms in  $\rho_2$ ), since third order resonances also vanish for equal masses ( $\rho_3 = 0$ ). Interestingly, the size of the sub-synchronous resonance with  $k < 0$  is always larger than the symmetrical super-synchronous resonance with  $k > 0$ .

### 3.1. Chaotic motion

When the libration amplitudes of some individual resonant islands overlap, the rotational motion can be chaotic (Chirikov 1979; Morbidelli 2002). This means that the rotation exhibits random variations in short periods of time. This phenomenon was first described for the rotation of Hyperion, which is chaotic because its orbit is eccentric (Wisdom et al. 1984).

In the circular approximation, each individual resonance is placed at  $\dot{\gamma} = kv/2$ , with libration width  $\sigma\sqrt{\beta_k}$ , where  $\beta_k = \sum_l \beta_{l,(1-k)/2,k/2}$ . Overlap between two resonances with  $k_1 < k_2$  then occurs whenever

$$k_1 v/2 + \sigma\sqrt{\beta_{k_1}} \gtrsim k_2 v/2 - \sigma\sqrt{\beta_{k_2}}. \quad (10)$$

The synchronous resonance ( $k = 0$ ) has the largest width, so overlap is more likely for this resonance. The third order resonance with  $k = -1$  is the nearest resonance with larger amplitude, thus chaos sets in for

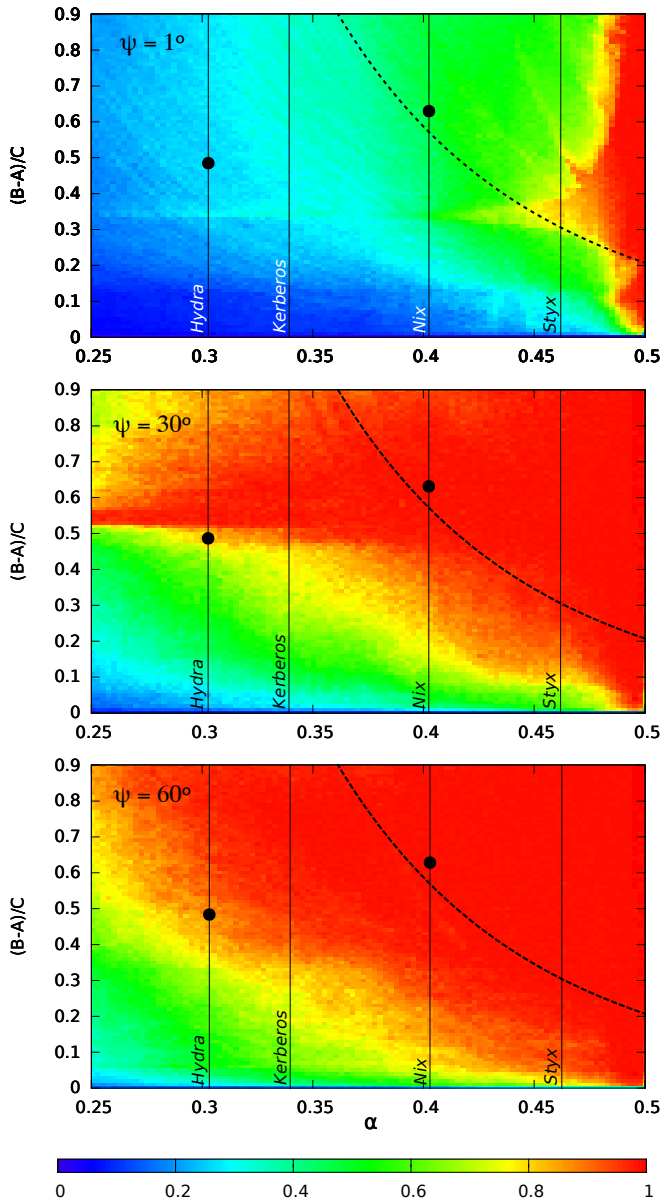
$$\sigma \left( \sqrt{\frac{35}{16}}\rho_3 + \sqrt{1 + \frac{5}{4}\rho_2} \right) \approx \sigma \gtrsim \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2}(n_b - n). \quad (11)$$

Rotation in the chaotic zone is also attitude unstable (Wisdom et al. 1984; Wisdom 1987). A non-zero obliquity introduces additional resonant terms to the rotation (Eq. (7)), increasing the chances of overlapping (e.g., Correia & Laskar 2010). Therefore, in order to correctly account for the chaotic behavior, we need to integrate the full equations of motion (Appendix A).

### 3.2. Global dynamics

The general problem of the spin-orbit coupling for near circular circumbinary bodies can be reduced to the analysis of  $\dot{\gamma}/n$ , which depends on the libration frequency  $\sigma/n$ , the mass ratio  $\delta$ , and the semi-major axis ratio  $\alpha$  (Eq. (7)). However, since  $\delta \in [0, 1/2]$  and it is a well-known parameter for a specific binary system, the global dynamics is approximately controlled by the only two free parameters:  $\alpha$  (or  $n_b/n$ ) and  $\sigma/n$  (or  $(B - A)/C$ ).

Rescaling the time with  $n = 1$ , we can perform a stability analysis of  $\dot{\gamma}$  in the plane  $(\alpha, \sigma)$  to quickly identify the rotational regime for any system of quasi-circular circumbinary bodies that is near the synchronous equilibrium. If isolated, the half-width of the synchronous resonant island in the direction of  $\dot{\gamma}$  is equal to  $\sigma$ . When perturbed, chaos is expected for  $\sigma \sim \nu$  (Eq. (11)). Thus,



**Fig. 2.** Stability analysis of the rotation rate close to the synchronization for  $\delta = 0.1$ ,  $\alpha \in [0.25 : 0.5]$ , and  $(B - A)/C \in [0 : 0.9]$ . We adopt three different initial obliquity values  $\psi = 1^\circ$ ,  $30^\circ$ , and  $60^\circ$ . The color index indicates the proportion of chaotic orbits inside the studied domain: from dark blue for fully regular to red for entirely chaotic. The dashed line (Eq. (11)) roughly delimits the zone where chaotic motion is possible. The dots identify two representative cases that we detail in Figure 3.

for a given  $(\alpha, \sigma)$  pair, we fix the initial value of  $\gamma$  at the libration center of the synchronous resonance, and select 400 equispaced initial values of  $\dot{\gamma} \in [-\nu : \nu]$ . The corresponding solutions are integrated using the equations for the three-body problem together with equations (A.1) and (A.2) for the rotational motion (without tidal dissipation). The dynamical nature (stable/unstable) is deduced from frequency analysis (Laskar 1990, 1993), which gives the fraction of chaotic trajectories.

In Figure 2 we show the general results for  $\delta = 0.1$  using three different initial obliquity values  $\psi = 1^\circ$ ,  $30^\circ$ , and  $60^\circ$ . All the remaining variables are initially set to zero. The color index

indicates the proportion of chaotic orbits inside the studied domain: from dark blue for fully regular to red for entirely chaotic. Depending on the value of  $\alpha$  and  $\sigma$ , the rotation can present different behaviors, ranging from non-synchronous equilibria to chaotic motion. Figure 2 remains almost unchanged for  $\delta > 0.1$  since the global dynamics is not very sensitive to  $\delta$ . The only exception would be for  $\delta \ll 0.1$  since in that case the system would behave like the classic circular two-body problem where the rotation can only be synchronous.

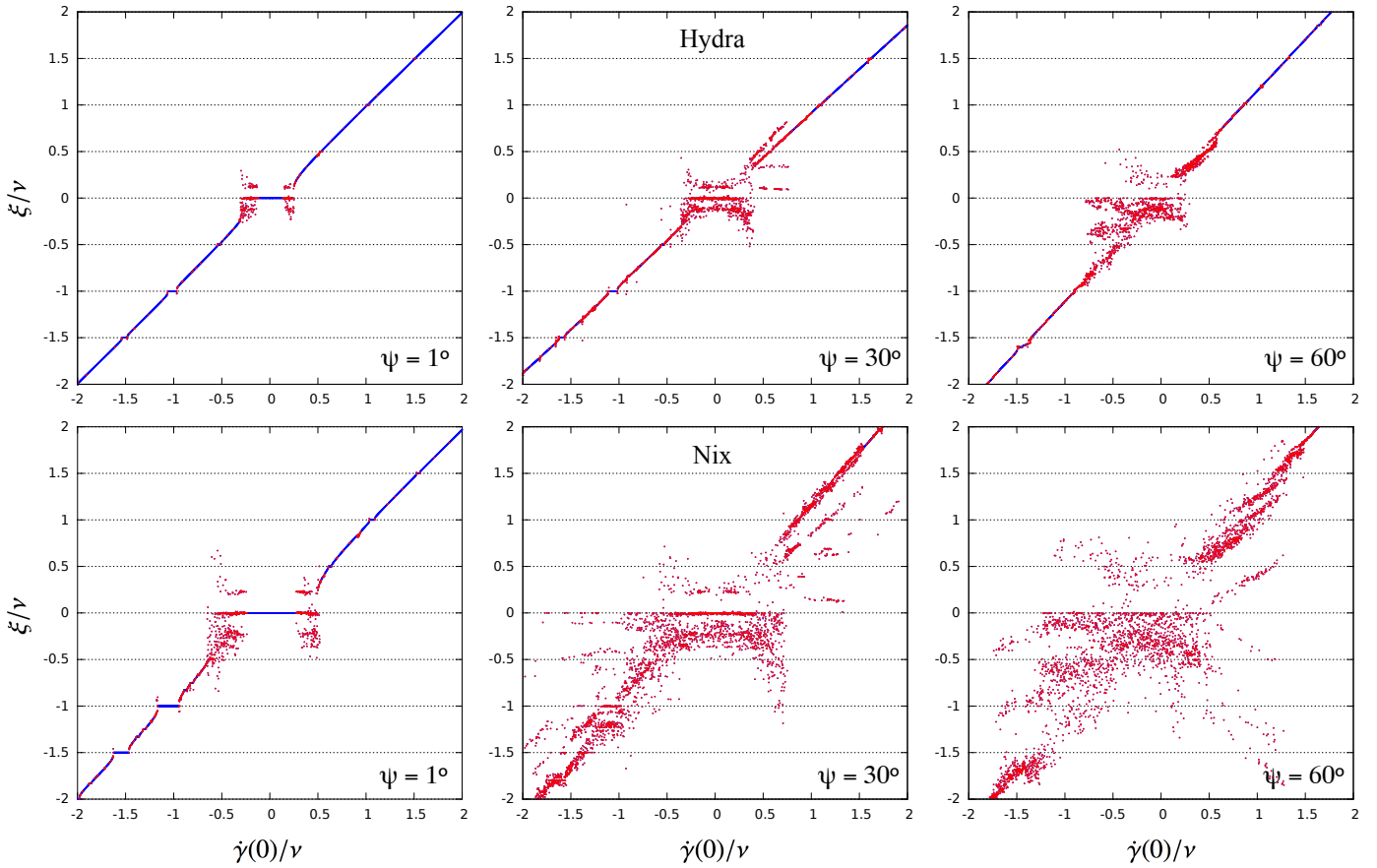
A common way of visualizing and understanding the different regimes is to use frequency map analysis (Laskar 1993). We selected two representative pairs  $(\alpha, \sigma)$  and plotted the corresponding cross-section maps for the three initial obliquities in Figure 3. We are able to identify the stable and the chaotic regions very easily. We observe that stable islands can exist in the middle of chaos, implying a large diversity of possibilities for the final rotation. In the chaotic regions for the rotation, the obliquity is also chaotic and can vary between  $0^\circ$  and  $180^\circ$ . For high obliquities, the size of the stable synchronous island shrinks and the chaotic zone is extended. Therefore, depending on the obliquity, the rotation alternates between more or less chaotic. In times of small obliquity, the rotation can be trapped in a stable resonant island, preventing the obliquity from increasing again, and the spin can become stable (see Fig. 4).

For small values of  $\alpha$  and/or  $\sigma$ , the individual resonances (Eq. (7)), associated with the plateaus in Figure 3, are well separated. Thus, for dissipative systems, the rotation can be captured in individual spin-orbit resonances and stay there. For rotation rates increasing from lower values, the sub-synchronous resonance with  $\dot{\theta} = n - \nu = 2n - n_b$  has the largest amplitude, so this is the most likely spin-orbit resonance to occur. For rotation rates decreasing from higher values, the super-synchronous resonance with  $\dot{\theta} = n + \nu = n_b$  becomes the most likely possibility. This case is very interesting as it corresponds to a synchronous rotation with the inner orbit period. However, since the amplitude of this resonance is small, the rotation can easily escape it and subsequently evolve into the classic synchronous rotation with the outer orbit ( $\dot{\theta} = n$ ).

The amplitude of the resonant terms increases with  $\alpha$  and  $\sigma$ . At some point, the individual libration islands merge and chaotic motion can be expected (see section 3.1). The transition between the two regimes is roughly given by the dashed curved, obtained with expression (11). Near the transition regime, chaotic rotation can be observed around the separatrix of the synchronous resonance, but the motion is still regular nearer the center (Fig. 3, left). Therefore, when the rotation of a body is evolving by tidal effect, the rotation becomes chaotic when approaching the synchronous resonance. However, depending on the strength and on the geometry of the tidal torque, it is still possible to find a pathway to the synchronous rotation. The wandering in the chaotic region may also provide a path into another stable super- or sub-synchronous resonance (see Fig. 4).

For  $\alpha > 0.4$  and  $\sigma \sim 1$ , there is a large overlap between several resonant terms, in particular for the negative ones ( $k < 0$ ). As a consequence, there is a large chaotic zone for the spin (Fig. 3, bottom). Some of the individual resonances may still subsist, including the synchronous one, but they have small stable widths and they can only be reached at periods of small obliquity. The chaotic motion is maximized for  $\sigma \approx 1$ , which corresponds to  $(B - A)/C \approx 0.35$ , because secondary resonances generate strong instabilities inside the synchronous island (Robutel et al. 2012). Finally, for  $\alpha \approx 0.49$  the system reaches the  $3/1$  mean motion resonance, which introduces additional forcing to the rotation, and all trajectories become chaotic.

Alexandre C. M. Correia et al.: Spin-orbit coupling for circumbinary bodies



**Fig. 3.** Cross sections representing the spin dynamics of Hydra (top) and Nix (bottom) at different initial obliquities  $\psi = 1^\circ$ ,  $30^\circ$ , and  $60^\circ$ . The dots show the main frequency of  $\gamma(t)$ , denoted by  $\xi$ , for different initial values of  $\dot{\gamma}(0)$ . It is obtained by numerical integration of the three-body problem together with equations (A.1) and (A.2) for the rotational motion (without dissipation).  $\theta$  is initially set equal to  $f$  so the sections go through the middle of the synchronous resonance ( $\dot{\gamma} = 0$ ). All the remaining variables are initially set to zero. The dots are blue for stable rotation (libration or circulation), and red for chaotic motion. The distinction between stable and unstable trajectories is based on the estimate of the second derivative of  $\xi$  with respect to the initial condition  $\dot{\gamma}(0)$  (see Laskar 1993). The plateaus correspond to the resonance crossings ( $\xi/\nu = k/2$ ). The red dots randomly distributed between the plateaus indicate the overlapping of the associated spin-orbit resonances, which generates chaotic motion.

#### 4. Application to the Pluto-Charon system

In 1978, regular series of observations of Pluto showed that the images were consistently elongated revealing the presence of Charon (Christy & Harrington 1978). The orbital parameters hence determined have shown that the two bodies evolved in an almost circular orbit with a 6.4-day period (e.g., Tholen & Buie 1997). Charon has an important fraction of the total mass (about 11%), and therefore the system is considered a binary planet rather than a planet and a moon. Later, it was found that four tiny satellites move around the barycenter of the Pluto-Charon system (Weaver et al. 2006; Brozović et al. 2015), also in nearly circular and coplanar orbits (see Table 1).

Pluto's brightness also varies with a period of 6.4 days (e.g., Tholen & Tedesco 1994). Since Charon is too dim to account for the amplitude of the variation, this period has been identified as the rotation of Pluto. Therefore, at present, the spin of Pluto is synchronous with the orbit of Charon, a configuration acquired from the action of tidal torques raised on Pluto by Charon (e.g., Farinella et al. 1979; Cheng et al. 2014). Tidal torques raised on Charon and on the remaining satellites by Pluto are even stronger, so all these bodies are presumably also tidally evolved.

**Table 1.** Mean orbital and physical parameters for Pluto's moons (Brozović et al. 2015). The parameter  $m_0$  is the mass of Pluto.

Param.	Charon	Styx	Nix	Kerberos	Hydra
$P$ [day]	6.3872	20.1617	24.8548	32.1679	38.2021
$n_b/n$ . .	1	3.1565	3.8913	5.0363	5.9810
$\alpha$ . . . .	1	0.46203	0.40246	0.33932	0.30278
$e$ . . . . .	0.00005	0.00001	0.00000	0.00000	0.00554
$m/m_0$ . .	0.12176	$0.10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$
$R$ [km]	604	4 – 14	23 – 70	7 – 22	29 – 86

Showalter & Hamilton (2015) have measured the brightness variations of the small satellites. They concluded that Hydra and Nix show no obvious pattern, suggesting that their rotation is chaotic. Assuming that these two satellites are uniform triaxial ellipsoids, they additionally estimate their figure semi-axis ratios, which allows us to compute  $B/C \approx 0.92$  and  $A/C \approx 0.44$  for Hydra, and  $B/C \approx 0.94$  and  $A/C \approx 0.31$  for Nix.

In Figure 2 we already show the global dynamics for the Pluto-Charon system, for which  $\delta = 0.1085 \approx 0.1$  (Brozović et al. 2015). Therefore, we plot vertical lines at the  $\alpha$  values

corresponding to the small satellites in the system (Table 1). Moreover, since we have an estimation for the axial asymmetries of Hydra and Nix, we also show a dot for their  $(B - A)/C$  values in Figure 2. These two satellites are in a different dynamical regime: the rotation of Hydra can present a stable spin-orbit coupling (Fig. 3, top), while the rotation of Nix is most likely chaotic (Fig. 3, bottom), as discussed in section 3.2. The spin dynamics of Kerberos is probably similar to that of Hydra, while the rotation of Styx can be even more chaotic than that of Nix, depending on their  $(B - A)/C$  values.

To test the reliability of the dynamical picture described in the previous section, we now add the effect from tides to our model, so that we can follow the long-term evolution of the spin of these satellites. For simplicity, we adopt a constant time-lag linear model, whose contribution to the spin is given by expression (A.13). In Figure 4 we show some examples for the final evolution of Hydra's spin with tidal dissipation, starting with slightly different initial values of  $\theta$ . We adopt an initial retrograde rotation of 4.4 days ( $\dot{\gamma}/\nu = -2.3$ ), and  $30^\circ$  for the initial obliquity, to force the rotation to cross the large amplitude sub-synchronous resonances. An initial retrograde rotation for such small bodies is as likely as a prograde one (e.g., Dones & Tremaine 1993). For the uncertain parameters we used  $R = 45$  km,  $k_2/Q = 10^{-4}$ , and  $C/(mR^2) = 0.4$ .

In one example (Fig. 4a) the rotation of Hydra is trapped in the spin-orbit resonance with  $\dot{\gamma} = -3\nu/2$ , while in the others the rotation reaches the chaotic zone. However, after some wandering in this zone some simulations are able to find a path into a stable spin-orbit resonance with  $k > 0$  (Fig. 4b) or with  $k < 0$  (Fig. 4c). Interestingly, while for resonances with  $k > 0$  the spin axis stabilizes near zero degrees, for resonances with  $k < 0$ , the spin axis stabilizes with a high obliquity value. The last example (Fig. 4d) remained chaotic for the length of the integration and therefore can represent the observed present state.

Over 10 Myr, most of our simulations remained chaotic, but several captures in stable non-synchronous resonances also occurred. The final scenario depends on the initial conditions, and also on the tidal model. A constant-Q model would prevent any capture in resonance (Goldreich & Peale 1966), while a visco-elastic model would increase the chances of capture (e.g., Makarov 2012; Correia et al. 2014). Strange attractors can also exist in the chaotic zone, which may prevent the spin from stabilizing (e.g., Batygin & Morbidelli 2011). However, the global dynamics described in section 3.2 is very robust and reliable, since it does not depend on dissipative forces (Fig. 2).

## 5. Discussion

This work was motivated by the recent observations on the rotation of Hydra and Nix (Showalter & Hamilton 2015), which appear to be chaotic. Our model confirms that chaotic rotation is a likely scenario for both satellites, but stable spin-orbit coupling could also be possible, in particular for Hydra. This model assumes a hierarchical three-body system with coplanar orbits. However, we also integrated the spins of Hydra and Nix using the ephemerides for the full system provided by Brozović et al. (2015) and SPICE routines (Acton 1996), and we have found no evidence of any substantial differences.

In our study, we conclude that stable spin-orbit coupling is also a plausible scenario for near circular circumbinary bodies with small  $\alpha$  and/or small  $\sigma$  (Fig. 2). Equilibrium rotation occurs for  $\dot{\theta} = n + k\nu/2$ , with  $\nu = n_b - n$  and  $k \in \mathbb{Z}$ . The largest amplitude non-synchronous resonance corresponds to the sub-synchronous resonance at  $n - \nu = 2n - n_b$ . Bodies captured in this resonance

present retrograde rotation if  $n_b/n > 2$ . This condition is verified for the small satellites of the Pluto-Charon system (Table 1), and likely for any circumbinary system, since large orbital instabilities are expected for period ratios below the 2/1 mean motion resonance. Therefore, bodies trapped in a non-synchronous resonance are also likely to present retrograde rotation.

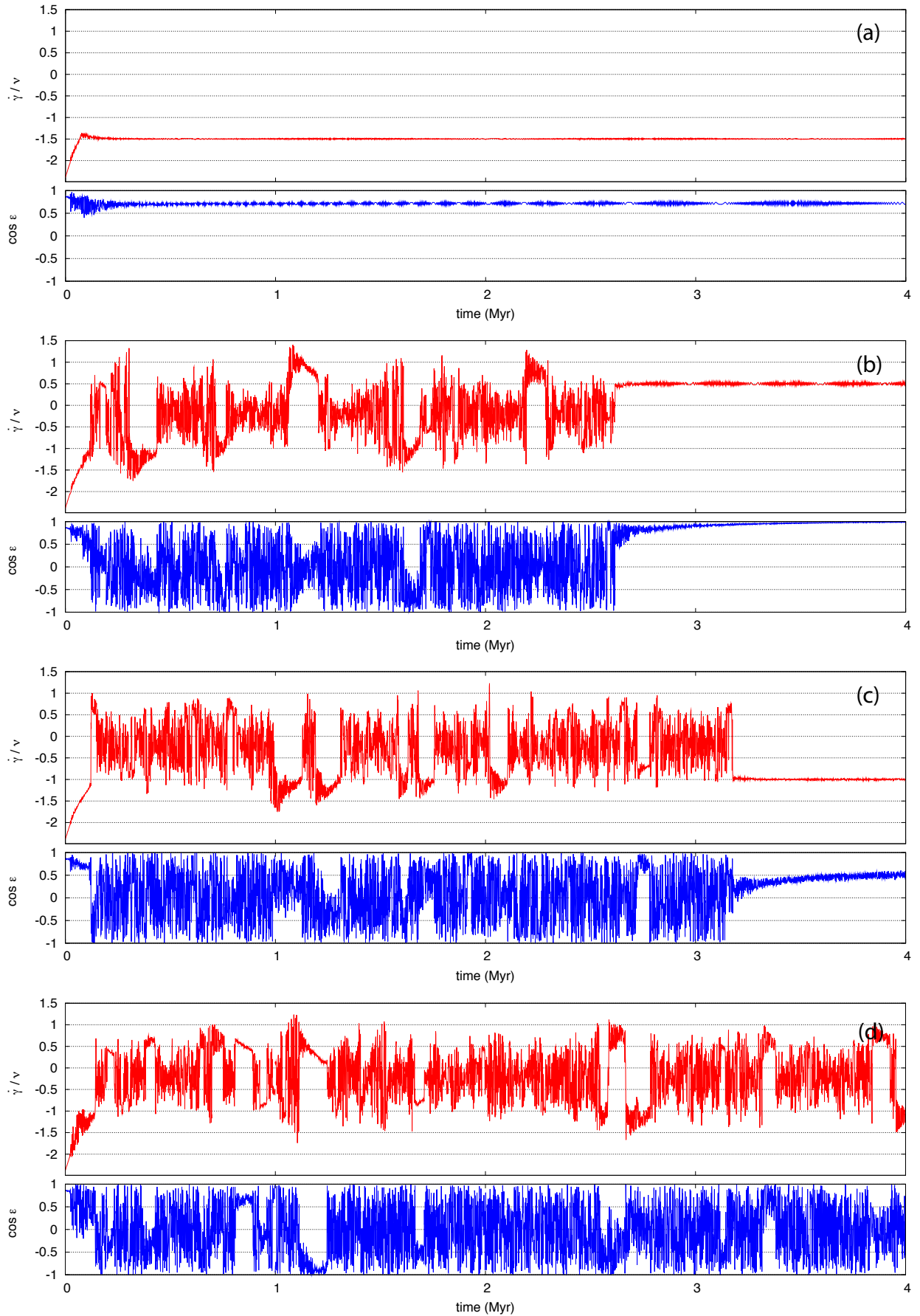
Lately, many planets have been detected around binary stars (e.g., Welsh et al. 2012). So far, all these planets are gaseous giants, for which the axial asymmetry is very low, for instance  $(B - A)/C \sim 10^{-7}$  for Jupiter (Jacobson 2001). Therefore, although many of these planets are close enough to their stars to undergo tidal dissipation, spin-orbit coupling is very unlikely. However, for smaller mass Earth-like circumbinary planets these states are possible since  $(B - A)/C \sim 10^{-5}$  (e.g., Yoder 1995). In particular, non-synchronous rotation is possible, which is an important point to take into account in future habitability studies (e.g., Selsis et al. 2007). Unlike the Pluto-Charon system, circumbinary exoplanets usually present eccentric orbits. As a consequence, the number of spin-orbit resonances drastically increases (Eq. (B.4)). Overlap of the different contributions is then easier, so chaotic rotation can also be more likely in this case.

*Acknowledgements.* We thank Doug Hamilton and Mark Showalter for helpful suggestions. We acknowledge support from the "conseil scientifique" of the Observatory of Paris and CIDMA strategic project UID/MAT/04106/2013.

## References

- Acton, C. H. 1996, *Planet. Space Sci.*, 44, 65  
 Batygin, K. & Morbidelli, A. 2011, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, 219  
 Brozović, M., Showalter, M. R., Jacobson, R. A., & Buie, M. W. 2015, *Icarus*, 246, 317  
 Cheng, W. H., Lee, M. H., & Peale, S. J. 2014, *Icarus*, 233, 242  
 Chirikov, B. V. 1979, *Physics Reports*, 52, 263  
 Christy, J. W. & Harrington, R. S. 1978, *AJ*, 83, 1005  
 Colombo, G. 1965, *Nature*, 208, 575  
 Correia, A. C. M. 2009, *ApJ*, 704, L1  
 Correia, A. C. M., Boué, G., Laskar, J., & Rodríguez, A. 2014, *A&A*, 571, A50  
 Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2009, *Icarus*, 201, 1  
 Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2010, *Icarus*, 205, 338  
 Correia, A. C. M. & Robutel, P. 2013, *ApJ*, 779, 20  
 Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., et al. 2005, *A&A*, 440, 751  
 Dones, L. & Tremaine, S. 1993, *Icarus*, 103, 67  
 Doyle, L. R., Carter, J. A., Fabrycky, D. C., et al. 2011, *Science*, 333, 1602  
 Farinella, P., Milani, A., Nobili, A. M., & Valsecchi, G. B. 1979, *Moon and Planets*, 20, 415  
 Goldreich, P. & Peale, S. 1966, *AJ*, 71, 425  
 Goldreich, P. & Peale, S. 1967, *AJ*, 72, 662  
 Goldstein, H. 1950, *Classical mechanics* (Addison-Wesley, Reading)  
 Hut, P. 1980, *A&A*, 92, 167  
 Jacobson, R. A. 2001, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 33, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #33, 1039  
 Laskar, J. 1990, *Icarus*, 88, 266  
 Laskar, J. 1993, *Physica D Nonlinear Phenomena*, 67, 257  
 Laskar, J. & Boué, G. 2010, *A&A*, 522, A60  
 MacDonald, G. J. F. 1964, *Revs. Geophys.*, 2, 467  
 Makarov, V. V. 2012, *ApJ*, 752, 73  
 Mignard, F. 1979, *Moon and Planets*, 20, 301  
 Morbidelli, A. 2002, *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics* (London: Taylor & Francis)  
 Robutel, P., Rambaux, N., & El Moutamid, M. 2012, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 113, 1  
 Selsis, F., Kasting, J., Levrard, B., et al. 2007, *A&A*, 476, 1373  
 Showalter, M. R. & Hamilton, D. P. 2015, *Nature*, 522, 45  
 Tholen, D. J. & Buie, M. W. 1997, *Icarus*, 125, 245  
 Tholen, D. J. & Tedesco, E. F. 1994, *Icarus*, 108, 200  
 Weaver, H. A., Stern, S. A., Mutchler, M. J., et al. 2006, *Nature*, 439, 943  
 Welsh, W. F., Orosz, J. A., Carter, J. A., et al. 2012, *Nature*, 481, 475  
 Wisdom, J. 1987, *AJ*, 94, 1350  
 Wisdom, J., Peale, S. J., & Mignard, F. 1984, *Icarus*, 58, 137  
 Yoder, C. F. 1995, in *Global Earth Physics: A Handbook of Physical Constants* (American Geophysical Union, Washington D.C.), 1–31

Alexandre C. M. Correia et al.: Spin-orbit coupling for circumbinary bodies



**Fig. 4.** Possible evolutions for the spin of Hydra. We show the rotation  $\dot{\gamma}/\nu$  (in red) and the cosine of the obliquity (in blue). We numerically integrated the equations of the three-body problem together with equations (A.1), (A.2), and (A.13) for the rotational motion. We adopt an initial retrograde rotation of 4.4 days with different initial values of  $\theta$ , and an initial obliquity of  $30^\circ$ .

## Appendix A: Equations of motion

We let  $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}})$  be a non-inertial frame attached to the body's principal inertial axes, with inertia tensor  $\mathbf{I} = \text{diag}(A, B, C)$ . In this frame,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_a, \omega_b, \omega_c)$  and the angular momentum  $\mathbf{L} = (A\omega_a, B\omega_b, C\omega_c)$ . The equations of motion are given by

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1, \quad (\text{A.1})$$

where  $\mathbf{T}_i$  is the gravitational torque on the body's figure. For second order interactions, we have (e.g., Goldstein 1950)

$$\mathbf{T}_i = \frac{3Gm_i}{r_i^5} \left[ (B - A) y_i \mathbf{r}_i \times \hat{\mathbf{b}} + (C - A) z_i \mathbf{r}_i \times \hat{\mathbf{c}} \right], \quad (\text{A.2})$$

where  $\mathbf{r}_i$  has coordinates  $(x_i, y_i, z_i)$  in the body's frame. Thus, projecting equation (A.1) over each axis  $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}})$  gives

$$\dot{\omega}_a = \frac{C - B}{A} \left( \frac{3Gm_0}{r_0^5} y_0 z_0 + \frac{3Gm_1}{r_1^5} y_1 z_1 - \omega_b \omega_c \right), \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{\omega}_b = \frac{A - C}{B} \left( \frac{3Gm_0}{r_0^5} z_0 x_0 + \frac{3Gm_1}{r_1^5} z_1 x_1 - \omega_c \omega_a \right), \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\omega}_c = \frac{B - A}{C} \left( \frac{3Gm_0}{r_0^5} x_0 y_0 + \frac{3Gm_1}{r_1^5} x_1 y_1 - \omega_a \omega_b \right). \quad (\text{A.5})$$

To solve these equations, a set of generalized coordinates to specify the orientation of the satellite must be chosen. We adopt the modified Euler angles  $(\theta, \varphi, \psi)$  as defined in Wisdom et al. (1984). Starting the  $\hat{\mathbf{c}}$  axis coincident with the normal to the orbital plane, and  $\hat{\mathbf{a}}$  along an inertial direction, we first rotate the body about the  $\hat{\mathbf{c}}$  axis by an angle  $\theta$ , then we rotate about  $\hat{\mathbf{a}}$  by an angle  $\varphi$ , and finally we rotate about the  $\hat{\mathbf{b}}$  by an angle  $\psi$ . Then,

$$x_i/r_i = \cos(\theta - f_i) \cos \psi - \sin(\theta - f_i) \sin \psi \sin \varphi, \quad (\text{A.6})$$

$$y_i/r_i = -\sin(\theta - f_i) \cos \varphi, \quad (\text{A.7})$$

$$z_i/r_i = \cos(\theta - f_i) \sin \psi + \sin(\theta - f_i) \cos \psi \sin \varphi, \quad (\text{A.8})$$

and

$$\dot{\theta} = (\omega_c \cos \psi - \omega_a \sin \psi) / \cos \varphi, \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\varphi} = \omega_c \sin \psi + \omega_a \cos \psi, \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\psi} = \omega_b - (\omega_c \cos \psi - \omega_a \sin \psi) \tan \varphi. \quad (\text{A.11})$$

The full equations of motion for the spin are thus described by the set of variables  $(\omega_a, \omega_b, \omega_c, \theta, \varphi, \psi)$ , whose derivatives are given by equations (A.3)–(A.5) together with (A.9)–(A.11). The angle  $\varepsilon$  between the  $\hat{\mathbf{c}}$  axis and the normal to the orbit, usually called obliquity, can be obtained from

$$\cos \varepsilon = \cos \varphi \cos \psi. \quad (\text{A.12})$$

For the dissipative tidal torque, we adopt a constant time-lag linear model, whose contribution to the spin (Eq. (A.1)) is given by (e.g., Mignard 1979)

$$\mathbf{T}_d = 3k_2 GR^5 \Delta t \sum_{i=0,1} \frac{m_i^2}{r_i^8} \left[ (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i - r_i^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \right], \quad (\text{A.13})$$

where  $k_2$  is the Love number,  $\Delta t$  is the time lag,  $Q^{-1} \equiv n\Delta t$  is the dissipation factor, and  $R$  is the radius of the rotating body. Also note that  $\dot{\mathbf{r}}_i$  is the derivative of  $\mathbf{r}_i$  in an inertial reference frame.

## Appendix B: Series with eccentricity

Equation (1) for the rotational motion can be expanded in power series of the eccentricities and semi-major axis ratio  $\alpha$  as given by the general expression (6)

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sigma^2}{2} \Gamma, \quad (\text{B.1})$$

with

$$\Gamma = \sum_{l,p,q} \beta_{l,p,q}(e, e_b, \delta, \alpha) \sin 2(\theta - pM - qM_b). \quad (\text{B.2})$$

When we truncate the series to the first order in the eccentricities and to the second order in  $\alpha$ , we get

$$\begin{aligned} \Gamma = & \left(1 + \frac{5}{4}\rho_2\right) \sin(2\theta - 2M) \\ & + \frac{3}{8}\rho_2 \sin(2\theta - 2M_b) \\ & + \frac{35}{8}\rho_2 \sin(2\theta - 4M + 2M_b) \\ & + \left(\frac{7}{2} + \frac{45}{8}\rho_2\right) e \sin(2\theta - 3M) \\ & - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\rho_2\right) e \sin(2\theta - M) \\ & - \frac{105}{16}\rho_2 e \sin(2\theta - 3M + 2M_b) \\ & + \frac{455}{16}\rho_2 e \sin(2\theta - 5M + 2M_b) \\ & + \frac{15}{16}\rho_2 e \sin(2\theta + M - 2M_b) \\ & + \frac{15}{16}\rho_2 e \sin(2\theta - M - 2M_b) \\ & + \frac{3}{8}\rho_2 e_b \sin(2\theta - 3M_b) \\ & - \frac{9}{8}\rho_2 e_b \sin(2\theta - M_b) \\ & - \frac{105}{8}\rho_2 e_b \sin(2\theta - 4M + M_b) \\ & + \frac{35}{8}\rho_2 e_b \sin(2\theta - 4M + 3M_b) \\ & - \frac{5}{4}\rho_2 e_b \sin(2\theta - 2M - M_b) \\ & - \frac{5}{4}\rho_2 e_b \sin(2\theta - 2M + M_b). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$