

# *Shape from shading*

## Éclairages, réflexions et perspectives

### MÉMOIRE

présenté et soutenu publiquement le 19 décembre 2007

pour l'obtention de

**l'Habilitation à Diriger des Recherches  
de l'Université Paul Sabatier – Toulouse III**

**spécialité Informatique**

par

Jean-Denis DUROU

#### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Laure BLANC-FÉRAUD	Directrice de recherche au CNRS, Sophia-Antipolis
	Jean-Michel MOREL	Professeur à l'ENS, Cachan
	Jean PONCE	Professeur à l'ENS, Paris
<i>Examineurs :</i>	Patrice DALLE	Professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse
	Maurizio FALCONE	Professeur à l'Université La Sapienza, Rome
	Henri MAÎTRE	Professeur à l'ENST, Paris
	José-Philippe PÉREZ	Professeur émérite à l'Université Paul Sabatier, Toulouse



# Remerciements

Henri Maître m'a incité depuis plusieurs années à rédiger mon habilitation à diriger des recherches et à en faire, plus qu'un simple document de synthèse, un travail de recherche à part entière. Je ne saurais trop le remercier de son soutien et de sa confiance.

La relecture de ce document par les trois rapporteurs, attentive et sans concession, a été ma meilleure récompense. Je remercie respectueusement Laure Blanc-Féraud, Jean-Michel Morel et Jean Ponce pour leurs nombreuses remarques et pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail. Leurs encouragements me stimulent pour transformer ce manuscrit en une monographie sur le *shape from shading*.

Les conseils de José-Philippe Pérez, qui est un spécialiste reconnu dans le domaine de l'optique, m'ont permis de corriger un certain nombre d'imprécisions dans le premier chapitre. Je le remercie chaleureusement pour sa bienveillance.

Quant à Maurizio Falcone, il est devenu un collaborateur précieux, en même temps qu'un ami, dans le cadre de plusieurs projets communs. Je souhaite que l'avenir nous donne de nouvelles occasions de travailler ensemble.

Enfin, Patrice Dalle, qui est mon directeur d'équipe à l'IRIT, a bien voulu se charger de présider le jury. Je l'en remercie sincèrement.



## Résumé

Le problème inverse de la photographie, qui consiste à retrouver le relief d'une scène à partir d'une photographie, s'appelle la « reconstruction 3D ». De multiples techniques ont été imaginées pour résoudre ce problème. En particulier, les techniques photométriques utilisent la relation entre l'information de niveau de gris et le relief de la scène. Dans le cadre de la vision par ordinateur, l'utilisation de cette relation pour reconstruire le relief de la scène s'appelle le *shape from shading*. Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches effectue la synthèse de quinze années de recherche portant sur les différents aspects du *shape from shading*.

**Mots-clés :** *shape from shading*, reconstruction 3D, vision par ordinateur.

## Abstract

The problem of reversing the imaging process, which aims at computing the shape of the imaged scene from one photograph, is referred to as “3D-reconstruction”. Many techniques have been designed to solve this problem. Amongst them, the photometric techniques use the relation between the greylevel information and the scene shape. Within the framework of computer vision, the use of this relation in order to compute the scene shape is called “shape-from-shading”. This manuscript, namely an “habilitation à diriger des recherches”, synthesizes my works for about fifteen years on the different aspects of shape-from-shading.

**Keywords:** shape-from-shading, 3D-reconstruction, computer vision.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation du problème</b>	<b>3</b>
1.1 Photométrie	3
1.1.1 Flux lumineux, intensité, éclairage et exitance	4
1.1.2 Luminance	5
1.1.3 Conservation de la luminance	6
1.1.4 BRDF et albédo	7
1.1.5 Matériaux lambertiens	9
1.2 Optique photographique	10
1.2.1 Chambre noire	10
1.2.2 Objectif photographique	11
1.2.3 Appareil photographique	13
1.2.4 Équation photométrique de l'appareil photographique	15
1.2.5 Équation du niveau de gris	16
1.3 Réflexions multiples	18
1.3.1 Équation de l'exitance	18
1.3.2 Prise en compte des réflexions multiples en vision par ordinateur	20
1.3.3 Équations approchées du niveau de gris	21
1.3.4 Équations des surfaces lambertiennes	22
1.3.5 Éclairage rasant et ombres	23
1.4 Modèles du SFS	26
1.4.1 Équations locales du SFS	26
1.4.2 Paramétrage de la normale	27
1.4.3 Projection orthographique	29
1.4.4 Carte de réflectance	31
1.4.5 Équation eikonale et pseudo-équation eikonale	32
1.4.6 Projection perspective	33
1.4.7 Équation eikonale perspective	35
1.5 Conclusion	36
<b>2 Analyse du problème</b>	<b>37</b>
2.1 Analyse des modèles non différentiels du SFS	37
2.1.1 Termineurs et points singuliers	38
2.1.2 Stéréophotométrie	40
2.1.3 Surface localement sphérique	42
2.1.4 Surface localement cylindrique	43
2.1.5 Analogie avec le <i>shape from texture</i>	45

2.2	Analyse des modèles différentiels du SFS . . . . .	46
2.2.1	Ambiguïtés fondamentales du SFS . . . . .	46
2.2.2	Ambiguïtés concave/convexe et concave/concave . . . . .	47
2.2.3	Équation eikonale de l'optique . . . . .	49
2.2.4	Méthode des caractéristiques . . . . .	51
2.2.5	Ambiguïté en l'absence de point singulier . . . . .	53
2.2.6	Ambiguïté en présence d'un point singulier . . . . .	55
2.3	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Résolution du problème</b>	<b>61</b>
3.1	Résolution des modèles non différentiels du SFS . . . . .	62
3.1.1	Comparaison des modèles vis-à-vis de la résolution du SFS . . . . .	62
3.1.2	Résolution exacte d'un modèle non différentiel . . . . .	62
3.1.3	Intégrabilité d'un champ de normales . . . . .	64
3.1.4	Équation d'Euler-Lagrange . . . . .	67
3.1.5	Intégration d'un champ de normales sans condition au bord . . . . .	68
3.1.6	Régularisation des modèles non différentiels du SFS . . . . .	70
3.2	Résolution des modèles différentiels du SFS . . . . .	72
3.2.1	Conditions au bord . . . . .	73
3.2.2	Utilisation d'un modèle de surface . . . . .	74
3.2.3	Régularisation des modèles différentiels du SFS . . . . .	75
3.2.4	Solutions de viscosité du SFS . . . . .	76
3.3	Conclusion . . . . .	78
	<b>Perspectives</b>	<b>79</b>
	<b>A Curriculum vitae</b>	<b>81</b>
	<b>B Activités de recherche</b>	<b>83</b>
B.1	Thème de recherche principal . . . . .	83
B.1.1	Contributions scientifiques sur le SFS . . . . .	83
B.1.2	Validation de ces contributions . . . . .	84
B.2	Autres thèmes de recherche . . . . .	85
B.3	Activités d'encadrement . . . . .	85
B.3.1	Encadrement de thèses . . . . .	85
B.3.2	Encadrement de stages de recherche . . . . .	85
B.4	Animation scientifique au sein de l'IRIT . . . . .	86
B.4.1	Animation scientifique de l'équipe TCI . . . . .	86
B.4.2	Diffusion de l'activité scientifique de l'équipe TCI . . . . .	86
B.4.3	Rapprochement avec d'autres équipes de recherche . . . . .	86
B.4.4	Animation du séminaire de l'IRIT . . . . .	87
B.5	Animation scientifique en dehors de l'IRIT . . . . .	87
B.5.1	Organisation de conférences . . . . .	87
B.5.2	Relecture d'articles . . . . .	87
B.5.3	Participation à des jurys de thèse . . . . .	88
B.5.4	Participation à des projets de recherche . . . . .	88

<b>C</b>	<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>89</b>
C.1	Rédaction d'actes de conférences . . . . .	89
C.2	Articles en revues . . . . .	89
C.2.1	Revue internationale . . . . .	89
C.2.2	Revue nationale . . . . .	89
C.3	Articles en conférences ou <i>workshops</i> avec comité de sélection et actes publiés . . . . .	90
C.3.1	Conférences et <i>workshops</i> internationaux . . . . .	90
C.3.2	Conférences et <i>workshops</i> nationaux . . . . .	91
C.4	Séminaires et exposés . . . . .	91
C.4.1	Séminaires . . . . .	91
C.4.2	Exposés de vulgarisation scientifique . . . . .	92
<b>D</b>	<b>Autres activités</b>	<b>93</b>
D.1	Enseignement . . . . .	93
D.1.1	Période antérieure à la réforme 3-5-8 . . . . .	93
D.1.2	Période postérieure à la réforme 3-5-8 . . . . .	94
D.1.3	Création de sites Internet . . . . .	94
D.2	Tâches d'intérêt collectif . . . . .	94
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>



# Introduction

Deux démarches radicalement opposées permettent de mener à bien un travail de recherche. La démarche *divergente* consiste à se servir de la bonne maîtrise d'un outil et à investiguer les problèmes auxquels il pourrait apporter des réponses. La démarche *convergente* consiste à aborder un problème à l'aide de tous les outils qui pourraient aider à sa résolution. Il semble que nous soyons inéluctablement poussés vers la démarche divergente, à cause du nombre de plus en plus considérable de connaissances scientifiques et technologiques que la démarche convergente oblige à maîtriser. Certes, la démarche convergente continue d'exister, mais sous une forme *collective* : des chercheurs appartenant à des communautés différentes s'attaquent à un problème commun, sous différents angles, le temps d'un projet.

La vision par ordinateur regroupe un ensemble apparemment inépuisable de problèmes qui s'inspirent, d'une part, des facultés très impressionnantes de la vision humaine, et d'autre part, des performances non moins impressionnantes des ordinateurs. Le *shape from shading*, qui sera noté SFS dans la suite de ce document, est un problème classique de vision par ordinateur mettant en jeu des concepts relevant non seulement de la vision humaine et de l'informatique (ou, du moins, du calcul numérique), mais également des mathématiques (géométrie, analyse, probabilités) et de l'optique. Si les premiers chercheurs à s'être intéressés au SFS furent des opticiens [Van Diggelen 51, Hapke 63, Rindfleisch 66], l'arrivée des ordinateurs a marqué le réel point de départ du SFS, sous l'impulsion de Horn [Horn 70, Horn 89a] et de ses collaborateurs du MIT<sup>1</sup>. Un autre tournant a été pris lorsque les mathématiciens ont investi la vision par ordinateur, et en particulier le SFS, à la suite des premiers articles de Lions et de ses étudiants [Rouy 88, Lions 93]. Quant aux recherches menées en vision humaine, elles ont démarré au sein de la communauté des informaticiens [Koenderink 80, Todd 83] puis s'en sont progressivement détachées.

Depuis une vingtaine d'années, la plupart de mes recherches ont consisté à arpenter le SFS sous ses différents angles, à l'exception de celui de la vision humaine. Mes contributions scientifiques se trouvant ainsi réparties dans un triangle ayant pour sommets l'optique, les mathématiques et l'informatique, c'est tout naturellement que j'ai structuré mon document d'habilitation à diriger des recherches en trois chapitres. Le chapitre 1 relève de l'optique. Il y est question de la *modélisation* du SFS. Le chapitre 2, qui relève des mathématiques, fait état de plusieurs contributions relatives à l'*analyse* du problème. Les aspects liés à la *résolution* du SFS sont regroupés dans le chapitre 3.

Si, dans un mémoire de thèse, la tendance à l'exhaustivité du compte-rendu des travaux effectués est bien compréhensible, cela n'est pas demandé dans un mémoire d'habilitation à diriger des recherches. C'est pourquoi je me suis autorisé à passer sous silence plusieurs pans de mes recherches, dont une description plus exhaustive peut être trouvée en annexe. Je me contente donc de décrire mes activités liées au SFS, mais il ne m'a pas non plus semblé nécessaire de compiler dans ce mémoire l'intégralité des travaux effectués, puisque les publications valident déjà les contributions les plus importantes. Étant donné que la plupart de mes articles sont consacrés à l'analyse, et surtout à la résolution du SFS, plutôt qu'à sa modélisation, je tente ici de rétablir l'équilibre. C'est la raison pour laquelle le

---

1. C'est d'ailleurs à Horn qu'est dû le néologisme *shape from shading*.

chapitre 1 est à peu près aussi long que les deux autres réunis. Par ailleurs, les critères d'évaluation des articles nous poussent à adopter un style de rédaction compact, où la matière « superflue » inhérente à la recherche (digressions, remarques, analogies, etc.) est sacrifiée au profit de la matière « utile ». C'est ce qui explique la deuxième partie du titre de ce document : « Éclairages, réflexions et perspectives ».

Jusqu'à présent, j'ai sans aucun doute mené mes recherches en suivant une démarche convergente. Cette démarche procure la satisfaction de comprendre un problème dans sa totalité, mais elle est plus exigeante et, probablement aussi, moins productive que la démarche divergente. Si l'habilitation à diriger des recherches doit marquer un tournant dans la carrière d'un chercheur, alors je devrai peut-être réfléchir à ce dilemme. Il en sera à nouveau question à la fin de ce document, lorsque je développerai mon projet de recherche.

# Chapitre 1

## Modélisation du problème

J'ai justifié dans l'introduction le découpage de ce document en trois parties, mais cela n'est certainement pas représentatif de la répartition des articles entre les trois aspects du SFS : modélisation, analyse du problème et résolution. La modélisation fait figure de parent pauvre. Qui plus est, parmi les rares articles traitant de cet aspect du problème, certains ne lui sont que partiellement consacrés [Nayar 91, Okatani 97, Stewart 97, Prados 06c]. Sans doute un article totalement consacré à la modélisation semblerait-il trop austère, mais la « tyrannie du résultat » a en quelque sorte tari les contributions en matière de modélisation. Elle a même eu un effet pervers, sur lequel je reviendrai : la « carte de réflectance », outil de *résolution* introduit par Horn [Horn 77], a été reprise dans un très grand nombre d'articles comme s'il s'agissait d'un concept nécessaire à la *modélisation* du SFS.

À ma connaissance, en dehors de l'article de Horn et Sjöberg [Horn 79], seuls les articles de Forsyth et Zisserman [Forsyth 90, Forsyth 91] ont été *entièrement* dédiés à la modélisation du SFS. Entendons-nous bien : un assez grand nombre d'articles étudient les propriétés photométriques des matériaux, mais ces recherches ne sont pas plus liées au SFS que, par exemple, à la synthèse d'images. Le présent chapitre tente donc de rendre à la modélisation du SFS sa juste place. En particulier, un cheminement détaillé montre que les nombreuses hypothèses permettant d'établir, *in fine*, la célèbre équation eikonale interviennent à des stades très différents de l'élaboration du modèle. Si la résolution des équations du SFS continue de susciter un nombre important de recherches et d'entretenir ainsi sa réputation de problème difficile, il ne faut justement pas oublier qu'une des difficultés du SFS réside dans l'art de faire les « bonnes » hypothèses.

Ce chapitre est divisé en quatre parties. La première introduit un certain nombre de définitions photométriques. La deuxième est un exposé synthétique d'optique photographique. La troisième détaille un aspect apparemment anodin mais, pourtant, fondamental du SFS qui est le phénomène des réflexions multiples. Enfin, la quatrième partie établit les modèles du SFS les plus souvent rencontrés.

### 1.1 Photométrie

Les grandeurs photométriques sont nombreuses et parfois redondantes. Comme pour toute discipline relevant de la métrologie, elles ont tardé à être normalisées. Les désignations de certaines de ces grandeurs sont les initiales de leurs noms français, comme  $L$  pour « luminance » (*radiance* en anglais) ou  $E$  pour « éclairement » (*irradiance* en anglais). De fait, la norme française et la norme anglo-saxonne ont été longtemps concurrentes. Il y a trente ans seulement, sous l'impulsion de Nicodemus, un groupe de chercheurs du NBS (*National Bureau of Standards*) a introduit la notion de BRDF et a proposé une nomenclature cohérente, sur la base d'une analyse rigoureuse des nomenclatures existantes. La présentation ci-dessous, qui se veut avant tout pédagogique, ne m'a pas semblé superflue, dans la

mesure où l'article de référence de Nicodemus *et al.* [Nicodemus 77] est particulièrement foisonnant.

### 1.1.1 Flux lumineux, intensité, éclairement et exitance

Une onde lumineuse est une onde électromagnétique dont la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  se situe dans le domaine du visible. Les définitions générales relatives aux ondes électromagnétiques s'appliquent donc aux ondes lumineuses, comme la notion de **flux lumineux**  $\Phi$ , qui est similaire à celle de flux électromagnétique. Comme il s'agit d'une grandeur relative à la sensibilité de l'œil humain, on doit utiliser une autre unité que l'unité de flux électromagnétique, puisqu'une même onde peut être caractérisée, en un même point de l'espace, par deux valeurs numériques différentes. Au lieu du watt, l'unité de flux lumineux est le lumen ( $lm$ ) : par exemple, 1 watt hors du domaine du visible correspond à 0 lumen. La définition du lumen utilise la courbe moyenne de sensibilité de l'œil humain en vision diurne, qui a son maximum à  $\lambda_{\max} = 555 \text{ nm}$  et qui se décale vers le bleu en vision nocturne.

On caractérise une onde lumineuse, en chaque point  $P$  de l'espace, par un vecteur  $\vec{S}(P)$  dont la direction est la direction de propagation de la lumière, le sens l'inverse du sens de propagation de la lumière (cf. figure 1.1) et la norme la **densité de flux lumineux** en  $P$ , qui est égale au flux lumineux par unité de surface orthogonale à la direction de propagation<sup>1</sup>. L'unité de densité de flux lumineux est le lumen par mètre au carré, ou lux ( $lx$ ).

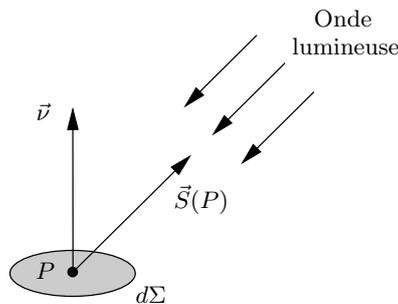


FIG. 1.1 – Si  $d\Sigma$  est un élément de surface d'une scène opaque, alors on privilégie la normale sortante.

Parmi l'infinité d'ondes lumineuses possibles, les plus remarquables (mais peu réalistes) sont les ondes planes uniformes, qui sont caractérisées par un seul et même vecteur en tout point de l'espace. Le flux lumineux incident reçu par une surface élémentaire  $d\Sigma$ , de vecteur normal unitaire  $\vec{v}$ , éclairée par une onde lumineuse plane uniforme  $\vec{S}_0$ , vaut :

$$d\Phi_{i,0} = d\Sigma \vec{v} \cdot \vec{S}_0. \quad (1.1)$$

En un point  $P$  de la surface d'une scène *opaque*, il est usuel de privilégier la normale sortante (cf. figure 1.1). Le vecteur  $\vec{S}(P)$  est orienté dans le sens inverse du sens de propagation de la lumière afin de simplifier l'expression (1.1) de  $d\Phi_{i,0}$ .

Il existe un autre type d'ondes lumineuses de forme remarquable. Ce sont les ondes sphériques, qui sont émises par des sources lumineuses suffisamment petites pour qu'on puisse parler de sources « ponctuelles ». On sait que, dans un milieu transparent et homogène, les rayons lumineux sont des droites. Si, de plus, le milieu traversé est non absorbant, alors le flux lumineux émis est le même tout le long d'un cône ayant pour sommet la source ponctuelle. On peut donc définir l'**intensité**  $I$  d'une source lumineuse ponctuelle comme le flux lumineux par unité d'angle solide. Si l'onde émise n'est pas

1. Plus généralement, l'éclairage en un point  $P$  peut être constitué de plusieurs ondes lumineuses.

isotrope, alors cette grandeur dépend de la direction  $\vec{u}_e$  de l'axe du cône (cf. figure 1.2). En notant  $d\Phi_e$  le flux lumineux émis limité par le cône d'angle solide élémentaire  $d\Omega_e$  autour de  $\vec{u}_e$ , on a :

$$I(\vec{u}_e) = \frac{d\Phi_e}{d\Omega_e}. \quad (1.2)$$

L'unité d'intensité est le lumen par stéradian, ou candela ( $cd$ ). Notons que, dans un milieu absorbant, il y aurait atténuation, c'est-à-dire que l'intensité lumineuse décroîtrait avec la distance à la source.

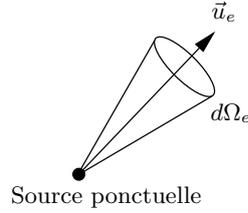


FIG. 1.2 – Le flux lumineux émis est le même tout le long du cône, dans un milieu non absorbant.

L'éclairement et l'existance supposent l'existence d'un écran, c'est-à-dire d'une surface matérielle éclairée. On définit l'**éclairement**  $E$  comme le flux lumineux incident reçu par unité de surface (d'écran), soit :

$$E = \frac{d\Phi_i}{d\Sigma}. \quad (1.3)$$

Si l'écran est éclairé par une onde lumineuse plane uniforme  $\vec{S}_0$ , alors on tire de (1.1) et (1.3) :

$$E_0 = \vec{\nu} \cdot \vec{S}_0. \quad (1.4)$$

On définit l'**existance**  $M$  comme le flux lumineux émis par unité de surface (d'écran), soit :

$$M = \frac{d\Phi_e}{d\Sigma}. \quad (1.5)$$

L'éclairement et l'existance ont la même unité que la densité de flux lumineux, c'est-à-dire le lux.

### 1.1.2 Luminance

Une source lumineuse non ponctuelle peut être caractérisée par sa **luminance**  $L$ , qui est l'intensité par unité de surface apparente (de source lumineuse). Soit  $d\Sigma$  un élément de surface et  $\vec{\nu}$  sa normale unitaire sortante (cf. figure 1.3). Si  $d\sigma_e$  désigne la surface apparente de l'élément de surface  $d\Sigma$  vu dans la direction  $\vec{u}_e$ , alors la luminance dans la direction  $\vec{u}_e$  s'écrit :

$$L(\vec{u}_e) = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega_e d\sigma_e}. \quad (1.6)$$

Or  $d\sigma_e = d\Sigma \vec{\nu} \cdot \vec{u}_e = d\Sigma \cos \theta_e$  (cf. figure 1.3), donc :

$$L(\vec{u}_e) = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega_e d\Sigma \cos \theta_e}. \quad (1.7)$$

Par conséquent, l'existance élémentaire correspondant à  $d^2\Phi_e$  vaut :

$$dM = L(\vec{u}_e) d\Omega_e \cos \theta_e. \quad (1.8)$$

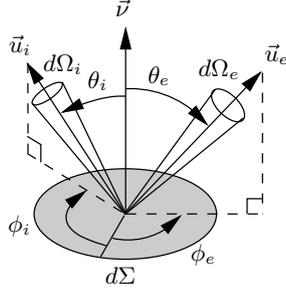


FIG. 1.3 – Définition des angles  $\theta_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\theta_e$  et  $\phi_e$ .

L'unité de luminance est la candela par mètre au carré ( $cd.m^{-2}$ ).

Par ailleurs, on définit la **luminance incidente**  $\bar{L}$  comme le flux lumineux incident par unité de surface apparente (d'écran) et par unité d'angle solide autour de  $\vec{u}_i$  (cf. figure 1.3). Par analogie avec (1.7) :

$$d^2\Phi_i = \bar{L}(\vec{u}_i) d\Omega_i d\Sigma \cos \theta_i. \quad (1.9)$$

L'éclairement élémentaire correspondant à  $d^2\Phi_i$  vaut donc :

$$dE = \bar{L}(\vec{u}_i) d\Omega_i \cos \theta_i. \quad (1.10)$$

Une onde plane uniforme  $\vec{S}_0$  est caractérisée par une luminance incidente  $\bar{L}_0$ . Repérons  $\vec{u}_i$  par deux angles  $\theta_i$  et  $\phi_i$  (cf. figure 1.3), et  $\vec{S}_0$  par les valeurs  $\theta_{i,0}$  et  $\phi_{i,0}$  de ces angles. L'éclairement vaut, d'après (1.4) :

$$E_0 = S_0 \cos \theta_{i,0}. \quad (1.11)$$

Par ailleurs, en intégrant l'expression (1.10) de  $dE$ , et sachant que  $d\Omega_i = \sin \theta_i d\theta_i d\phi_i$  :

$$E_0 = \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} \int_{\phi_i=0}^{2\pi} \bar{L}_0(\vec{u}_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (1.12)$$

Les expressions (1.11) et (1.12) de  $E_0$  coïncident si :

$$\bar{L}_0(\vec{u}_i) = \frac{S_0}{\sin \theta_{i,0}} \delta_{\theta_{i,0}}(\theta_i) \delta_{\phi_{i,0}}(\phi_i), \quad (1.13)$$

où  $\delta_{\theta_{i,0}}(\theta_i)$  désigne l'impulsion de Dirac en  $\theta_i = \theta_{i,0}$  et  $\delta_{\phi_{i,0}}(\phi_i)$  l'impulsion de Dirac en  $\phi_i = \phi_{i,0}$ .

### 1.1.3 Conservation de la luminance

Soit  $d\Sigma_1$  un élément de surface autour du point  $P_1$ , de normale unitaire sortante  $\vec{v}_1$ , et  $d\Sigma_2$  un élément de surface autour du point  $P_2$ , de normale unitaire sortante  $\vec{v}_2$ , situés de telle sorte que les points  $P_1$  et  $P_2$  puissent s'éclairer mutuellement (cf. figure 1.4). L'angle solide  $d\Omega_i$  sous lequel l'élément de surface  $d\Sigma_2$  est vu depuis  $P_1$  vaut :

$$d\Omega_i = \frac{d\Sigma_2 \cos \theta_2}{P_1 P_2^2}. \quad (1.14)$$

Soit  $d^2\Phi_i$  le flux lumineux émis par  $d\Sigma_2$  et reçu par  $d\Sigma_1$ . D'après la définition (1.9) de  $\bar{L}(\vec{u}_i)$  et l'expression (1.14) de  $d\Omega_i$ , ce flux vaut<sup>2</sup> :

$$d^2\Phi_i = \bar{L}_{P_1}(\overrightarrow{P_1 P_2}) \frac{d\Sigma_2 \cos \theta_2 d\Sigma_1 \cos \theta_1}{P_1 P_2^2}. \quad (1.15)$$

2. Il devient bien nécessaire d'indicer les luminances, puisque deux points de la scène sont pris en compte.

La fraction du membre droit de l'égalité (1.15), qui présente une forte symétrie entre  $d\Sigma_1$  et  $d\Sigma_2$ , est appelée « l'étendue » du faisceau défini par  $d\Sigma_1$  et  $d\Sigma_2$ . Par ailleurs, l'angle solide  $d\Omega_e$  sous lequel l'élément de surface  $d\Sigma_1$  est vu depuis  $P_2$  vaut :

$$d\Omega_e = \frac{d\Sigma_1 \cos \theta_1}{P_1 P_2^2}. \quad (1.16)$$

Soit  $d^2\Phi_e$  le flux lumineux émis par  $d\Sigma_2$  et éclairant  $d\Sigma_1$ . D'après l'expression (1.7) de  $L(\vec{u}_e)$  et l'expression (1.16) de  $d\Omega_e$ , ce flux vaut :

$$d^2\Phi_e = L_{P_2}(\overrightarrow{P_2 P_1}) \frac{d\Sigma_1 \cos \theta_1 d\Sigma_2 \cos \theta_2}{P_1 P_2^2}. \quad (1.17)$$

L'étendue du faisceau apparaît à nouveau dans l'égalité (1.17). Comme les flux lumineux  $d^2\Phi_i$  et  $d^2\Phi_e$  sont égaux si le milieu est non absorbant (cf. figure 1.4), on déduit de (1.15) et (1.17) :

$$\bar{L}_{P_1}(\overrightarrow{P_1 P_2}) = L_{P_2}(\overrightarrow{P_2 P_1}). \quad (1.18)$$

Cette relation est une expression particulière de la loi de **conservation de la luminance** dans le cas où le milieu traversé est homogène et non absorbant.

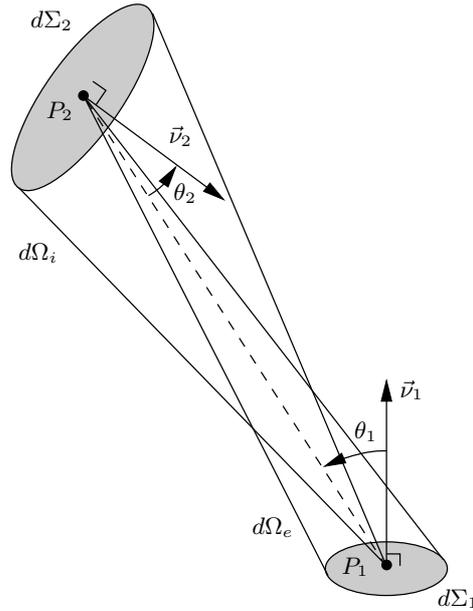


FIG. 1.4 – Éclairage mutuel de  $d\Sigma_1$  et  $d\Sigma_2$ .

#### 1.1.4 BRDF et albédo

Pour les matériaux opaques, la description la plus fine de la réémission de la lumière (mélange de réflexion et de diffusion), est donnée par la **fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle**  $f$  (en anglais, *Bidirectional Reflectance-Distribution Function*, ou **BRDF**).

Pour un flux lumineux incident  $d^2\Phi_i$  dans l'angle solide  $d\Omega_i$  autour de la direction  $\vec{u}_i$ , l'élément de surface  $d\Sigma$  est caractérisé par une luminance  $dL(\vec{u}_e)$  qui est proportionnelle à l'éclairement  $dE$ . Le

rapport de  $dL(\vec{u}_e)$  à  $dE$  ne dépend donc que des directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_e$ , c'est-à-dire des quatre angles  $\theta_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\theta_e$  et  $\phi_e$  de la figure 1.3. Ce rapport n'est autre que la BRDF  $f$  du matériau :

$$f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) = \frac{dL(\vec{u}_e)}{dE}. \quad (1.19)$$

La BRDF est un concept très commode, qui permet par exemple d'exprimer la luminance sous forme intégrale, en utilisant (1.10) et (1.19) :

$$L(\vec{u}_e) = \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} \int_{\phi_i=0}^{2\pi} f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) \bar{L}(\vec{u}_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (1.20)$$

L'unité de BRDF est l'inverse du stéradian ( $sr^{-1}$ ). La plupart des matériaux étant « isotropes », la dépendance de leur BRDF  $f$  en  $\phi_i$  et en  $\phi_e$  est une dépendance en  $\phi_e - \phi_i$ .

En réalité, la BRDF peut varier avec la longueur d'onde  $\lambda$ . Un matériau peut, par exemple, réémettre la lumière rouge et ne pas réémettre les autres couleurs (auquel cas on dit de ce matériau qu'il est rouge<sup>3</sup>). C'est la raison pour laquelle il existe une description encore plus fine des matériaux, qui utilise la notion de « BRDF spectrale ». Or, la grande majorité des articles sur le SFS s'intéressent aux photographies en noir et blanc, c'est-à-dire qu'il est implicitement supposé que la BRDF est indépendante de la longueur d'onde  $\lambda$ . Néanmoins, un matériau a généralement tendance à réfléchir la lumière (au sens de la première loi de Descartes sur la réflexion) sans en changer la couleur, alors qu'il diffuse cette même lumière en lui imprimant la couleur des pigments que contient sa surface [Nayar 97]. Il peut donc être opportun d'appliquer le SFS à des photographies en couleurs, puisque l'information dans les différentes longueurs d'onde n'est pas toujours redondante vis-à-vis du SFS [Tian 97].

Enfin, la BRDF n'est pas suffisante pour décrire le comportement des matériaux transparents mais il n'existe, à ma connaissance, aucun article traitant du SFS pour de tels matériaux.

De la connaissance de la BRDF d'un matériau, on peut déduire son **albédo**  $\rho$  (qu'on appelle également sa « réflectance »), défini comme le rapport du flux lumineux réémis (dans toutes les directions) au flux lumineux incident dans une direction donnée  $\vec{u}_i$ . L'albédo ne dépend donc que de  $\theta_i$  et  $\phi_i$  :

$$\rho(\theta_i, \phi_i) = \frac{d^2\Phi_e}{d^2\Phi_i}. \quad (1.21)$$

D'une part, on tire de (1.6) :

$$d^2\Phi_e = \int_{\vec{u}_e \in H_+} dL(\vec{u}_e) d\Omega_e d\Sigma \cos \theta_e, \quad (1.22)$$

où  $H_+$  désigne l'hémisphère de rayon unité, extérieure à la surface au point courant. Sachant que  $d\Omega_e = \sin \theta_e d\theta_e d\phi_e$ , on déduit de (1.19) et (1.22) :

$$d^2\Phi_e = d\Sigma dE \int_{\theta_e=0}^{\pi/2} \int_{\phi_e=0}^{2\pi} f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) \sin \theta_e \cos \theta_e d\theta_e d\phi_e. \quad (1.23)$$

D'autre part, on tire de (1.3) :

$$dE = \frac{d^2\Phi_i}{d\Sigma}. \quad (1.24)$$

De (1.21), (1.23) et (1.24), on déduit donc :

$$\rho(\theta_i, \phi_i) = \int_{\theta_e=0}^{\pi/2} \int_{\phi_e=0}^{2\pi} f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) \sin \theta_e \cos \theta_e d\theta_e d\phi_e. \quad (1.25)$$

Cette grandeur sans unité est toujours comprise entre 0 et 1.

<sup>3</sup>. Je ne me réfère ici qu'au spectre de la lumière réémise, tout en sachant que la couleur est également affaire de perception.

### 1.1.5 Matériaux lambertiens

Un cas particulier intéressant est celui des **matériaux lambertiens** (ou « parfaitement diffusants »). Pour ces matériaux, la luminance  $dL$  est indépendante de la direction d'émission  $\vec{u}_e$ , c'est-à-dire de  $\theta_e$  et  $\phi_e$ . Comme, par ailleurs, l'éclairement  $dE$  est toujours indépendant de ces deux angles, il en va de même pour la BRDF, notée  $f_{\text{lamb}}$ . Le membre droit de (1.25) peut donc être intégré explicitement, dans ce cas :

$$\rho_{\text{lamb}}(\theta_i, \phi_i) = f_{\text{lamb}}(\theta_i, \phi_i) \int_{\theta_e=0}^{\pi/2} \sin \theta_e \cos \theta_e d\theta_e \int_{\phi_e=0}^{2\pi} d\phi_e. \quad (1.26)$$

Ces deux intégrales valant, respectivement,  $1/2$  et  $2\pi$ , on obtient :

$$\rho_{\text{lamb}}(\theta_i, \phi_i) = \pi f_{\text{lamb}}(\theta_i, \phi_i). \quad (1.27)$$

Comme cela est sous-entendu dans la grande majorité des articles sur le SFS, nous supposons que  $\rho$  est indépendant des angles  $\theta_i$  et  $\phi_i$ . Sous cette hypothèse, la luminance  $L_{\text{lamb}}$  d'un matériau lambertien, qui ne dépend pas de la direction d'émission  $\vec{u}_e$ , a en outre une expression particulièrement simple. En effet, on tire de (1.20) et (1.27) :

$$L_{\text{lamb}} = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} \int_{\phi_i=0}^{2\pi} \bar{L}(\vec{u}_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (1.28)$$

La définition (1.10) de  $\bar{L}(\vec{u}_i)$  montre que l'intégrale du membre droit de (1.28) n'est autre que l'éclairement  $E$ , donc :

$$L_{\text{lamb}} = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} E. \quad (1.29)$$

Si l'albédo (d'un matériau quelconque) est indépendant des angles  $\theta_i$  et  $\phi_i$ , comme nous le supposons, alors nous tirons facilement de l'équation (1.21), par intégration :

$$\rho = \frac{M}{E}. \quad (1.30)$$

Les équations (1.29) et (1.30) permettent donc d'établir la relation suivante entre exitance et luminance, pour un matériau lambertien :

$$M_{\text{lamb}} = \pi L_{\text{lamb}}. \quad (1.31)$$

Exprimons la luminance  $L_{\text{lamb},0}$  d'un matériau lambertien éclairé par une onde plane uniforme  $\vec{S}_0$ , en repérant  $\vec{S}_0$  par les angles  $\theta_{i,0}$  et  $\phi_{i,0}$  dans le repère local de la figure 1.3. Il vient, de (1.4) et (1.29) :

$$L_{\text{lamb},0} = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} S_0 \cos \theta_{i,0}. \quad (1.32)$$

C'est sur ce genre de relation qu'est fondé le SFS, technique qui lie une grandeur photométrique (la luminance) à une caractéristique géométrique de la surface (la normale). Nous allons voir, dans le paragraphe 1.2, que cette grandeur photométrique se mesure directement sur une photographie.

Pour un matériau lambertien éclairé par une onde plane uniforme, l'affirmation selon laquelle « la luminance est proportionnelle au cosinus de l'angle d'incidence »  $\theta_{i,0}$  (cf. par exemple [Horn 89a], page 8) n'est valide que si l'albédo est indépendant de la direction  $\vec{u}_i$ . Or, si l'albédo est bien indépendant de  $\phi_i$  pour un matériau lambertien *isotrope*, sa dépendance en  $\theta_i$  est bien moins évidente [Nicodemus 77]. Ce dernier point suffit d'ailleurs à discréditer l'assertion selon laquelle, en vertu du « principe de réciprocité de Helmholtz » (cf. [Helmholtz 89], tome 1, chapitre 16, page 231), la BRDF devrait être invariante à l'inversion des directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_e$  [Koenderink 83], puisque cela interdirait *de facto* que  $f$  puisse dépendre de  $\vec{u}_i$  mais pas de  $\vec{u}_e$ .

## 1.2 Optique photographique

Une photographie est jugée bonne si sa géométrie et ses couleurs sont « fidèles à la réalité ». Cela signifie que l'observation de la photographie d'une scène doit produire le même effet que l'observation de la scène. Si tel est le cas, alors la photographie de la photographie d'une scène doit être identique à la photographie de la scène. En termes mathématiques, on dit d'une telle transformation qu'elle est « idempotente ». La photographie est-elle idempotente ?

Nous allons voir que la luminance d'une scène dans la direction d'observation est très facile à déduire d'une photographie de cette scène. Elle est même, à peu de chose près, proportionnelle à son niveau de gris. La relation entre niveau de gris et luminance est bien antérieure aux premiers travaux sur le SFS et n'a, en soi, rien de spécifique au SFS, puisqu'il s'agit de l'équation de base de la photométrie photographique. Bien qu'elle soit citée comme préalable dans presque tous les articles sur le SFS, il est néanmoins assez rare qu'elle y soit démontrée et, dans le cas contraire, cela n'est pas toujours fait avec la rigueur nécessaire. Or, de cette équation découlent toutes les autres équations du SFS, comme nous le verrons dans les paragraphes 1.3 et 1.4. La présentation ci-après a pour ambition de combler cette lacune. Elle s'inspire de divers manuels d'optique [Boutry 46, Pérez 96, Meyzonnette 99, Born 99].

### 1.2.1 Chambre noire

La **chambre noire** est un procédé très ancien pour créer des images (Aristote la décrit déjà). Rappelons-en le principe. Comme les rayons émis par une source ponctuelle sont des droites dans un milieu homogène<sup>4</sup>, ils semblent voués à ne pas se croiser. Un point objet  $P_1$  n'a effectivement pas d'image si les rayons lumineux qu'il émet ne sont pas déviés, sauf en perçant une boîte opaque (la « chambre noire ») d'un petit trou appelé le « trou d'épingle » (cf. figure 1.5). Si ce trou n'est pas petit au point de provoquer un phénomène de diffraction visible, alors les rayons lumineux émis par  $P_1$  qui franchissent le trou d'épingle viennent se projeter en ligne droite sur le verre dépoli situé à l'arrière de la chambre noire, et forment ainsi une « image »  $P'_1$ . En réalité, cette « image » est une petite tache dont la taille dépend, pour un point  $P_1$  fixé, de la taille du trou d'épingle et de la distance parcourue par les rayons lumineux à l'intérieur de la chambre noire. Si l'on souhaite obtenir d'une scène une image nette mais pas trop petite, on doit donc veiller à ce que le trou d'épingle soit petit, ce qui se fait bien sûr au détriment de la clarté de l'image. En outre, si le trou est trop petit, l'image risque d'être altérée par la diffraction. Quoi qu'il en soit, la relation géométrique entre  $P_1$  et  $P'_1$  est une projection centrale, de centre le trou d'épingle, sur le plan du verre dépoli. C'est cette relation particulièrement simple qui est appelée le « modèle sténopé ». Remarquons que la position et l'orientation du verre dépoli sont absolument quelconques. On pourrait même imaginer que le verre dépoli ne soit pas plan.

Soit  $d\Sigma$  un élément de surface situé autour d'un point objet  $P$ , de normale unitaire  $\vec{\nu}$  et de luminance  $L(\vec{u}_c)$  dans la direction  $\vec{u}_c$  de la droite  $(P,C)$ , où  $C$  désigne le centre du trou d'épingle (cf. figure 1.6). Notons  $\alpha$  l'angle  $(\vec{u}_z, \vec{u}_c)$ , où  $\vec{u}_z$  désigne le vecteur unitaire orthogonal à la face avant de la chambre noire, et  $\theta_c$  l'angle  $(\vec{\nu}, \vec{u}_c)$ . Supposons que le trou d'épingle soit suffisamment petit pour que l'ensemble des rayons lumineux émis par  $d\Sigma$  qui rentrent dans la chambre noire soient recueillis par un élément de surface  $d\Sigma'$  du verre dépoli tel que  $d\Sigma$  et  $d\Sigma'$  définissent le même cône de sommet  $C$  (cf. figure 1.6). Si le verre dépoli est parallèle à la face avant de la chambre noire, alors les deux expressions possibles de l'angle solide de ce cône fournissent l'égalité suivante :

$$\frac{d\Sigma \cos \theta_c}{PC^2} = \frac{d\Sigma' \cos \alpha}{P'C^2}. \quad (1.33)$$

---

4. Ceci n'est vrai que dans le cadre de l'optique géométrique, qui est une approximation de l'optique ondulatoire.

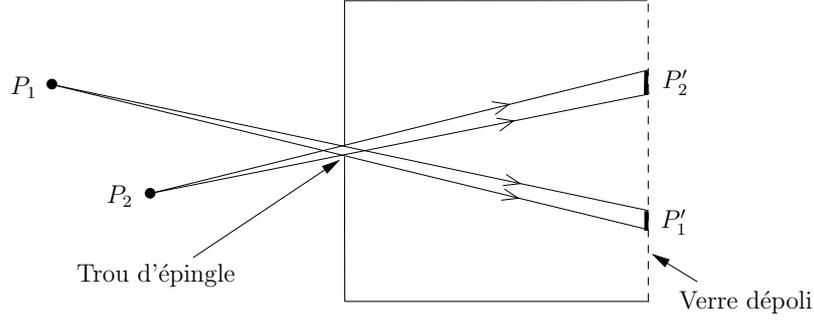


FIG. 1.5 – Principe de la chambre noire.

En notant  $l$  la longueur de la chambre noire, on a :

$$P'C = \frac{l}{\cos \alpha}. \quad (1.34)$$

Par ailleurs, le flux lumineux  $d^2\Phi_i$  reçu par  $d\Sigma'$  est égal au flux lumineux émis par  $d\Sigma$  dans le cône élémentaire de sommet  $P$  s'appuyant sur le bord du trou d'épingle, puisque le milieu traversé est très faiblement absorbant. Notons  $d\Omega_c$  l'angle solide de ce cône. D'après (1.7) :

$$d^2\Phi_i = d\Omega_c d\Sigma \cos \theta_c L(\vec{u}_c). \quad (1.35)$$

Si l'on suppose que le trou d'épingle est un disque de diamètre  $D$ , alors :

$$d\Omega_c = \frac{\pi D^2 \cos \alpha}{4 PC^2}. \quad (1.36)$$

De (1.33), (1.34), (1.35) et (1.36), on tire :

$$d^2\Phi_i = d\Sigma' \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{l}\right)^2 \cos^4 \alpha L(\vec{u}_c). \quad (1.37)$$

L'éclairement de  $d\Sigma'$  vaut donc :

$$E = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{l}\right)^2 \cos^4 \alpha L(\vec{u}_c). \quad (1.38)$$

Cette équation bien antérieure au SFS est souvent appelée la « loi en  $\cos^4 \alpha$  ». Je préconise plutôt de l'appeler **équation photométrique de la chambre noire**. Elle traduit le fait que l'éclairement est quasiment proportionnel à la luminance de la scène dans la direction d'observation. L'écart à la proportionnalité provient du facteur  $\cos^4 \alpha$ , qui a pour effet d'assombrir les points images éloignés de l'axe de révolution du trou d'épingle.

### 1.2.2 Objectif photographique

L'autre moyen de former des images consiste à *dévier* les rayons lumineux, soit par réflexion sur des miroirs, soit par réfraction à travers des matériaux transparents comme le verre. D'ailleurs, à la Renaissance, certains peintres plaçaient déjà une lentille (petit morceau de verre ayant la forme de la légumineuse) à l'emplacement du trou d'épingle, afin d'agrandir les images sans perdre en netteté. À l'aide d'un système optique constitué de lentilles, il est effectivement possible de faire en sorte que,

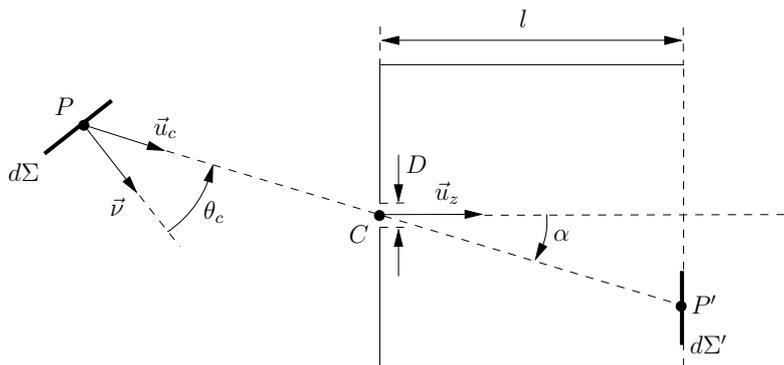


FIG. 1.6 – Les surfaces  $d\Sigma$  et  $d\Sigma'$  définissent le même cône de sommet  $C$ .

pour un point objet  $P_1$ , les rayons lumineux se croisent en un autre point  $P'_1$  que l'on appelle son image. Grâce au « principe de réciprocité » dont il a été question dans le paragraphe 1.1.5, un point objet placé en  $P'_1$  aurait son image en  $P_1$ . Les points  $P_1$  et  $P'_1$  sont dits « conjugués » l'un de l'autre. On dit qu'il y a « stigmatisme » entre  $P_1$  et  $P'_1$ .

Un **objectif photographique** est un assemblage de lentilles présentant une symétrie de révolution par rapport à un axe appelé « axe optique », capable d'assurer le stigmatisme pour un grand nombre de points objets, pourvu que les deux « conditions de Gauss » soient vérifiées : le point objet  $P_1$  doit se situer au voisinage de l'axe optique ; parmi les rayons lumineux émis par  $P_1$ , seuls ceux qui forment un angle faible avec l'axe optique doivent être autorisés à traverser l'objectif.

La principale différence d'un objectif avec une chambre noire est la « localisation » des images : comme avec la chambre noire, il existe un point  $C$ , appelé « centre optique »<sup>5</sup>, tel que l'image  $P'_1$  d'un point  $P_1$  se trouve sur la droite  $(P_1, C)$ , mais  $P'_1$  se situe en un point précis de cette droite, ce qui n'est pas le cas dans une chambre noire. En d'autres termes, pour un ensemble donné de points objets, la répartition dans l'espace des points images formés par un objectif photographique est fixée : d'une part, ces points images n'ont *a priori* aucune raison de se situer sur un plan ; d'autre part, si tel était le cas, cela imposerait quand même de « faire la mise au point », c'est-à-dire de disposer le verre dépoli de telle sorte qu'il coïncide avec ce plan. Ce problème est illustré sur la figure 1.7.

Néanmoins, des points objets situés sur un même plan orthogonal à l'axe optique, vérifiant les conditions de Gauss, ont leurs images sur un même plan orthogonal à l'axe optique. On dit qu'il y a « aplanétisme » et que ces plans sont « conjugués ». Introduisons un repère  $Cxyz$  tel que l'axe  $Cz$  coïncide avec l'axe optique et soit orienté dans le sens de la lumière (cf. figure 1.7). Deux plans  $\Pi$  et  $\Pi'$  d'équations algébriques  $z = d$  et  $z = d'$  sont conjugués s'ils vérifient la « relation de Descartes » :

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f'} \quad (1.39)$$

où  $f'$  est une grandeur caractéristique de l'objectif appelée sa « distance focale image »<sup>6</sup>. Certes, la surface d'une scène est rarement un plan orthogonal à l'axe optique, mais nous allons voir que son image peut quand même être nette.

5. En réalité, pour un objectif, les « points nodaux » se substituent au centre optique  $C$ , qui n'a donc pas d'existence physique.

6. Comme, d'après (1.39),  $|d| \gg |d'|$  implique  $d' \approx f'$ , c'est souvent  $d'$  qui est appelée la « distance focale » en vision par ordinateur, mais cette dénomination est abusive.

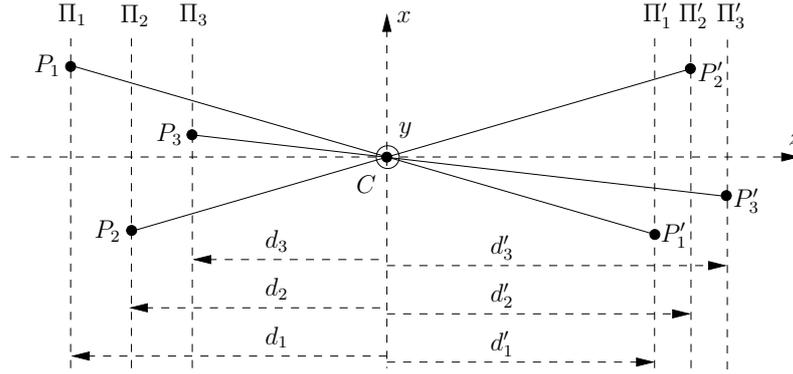


FIG. 1.7 – Exemple où, malgré le stigmatisme, l'image recueillie par un plan ne pourrait être que floue.

### 1.2.3 Appareil photographique

La figure 1.8 montre la représentation schématique d'un **appareil photographique**, qui se compose essentiellement d'un objectif et d'un récepteur photosensible. L'image  $P'_1$  d'un point objet  $P_1$  se trouve, en première approximation, sur la droite  $(P_1, C)$ . Peut-on pour autant utiliser le modèle sténopé de la chambre noire? Cela dépend de la position du récepteur photosensible. Sur la figure 1.8, le récepteur photosensible coïncide avec un plan  $\Pi'$  orthogonal à l'axe optique, appelé « plan image », qui est conjugué d'un plan  $\Pi$  orthogonal à l'axe optique, appelé « plan de mise au point ». Le point  $P_1$  étant sur  $\Pi$ , son image  $P'_1$  se trouve à l'intersection de la droite  $(P_1, C)$  et du plan  $\Pi'$ . En revanche, le point  $P_2$  étant situé à droite de  $\Pi$ , son image  $P'_2$  se trouverait à droite de  $\Pi'$  s'il n'y avait pas le récepteur photosensible, mais les rayons lumineux émis par  $P_2$ , qui sont stoppés par le récepteur photosensible au niveau de  $\Pi'$ , forment une tache  $T_2$ , qui traduit le « flou de mise au point ». Parmi les rayons émis par  $P_2$ , les deux rayons extrêmes, qui franchissent le plan  $Cxy$  aux extrémités du « diaphragme » de l'objectif, sont représentés sur la figure 1.8. Cela permet de déterminer les dimensions de la tache  $T_2$ . Si cette tache est plus petite que les récepteurs élémentaires (cristaux de bromure d'argent en photographie argentique, pixels en photographie numérique), alors le flou de l'image de  $P_2$  n'est pas détectable sur la photographie. Pour un récepteur photosensible donné, et pour une position donnée de ce récepteur à une distance  $d'$  de  $C$ , il existe donc deux plans  $\Pi_-$  et  $\Pi_+$  (cf. figure 1.8) tels que les images des points objets situés entre ces deux plans forment des taches suffisamment petites pour ne pas sembler floues. La distance entre  $\Pi_-$  et  $\Pi_+$  s'appelle la « profondeur de champ ».

Grâce à l'existence de la profondeur de champ, le modèle géométrique de formation des images par un appareil photographique est donc bien le modèle sténopé, c'est-à-dire que ce modèle est une projection centrale, de centre  $C$ , sur le plan image  $\Pi'$ , mais cela n'est vrai que si la partie visible de la surface de la scène se situe entièrement dans le « champ net », c'est-à-dire entre les plans  $\Pi_-$  et  $\Pi_+$ .

Il est légitime de se demander si la profondeur de champ est suffisante pour rendre nettes les photographies de scènes usuelles. Il est bien connu que la profondeur de champ dépend du « nombre d'ouverture »  $NO = f'/D$ , où  $D$  désigne le diamètre de la « pupille d'entrée » (cf. paragraphe 1.2.4). Elle dépend aussi du « grandissement transversal »  $G_t$ , qui est le rapport des dimensions entre image et objet dans une direction orthogonale à l'axe optique (en photographie,  $G_t$  est toujours négatif). En effet, on peut montrer, à partir de la relation (1.39), que le « grandissement axial »  $G_a$ , qui est le rapport des dimensions entre image et objet dans la direction de l'axe optique, est lié à  $G_t$  par la relation :

$$G_a = G_t^2. \quad (1.40)$$

Cela signifie que les images sont géométriquement déformées par rapport aux objets. En guise d'illus-

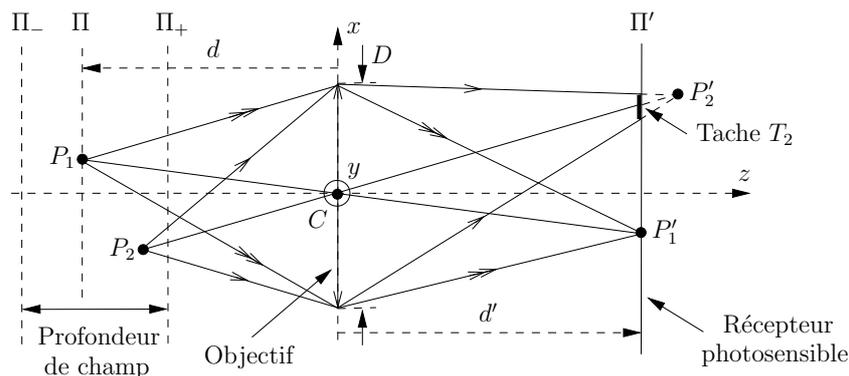


FIG. 1.8 – L'image de  $P_1$  est un point  $P'_1$ , alors que l'image de  $P_2$  est une tache  $T_2$ .

tration de ce phénomène, la figure 1.9 montre trois exemples d'objets sphériques de dimensions très différentes : l'objet de gauche est un ballon-sonde de diamètre  $2\text{ m}$  ; au centre, l'objet est une tête d'insecte de diamètre  $20\text{ mm}$  ; enfin, l'objet de droite est un grain de sable de diamètre  $200\ \mu\text{m}$ . La partie supérieure de la figure 1.9 montre ces trois objets photographiés de telle sorte que leurs images aient une taille commune égale à  $20\text{ mm}$  dans le plan image. Les grandissements transversaux valent donc  $G_{t,1} = -0,01$ ,  $G_{t,2} = -1$  et  $G_{t,3} = -100$ . D'après (1.40), les grandissements axiaux valent  $G_{a,1} = 0,0001$ ,  $G_{a,2} = 1$  et  $G_{a,3} = 10000$ . En photographie macroscopique, l'image est aplatie dans la direction de l'axe optique ( $G_{a,1} \ll |G_{t,1}|$ ). En photographie millimétrique, ou « macrophotographie », l'image respecte les proportions de l'objet ( $G_{a,2} \approx |G_{t,2}|$ ). Enfin, en photographie microscopique, l'image est allongée dans la direction de l'axe optique ( $G_{a,3} \gg |G_{t,3}|$ ). Sous chaque photographie de la figure 1.9, on a représenté l'image vue de côté, qui met en évidence ces déformations. En termes de profondeur de champ, la situation la plus favorable est donc celle de la photographie macroscopique, où les points images sont presque tous situés sur un même plan orthogonal à l'axe optique. Or, la grande majorité des articles sur le SFS s'intéressent à des photographies de scènes macroscopiques.

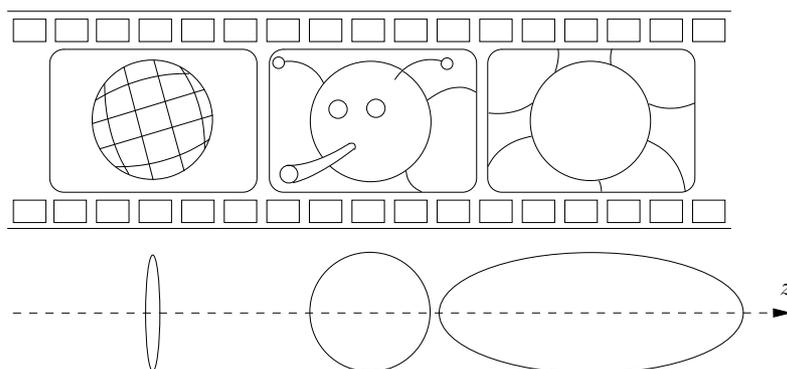


FIG. 1.9 – En haut : trois photographies d'objets sphériques à différentes échelles. En bas : vues de côté des images correspondantes. La situation de gauche est la plus favorable du point de vue de la profondeur de champ.

En réalité, le flou d'une photographie ne provient pas uniquement d'une mauvaise mise au point ou d'une profondeur de champ insuffisante. Il existe trois autres sources de flou, qui sont le « bougé », la diffraction et un certain nombre de défauts, ou aberrations, de l'objectif : l'aberration chromatique,

l'aberration de sphéricité, la coma, l'astigmatisme et la courbure de champ. Tout photographe sait ce qu'il faut faire pour éviter le flou de bougé. Pour limiter l'effet de la diffraction, on a intérêt à ouvrir le diaphragme, mais cela tend à diminuer la profondeur de champ. Par conséquent, il est nécessaire de trouver un compromis pour obtenir la meilleure netteté possible. Quant aux aberrations, elles dépendent directement de la qualité de l'objectif utilisé. Parmi les hypothèses du SFS, l'absence de flou est rarement citée dans les articles sur le SFS, mais cette hypothèse est bel et bien implicite. Durant la thèse de Frédéric Courteille [Courteille 06a], nous avons étudié l'influence de la violation de chacune des hypothèses du SFS sur la précision des reliefs reconstruits. Il s'avère que l'impact du flou est très faible.

Enfin, les objectifs ne vérifient pas exactement le modèle sténopé, même en négligeant le flou, à cause d'une aberration appelée la distorsion. En effet, si l'image  $P'_1$  d'un point  $P_1$  se trouve exactement sur la droite  $(P_1, C)$  dans une chambre noire, il n'en va pas tout à fait de même avec un objectif, à l'intérieur duquel les rayons lumineux suivent des trajets compliqués que ne reflète pas la figure 1.8. En revanche, cette aberration peut être compensée grâce à un étalonnage (ou « calibrage ») préalable.

#### 1.2.4 Équation photométrique de l'appareil photographique

Le modèle photométrique couramment utilisé en SFS est, à peu de chose près, l'équation photométrique de la chambre noire. Or, si la représentation schématisée de la figure 1.8 est commode pour la construction des images formées par un appareil photographique, elle est assez éloignée de la réalité. En fait, l'objectif est constitué de plusieurs lentilles et de deux diaphragmes situés parmi les lentilles, qui sont le « diaphragme d'ouverture » et le « diaphragme de champ ». Les rayons lumineux franchissent un certain nombre de lentilles avant de franchir (éventuellement) ces deux diaphragmes. Il est donc commode de déterminer les images de ces deux diaphragmes par les sous-systèmes optiques situés à l'avant de chacun d'eux. Ces images s'appellent la « pupille d'entrée » pour le diaphragme d'ouverture et la « lucarne d'entrée » pour le diaphragme de champ. On peut alors déterminer les rayons extrêmes issus d'un point objet de la même manière que sur la figure 1.8, mais la présence de deux obstacles au lieu d'un seul provoque un phénomène connu sous le nom « d'œil de chat », ou « vignetage », qui assombrit l'image des points éloignés de l'axe optique (cf. figure 1.10).

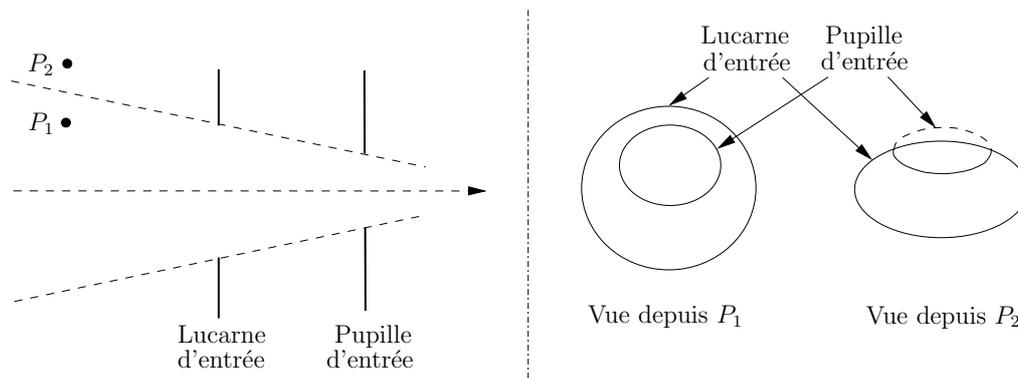


FIG. 1.10 – *Illustration du vignetage : les rayons émis par  $P_1$  sont seulement limités par la pupille d'entrée, alors que les rayons émis par  $P_2$  sont limités en partie par la pupille d'entrée et en partie par la lucarne d'entrée, donc l'image de  $P_2$  est assombrie.*

On lit parfois que « le vignetage accentue l'effet d'atténuation en  $\cos^4 \alpha$  » [Horn 79, Aggarwal 01], ce qui sous-entend que l'équation (1.38) est valide pour les objectifs photographiques, en l'absence de vignetage. Effectivement, en utilisant le modèle sténopé, le raisonnement du paragraphe 1.2.1 peut

encore être mené en remplaçant la longueur  $l$  de la chambre noire par la distance  $d'$ , mais cette affirmation doit être nuancée. D'une part, la traversée des lentilles ne s'effectue pas sans perte, c'est-à-dire que le flux lumineux  $d^2\Phi_i$  reçu par  $d\Sigma'$  est égal au flux lumineux émis par  $d\Sigma$ , atténué par un « facteur de transmission » de la lumière  $\tau$ , coefficient sans dimension qui vaut environ 0,98 pour des objectifs de bonne qualité. D'autre part, l'expression (1.35) de  $d^2\Phi_i$  n'est plus valide car la pupille d'entrée n'est généralement pas centrée en  $C$  (cf. figure 1.11). Elle doit être remplacée par :

$$d^2\Phi_i = \tau d\Omega_c d\Sigma \cos\theta'_c L(\vec{u}'_c). \quad (1.41)$$

Enfin, l'expression de l'angle solide  $d\Omega_c$  sous lequel la pupille d'entrée est vue depuis  $P$  n'est plus (1.36), mais :

$$d\Omega_c = \frac{\pi D^2 \cos\alpha'}{4 PC'^2}. \quad (1.42)$$

Par conséquent, l'équation (1.38) doit être remplacée par :

$$E = K \tau \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{d'}\right)^2 \cos^4\alpha L(\vec{u}_c), \quad (1.43)$$

où le facteur  $K$  vaut :

$$K = \frac{PC^2}{PC'^2} \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} \frac{\cos\theta'_c}{\cos\theta_c} \frac{L(\vec{u}'_c)}{L(\vec{u}_c)}. \quad (1.44)$$

L'équation photométrique de l'appareil photographique est donc l'équation (1.43). Elle ne comporte pas uniquement une « atténuation en  $\cos^4\alpha$  », même en l'absence de vignettage, dans la mesure où le facteur  $K$  dépend de la position du point  $P$ . Il n'y a que dans le cas où la pupille d'entrée est centrée en  $C$  que ce facteur est égal à 1.

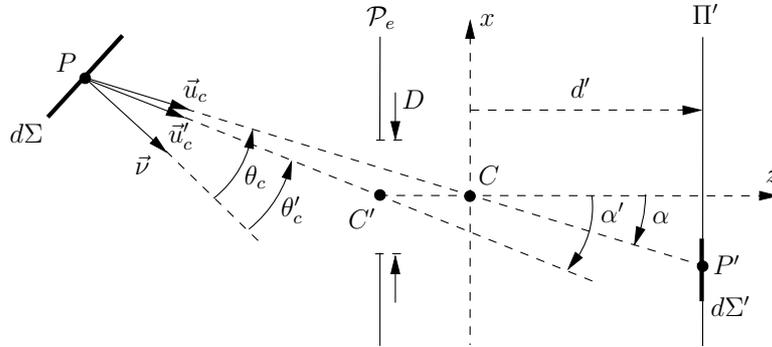


FIG. 1.11 – En général, la pupille d'entrée  $\mathcal{P}_e$  est centrée en  $C' \neq C$ .

### 1.2.5 Équation du niveau de gris

La loi d'atténuation de l'éclairement en  $\cos^4\alpha$ , qui est connue parce qu'il est possible de l'établir rigoureusement, n'est pas réaliste pour un appareil photographique. La loi d'atténuation réelle de l'éclairement dépend des positions et des dimensions de la pupille d'entrée et de la lucarne d'entrée, et doit donc être évaluée au cas par cas. Des modèles plus ou moins empiriques ont été proposés [Aggarwal 01]. Néanmoins, il semble plus raisonnable, comme le suggère Boutry [Boutry 46], d'effectuer un étalonnage photométrique, afin de mesurer l'atténuation globale de l'éclairement sur les bords de l'image, dont les causes sont diverses, puisque la distorsion y concourt également.

L'éclairement du récepteur photosensible étant connu, il reste à comprendre comment il se traduit en « niveau de gris »<sup>7</sup>. Il convient de ne pas confondre la notion d'image avec celle de photographie. C'est d'ailleurs en découvrant un moyen de transformer une image en photographie, c'est-à-dire en image permanente, que Niepce a inventé la photographie. Le « niveau de gris » d'une photographie n'est autre, en réalité, que l'albédo de la photographie considérée comme un objet à part entière : le blanc correspond à un albédo égal à 1, le noir à un albédo nul. De manière plus générale, l'albédo d'une photographie est censé reproduire, le plus fidèlement possible, l'énergie lumineuse reçue par unité de surface de récepteur photosensible au moment de la « pose »<sup>8</sup>. Or, en l'absence de bougé, l'énergie lumineuse reçue par unité de surface de récepteur est le produit de l'éclairement par la « durée d'exposition » (ou « temps de pose »). Mis à part pour les obturateurs à iris, pour lesquels elle est très légèrement plus élevée pour les points images les plus proches de l'axe optique, cette durée est la même pour tous les points de l'image, donc ce sont bien les variations d'éclairement d'un point à l'autre de l'image qui provoquent les variations de niveau de gris d'une photographie.

Les procédés technologiques permettant de transformer une énergie lumineuse en niveau de gris sont très variés. Ils diffèrent surtout entre photographie argentique et photographie numérique. Idéalement, on souhaiterait qu'il existe une relation de proportionnalité, c'est-à-dire qu'il existe un facteur  $\gamma$  tel que :

$$\mathcal{G} = \gamma E, \quad (1.45)$$

où  $\mathcal{G}$  désigne le niveau de gris. Dans la pratique, un certain nombre de non linéarités sont inévitables, comme par exemple le phénomène de « surexposition » qui peut survenir avec les récepteurs argentiques. Ces non linéarités s'ajoutent à celles de l'atténuation de l'éclairement et sont, elles aussi, difficiles à modéliser autrement que de manière empirique. Un étalonnage photométrique global semble préférable, par exemple en photographiant une scène de luminance uniforme. Malheureusement, un tel étalonnage est relativement compliqué à mettre en œuvre, comme nous l'avons expérimenté durant la thèse de Pascal Daniel [Daniel 00a]. Cela justifie l'exploration d'autres voies, comme les techniques de correction photométrique à partir d'une seule photographie [Zheng 06]. Quoi qu'il en soit, nous supposons dorénavant que, grâce à un étalonnage approprié, le niveau de gris  $\mathcal{G}$  d'une photographie est proportionnel à la luminance  $L(\vec{u}_c)$  de la scène dans la direction du centre optique. Cette relation de proportionnalité s'obtient à partir de (1.43) et (1.45), sachant que le facteur d'atténuation en  $\cos^4 \alpha$  de (1.43) doit être omis, puisqu'il ne constitue qu'une source de non linéarité parmi d'autres. Finalement :

$$\mathcal{G} = \gamma \tau \frac{\pi}{4} \left( \frac{D}{d'} \right)^2 L(\vec{u}_c). \quad (1.46)$$

La photographie est donc un procédé commode de mesure de la luminance, à tel point qu'elle aurait pu être appelée « luminométrie »<sup>9</sup>. Il est commode de définir le « niveau de gris normalisé »  $g$ , lié à  $\mathcal{G}$  par :

$$\mathcal{G} = \gamma \tau \frac{\pi}{4} \left( \frac{D}{d'} \right)^2 g, \quad (1.47)$$

de telle sorte que de (1.46) et (1.47), on tire l'équation suivante, très souvent rencontrée dans les articles sur le SFS :

$$g = L(\vec{u}_c). \quad (1.48)$$

Je propose d'appeler cette équation l'**équation du niveau de gris**.

7. Rappelons que nous nous intéressons aux photographies en noir et blanc.

8. Ce terme ne doit pas être confondu avec le terme anglais *pose*, utilisé en vision par ordinateur dans le sens de « position ».

9. Le néologisme « photographie » n'est pas dû à son inventeur Nicéphore Niepce, mais au Brésilien d'origine française Hercule Florence.

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée au début de ce paragraphe : la photographie est-elle idempotente ? Du point de vue géométrique, c'est une certitude si le modèle sténopé est retenu, car une projection sur un plan est, de façon générale, idempotente. Du point de vue photométrique, l'albédo d'une photographie est quasiment proportionnel à la luminance de la scène originale dans la direction du centre optique. Néanmoins, la luminance émise par une photographie dans la direction où on l'observe n'est pas forcément proportionnelle à son albédo. Elle l'est effectivement si le matériau qui constitue son support est lambertien et si elle est éclairée par une onde lumineuse plane uniforme  $\vec{S}_0$ , d'après (1.32), puisque l'angle  $\theta_{i,0}$  est uniforme pour une scène plane. Mais cela n'a pas de raison d'être encore vrai pour d'autres types de supports. Les tirages photographiques sur « papier mat » semblent donc plus aptes que les tirages sur « papier brillant » à donner l'illusion qu'on observe la scène originale.

Enfin, on peut s'attendre à ce que la reconstruction d'une scène à partir d'une photographie soit un problème difficile, puisque cela revient à effectuer l'inversion d'une transformation idempotente. Or on sait que, de manière générale, une telle fonction n'est pas inversible.

### 1.3 Réflexions multiples

La technique du SFS consiste à calculer le relief d'une scène opaque à partir des niveaux de gris lus sur une photographie de cette scène. Les facteurs qui influent sur le niveau de gris d'une photographie sont l'éclairage, le relief de la scène, sa BRDF et les caractéristiques (géométriques et photométriques) de l'appareil photographique. Dans le paragraphe 1.1, nous avons vu que la luminance d'une scène dépend de sa géométrie, de sa BRDF et de l'éclairage qu'elle reçoit. Dans le paragraphe 1.2, nous avons étudié la relation entre la luminance dans la direction du centre optique et le niveau de gris. Il semble donc que nous soyons maintenant en mesure d'établir les différentes équations du SFS. Or, nous allons voir dans ce paragraphe que cela serait prématuré, à cause du problème des réflexions multiples, problème qui n'a été exploré, dans le cadre du SFS, que par Forsyth et Zisserman [Forsyth 90, Forsyth 91]. J'y ajoute dans ce paragraphe mes propres réflexions.

#### 1.3.1 Équation de l'exittance

En utilisant l'expression intégrale (1.20) de la luminance pour  $\vec{u}_e = \vec{u}_c$ , c'est-à-dire pour  $\theta_e = \theta_c$  et  $\phi_e = \phi_c$ , l'équation du niveau de gris (1.48) se réécrit :

$$g = \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} \int_{\phi_i=0}^{2\pi} f(\theta_i, \phi_i, \theta_c, \phi_c) \bar{L}(\vec{u}_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (1.49)$$

Si le relief de la scène, sa BRDF, les caractéristiques des sources lumineuses et la position de l'appareil photographique sont connus, comme cela est le cas en synthèse d'images, alors il semble que le calcul de  $g$  soit direct en utilisant (1.49). Or, cela n'est pas si simple lorsque les différents points de la scène s'éclairent mutuellement, c'est-à-dire lorsque la luminance incidente  $\bar{L}$  n'est pas uniquement due aux « sources primaires », mais également aux points de la scène visibles depuis le point courant, qui constituent des « sources secondaires »<sup>10</sup>. Ce phénomène est connu sous le nom de « réflexions multiples ». L'équation (1.49) n'est donc pas utilisable telle quelle, en présence de réflexions multiples.

Grâce à la loi de conservation de la luminance, qui prend la forme (1.18) dans un milieu homogène et non absorbant, on peut réécrire (1.20) sous la forme suivante, pour une direction d'émission  $\vec{u}_e$

---

10. Le Soleil est un exemple de source primaire, alors que la Lune est un exemple de source secondaire.

quelconque :

$$L_{P_1}(\vec{u}_e) = \iint_{P_2 \in \mathcal{V}(P_1)} f_{P_1}(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) L_{P_2}(\overrightarrow{P_2 P_1}) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i, \quad (1.50)$$

où  $\mathcal{V}(P_1)$  désigne l'ensemble des points de la scène et des sources primaires visibles depuis  $P_1$ . Les notations utilisées dans l'équation (1.50) sont rappelées sur la figure 1.12. En réalité, l'équation (1.50) n'est valide que pour un point  $P_1$  d'une source secondaire. Pour un point  $P_1$  d'une source primaire, la luminance ne s'annule pas lorsque aucun éclairage n'est reçu. Par conséquent, on doit rajouter à l'expression (1.50) de  $L_{P_1}(\vec{u}_e)$  un second terme, noté  $L_{P_1}^1(\vec{u}_e)$  et appelé la « luminance primaire » :

$$L_{P_1}(\vec{u}_e) = L_{P_1}^1(\vec{u}_e) + \iint_{P_2 \in \mathcal{V}(P_1)} f_{P_1}(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) L_{P_2}(\overrightarrow{P_2 P_1}) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (1.51)$$

Si le relief de la scène, sa BRDF et la luminance primaire sont connus, alors l'équation (1.51) est une « équation intégrale de Fredholm » en  $L$ , connue en synthèse d'images sous le nom « d'équation du rendu » (*rendering equation*, cf. [Kajiya 86]) ou « équation de radiosité »<sup>11</sup> (*radiosity equation*), mais que je préconise de l'appeler **  quation de l'exitance**, car le terme standard pour désigner le flux lumineux émis par unité de surface est l'exitance (cf. paragraphe 1.1.1). Les échanges radiatifs entre « corps noirs » [Sacadura 93] sont régis par une équation du même type<sup>12</sup>.

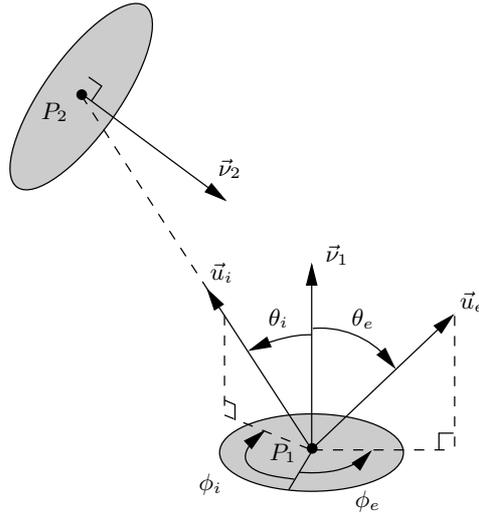


FIG. 1.12 – Les points  $P_2 \in \mathcal{V}(P_1)$  des équations (1.50) et (1.51) sont les sources lumineuses ponctuelles (primaires ou secondaires) qui contribuent à éclairer le point  $P_1$ .

Le calcul d'une image de synthèse prenant en compte les réflexions multiples requiert donc la résolution de l'équation intégrale (1.51) pour l'ensemble des points de la scène et des sources primaires. L'équation de l'exitance étant linéaire, sa résolution ne pose pas de difficulté *théorique* [Forsyth 02], mais peut néanmoins poser de sérieuses difficultés *algorithmiques*. En général, elle est menée sous l'hypothèse que la surface est lambertienne, car si pour calculer  $g$  par l'équation du niveau de gris (1.48), on a besoin de connaître  $L$  uniquement dans la direction  $\vec{u}_c$  du centre optique, on est quand

11. Le terme « radiosité » désigne également une technique de résolution numérique de l'équation (1.51) très répandue en synthèse d'images.

12. Le problème est plus compliqué en thermique, à cause de l'existence d'un régime transitoire.

même obligé, pour résoudre l'équation de l'exitance (1.51), de calculer  $L$  pour tous les points de la scène et dans toutes les directions d'émission  $\vec{u}_e$ . L'hypothèse d'une surface lambertienne, pour laquelle  $L$  ne dépend pas de  $\vec{u}_e$ , réduit donc considérablement la complexité du calcul.

### 1.3.2 Prise en compte des réflexions multiples en vision par ordinateur

Intéressons-nous maintenant à la **prise en compte des réflexions multiples en vision par ordinateur**, c'est-à-dire lorsque le niveau de gris normalisé est connu. La luminance  $L(\vec{u}_c)$  dans la direction du centre optique est alors connue, d'après (1.48). Si le relief de la scène, sa BRDF, la luminance primaire et la position de l'appareil photographique étaient connus, alors la résolution de l'équation de l'exitance (1.51) serait plus contrainte qu'en synthèse d'images! En effet, la connaissance de  $L(\vec{u}_c)$  pour les points de la scène visibles sur la photographie constitue une contrainte sur  $L$ . Cependant, le but de la vision par ordinateur consiste généralement à utiliser une ou plusieurs photographies d'une scène afin de retrouver une partie manquante des informations qui seraient nécessaires pour calculer une image de synthèse de cette scène. Cette information manquante peut être le relief de la scène, sa BRDF, la luminance primaire ou la position de l'appareil photographique, voire plusieurs de ces éléments simultanément. Or, rares sont les méthodes de résolution, en vision par ordinateur, qui tiennent compte des réflexions multiples [Shimshoni 94, Chandraker 05]. Manifestement, cela est dû à la difficulté du problème. D'une part, le problème n'est généralement plus linéaire, contrairement à la résolution en  $L$  de l'équation de l'exitance. D'autre part, l'information sur la luminance fournie par une photographie est très partielle, puisqu'elle concerne uniquement les points visibles sur la photographie et une seule direction d'émission, alors que la perte de la connaissance du relief de la scène, de sa BRDF ou de la luminance primaire constitue un handicap considérable vis-à-vis de la résolution de l'équation de l'exitance<sup>13</sup>.

Si l'on dispose de plusieurs photographies de la même scène, l'information sur la luminance s'accumule et l'on peut envisager de prendre en compte les réflexions multiples dans la résolution d'un problème de vision par ordinateur. Nayar *et al.* ont proposé une méthode itérative assez intuitive pour tenir compte des « réflexions secondaires », c'est-à-dire des flux lumineux ayant été réfléchis *une fois* [Nayar 91], adaptée à la reconstruction du relief d'une scène par « stéréophotométrie » (cette technique sera décrite dans le paragraphe 2.1.2) : à la première étape, seul le flux lumineux primaire est pris en compte, et un premier « pseudo-relief » est reconstruit ; ce pseudo-relief permet de calculer le flux lumineux secondaire sur l'ensemble de la scène ; en ajoutant ce flux au flux primaire, on raffine le pseudo-relief ; on peut alors mettre à jour le calcul du flux lumineux secondaire, et ainsi de suite.

Dans le cadre de la thèse de Frédéric Courteille [Courteille 06a], nous avons adapté cette méthode itérative de prise en compte des réflexions secondaires à la photographie d'un livre ouvert posé sur le dos, pour lequel l'effet des réflexions multiples est localisé au voisinage de la reliure<sup>14</sup>, afin de calculer le relief du livre et de simuler ensuite sa « mise à plat ». Or, la surface d'un livre ouvert constitue un cylindre, c'est-à-dire un relief suffisamment simple pour être facile à calculer par SFS (nous y reviendrons dans le paragraphe 2.1.4).

Une autre façon de tenir compte des réflexions multiples en vision par ordinateur a été proposée par Funt et Drew [Funt 93]. Dans une scène composée d'objets convexes de couleurs différentes, les flux secondaires peuvent être reconnus en analysant leurs couleurs. À l'aide d'un traitement approprié, il est alors possible de *corriger* une photographie de l'effet des réflexions multiples, mais cette méthode semble difficile à étendre à d'autres types de scènes. Enfin, l'heuristique introduite par Stewart et

13. Quant aux problèmes où la position de l'appareil photographique est inconnue, il ne leur est généralement d'aucun secours de tenir compte des réflexions multiples.

14. La méthode de Nayar *et al.* souffrant d'une grande lenteur, nous nous sommes ensuite contentés de limiter l'effet des réflexions multiples en disposant un tissu noir sur une des deux pages du livre.

Langer [Stewart 97] simplifie grandement le problème dans le cas d'un matériau lambertien, mais la démarche suivie est relativement empirique.

### 1.3.3 Équations approchées du niveau de gris

La prise en compte des réflexions multiples dans les problèmes de vision par ordinateur constitue un problème ouvert, surtout lorsqu'on ne dispose que d'une seule photographie, c'est-à-dire dans le cadre de la « vision monoculaire ». Outre les difficultés manifestes pour résoudre l'équation de l'exitance dans le cadre de la vision par ordinateur, il faut aussi avouer que les méthodes de résolution du SFS sont encore tellement peu fiables que la première étape de la méthode de Nayar *et al.*, c'est-à-dire la reconstruction du relief seulement éclairé par le flux lumineux primaire, constitue à elle seule un problème ouvert. Néanmoins, si la prise en compte des réflexions multiples en SFS semble prématurée, je ne pense pas, comme Forsyth et Zisserman [Forsyth 91], qu'elle soit impossible. Je reviendrai d'ailleurs sur ce point dans les perspectives.

C'est donc *par la force des choses* que nous négligeons les réflexions multiples en SFS. Par conséquent, nous pouvons réécrire l'équation du niveau de gris (1.48), non pas sous la forme exacte (1.49), mais sous la forme approchée suivante :

$$g = \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} \int_{\phi_i=0}^{2\pi} f(\theta_i, \phi_i, \theta_c, \phi_c) \bar{L}^1(\vec{u}_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i, \quad (1.52)$$

où  $\bar{L}^1$  désigne la « luminance incidente primaire ». L'équation (1.52) est la **version intégrale de l'équation approchée du niveau de gris**. Elle est beaucoup plus facile à utiliser que (1.49), puisqu'elle ne requiert pas la résolution de l'équation de l'exitance. Ce n'est pas là son seul intérêt. En effet, lorsqu'on néglige les réflexions multiples, il arrive souvent que la lumière ne tombe sur une scène que dans une seule direction, c'est-à-dire que l'onde lumineuse primaire puisse être décrite, en chaque point de la scène, par un vecteur  $\vec{S}$  (cf. les vecteurs  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$  de la figure 1.13), ce qui permet d'assimiler localement l'onde primaire à une onde plane uniforme. Si tel est le cas, alors en remplaçant la luminance incidente dans (1.52) par son expression (1.13), on obtient :

$$g = f(\theta_i, \phi_i, \theta_c, \phi_c) S \cos \theta_i. \quad (1.53)$$

L'équation (1.53) est la **version non intégrale de l'équation approchée du niveau de gris**.

Malgré les apparences, l'équation (1.53) n'est pas facile à résoudre dans le cas général. Un premier cas particulier d'éclairage intéressant, originellement proposé par Okatani et Deguchi [Okatani 97], est celui d'une source ponctuelle placée au centre optique, qui modélise assez bien l'éclairage d'un appareil photographique endoscopique. En tout point de la scène, le vecteur  $\vec{S}$  est alors parallèle à la direction  $\vec{u}_c$  du centre optique, c'est-à-dire que  $\theta_i = \theta_c$  et  $\phi_i = \phi_c$ . Or, nous avons signalé dans le paragraphe 1.1.4 que, pour les matériaux isotropes, la dépendance de  $f$  en  $\phi_i$  et en  $\phi_c$  est en réalité une dépendance en  $\phi_c - \phi_i$ . Par conséquent, il existe une fonction  $\bar{f}$  telle que :

$$f(\theta_i, \phi_i, \theta_c, \phi_c) \cos \theta_i = \bar{f}(\theta_i). \quad (1.54)$$

Par ailleurs, la densité de flux lumineux  $S$  d'une source ponctuelle décroît en  $1/r^2$ , où  $r$  désigne la « profondeur » du point courant de la scène, c'est-à-dire sa distance au centre optique, si le milieu traversé est non absorbant. Supposons par exemple que la source soit isotrope et notons  $I$  son intensité. L'équation (1.53) se réécrit alors, avec cet éclairage très spécifique :

$$g = \bar{f}(\theta_i) \frac{I}{4\pi r^2}. \quad (1.55)$$

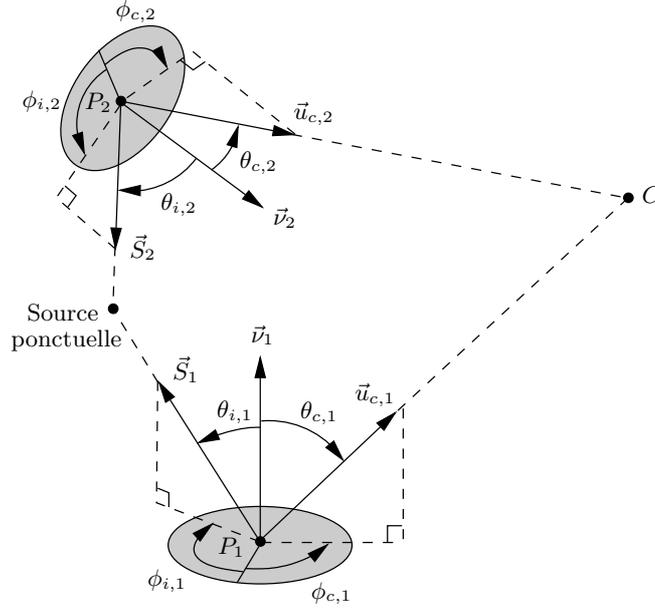


FIG. 1.13 – L'onde lumineuse primaire est caractérisée par  $\vec{S}_1$  en  $P_1$  et par  $\vec{S}_2$  en  $P_2$ . Les vecteurs  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$  diffèrent en direction et en norme.

Pour une valeur  $g$  donnée, si la fonction  $\bar{f}$  est connue et inversible, alors on peut déduire de (1.55) la valeur de l'angle  $\theta_i$  si l'on connaît, en outre, la profondeur  $r$ , mais  $r$  est généralement tout aussi inconnue que  $\theta_i$ . Nous reviendrons dans le chapitre 2 sur le problème du nombre d'inconnues des équations du SFS.

Un deuxième cas particulier d'éclairage consiste en une onde plane uniforme, pour laquelle  $\vec{S} = \vec{S}_0$  en tout point de la scène. L'équation (1.53) se réécrit alors :

$$g = f(\theta_{i,0}, \phi_{i,0}, \theta_c, \phi_c) S_0 \cos \theta_{i,0}. \quad (1.56)$$

Si nous éclairons une scène *convexe* de relief connu (par exemple, une sphère) par une onde plane uniforme  $\vec{S}_0$ , alors l'équation (1.56) est une expression exacte de l'équation du niveau de gris (1.48), puisqu'il n'y a pas de réflexions multiples avec une telle scène. Si l'on connaît  $\vec{S}_0$ , ainsi que la position de l'appareil photographique, alors il est possible de calculer, en chaque point de la photographie, les angles  $\theta_{i,0}$ ,  $\phi_{i,0}$ ,  $\theta_c$  et  $\phi_c$ . On peut donc déduire de l'équation (1.56) la valeur de  $f(\theta_{i,0}, \phi_{i,0}, \theta_c, \phi_c)$ . Cette *mesure photographique* de la BRDF est légèrement moins précise que la mesure effectuée à l'aide d'un « goniomètre », mais elle constitue un procédé plus rapide et moins coûteux [Horn 79].

### 1.3.4 Équations des surfaces lambertiennes

L'équation du niveau de gris (1.48) se simplifie également pour les matériaux lambertiens. En effet, en utilisant l'expression (1.29) de la luminance, on obtient :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} E. \quad (1.57)$$

Dans l'hypothèse où les réflexions multiples sont négligées, l'éclairage  $E$  est uniquement dû au flux lumineux primaire. Si ce flux, comme nous l'avons déjà dit, est localement assimilable à une onde plane  $\vec{S}$ , alors en utilisant (1.4), l'équation (1.57) se réécrit :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} S \cos \theta_i. \quad (1.58)$$

L'équation (1.58) est bien sûr un cas particulier de l'équation (1.53). Je préconise de l'appeler **l'équation approchée des surfaces lambertiennes**.

Comme cela a déjà été signalé pour le cas général, l'équation (1.58) n'est facile à manipuler que dans quelques cas particuliers. Pour une source ponctuelle isotrope, située au centre optique, elle prend la forme suivante :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} \frac{I}{4\pi r^2} \cos \theta_i. \quad (1.59)$$

Pour une onde plane uniforme  $\vec{S}_0$ , elle s'écrit :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} S_0 \cos \theta_{i,0}. \quad (1.60)$$

L'équation (1.60) est précieuse, car elle donne directement la valeur de l'angle  $\theta_{i,0}$  à partir du niveau de gris normalisé  $g$ , pour peu que l'albédo  $\rho_{\text{lamb}}$  et la densité de flux lumineux  $S_0$  soient connus.

Nous reviendrons sur l'équation (1.60) dans le paragraphe 1.4. Dès à présent, nous allons voir que son expression particulièrement simple permet d'imaginer une application amusante. Si l'on dispose de trois photographies d'une même scène lambertienne éclairée par trois ondes planes uniformes de vecteurs  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$  et  $\vec{S}_3$  linéairement indépendants, alors par combinaison linéaire des niveaux de gris normalisés des trois photographies, on tire de (1.60) :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} \left( \lambda_1 \vec{S}_1 + \lambda_2 \vec{S}_2 + \lambda_3 \vec{S}_3 \right) \cdot \vec{\nu}, \quad (1.61)$$

ce qui signifie que l'on peut simuler l'éclairage de cette scène par une onde plane uniforme quelconque  $\vec{S} = \lambda_1 \vec{S}_1 + \lambda_2 \vec{S}_2 + \lambda_3 \vec{S}_3$ . En utilisant trois photographies d'un buste de Beethoven accessibles sur le web<sup>15</sup>, et en faisant l'hypothèse que le matériau est lambertien, on peut donc par exemple simuler la photographie de ce buste éclairé « de face » (cf. figure 1.14). En réalité, nous allons voir que ce raisonnement est faux pour les points qui, sur l'une des trois photographies, se trouvent dans l'ombre.

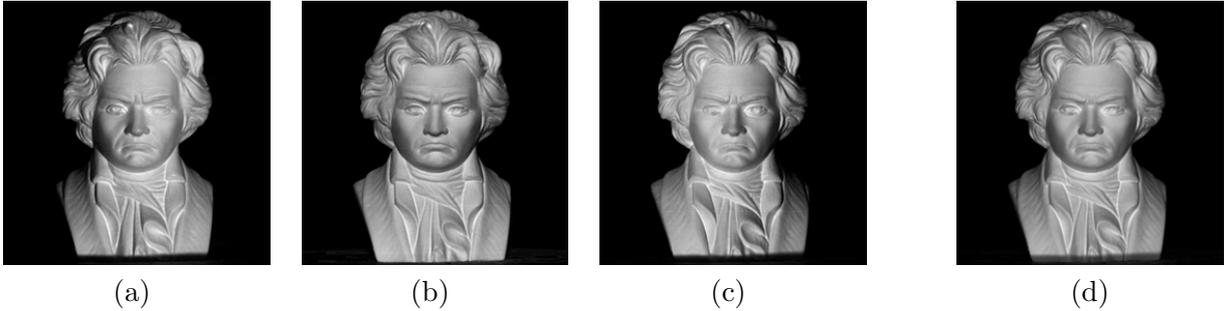


FIG. 1.14 – Trois photographies d'un buste de Beethoven, éclairées dans trois directions linéairement indépendantes : (a)  $\vec{S}_1 = [-0,081 \ 0,258 \ 1]^T$  ; (b)  $\vec{S}_2 = [0,202 \ -0,017 \ 1]^T$  ; (c)  $\vec{S}_3 = [-0,102 \ -0,270 \ 1]^T$ . Une combinaison linéaire de ces trois photographies permet de simuler l'éclairage de face : (d)  $\vec{S} = [0 \ 0 \ 1,637]^T$ .

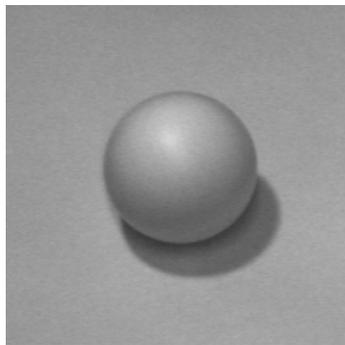
### 1.3.5 Éclairage rasant et ombres

Les différentes versions approchées de l'équation du niveau de gris (1.48) que nous venons de passer en revue sont d'autant plus valides que la luminance incidente primaire  $\bar{L}^1$  est grande devant les

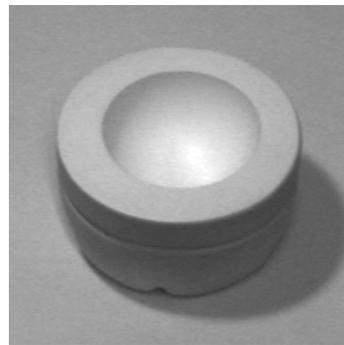
15. <http://www.ece.ncsu.edu/imaging/Archives/ImageDataBase/Industrial/ShapeFromShading>

luminances incidentes dues aux réflexions multiples. L'approximation se justifie donc mieux aux points de la scène fortement éclairés par le flux primaire, c'est-à-dire là où l'angle  $\theta_i$  est faible, qu'aux points où cet angle est élevé. Or, cette dernière catégorie de points regroupe en réalité deux cas de figure très différents : les points éclairés en **éclairage rasant** et les **ombres**<sup>16</sup>. Pour illustrer ce distinguo, utilisons l'équation (1.60), qui est la plus simple de toutes les versions approchées de l'équation du niveau de gris.

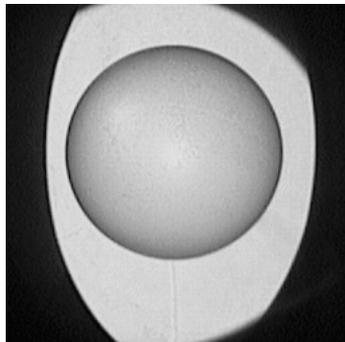
Les réflexions multiples ayant pour effet d'augmenter l'éclairement en tout point d'une scène, le niveau de gris normalisé  $g$  lu sur une photographie est nettement supérieur à la valeur qu'il aurait avec le seul éclairage primaire, pour les points éclairés en éclairage rasant [Forsyth 91]. Cet effet a été vérifié expérimentalement dans la thèse de Pascal Daniel, à l'aide d'un montage permettant d'éclairer la scène par une onde plane uniforme parallèle à l'axe optique (cf. figure 1.15). L'utilisation de l'équation (1.60) revient en fait à surévaluer  $\cos \theta_{i,0}$ , c'est-à-dire à sous-évaluer  $\theta_{i,0}$ . Le relief reconstruit est donc « aplati » si l'on ne tient pas compte des réflexions multiples [Nayar 91].



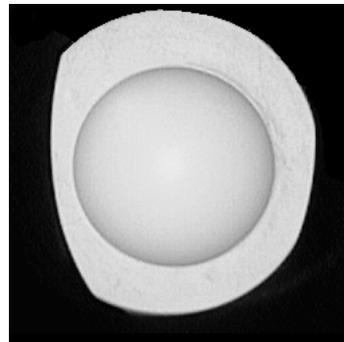
(a) Sphère.



(b) Moulage de la sphère.



(c) Photographie de la sphère.



(d) Photographie du moulage de la sphère.

FIG. 1.15 – Les photographies (c) et (d) des reliefs (a) et (b) ont été obtenues en éclairage de face. Plus on se rapproche du bord de la silhouette, plus l'écart entre les niveaux de gris des photographies (c) et (d) est important. Ces photographies proviennent de [Daniel 00a].

Intéressons-nous maintenant aux ombres. À cause des réflexions multiples, il est rare qu'un point de la scène se trouve dans l'obscurité totale, c'est-à-dire que le niveau de gris normalisé  $g$  soit nul. Cependant, pour un point non éclairé par le flux lumineux primaire (cf. les points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  de la figure 1.16), la valeur de  $g$  et la valeur de l'angle  $\cos \theta_{i,0}$  ne sont pas liées par l'équation (1.60), puisque

16. Le seul éclairage pour lequel une photographie ne comporte jamais d'ombre est celui, déjà évoqué, d'une source ponctuelle située au centre optique.

la valeur de  $g$  en un tel point est uniquement due aux réflexions multiples et que les réflexions multiples ne sont pas prises en compte dans l'équation (1.60). Par conséquent, l'équation (1.60) est inutilisable dans les ombres. Cherchons s'il existe, pour les surfaces lambertiennes, une autre version approchée de l'équation du niveau de gris (1.48) qui soit utilisable dans les ombres. Il convient de distinguer les « ombres propres » des « ombres portées ». Un point d'ombre propre vérifie  $\theta_{i,0} > \pi/2$ , c'est-à-dire  $\cos \theta_{i,0} < 0$  (cf. les points  $P_2$  et  $P_3$  de la figure 1.16). Il est donc facile de modifier l'équation (1.60) de telle sorte qu'elle soit valide pour les ombres propres :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} S_0 \max\{\cos \theta_{i,0}; 0\}. \quad (1.62)$$

L'équation (1.62) est parfois rencontrée dans les articles sur le SFS [Horn 79]. Malheureusement, son intérêt est limité car elle ne peut pas être étendue aux points d'ombre portée, qui vérifient bien  $\cos \theta_{i,0} \geq 0$ , mais qui sont situés de telle sorte que d'autres points de la scène leur masquent le flux lumineux primaire (cf. le point  $P_1$  de la figure 1.16). Il est impossible de rendre l'équation (1.60) valide pour ces points, car il s'agit d'une équation locale, alors que le fait d'être dans une ombre portée n'est pas une caractéristique *locale* d'un point, mais dépend de la géométrie *globale* de la scène et des sources lumineuses.

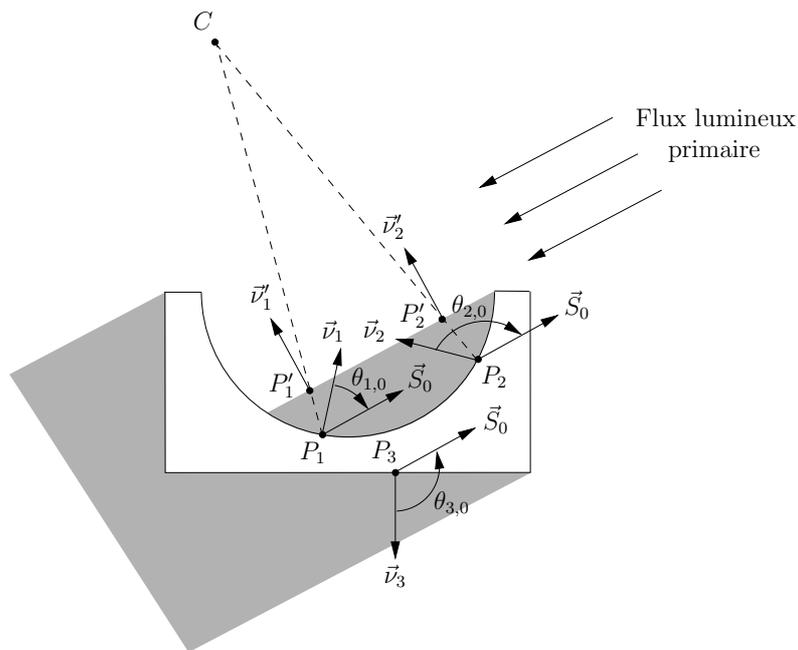


FIG. 1.16 – Les zones grisées matérialisent les « cônes d'ombre ». Les points  $P_2$  et  $P_3$  se trouvent dans l'ombre propre. Le point  $P_1$  se trouve dans l'ombre portée. Les « pseudo-normales »  $\vec{v}'_1$  en  $P'_1$  et  $\vec{v}'_2$  en  $P'_2$  sont conformes à l'équation (1.60), contrairement aux normales  $\vec{v}_1$  en  $P_1$  et  $\vec{v}_2$  en  $P_2$ . La question ne se pose pas pour  $P_3$ , qui n'est pas visible.

En revanche, un moyen astucieux de tenir compte à la fois des ombres propres et des ombres portées consiste à rajouter à la scène les « cônes d'ombre », c'est-à-dire l'ensemble des points qui ne sont pas éclairés par le flux lumineux primaire [Camilli 96, Falcone 03]. Toutes les « pseudo-normales » de cette « pseudo-scène » vérifient alors l'équation (1.60) (cf. figure 1.16).

## 1.4 Modèles du SFS

Dans le paragraphe 1.2, nous avons établi l'équation du niveau de gris (1.48), qui est l'équation la plus générale liant le niveau de gris d'une photographie au relief de la scène photographiée. Cette équation est manifestement très difficile à résoudre lorsque le relief est inconnu, même si tous les autres éléments entrant en jeu sont connus, car elle ne peut être résolue que *globalement*, c'est-à-dire simultanément pour tous les points situés sur la scène ou sur les sources lumineuses primaires. Dans le paragraphe 1.3, nous avons vu que cette équation prend la forme (1.52) lorsque les réflexions multiples sont négligées. L'équation (1.52) est beaucoup plus simple à résoudre que (1.48) car elle peut être résolue *localement*. Si l'on désire s'attaquer au problème du SFS de façon réaliste, alors il est inconcevable de négliger systématiquement les réflexions multiples, mais le problème devient très compliqué. En l'état actuel des recherches, on en est donc réduit à modéliser le SFS en négligeant les réflexions multiples, quitte à ne pouvoir en tirer aucune application réaliste. Pour cette raison, le SFS est parfois considéré comme un *exercice de style*.

La transformation de l'équation locale (1.52) en modèles plus spécifiques n'a fait l'objet que de peu de publications, en dehors d'un article de Horn et Sjoberg [Horn 79] qui introduit la « carte de réflectance », notion qui doit être manipulée avec précaution. C'est pourquoi il n'est pas inutile de faire le point sur les différents *modèles non différentiels* du SFS. Par ailleurs, les *modèles différentiels* que l'on trouve dans la littérature ne tiennent généralement pas compte de la perspective. Ce paragraphe sera donc également consacré à la modélisation perspective du SFS, qui n'a été établie que très récemment [Prados 03, Tankus 03, Courteille 04].

### 1.4.1 Équations locales du SFS

L'équation (1.52) est l'équation locale la plus générale du SFS, mais nous avons également vu, dans le paragraphe 1.3, six variantes de cette équation. L'équation (1.53) est une version non intégrale de (1.52) qui reste néanmoins très générale. Elle s'écrit sous la forme (1.55) lorsque l'éclairage est ponctuel, isotrope et situé au centre optique, et sous la forme (1.56) lorsque le flux lumineux primaire est une onde plane uniforme. Enfin, ces trois dernières équations deviennent respectivement (1.58), (1.59) et (1.60) pour une surface lambertienne. Ces sept équations constituent les **équations locales du SFS**.

Supposons que nous disposions d'une photographie et que le flux lumineux primaire, les caractéristiques de l'appareil photographique et la BRDF de la scène soient connus. Par conséquent, seul le relief de la scène est inconnu. Pour un point image  $P'$  donné, le modèle sténopé nous dit que le point objet  $P$  conjugué de  $P'$  se trouve sur la droite  $(P',C)$  (cf. figure 1.17). La position de  $P$  ne dépend donc que d'un seul paramètre, par exemple la profondeur  $r$ , c'est-à-dire la distance  $PC$ . Si les équations locales du SFS ne faisaient intervenir que cette distance comme inconnue<sup>17</sup>, alors le SFS serait un problème *bien posé* (notion sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 2). Or, elles font également intervenir les quatre angles  $\theta_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\theta_c$  et  $\phi_c$ , qui sont inconnus puisqu'ils dépendent de la normale  $\vec{\nu}$  à la surface. Ces cinq inconnues constituent les inconnues « naturelles » du SFS. Elles interviennent toutes, explicitement ou implicitement<sup>18</sup>, dans (1.52) et (1.53), toutes sauf  $r$  dans (1.56). Seules  $\theta_i$  et  $r$  interviennent dans (1.55), (1.58) et (1.59). Enfin, la seule inconnue de l'équation (1.60) est  $\theta_i$ .

Bien que les questions relatives à la *résolution* du SFS n'aient pas leur place dans un chapitre portant sur la *modélisation*, il serait difficile d'introduire les modèles du SFS les plus usités sans

17. Cette remarque n'est pas une pure spéculation, puisqu'une image de microscope à force atomique constitue, justement, une « carte d'altitude » de la scène observée.

18. *A priori*, la densité de flux lumineux  $S$  dépend de  $r$ .

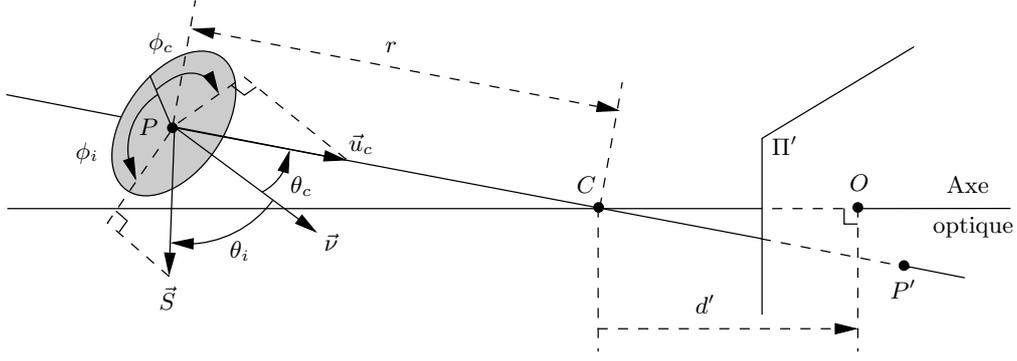


FIG. 1.17 – Les cinq inconnues naturelles du SFS sont  $r$ ,  $\theta_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\theta_c$  et  $\phi_c$ .

aborder le problème sous cet angle. La normale  $\vec{v}$  étant un vecteur unitaire, il apparaît que le nombre d'inconnues *indépendantes* du problème local est égal à trois et non à cinq, ce qui signifie que les quatre angles  $\theta_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\theta_c$  et  $\phi_c$  ne sont pas indépendants. Si pour le *problème direct*, qui est celui de la synthèse d'images, cela n'a pas d'importance, il n'en va pas de même pour le *problème inverse*. En effet, on risque d'obtenir des quadruplets de valeurs  $(\theta_i, \phi_i, \theta_c, \phi_c)$  ne vérifiant pas les contraintes sous-jacentes entre ces angles. Bien sûr, la normale  $\vec{v}$  et la distance  $r$  ne sont elles-mêmes pas indépendantes, puisque  $\vec{v}$  est une grandeur différentielle relativement au relief. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on peut s'attendre à ce que le SFS puisse être modélisé, *in fine*, par des équations différentielles à une seule inconnue, comme nous le verrons plus loin. Pour le moment, contentons-nous d'opérer un *changement d'inconnues*.

Le vecteur  $\vec{v}$  n'ayant que deux degrés de liberté, deux paramètres suffisent à le décrire. Pour choisir ces paramètres, il faut d'abord choisir une direction de référence. Il serait envisageable d'utiliser la direction d'éclairage  $\vec{S}$ , mais cette direction n'est pas définie de manière unique dans le cas général de l'équation (1.52) et, de plus, elle peut dépendre de  $r$  pour un point image  $P'$  donné. Néanmoins, une situation pour laquelle ces deux reproches sont infondés est celle de l'équation (1.60), où la seule inconnue est justement l'angle  $\theta_i$  entre  $\vec{v}$  et  $\vec{S}$  [Lee 85a]. On pourrait également envisager d'utiliser comme direction de référence la direction d'observation  $\vec{u}_c$ , que l'on peut déterminer sans ambiguïté lorsque la position du « point principal »  $O$  et la distance  $d'$  sont connues (cf. figure 1.17), bien que cette direction dépende du point image  $P'$ . Cela ne serait pas forcément gênant pour une résolution purement locale, mais compliquerait inutilement la modélisation différentielle du problème. Le choix le plus judicieux consiste à utiliser l'axe optique comme direction de référence. Il reste maintenant à choisir deux paramètres permettant de repérer la normale relativement à cette direction.

### 1.4.2 Paramétrage de la normale

Sur la figure 1.18, la direction  $Oz$  coïncide avec l'axe optique. L'extrémité  $N$  du vecteur unitaire  $\vec{v} = \overrightarrow{O'N}$  décrit la surface d'une sphère de rayon unité, centrée en  $O' = (0, 0, -1)$  et tangente au plan  $Oxy$  au pôle nord, qui est appelée la « sphère de Gauss ». Le **paramétrage de la normale** le plus naturel consiste bien sûr à utiliser ses coordonnées, cartésiennes ou sphériques. Les coordonnées *sphériques* sont tout à fait indiquées pour un vecteur unitaire. En choisissant comme paramètres la colatitude  $\theta$  et la longitude  $\phi$ , l'expression de  $\vec{v}$  est la suivante :

$$\vec{v} = [\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta]^T. \quad (1.63)$$

Effectivement, les premiers travaux de photométrie astronomique [Van Diggelen 51, Hapke 63, Rindfleisch 66] utilisaient des inconnues angulaires, mais le formalisme différentiel utilisant ces inconnues serait assez lourd. Quant aux coordonnées *cartésiennes* de la normale, elles sont rarement utilisées [Brooks 85] car la contrainte non linéaire  $\|\vec{v}\| = 1$  alourdit elle aussi les calculs.

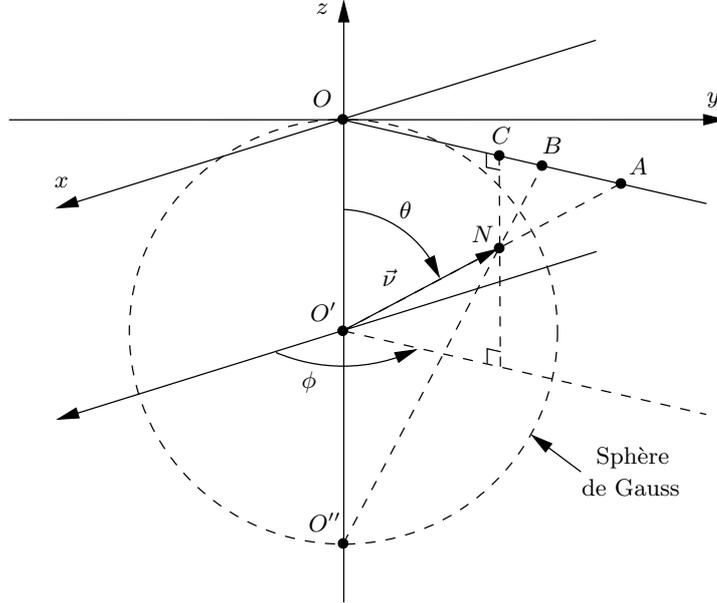


FIG. 1.18 – L’extrémité  $N$  de la normale  $\vec{v}$  se projette en  $A$  par projection gnomonique, en  $B$  par projection stéréographique et en  $C$  par projection orthogonale sur le plan  $Oxy$ .

En fait, il est plus judicieux de paramétrer la normale  $\vec{v}$  en projetant son extrémité  $N$  sur le plan  $Oxy$  (cf. figure 1.18). Le point  $A = (p,q,0)$  est obtenu par projection « gnomonique » de  $N$  (projection centrale de centre  $O'$  sur  $Oxy$ ). Il permet de définir le paramétrage  $(p,q)$ . Sachant que  $\overrightarrow{O'A}$  et  $\vec{v}$  sont parallèles et de même sens, on obtient après normalisation :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} [p \quad q \quad 1]^T. \quad (1.64)$$

Le point  $B = (f,g,0)$  est obtenu par projection « stéréographique » de  $N$  (projection centrale de centre  $O'' = (0,0,-2)$  sur  $Oxy$ ). Il permet de définir le paramétrage  $(f,g)$ . En écrivant que  $\overrightarrow{O''O'} + \vec{v}$  est parallèle à  $\overrightarrow{O''B}$ , on trouve :

$$\vec{v} = \frac{1}{4+f^2+g^2} [4f \quad 4g \quad 4-f^2-g^2]^T. \quad (1.65)$$

Enfin, le point  $C = (l,m,0)$ , qui est obtenu par projection orthogonale de  $N$  sur  $Oxy$ , permet de définir le paramétrage  $(l,m)$ . Comme  $l$  et  $m$  sont égaux aux deux premières coordonnées de  $\vec{v}$ , on obtient :

$$\vec{v} = \left[ l \quad m \quad \sqrt{1-l^2-m^2} \right]^T. \quad (1.66)$$

Ces trois paramétrages ont été utilisés en SFS, mais il convient d’examiner leur *validité*. Le paramétrage  $(p,q)$  présente un défaut évident : il ne permet de mettre en bijection avec  $\mathbb{R}^2$  que les normales dont l’extrémité  $N$  se trouve sur l’hémisphère nord de la sphère de Gauss, équateur exclu.

Or, le modèle sténopé ne s'oppose pas à ce que l'extrémité  $N$  de la normale d'un point objet visible sur une photographie se trouve sur l'hémisphère sud de la sphère de Gauss, comme le prouve l'exemple de la figure 1.19. Le paramétrage  $(f,g)$  ne présente pas ce défaut : il constitue une bijection entre la sphère de Gauss, privée de son pôle sud, et  $\mathbb{R}^2$ . Enfin, le paramétrage  $(l,m)$  constitue une bijection entre l'hémisphère nord de la sphère de Gauss, équateur inclus, et le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ . Paradoxalement, bien que le paramétrage  $(p,q)$  ne semble pas être totalement satisfaisant de ce point de vue, c'est lui qui est le plus souvent utilisé en SFS. Le choix de ce paramétrage par Horn dès ses premiers travaux [Horn 75, Horn 79], qui l'a ensuite popularisé avec la « carte de réflectance », a sans doute influé durablement sur l'ensemble de la communauté, mais nous verrons que le paramétrage  $(p,q)$  est effectivement plus commode que les paramétrages  $(f,g)$  et  $(l,m)$ .

Il se trouve que, dans la totalité de ses travaux sur le SFS (qui sont considérables!), Horn n'a jamais tenu compte de la perspective. Plus précisément, il assimile la projection perspective, qui est celle du modèle sténopé, à une autre projection dite « orthographique ». Cette approximation n'est pas toujours réaliste, loin s'en faut, mais nous allons voir qu'elle simplifie considérablement la modélisation.

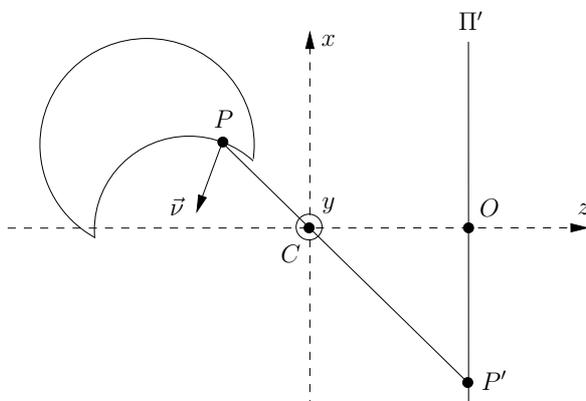


FIG. 1.19 – Exemple d'un point objet visible pour lequel l'extrémité de la normale se trouve sur l'hémisphère sud de la sphère de Gauss.

### 1.4.3 Projection orthographique

La **projection orthographique** est la combinaison d'une projection orthogonale sur le « plan de mise au point »  $\Pi$ , suivie d'une projection centrale, de centre  $C$ , sur le plan image  $\Pi'$  conjugué de  $\Pi$  (cf. figure 1.20-a). Projection perspective et projection orthographique sont équivalentes « à grande distance » (cf. figure 1.20-b), c'est-à-dire lorsqu'on s'éloigne de la scène en maintenant le grandissement transversal  $G_t$  constant<sup>19</sup>.

Le paramétrage  $(p,q)$  de la normale semble *a priori* bien adapté à la projection orthographique, puisque l'extrémité  $N$  de la normale, pour les points qui sont visibles par cette projection, se trouve sur l'hémisphère nord de la sphère de Gauss, à l'exception toutefois des « limbes », c'est-à-dire des points pour lesquels l'extrémité de la normale se trouve sur l'équateur de la sphère de Gauss [Ikeuchi 81]. En d'autres termes, l'exemple de la figure 1.19 ne peut pas se produire avec la projection orthographique. Mais nous allons voir que l'approximation de la projection perspective par la projection orthographique présente un autre avantage : elle permet de donner une interprétation très simple des paramètres  $(p,q)$ .

19. C'est ce phénomène qui explique la sensation d'écrasement du relief que procurent les photographies prises avec un téléobjectif.

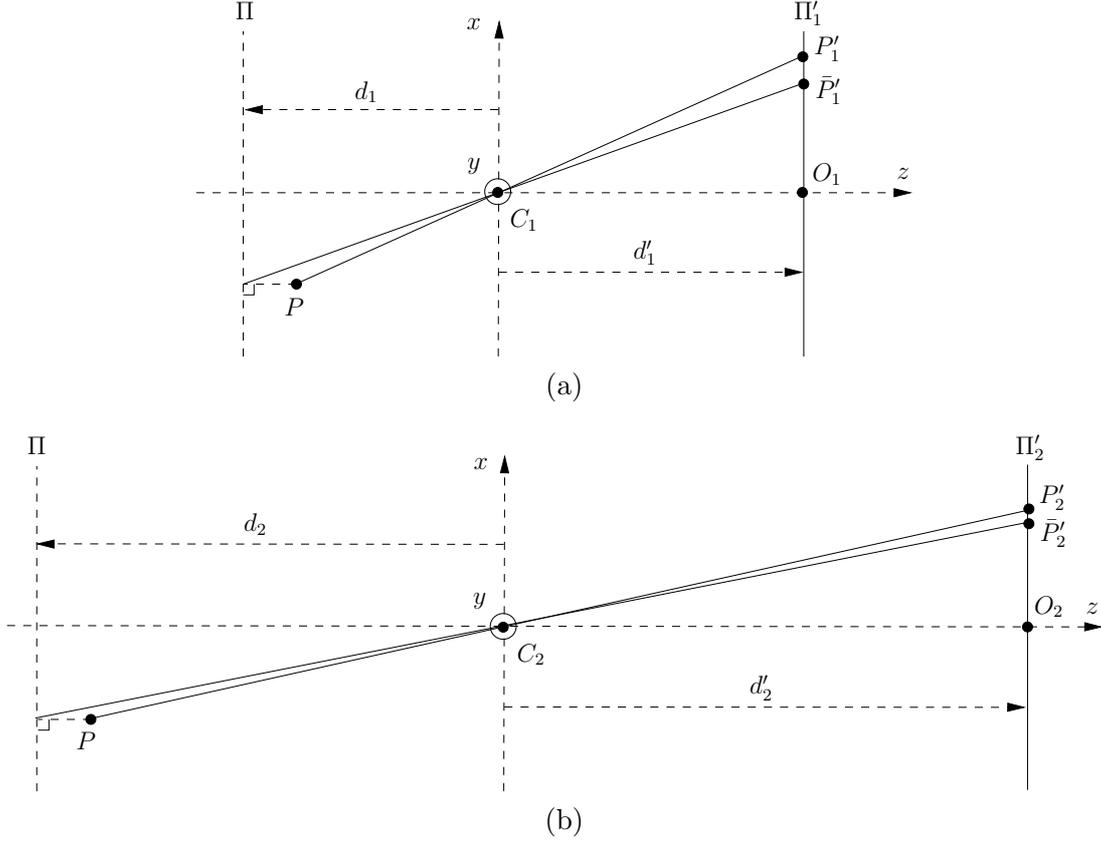


FIG. 1.20 – (a) Les points images  $P'_1$  et  $\bar{P}'_1$  sont obtenus, respectivement, par projection perspective et par projection orthographique de  $P$ . (b) La scène photographiée est la même qu'en (a), mais on utilise une plus grande distance focale et on s'éloigne de la scène, de telle sorte que le grandissement transversal  $G_t$  reste constant. On constate que les points  $P'_2$  et  $\bar{P}'_2$  sont plus rapprochés que les points  $P'_1$  et  $\bar{P}'_1$ .

Soit  $P'$  un point image de coordonnées  $(x,y)$  dans un repère orthonormé  $Oxy$  ayant pour origine le point principal  $O$ , et soit  $P$  le point objet conjugué de  $P'$  par projection orthographique. Les coordonnées cartésiennes  $(X(x,y), Y(x,y), Z(x,y))$  de  $P$  dans le repère  $Cxyz$  sont telles que :

$$\begin{cases} X(x,y) = \frac{d}{d'} x, \\ Y(x,y) = \frac{d}{d'} y. \end{cases} \quad (1.67)$$

Notons  $G_t$  le grandissement transversal  $d'/d$ . Le produit vectoriel de  $\partial_x \overrightarrow{OP}$  par  $\partial_y \overrightarrow{OP}$ , qui est normal à la surface de la scène, vaut<sup>20</sup> :

$$\partial_x \overrightarrow{OP} \wedge \partial_y \overrightarrow{OP} = [-Z_x/G_t \quad -Z_y/G_t \quad 1/G_t^2]^T, \quad (1.68)$$

où  $Z_x$  et  $Z_y$  désignent les coordonnées du gradient  $\nabla Z$  de la fonction  $Z$ . En normalisant l'expression (1.68) du vecteur  $\partial_x \overrightarrow{OP} \wedge \partial_y \overrightarrow{OP}$ , et sachant que, sous l'hypothèse de la projection orthographique, la

20. Les dépendances en  $x$  et  $y$  sont omises, afin d'alléger les notations.

troisième coordonnée de  $\vec{\nu}$  est positive ou nulle pour tout point visible, on obtient :

$$\vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + G_t^2 \|\nabla Z\|^2}} [-G_t Z_x \quad -G_t Z_y \quad 1]^T. \quad (1.69)$$

Cette expression différentielle de  $\vec{\nu}$  s'identifie facilement à (1.64), ce qui permet de donner aux paramètres  $(p, q)$  l'interprétation suivante :

$$\begin{cases} p = -G_t Z_x, \\ q = -G_t Z_y. \end{cases} \quad (1.70)$$

Le paramétrage  $(p, q)$  est donc particulièrement bien adapté à la projection orthographique. Je préconise d'appeler les égalités (1.70) les « équations orthographiques du gradient ». Venons-en maintenant à la notion de « carte de réflectance ».

#### 1.4.4 Carte de réflectance

La **carte de réflectance** est introduite dans [Horn 77], mais cette notion est déjà en germe dans [Horn 75], où Horn cherche à modéliser le problème du SFS par une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, pour la résoudre ensuite avec une méthode de résolution classique des EDP du premier ordre, en l'occurrence la « méthode des caractéristiques », dont nous reparlerons dans le chapitre 2. Il estime que cela impose à l'équation en question de s'écrire sous la forme  $F(x, y, Z, p, q) = 0$ , où  $p$  et  $q$  désignent les deux dérivées partielles de  $Z$ . Comme nous allons le voir, cette affirmation doit être nuancée.

La carte de réflectance est définie par Horn comme une fonction<sup>21</sup>  $\mathcal{R}(p, q)$  égale au second membre de l'équation approchée du niveau de gris (1.52), c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}(p, q) = \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} \int_{\phi_i=0}^{2\pi} f(\theta_i, \phi_i, \theta_c, \phi_c) \bar{L}^1(\vec{u}_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i. \quad (1.71)$$

Il se trouve que cette définition est inadaptée aux cinq équations locales du SFS qui font également intervenir l'inconnue  $r$ . Autrement dit, seules les équations (1.56) et (1.60) valident la notion de carte de réflectance. Dans [Horn 79], où Horn et Sjöberg établissent l'expression analytique d'un certain nombre de cartes de réflectance, trois types d'éclairage sont étudiés : une onde plane uniforme, une onde sphérique uniforme et une onde hémisphérique uniforme. Or, ces deux dernières ondes ne sont pas réalistes, car elles violent le principe de conservation de l'énergie lumineuse dans un milieu non absorbant. Le seul type d'éclairage pour lequel le second membre de l'égalité (1.71) ne dépend pas de  $r$ , et peut effectivement s'écrire comme une fonction de  $p$  et  $q$  seulement, est bien une onde plane uniforme<sup>22</sup>.

Comme je l'ai déjà dit, Horn ne tient pas compte de la perspective dans ses travaux sur le SFS. Néanmoins, on pourrait sans aucun problème généraliser la carte de réflectance à la projection perspective, dans le cas d'une onde lumineuse plane uniforme. Par conséquent, ce qui limite l'intérêt de la carte de réflectance n'est pas qu'elle utilise la projection orthographique, mais bien qu'elle suppose implicitement que la scène est éclairée par une onde plane uniforme. Pour un éclairage quelconque, elle doit être remplacée par la « carte de réflectance généralisée »  $\bar{\mathcal{R}}$ , dépendant des trois inconnues  $r, p$  et  $q$ , qui permet effectivement de réécrire l'équation approchée du niveau de gris (1.52) sous la forme suivante :

$$g = \bar{\mathcal{R}}(r, p, q). \quad (1.72)$$

21. Le terme « carte » est une traduction approximative de l'anglais *map*, qui signifie plutôt « fonction » dans le cas présent.

22. Cela est d'ailleurs attesté par Horn et Brooks, à la page 176 de [Horn 89b].

### 1.4.5 Équation eikonale et pseudo-équation eikonale

La vraie simplification que procure la projection orthographique n'est pas de modéliser le SFS par la carte de réflectance, mais vient de ce que l'expression différentielle (1.69) de  $\vec{\nu}$  est très simple, ce qui laisse augurer que les modèles différentiels du SFS seront très simples eux aussi. Mon propos n'étant pas de faire ici une énumération de modèles, je m'en tiendrai à prendre comme exemple l'équation (1.60), qui est la plus simple des équations locales du SFS.

Sous l'hypothèse de la projection orthographique, le niveau de gris normalisé  $g$  de la photographie d'une scène lambertienne éclairée par une onde plane uniforme  $\vec{S}_0 = S_0 \vec{\omega}$ , où  $S_0 \geq 0$  et  $\vec{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  est un vecteur unitaire, est lié à la géométrie de la scène par l'équation suivante, que l'on peut établir en utilisant (1.60) et (1.69) :

$$\frac{\pi g}{\rho_{\text{lamb}} S_0} \sqrt{1 + G_t^2 \|\nabla Z\|^2} + G_t [\omega_1 \ \omega_2]^T \cdot \nabla Z = \omega_3. \quad (1.73)$$

Ce premier « modèle différentiel » du SFS a été assez souvent utilisé [Rouy 88, Lions 93, Camilli 96, Prados 05].

Dans le cas d'un éclairage « frontal », c'est-à-dire lorsque  $\vec{\omega} = [0 \ 0 \ 1]^T$ , l'équation (1.73) donne :

$$G_t^2 \|\nabla Z\|^2 = \left( \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi g} \right)^2 - 1. \quad (1.74)$$

Ce deuxième modèle différentiel du SFS est la célèbre **équation eikonale**, qui est souvent écrite sous une forme simplifiée dans laquelle le grandissement transversal  $G_t$  est assimilé à 1. La première mention explicite de cette équation en SFS est due à Bruss [Bruss 82].

L'équation eikonale n'est pas spécifique aux matériaux lambertiens [Oliensis 91b]. Au contraire, elle modélise la quasi-totalité des scènes éclairées frontalement par une onde plane uniforme. En effet, si tel est le cas, l'équation (1.56) se simplifie notablement, sous l'hypothèse de la projection orthographique, puisque  $\theta_{i,0} = \theta_c$  et  $\phi_{i,0} = \phi_c$ . Pour un matériau isotrope, on peut donc réécrire cette équation :

$$g = \bar{f}(\theta_{i,0}) S_0, \quad (1.75)$$

où la fonction  $\bar{f}$  est définie par l'égalité (1.54). Dans le cas d'un matériau lambertien, on déduit de (1.60) et (1.75) que la fonction  $\bar{f}$  a pour expression :

$$\bar{f}_{\text{lamb}}(\theta_{i,0}) = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} \cos \theta_{i,0}, \quad (1.76)$$

qui est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ . Or, il se trouve que cette propriété de décroissance stricte est également vraie pour la quasi-totalité des matériaux, auquel cas la fonction  $\bar{f}$  est inversible. De (1.75), il vient :

$$\theta_{i,0} = \bar{f}^{-1}(g/S_0). \quad (1.77)$$

Par ailleurs, pour une onde plane uniforme frontale  $\vec{S}_0 = S_0 [0 \ 0 \ 1]^T$ , l'expression (1.69) de  $\vec{\nu}$  fournit l'égalité suivante :

$$\cos \theta_{i,0} = \frac{1}{\sqrt{1 + G_t^2 \|\nabla Z\|^2}}. \quad (1.78)$$

De (1.77) et (1.78), on tire :

$$G_t^2 \|\nabla Z\|^2 = \frac{1}{\cos^2[\bar{f}^{-1}(g/S_0)]} - 1, \quad (1.79)$$

qui est une équation eikonale plus générale que (1.74).

Nous avons utilisé l'expression différentielle (1.69) de la normale pour établir les EDP (1.73) et (1.74), mais nous pouvons utiliser n'importe quelle autre expression de la normale. En utilisant l'expression (1.64), et en supposant encore que l'éclairage est frontal, nous déduisons de (1.60) l'équation suivante :

$$p^2 + q^2 = \left( \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi g} \right)^2 - 1. \quad (1.80)$$

Ce « modèle non différentiel » du SFS diffère fondamentalement de (1.74), car il ne s'agit pas d'une EDP. Je propose de l'appeler la **pseudo-équation eikonale**.

Il apparaît que l'utilisation d'autres paramétrages de la normale que  $(p,q)$  n'a pas d'intérêt, car on peut difficilement imaginer de trouver des paramètres qui soient liés à  $Z$  plus simplement que par les équations orthographiques du gradient (1.70). Ikeuchi et Horn ont utilisé le paramétrage  $(f,g)$  [Ikeuchi 81], mais pour des raisons relatives à la *résolution* du problème. Quant au paramétrage  $(l,m)$ , il n'a été utilisé que par Smith [Smith 82] et s'avère d'un intérêt limité.

Alors que l'équation eikonale et la pseudo-équation eikonale sont très souvent citées dans les articles, nous venons de voir qu'elles ne constituent que des modèles *approchés* du SFS. Il est donc temps maintenant d'en venir aux modèles *exacts*, c'est-à-dire de tenir compte de la perspective.

#### 1.4.6 Projection perspective

Commençons par établir les expressions différentielles de la normale  $\vec{v}$  sous l'hypothèse de la **projection perspective**. Si le choix du paramétrage de la normale est une question relativement épineuse, le choix des variables est assez naturel car, en vision monoculaire, on manipule un seul repère lié à l'appareil photographique, ce qui évite les changements de repère de la vision multi-oculaire. Néanmoins, il est probable que le choix quasi-systématique des coordonnées cartésiennes dans le plan image provienne de considérations pratiques, puisque les pixels forment généralement une grille régulière carrée. Si l'on ne tient pas compte de la forme des pixels, alors il est également intéressant de repérer un point image  $P'$  par sa colatitude  $\theta$  et sa longitude  $\phi$ , relativement au repère  $Cxyz$  (cf. figure 1.21). Notons  $R(\theta,\phi)$  la profondeur du point objet  $P$  conjugué de  $P'$  par projection perspective. La fonction  $R$  vérifie :

$$\overrightarrow{CP} = -R(\theta,\phi) \vec{u}_c(\theta,\phi). \quad (1.81)$$

Pour simplifier, notons  $\vec{u}$  le vecteur  $\vec{u}_c$ , et considérons le repère sphérique local  $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ . Les dérivées partielles de  $\vec{u}$  valent, en omettant les dépendances en  $\theta$  et  $\phi$  :

$$\begin{cases} \partial_\theta \vec{u} = \vec{v}, \\ \partial_\phi \vec{u} = \sin \theta \vec{w}. \end{cases} \quad (1.82)$$

Les égalités (1.81) et (1.82) nous permettent d'exprimer les coordonnées du produit vectoriel de  $\partial_\theta \overrightarrow{OP}$  par  $\partial_\phi \overrightarrow{OP}$  dans le repère  $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$  :

$$\partial_\theta \overrightarrow{OP} \wedge \partial_\phi \overrightarrow{OP} = [R^2 \sin \theta \quad -R R_\theta \sin \theta \quad -R R_\phi]^T_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}. \quad (1.83)$$

En normalisant ce vecteur, on obtient l'expression de  $\vec{v}$  au signe près :

$$\vec{v} = \frac{\epsilon}{\sqrt{(R^2 + R_\theta^2) \sin^2 \theta + R_\phi^2}} [R \sin \theta \quad -R_\theta \sin \theta \quad -R_\phi]^T_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}, \quad (1.84)$$

où  $\epsilon = \pm 1$ . Or, tout point objet visible vérifie la condition  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PC} \geq 0$  (cf. figure 1.21), qui s'écrit :

$$\frac{\epsilon R^2 \sin \theta}{\sqrt{(R^2 + R_\theta^2) \sin^2 \theta + R_\phi^2}} \geq 0. \quad (1.85)$$

Comme  $\theta \in [0, \pi]$ , on déduit de (1.85) que  $\epsilon = 1$ . L'expression de  $\vec{v}$  est donc, finalement :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(R^2 + R_\theta^2) \sin^2 \theta + R_\phi^2}} [R \sin \theta \quad -R_\theta \sin \theta \quad -R_\phi]^T_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}. \quad (1.86)$$

Nous verrons à la fin du paragraphe 1.4.7 que cette expression différentielle de  $\vec{v}$  permet de transformer très simplement l'équation (1.59) en EDP.

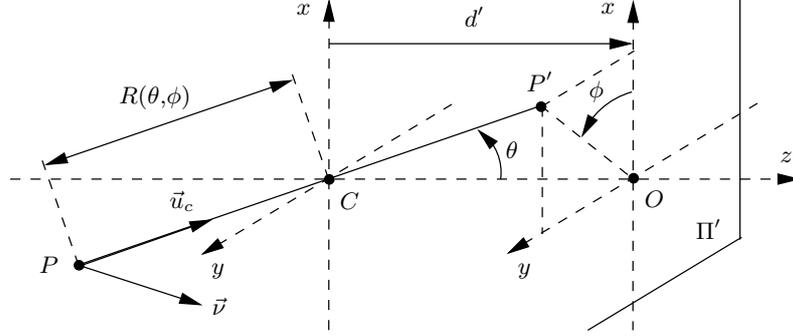


FIG. 1.21 – Utilisation des coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$  pour repérer un point image  $P'$ .

Si l'on cherche une expression différentielle de  $\vec{v}$  relativement aux coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  du point image  $P'$ , il est plus commode d'utiliser les coordonnées cartésiennes  $(X, Y, Z)$  du point objet conjugué  $P$  que la distance  $R$ . Ces coordonnées vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} X(x, y) = \frac{Z(x, y)}{d'} x, \\ Y(x, y) = \frac{Z(x, y)}{d'} y. \end{cases} \quad (1.87)$$

Le produit vectoriel de  $\partial_x \overrightarrow{OP}$  par  $\partial_y \overrightarrow{OP}$  a donc pour coordonnées, dans le repère  $Cxyz$  :

$$\partial_x \overrightarrow{OP} \wedge \partial_y \overrightarrow{OP} = \frac{Z}{d'} [-d' Z_x \quad -d' Z_y \quad Z + x Z_x + y Z_y]^T. \quad (1.88)$$

En normalisant ce vecteur, on obtient l'expression de  $\vec{v}$  au signe près :

$$\vec{v} = \frac{\epsilon}{\sqrt{(Z + x Z_x + y Z_y)^2 + d'^2 \|\nabla Z\|^2}} [-d' Z_x \quad -d' Z_y \quad Z + x Z_x + y Z_y]^T. \quad (1.89)$$

Ici, il est commode de caractériser un point visible par la condition  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{CP'} \geq 0$ , qui s'écrit :

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{(Z + x Z_x + y Z_y)^2 + d'^2 \|\nabla Z\|^2}} [-d' x Z_x - d' y Z_y + d' (Z + x Z_x + y Z_y)] \geq 0. \quad (1.90)$$

Comme  $d' Z < 0$ , on déduit de (1.90) que  $\epsilon = -1$ . Finalement, on obtient l'expression différentielle suivante pour  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(Z + x Z_x + y Z_y)^2 + d'^2 \|\nabla Z\|^2}} [d' Z_x \quad d' Z_y \quad -(Z + x Z_x + y Z_y)]^T. \quad (1.91)$$

Nous allons voir que cette expression différentielle de  $\vec{v}$  permet de transformer l'équation (1.60) en EDP.

### 1.4.7 Équation eikonale perspective

Sous l'hypothèse de la projection perspective, le niveau de gris normalisé  $g$  de la photographie d'une scène lambertienne éclairée par une onde plane uniforme  $\vec{S}_0 = S_0 [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  est lié à la géométrie de la scène par l'équation suivante, que l'on peut établir grâce à (1.60) et (1.91) :

$$\frac{\pi g}{\rho_{\text{lamb}} S_0} \sqrt{(Z + x Z_x + y Z_y)^2 + d'^2 \|\nabla Z\|^2} - d' [\omega_1 \ \omega_2]^T \cdot \nabla Z = -(Z + x Z_x + y Z_y) \omega_3. \quad (1.92)$$

Pour les points objets où l'extrémité de la normale se trouve sur l'hémisphère nord de la sphère de Gauss, équateur exclu, c'est-à-dire d'après (1.91), pour les points tels que  $Z + x Z_x + y Z_y < 0$ , on peut réécrire l'équation (1.92) sous la forme :

$$\frac{\pi g}{\rho_{\text{lamb}} S_0} \sqrt{1 + \left( \frac{d'}{Z + x Z_x + y Z_y} \right)^2 \|\nabla Z\|^2} + \frac{d'}{Z + x Z_x + y Z_y} [\omega_1 \ \omega_2]^T \cdot \nabla Z = \omega_3. \quad (1.93)$$

On remarque que l'équation (1.93) est strictement équivalente à l'équation (1.73), si on remplace  $G_t$  par  $d'/(Z + x Z_x + y Z_y)$ .

Dans le cas où  $\vec{\omega} = [0 \ 0 \ 1]^T$ , l'équation (1.93) se réécrit :

$$\left( \frac{d'}{Z + x Z_x + y Z_y} \right)^2 \|\nabla Z\|^2 = \left( \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi g} \right)^2 - 1. \quad (1.94)$$

Trois équipes de recherche ont établi simultanément (et indépendamment les unes des autres!) l'équation (1.94) [Prados 03, Tankus 03, Courteille 04]. Je préconise de l'appeler l'**équation eikonale perspective**. Il est notable que, contrairement à l'équation eikonale (1.74), l'équation eikonale perspective est spécifique aux matériaux lambertiens.

Nous avons utilisé l'expression différentielle (1.91) de la normale pour établir les EDP (1.93) et (1.94). Or, nous aurions pu utiliser n'importe quelle autre expression de la normale, à la seule restriction près que la prise en compte de la perspective autorise l'extrémité de la normale à se trouver n'importe où sur la sphère de Gauss, ce que ne permet pas le paramétrage  $(p, q)$ . Cependant, l'exemple de la figure 1.19 est suffisamment rare pour qu'en pratique, nous puissions le négliger. Il s'avère que les équations obtenues en utilisant une expression non différentielle de la normale sont les mêmes avec la projection perspective ou avec la projection orthographique. Par exemple, la pseudo-équation eikonale est encore valide en SFS perspectif [Courteille 07]. Le paramétrage  $(p, q)$  s'avère à nouveau le plus simple. En effet, en identifiant les expressions (1.64) et (1.91) de la normale, on trouve facilement, pour les points tels que  $Z + x Z_x + y Z_y < 0$  :

$$\begin{cases} p = -\frac{d'}{Z + x Z_x + y Z_y} Z_x, \\ q = -\frac{d'}{Z + x Z_x + y Z_y} Z_y. \end{cases} \quad (1.95)$$

Je préconise d'appeler les égalités (1.95) les « équations perspectives du gradient » [Durou 07a].

Enfin, sous l'hypothèse de la projection perspective, le niveau de gris normalisé  $g$  de la photographie d'une scène lambertienne éclairée par une source ponctuelle, isotrope, située au centre optique, est lié à la géométrie de la scène par l'équation suivante, que l'on peut établir en utilisant (1.59) et (1.86), et en remarquant que  $\cos \theta_i = \vec{\nu} \cdot \vec{u}$  :

$$R \sqrt{R^2 + R_\theta^2 + \frac{R_\phi^2}{\sin^2 \theta}} = \frac{I \rho_{\text{lamb}}}{4 \pi^2 g}. \quad (1.96)$$

Cette EDP en  $R$  est équivalente à l'EDP en  $Z$  établie par Prados et Faugeras dans [Prados 06c]. Cependant, comme je l'ai déjà signalé, la résolution *numérique* de l'équation (1.96) risque d'être pénalisée par l'utilisation des variables  $(\theta, \phi)$ , qui ne sont pas adaptées à la répartition régulière des pixels.

## 1.5 Conclusion

La démarche menée dans ce chapitre nous a permis d'établir pas à pas les modèles du SFS les plus souvent rencontrés. Le point majeur à retenir de cette analyse concerne les réflexions multiples. Leur influence sur le niveau de gris est souvent modérée [Courteille 06a], mais il est *nécessaire* de les négliger pour pouvoir établir les différents modèles du SFS. Sans cette hypothèse, on ne pourrait pas formuler le SFS autrement que sous la forme condensée (1.48) ou sous la forme développée (1.49) de l'équation du niveau de gris.

Le deuxième point important concerne la prise en compte de la perspective. Les modèles non différentiels du SFS sont indépendants du type de projection, alors que les modèles différentiels en dépendent. L'explication de ce paradoxe vient de ce que les équations du gradient, qui s'écrivent (1.70) en projection orthographique et (1.95) en projection perspective, dépendent bien du type de projection.

Pour finir, nous pouvons dresser la liste des conditions opératoires requises pour que le SFS soit modélisé par l'équation eikonale (1.74) :

- La photographie est nette.
- Un étalonnage photométrique de l'appareil photographique a été effectué.
- Les réflexions multiples sont négligeables.
- La surface est lambertienne.
- L'éclairage est parallèle, uniforme et frontal.
- L'effet de la perspective est négligeable.

Il manque à cette liste une hypothèse qui a toujours été considérée comme implicite dans ce chapitre. Sans elle, la notion même de normale n'aurait pas de sens :

- La surface de la scène est différentiable.

## Chapitre 2

# Analyse du problème

Une question récurrente concernant le SFS consiste à savoir s'il s'agit d'un problème bien ou mal posé. Selon la définition de Hadamard [Hadamard 64], un problème est « bien posé » s'il admet une solution unique et si cette solution est « bien conditionnée », c'est-à-dire stable vis-à-vis de petites variations sur les données. À ma connaissance, aucun article ne traite de façon théorique du conditionnement des solutions en SFS<sup>1</sup>. La stabilité des méthodes de résolution numérique est généralement testée, mais ce sont les solutions *exactes* qui nous intéressent ici, et non les solutions *approchées*. Dans la mesure où il n'y sera plus question de conditionnement, ce chapitre vise donc à effectuer l'étude du nombre de solutions (exactes) du SFS.

Même s'il est *a priori* indifférent de mener cette étude pour les modèles différentiels ou non différentiels, ce sont les EDP qui s'y prêtent le mieux. C'est même la « méthode des caractéristiques », méthode bien connue de résolution des EDP du premier ordre, qui a été la plus souvent utilisée pour ce faire [Blake 85, Oliensis 90, Horn 93]. La résolution par un développement en série entière a également été utilisée [Durou 00]. Quant aux nouvelles méthodes de résolution des EDP du premier ordre, elles ont permis d'élargir l'éventail des preuves d'existence/unicité de la solution [Lions 93, Falcone 97, Prados 06b].

L'analyse des modèles non différentiels du SFS est menée dans la première partie de ce chapitre, celle des modèles différentiels dans la deuxième partie.

### 2.1 Analyse des modèles non différentiels du SFS

Nous avons vu, dans le chapitre 1, qu'on peut modéliser le problème du SFS sous forme différentielle ou sous forme non différentielle. Par exemple, dans le cas d'une surface lambertienne éclairée de face par une onde plane uniforme, sous l'hypothèse de la projection orthographique, le modèle différentiel du SFS est l'équation eikonale (1.74), alors que le modèle non différentiel est la pseudo-équation eikonale (1.80). Ces deux modèles sont équivalents si l'on adjoint à la pseudo-équation eikonale les équations orthographiques du gradient (1.70) : en éliminant  $p$  et  $q$ , on retrouve immédiatement l'équation eikonale. Les « modèles non différentiels complets » du SFS comportent deux inconnues  $(p, q)$  de plus que les modèles différentiels, mais ces deux inconnues *intermédiaires* sont liées à l'inconnue  $Z$  par les deux équations du gradient. Ces modèles ne sont donc ni mieux ni plus mal posés que les modèles différentiels. Bien sûr, il semble plus commode d'effectuer l'analyse du problème sur les modèles différentiels, qui comportent moins d'équations et moins d'inconnues. Néanmoins, nous commençons ce chapitre par l'analyse des modèles non différentiels du SFS.

---

1. Je reviendrai néanmoins sur cette question dans le chapitre 3.

### 2.1.1 Termineurs et points singuliers

Le modèle non différentiel le plus général du SFS s'écrit sous la forme (1.72). Cette équation comportant trois inconnues  $r$ ,  $p$  et  $q$ , admet *a priori* un nombre infini de solutions. Par conséquent, sa résolution constitue un problème mal posé. Étudions de plus près le cas particulier où la scène est éclairée par une onde plane uniforme, auquel cas l'équation (1.72) prend la forme particulière suivante<sup>2</sup> :

$$\mathcal{R}(p,q) = g. \quad (2.1)$$

Les variations de la carte de réflectance  $\mathcal{R}$  peuvent être représentées par des courbes du plan  $pq$  correspondant à une valeur donnée de  $g$  [Horn 75, Woodham 80].

Plaçons-nous dans le cas d'une surface lambertienne. Le niveau de gris normalisé  $g$  est donné par l'équation (1.60). En caractérisant l'onde plane uniforme par  $\vec{S}_0 = S_0 [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ , et en utilisant l'expression (1.64) de  $\vec{\nu}$ , l'équation (1.60) se réécrit :

$$\frac{\pi g}{\rho_{\text{lamb}} S_0} \sqrt{1 + p^2 + q^2} - (\omega_1 p + \omega_2 q) = \omega_3. \quad (2.2)$$

Cette équation, qui est la version non différentielle du modèle différentiel (1.73), constitue bien un cas particulier d'équation de la forme (2.1). Les courbes correspondant à une valeur donnée du niveau de gris normalisé  $g$  sont donc des quadriques d'équation :

$$\beta^2 (1 + p^2 + q^2) - (\omega_1 p + \omega_2 q + \omega_3)^2 = 0, \quad (2.3)$$

où le coefficient  $\beta$  est défini par :

$$\beta = \frac{\pi g}{\rho_{\text{lamb}} S_0}. \quad (2.4)$$

Il ressort de (1.60) et (2.4) que :

$$\beta = \cos \theta_{i,0}. \quad (2.5)$$

De (2.4) et (2.5), on déduit que  $\beta \in [0,1]$ . Pour  $\beta = 0$ , c'est-à-dire pour un point de niveau de gris normalisé  $g = 0$ , l'équation (2.3) dégénère en :

$$\omega_1 p + \omega_2 q + \omega_3 = 0. \quad (2.6)$$

Si l'éclairage n'est pas frontal, c'est-à-dire si  $(\omega_1, \omega_2) \neq (0,0)$ , alors (2.6) est l'équation d'une droite  $\Delta_{\text{term}}$  du plan  $pq$ , qui correspond aux normales  $\vec{\nu}$  telles que  $\cos \theta_{i,0} = 0$ , d'après (2.5). Les images des points où  $\cos \theta_{i,0} = 0$ , c'est-à-dire où  $\vec{\nu} \cdot \vec{S}_0 = 0$ , constituent les **termineurs**<sup>3</sup>. La figure 2.1 montre la localisation de ces points sur une photographie de la Lune.

Pour tracer les quadriques d'équation (2.3), il est commode de choisir le repère  $Cxyz$  de telle sorte que  $\omega_1 = 0$ , sans perte de généralité. Si  $\omega_1 = 0$  et  $\beta \neq 0$ , alors on peut réécrire (2.3) sous la forme suivante :

$$p^2 + (1 - \varpi_2^2) q^2 - 2 \varpi_2 \varpi_3 q + 1 - \varpi_3^2 = 0, \quad (2.7)$$

où  $\varpi_2$  et  $\varpi_3$  sont définis par :

$$\begin{cases} \varpi_2 = \frac{\omega_2}{\beta}, \\ \varpi_3 = \frac{\omega_3}{\beta}. \end{cases} \quad (2.8)$$

2. Comme cela a été vu dans le paragraphe 1.4.4, la notion de « carte de réflectance »  $\mathcal{R}$  est valide pour ce type d'éclairage.

3. Ces points sont éclairés « en éclairage rasant » (cf. paragraphe 1.3.5).

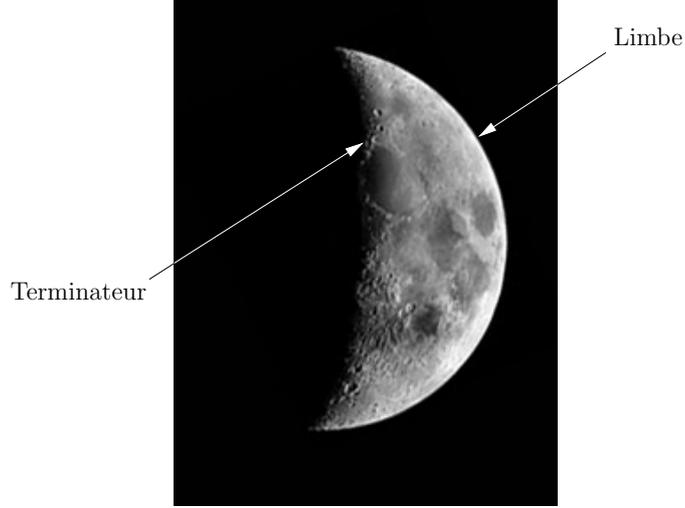


FIG. 2.1 – *Un terminateur est un contour généralement assez peu net, qui sépare les points éclairés des points non éclairés. Un limbe est généralement beaucoup plus net. Cette photographie est la propriété intellectuelle de Thierry Lambert.*

L'équation (2.7) est celle d'une ellipse si  $\varpi_2^2 < 1$ , d'une parabole si  $\varpi_2^2 = 1$  et d'une branche d'hyperbole si  $\varpi_2^2 > 1$ . Étudions de plus près le cas des ellipses, en réécrivant l'équation (2.7) sous sa forme canonique :

$$p^2 + (1 - \varpi_2^2) \left( q - \frac{\varpi_2 \varpi_3}{1 - \varpi_2^2} \right)^2 = \frac{\varpi_2^2 + \varpi_3^2 - 1}{1 - \varpi_2^2}. \quad (2.9)$$

Le second membre de cette équation s'annule si :

$$\varpi_2^2 + \varpi_3^2 = 1, \quad (2.10)$$

auquel cas l'ellipse se réduit à un point. Comme le vecteur  $\vec{\omega} = [0 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  est normé, on déduit de (2.8) et (2.10) :

$$\beta = 1. \quad (2.11)$$

D'après (2.5), les points vérifiant l'égalité (2.11) sont ceux où  $\vec{\nu}$  et  $\vec{S}_0$  sont parallèles et de même sens. On appelle ces points les **points singuliers**. L'intérêt des points singuliers est que la normale y est connue sans ambiguïté. En effet, lorsque  $\beta = 1$ , l'équation (2.9) n'est vérifiée que si  $p$  et  $q$  prennent les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{cases} p_{\text{sing}} = 0, \\ q_{\text{sing}} = \frac{\omega_2 \omega_3}{1 - \omega_2^2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

La figure 2.2 montre l'allure de quelques-unes des quadriques d'équation (2.3), lorsque  $\vec{\omega} = [0 \ \sqrt{2}/2 \ \sqrt{2}/2]^T$  (éclairage « à 45 degrés »).

Pour une valeur donnée du niveau de gris normalisé  $g$ , les inconnues  $(p, q)$  se trouvent donc généralement sur une courbe. Cela traduit graphiquement le caractère mal posé des modèles non différentiels du SFS, à l'exception des points singuliers. On pourrait être tenté d'effectuer un changement d'inconnues, de telle sorte que chacune de ces courbes corresponde à une valeur unique de l'une des inconnues. Dans le cas d'une surface lambertienne, on pourrait par exemple utiliser les coordonnées angulaires  $(\theta_{i,0}, \phi_{i,0})$  de la normale par rapport à la direction de  $\vec{S}_0$ , puisque l'équation (1.60) s'écrit :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} S_0 \cos \theta_{i,0}. \quad (2.13)$$

Cette idée séduisante est néanmoins trompeuse, car on ne disposerait d'aucune indication sur  $\phi_{i,0}$ , c'est-à-dire que l'indétermination sur la normale demeurerait. Il s'agit donc d'un *leurre*.

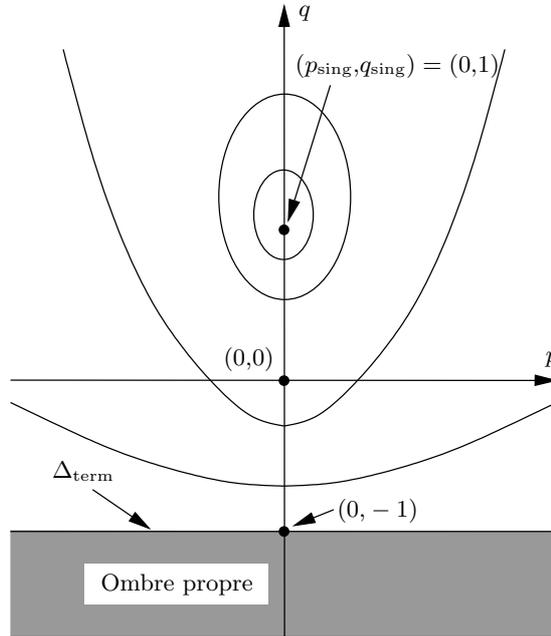


FIG. 2.2 – Carte de réflectance d'un matériau lambertien éclairé « à 45 degrés ». La zone grisée correspond aux normales telles que  $\vec{\nu} \cdot \vec{S}_0 < 0$ , c'est-à-dire aux points se trouvant dans l'ombre propre (cf. paragraphe 1.3.5).

En réalité, il n'y a pas d'autre moyen pour rendre mieux posés les modèles non différentiels du SFS que de leur rajouter des contraintes. Si nous mettons à part les équations du gradient, dont on sait qu'elles rendent le problème équivalent à sa formulation différentielle, il existe essentiellement deux types de contraintes permettant d'atteindre ce but.

### 2.1.2 Stéréophotométrie

La première façon de rendre mieux posés les modèles non différentiels du SFS, tout en conservant comme inconnues les paramètres  $(p,q)$  de la normale, consiste tout simplement à utiliser non pas une, mais deux équations du type (2.1). On doit donc disposer de deux photographies de la même scène, prises dans des conditions opératoires différentes, de telle sorte que les deux niveaux de gris normalisés  $g_1$  et  $g_2$  correspondant à un même point objet fournissent les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1(p,q) = g_1, \\ \mathcal{R}_2(p,q) = g_2. \end{cases} \quad (2.14)$$

La technique de la **stéréophotométrie** a été introduite par Woodham [Woodham 80]. Elle consiste à appliquer cette stratégie en modifiant la direction d'éclairage entre les deux clichés. Bien entendu, il est préférable que la position de la scène par rapport à l'appareil photographique soit la même pour les deux clichés, si l'on ne souhaite pas compliquer la résolution du système (2.14). Si tel est le cas, alors la résolution peut se faire graphiquement (cf. figure 2.3), en traçant dans le plan  $pq$  les deux courbes correspondant aux deux équations (2.14). Dans le cas particulier d'une surface lambertienne,

il existe généralement deux intersections  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$ , c'est-à-dire qu'on passe d'une infinité de solutions  $(p, q)$  à deux solutions seulement<sup>4</sup>.

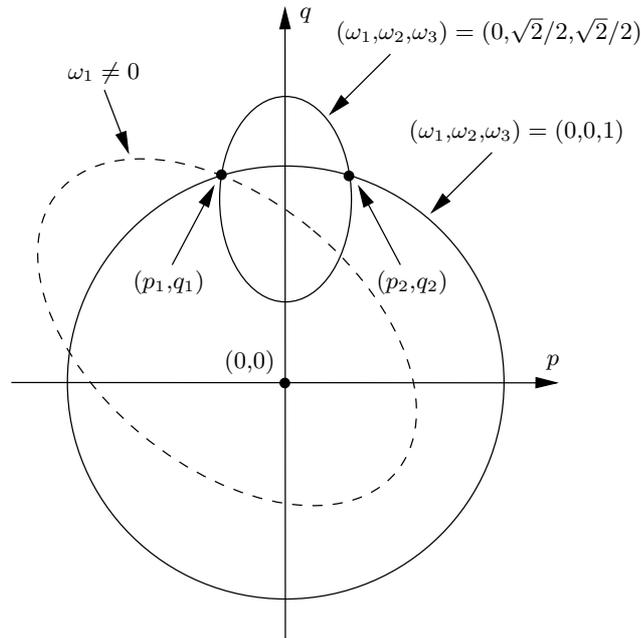


FIG. 2.3 – Principe de la stéréophotométrie : on passe d'une infinité de solutions en  $(p, q)$  à deux solutions  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$ . Pour lever l'ambiguïté résiduelle, il faut disposer d'une troisième photographie éclairée dans une direction linéairement indépendante des deux autres, qui correspond ici à la courbe en pointillés.

Supposons que l'on dispose d'une troisième photographie. La courbe correspondant au niveau de gris du point considéré sur cette nouvelle photographie est symétrique par rapport à l'axe des  $q$  si l'éclairage est encore tel que  $\omega_1 = 0$ , et contient donc forcément les deux solutions  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$ . Par conséquent, si l'on désire lever l'ambiguïté entre ces deux solutions, il faut que la troisième photographie soit éclairée dans une direction linéairement indépendante des deux autres. Trois reproches peuvent être formulés à l'encontre de la stéréophotométrie. Primo, l'information nécessaire est nettement plus importante que celle du « SFS classique », où l'on n'utilise qu'une seule photographie. Secundo, cette technique interdit à la scène de se déformer. Tertio, les conditions opératoires doivent être suffisamment contrôlées pour que la direction d'éclairage puisse changer sans que cela modifie la position de l'appareil photographique par rapport à la scène<sup>5</sup>.

Il serait injuste de faire de Woodham le seul concepteur de cette technique, sans citer les astronomes précurseurs du SFS qui ont étudié les propriétés photométriques de la surface de la Lune [Van Diggelen 51, Minnaert 61, Fesenkov 62]. Il se trouve qu'au cours de son cycle de vingt-huit jours, la Lune est éclairée sous différents angles et se présente à nous quasiment toujours sous le même angle<sup>6</sup>. Cela permet de recueillir une grande quantité d'informations photométriques pour chaque point de la surface de la Lune, mais ce bénéfice est toutefois limité par deux obstacles. D'une part, les directions

4. On est sûr qu'il existe au moins une intersection entre ces deux courbes.

5. On peut par exemple utiliser un « pied ».

6. Elle est néanmoins sujette à un phénomène de « libration », qui traduit ses légères oscillations autour de l'axe Terre-Lune. Par ailleurs, l'observateur terrestre est lui-même mobile par rapport à cet axe.

d'éclairage sont toutes contenues dans le « plan de l'écliptique »<sup>7</sup>. D'autre part, la comparaison de photographies de la Lune prises à plusieurs jours d'intervalle, délai nécessaire pour que la modification de la direction d'éclairage soit significative, doit tenir compte d'éventuels changements d'état de l'atmosphère.

La stéréophotométrie a connu un regain ces dernières années, probablement parce qu'elle permet de rajouter aux inconnues  $p$  et  $q$  des paramètres relatifs soit aux propriétés photométriques de la scène [Tagare 91], soit aux caractéristiques des sources lumineuses [Basri 07], si l'on utilise un nombre suffisant de photographies. La prise en compte de la perspective a également fait l'objet de contributions récentes [Tankus 05, Durou 07a]. Toutes ces améliorations font de la stéréophotométrie une technique opérationnelle, contrairement au SFS classique. À titre d'exemple, le relief de la figure 2.4 a été obtenu dans [Durou 07a] à partir des trois photographies de gauche de la figure 1.14, en calculant le champ des normales par stéréophotométrie puis en utilisant la méthode d'intégration HB<sup>+</sup> qui sera décrite dans le paragraphe 3.1.5.

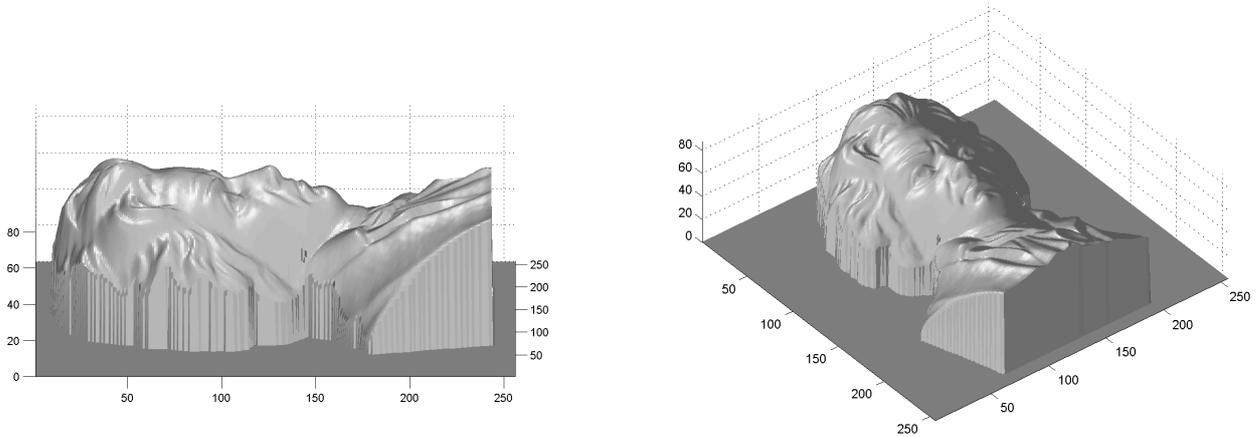


FIG. 2.4 – Relief reconstruit par stéréophotométrie, à partir des trois photographies de gauche de la figure 1.14. Ces images proviennent de [Durou 07a].

### 2.1.3 Surface localement sphérique

Une autre stratégie pour rendre mieux posés les modèles non différentiels du SFS consiste à utiliser un modèle de surface local. Un premier modèle assez peu réaliste a été proposé par Pentland [Pentland 84]. Il consiste à supposer que la surface de la scène est **localement sphérique**. Pentland estime alors six paramètres en chaque point de la photographie d'une surface lambertienne : les deux paramètres décrivant la normale, le rayon de courbure, les deux paramètres décrivant la direction locale du flux lumineux et le produit  $\rho_{\text{lamb}} S$  de l'albédo par la densité locale du flux lumineux. Il utilise une version plus générale de l'équation (2.2), dans laquelle  $S$  remplace  $S_0$ , puisque la scène n'est pas forcément éclairée par une onde plane uniforme :

$$\frac{\pi g}{\rho_{\text{lamb}} S} \sqrt{1 + p^2 + q^2} - (\omega_1 p + \omega_2 q) = \omega_3. \quad (2.15)$$

<sup>7</sup> Ceci limite, plus généralement, le bénéfice que l'on peut tirer de la stéréophotométrie pour des scènes éclairées par le Soleil.

Cette équation fait apparaître tous les paramètres à estimer sauf le rayon de courbure. Comme un rayon de courbure est défini par différentiation de la normale, Pentland calcule les deux dérivées du premier ordre et les trois dérivées du second ordre de l'équation (2.15). Cette stratégie serait vouée à l'échec pour une surface quelconque, car la dérivation ferait apparaître de nouveaux paramètres inconnus. Le modèle de surface local permet effectivement d'obtenir un système de six équations non linéaires à six inconnues. Or, même pour une sphère de synthèse, qui par définition vérifie parfaitement l'hypothèse de sphéricité locale, la solution proposée par Pentland n'est pas exacte [Pentland 84]. Qui plus est, les tests effectués pendant la thèse de Pascal Daniel sur des images de synthèse de scènes ne vérifiant pas l'hypothèse de sphéricité locale montrent que les « estimateurs » de Pentland sont inutilisables en certains points, pour des raisons numériques [Daniel 00a].

Je propose ici une utilisation beaucoup plus simple de l'hypothèse de sphéricité locale, dans le cas d'une surface lambertienne éclairée de face par une onde plane uniforme  $\vec{S}_0$ , où le modèle non différentiel approprié est la pseudo-équation eikonale (1.80). Si l'effet de la perspective est négligeable, alors la photographie d'une sphère est un disque dont le niveau de gris est invariant par rotation autour de son centre<sup>8</sup>. On en déduit sans calcul que le gradient du niveau de gris normalisé  $g$  est parallèle à la projection orthogonale de la normale sur le plan image. Il existe donc un coefficient  $\kappa$  tel que :

$$\begin{cases} p = \kappa g_x, \\ q = \kappa g_y. \end{cases} \quad (2.16)$$

Si l'on injecte ces égalités dans la pseudo-équation eikonale (1.80), on obtient une équation en  $\kappa$  :

$$\kappa^2 \|\nabla g\|^2 = \left( \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi g} \right)^2 - 1. \quad (2.17)$$

Pour les points images tels que  $\|\nabla g\| \neq 0$ , on déduit de (2.16) et (2.17) les expressions suivantes pour  $p$  et  $q$  :

$$\begin{cases} p = \epsilon \frac{g_x}{\|\nabla g\|} \sqrt{\left( \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi g} \right)^2 - 1}, \\ q = \epsilon \frac{g_y}{\|\nabla g\|} \sqrt{\left( \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi g} \right)^2 - 1}, \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\epsilon = \pm 1$ . Par ailleurs, lorsque  $\|\nabla g\| = 0$ , les équations (2.16) montrent que  $p = q = 0$ . Cet estimateur de la normale sera testé dans le chapitre 3.

#### 2.1.4 Surface localement cylindrique

Un autre modèle de surface local, qui consiste à supposer que la surface est **localement cylindrique**, a été proposé par Wildey [Wildey 86]. Wildey s'intéresse au SFS, ou « photoclino-métrie »<sup>9</sup>, mais surtout à son équivalent pour les images radar, qu'il appelle « radarclinométrie ». Les estimateurs de  $p$  et  $q$  qu'il utilise sont moins compliqués que ceux de Pentland, mais il envisage (sans toutefois montrer de résultat) de les appliquer à des images radar de la surface de Mars, qui a bien peu de chances d'être localement cylindrique. Cela est d'autant plus surprenant que les *surfaces développables*, dont la courbure gaussienne est nulle en tout point, vérifient parfaitement l'hypothèse de cylindricité locale. L'étude de ces surfaces est très en vogue à cause de l'engouement actuel pour la numérisation des documents [Courteille 07]. Or, la grande majorité des documents sont développables. La modélisation

<sup>8</sup>. Sous l'hypothèse de la projection perspective, cela serait vrai seulement pour une sphère ayant son centre sur l'axe optique.

<sup>9</sup>. Selon Wildey, le néologisme *photoclinometry* a été introduit en 1965 par son collègue McCauley.

du SFS pour une surface développable lambertienne, éclairée de face par une onde plane uniforme, sous l'hypothèse de la projection orthographique, a été effectuée récemment par Durou et Schlenker [Durou 07b], mais c'est le modèle différentiel (1.74) qui est utilisé.

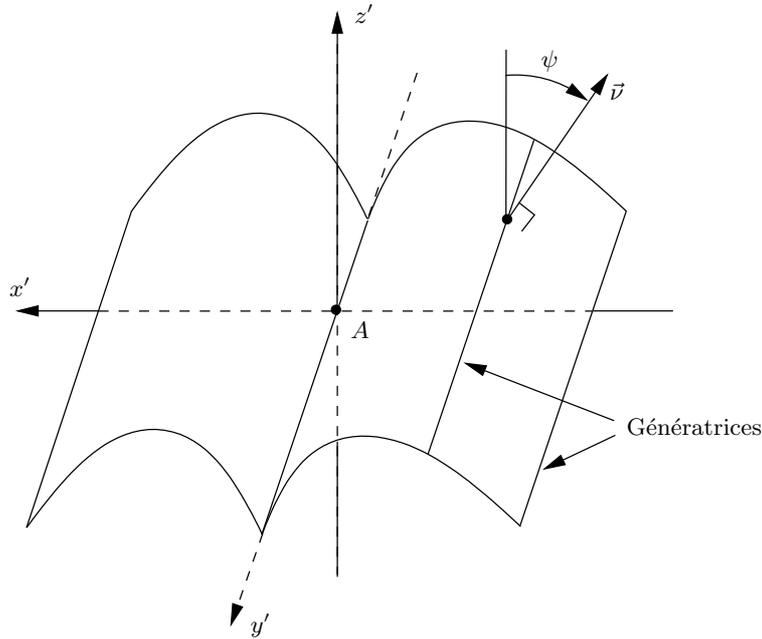


FIG. 2.5 – La surface d'un livre ouvert posé sur le dos est un exemple de cylindre. Tous les points situés sur une même génératrice ont une même normale.

Citons enfin le cas particulier des cylindres, qui sont des surfaces développables particulièrement simples, caractérisables par un « profil ». Ces surfaces décrivent assez bien la surface des pages d'un livre ouvert posé sur le dos. Si l'on attache un repère  $Ax'y'z'$  à la scène, de telle sorte que l'axe  $Ay'$  constitue une « génératrice » du cylindre (cf. figure 2.5), alors la normale en un point quelconque du cylindre est contenue dans le plan  $Ax'z'$ . Plutôt que d'utiliser les paramètres  $(p, q)$  de la normale, on a donc intérêt à introduire l'angle  $\psi$  tel que  $\vec{n} = [\sin \psi \ 0 \ \cos \psi]^T_{Ax'y'z'}$  dans le repère  $Ax'y'z'$ . Si l'onde plane uniforme est caractérisée par le vecteur  $\vec{S}_0 = S_0 [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T_{Ax'y'z'}$  dans ce même repère, alors l'équation (1.60) donne :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}}}{\pi} S_0 (\omega_1 \sin \psi + \omega_3 \cos \psi). \quad (2.19)$$

Il s'agit d'un cas où le SFS est *dégénéré*, car ce modèle non différentiel comporte comme seule inconnue l'angle  $\psi$ . Cela n'a rien à voir avec les modèles non différentiels tels que (2.13), où une seule des deux inconnues apparaît explicitement, mais où le problème est néanmoins mal posé.

Comme tous les points situés sur une même génératrice d'un cylindre ont une même normale, leurs images ont un même niveau de gris normalisé  $g$ . L'information donnée par la photographie d'une telle scène sur son relief est donc fortement *redondante*. Cela permet de calculer le relief d'un document cylindrique en n'appliquant le SFS qu'aux points de la photographie où le niveau de gris semble conforme au modèle utilisé. Or, comme l'équation (2.19) n'est soluble que si  $\rho_{\text{lamb}}$  est connu, il semble cohérent d'utiliser seulement les points non encrés. Une fois le relief du document calculé par intégration des équations perspectives du gradient (1.95), on peut ensuite simuler sa mise à plat par « déroulage ». Cette application du SFS (elles sont rares!), originellement proposée par Wada *et al.* [Wada 97], a été reprise récemment par Tan *et al.* [Tan 06] pour améliorer la qualité d'*images*

scannées de livres. Sur les conseils judicieux de Pierre Gurdjos, elle a également constitué une partie importante de la thèse de Frédéric Courteille [Courteille 06a], dont provient l'exemple de la figure 2.6. Deux modifications essentielles ont été apportées dans ce travail de thèse, par rapport aux travaux antérieurs : les images scannées sont remplacées par des photographies<sup>10</sup> ; l'effet de la perspective est pris en compte lors de « l'intégration du champ des normales », une étape sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 3.

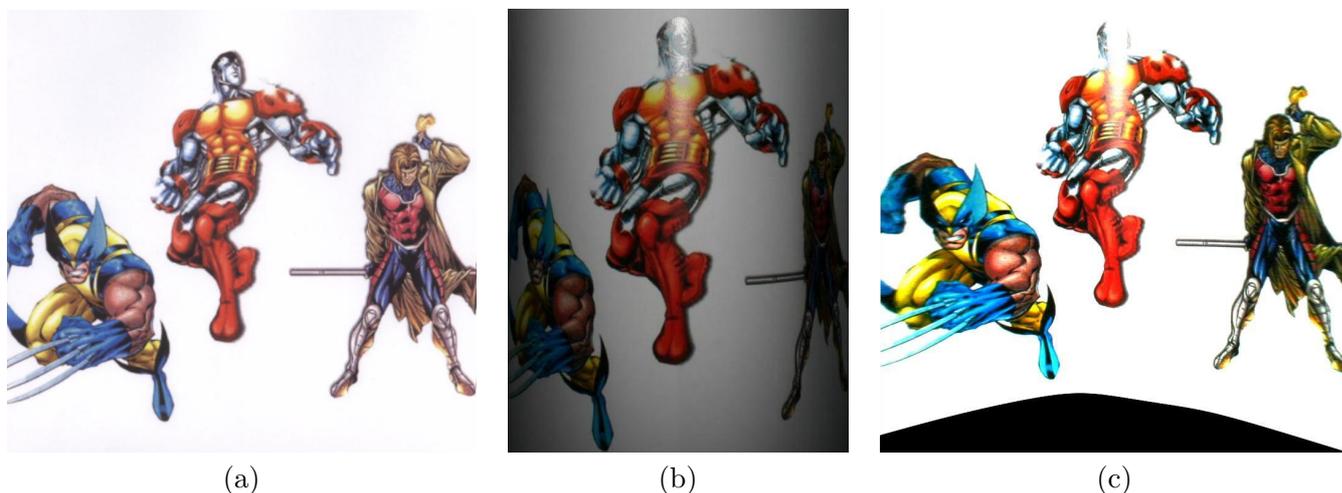


FIG. 2.6 – Exemple de simulation de la mise à plat d'un document cylindrique : (a) image du document scannée à plat ; (b) photographie du document bombé ; (c) simulation de la mise à plat. Le relief est calculé par SFS, en utilisant uniquement le niveau de gris des points non encrés. Ces images proviennent de [Courteille 06a].

### 2.1.5 Analogie avec le *shape from texture*

Il existe une autre technique bien connue en vision par ordinateur, appelée « *shape from texture* » (SFT), qui permet de calculer le champ des normales de la surface d'une scène à partir d'une seule photographie. Cette technique doit donc être suivie par l'intégration du champ des normales obtenu. Une **analogie entre SFS et SFT** est signalée par Horn dès ses premiers travaux [Horn 75]. Plus récemment, Forsyth reprend cette analogie en mettant en évidence des différences d'ordre technique [Forsyth 01], mais il existe une différence fondamentale entre SFS et SFT. Alors que le SFS ne permet le calcul du champ des normales à la surface de la scène que dans quelques situations exceptionnelles comme celles que nous avons citées dans les paragraphes précédents, le SFT permet d'effectuer ce calcul pour n'importe quelle surface, pourvu qu'elle soit texturée. Illustrons cette différence sur un exemple.

La photographie de la figure 2.7 a été obtenue pendant la thèse de Pascal Daniel, dans les mêmes conditions opératoires très contrôlées que les photographies 1.15-c et 1.15-d. Elle montre une balle de golf recouverte d'une peinture « mate », éclairée de face. Le modèle non différentiel approprié pour cette photographie est donc la pseudo-équation eikonale, qui ne permet pas de calculer le champ des normales avec certitude<sup>11</sup>. Or, en un point donné de cette photographie, la « densité linéique » des

10. Cela permet de numériser plus rapidement et d'éviter tout contact direct avec le document.

11. Un certain nombre de techniques, plus ou moins valides, permettent néanmoins d'*estimer* le champ des normales, comme par exemple l'estimateur de Pentland ou celui que je propose, en guise d'alternative, dans le paragraphe 2.1.3.

petites alvéoles qui sont uniformément réparties sur la surface de la balle de golf dépend de la direction suivant laquelle on la calcule. Le SFT fournit deux valeurs indépendantes en chaque point, qui sont les densités linéiques maximale et minimale, dont le rapport donne très facilement la « pente » de la surface<sup>12</sup>. De plus, la densité maximale est obtenue dans la « direction de plus grande pente », qui est parallèle à la projection orthogonale de la normale sur le plan image. Cela montre que le SFT constitue un problème nettement mieux posé que le SFS.

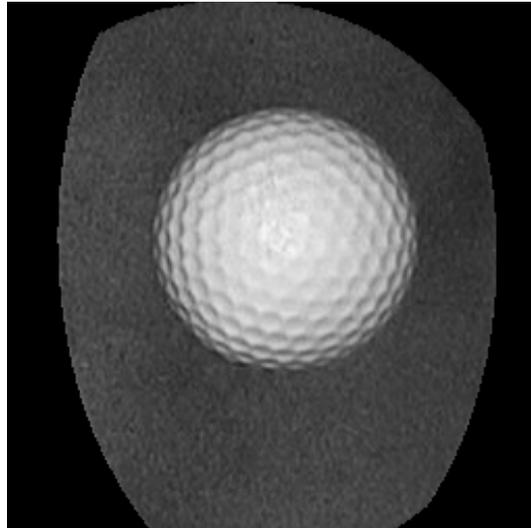


FIG. 2.7 – Photographie d’une balle de golf éclairée de face. Il est plus fiable de calculer le champ des normales par SFT que par SFS. Cette photographie provient de [Daniel 00a].

## 2.2 Analyse des modèles différentiels du SFS

La question du nombre de solutions est récurrente en SFS [Oliensis 91a, Deng 96, Kozera 97b, Prados 04]. L’objectif de cette partie consiste à montrer, en utilisant ses modèles différentiels, que le SFS peut admettre un grand nombre de solutions exactes, c’est-à-dire qu’il constitue généralement un *problème mal posé*. Il n’est pas facile de prouver cette affirmation sans calculer explicitement les solutions. Or, le calcul des solutions de classe  $C^2$  des EDP du premier ordre se fait à l’aide de la « méthode des caractéristiques » [Horn 75]. Cette méthode a permis de prouver plusieurs théorèmes d’unicité [Bruss 82, Blake 85, Oliensis 90, Brooks 92a], lorsque la photographie comporte suffisamment de points en lesquels la normale peut être déterminée avec certitude : points singuliers ou limbes. Elle a également permis de prouver l’existence d’images impossibles<sup>13</sup>, c’est-à-dire d’images ne correspondant à aucune scène [Brooks 92b, Horn 93].

Par ailleurs, la résolution d’une EDP par un développement en série entière permet d’obtenir les solutions les plus régulières qui soient, à savoir les solutions analytiques. La manipulation de cette méthode de résolution est délicate, mais elle a permis d’exhiber une « déformation invisible » en présence d’un point singulier [Durou 00], ce qui montre que la présence d’un tel point n’est pas suffisante pour que la solution soit unique.

12. On appelle « pente » la tangente de l’angle entre  $\vec{\nu}$  et l’axe optique. La pente vaut donc  $\sqrt{p^2 + q^2}$ .

13. Il faut bien utiliser le terme « image » dans ce cas, car on ne peut pas parler de « photographie impossible ».

### 2.2.1 Ambiguïtés fondamentales du SFS

Une **première ambiguïté fondamentale du SFS** survient lorsque la direction du flux lumineux primaire est inconnue. Cette ambiguïté, originellement exhibée par Helmholtz (cf. [Helmholtz 89], tome 2, chapitre 30), a été récemment reprise par Koenderink et van Doorn [Koenderink 76] puis par Belhumeur et Kriegman [Belhumeur 98]. Elle vient de ce que l'interprétation du relief d'une scène à partir de sa photographie dépend de l'hypothèse faite sur la direction du flux lumineux primaire. Afin de mieux contraindre le problème, nous supposons donc dorénavant que ce flux est connu en chaque point de la scène. Néanmoins, Koenderink et van Doorn ont montré qu'il est possible de détecter les points « paraboliques », c'est-à-dire les points où la surface est localement cylindrique (cf. paragraphe 2.1.4), sans connaître la direction du flux lumineux primaire [Koenderink 80]. Notons enfin qu'un certain nombre de méthodes d'estimation du flux lumineux ont été proposées, dans le cadre du SFS [Pentland 82, Brooks 85, Lee 85a, Zheng 91, Chojnacki 94].

Une **deuxième ambiguïté fondamentale du SFS** existe si la BRDF de la scène est inconnue. Nous avons déjà relevé, dans le paragraphe 1.2.5, qu'une photographie constitue une scène plane de BRDF non uniforme, dont l'observation doit produire la même sensation visuelle que l'observation de la scène originale. Bien entendu, il suffit à l'observateur de se déplacer légèrement pour faire cesser cette illusion<sup>14</sup>. Dans le cas des matériaux lambertiens, il existe des méthodes d'estimation de l'albédo, mais l'illusion de la photographie que je viens de mentionner prouve que les *variations douces* de l'albédo ne peuvent pas être détectées, sinon par des heuristiques relativement empiriques [Zheng 91]. Les *variations brusques* de l'albédo peuvent éventuellement être détectées [Tsai 98, Courteille 07], mais c'est dans le cadre de la stéréophotométrie que l'estimation de l'albédo est la plus fiable [Chen 02].

Cette deuxième ambiguïté peut nous induire en erreur. Nous supposons généralement d'un albédo ne présentant pas de variation brusque qu'il est uniforme. Si cette hypothèse est fautive, alors cela nous amène à interpréter le relief de manière erronée. Cet effet de *trompe l'œil* est utilisé comme technique de maquillage. Les quatre illustrations de la figure 2.8, ainsi que les commentaires qui s'y rattachent, proviennent d'un site web sur « l'art du maquillage »<sup>15</sup>. L'astuce consiste à foncer la peau pour donner l'illusion d'une pente plus prononcée, ou à l'éclaircir pour donner l'illusion inverse.

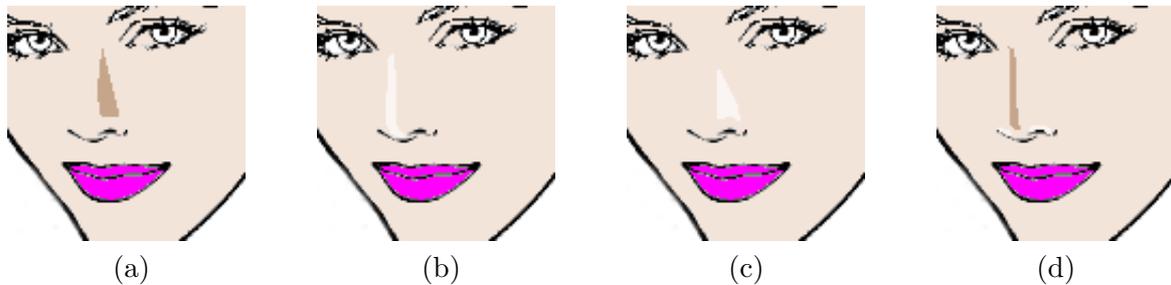


FIG. 2.8 – Commentaires associés à ces quatre illustrations (site web sur « l'art du maquillage »): (a) « Nez trop gros : une touche de fond de teint légèrement plus foncé sur les ailes du nez le rendront plus fin ». (b) « Nez trop aplati : une touche de fond de teint plus clair sur l'arête du nez ». (c) « Nez trop court : une touche de fond de teint plus clair sur les ailes du nez ». (d) « Nez trop long : fond de teint plus foncé le long de l'arête, une touche de fard blanc à l'entrée des narines ».

Nous supposons dorénavant que la BRDF de la scène est connue et uniforme, afin de nous concentrer sur les ambiguïtés résiduelles du SFS.

14. En ce sens, « l'illusion de la photographie » est beaucoup moins probante que « l'illusion de l'holographie », puisque cette dernière subsiste lors d'un déplacement de l'observateur.

15. <http://www.feminin.ch/beauty/maquillage.htm>

## 2.2.2 Ambiguïtés concave/convexe et concave/concave

L'**ambiguïté concave/convexe** est illustrée dans [Pentland 84] par la photographie de la figure 2.9-a, qui montre deux monticules de cendres des îles Hawaii. La photographie de la figure 2.9-b est exactement la même, mais elle a été retournée. On perçoit pourtant un nouveau relief, constitué de deux cratères. En réalité, on peut interpréter le relief de la scène photographiée de deux manières différentes. Cette ambiguïté est appelée « l'ambiguïté concave/convexe » parce que, parmi les deux reliefs possibles, les monticules sont convexes et les cratères sont concaves. L'observateur privilégie un de ces reliefs en faisant l'hypothèse, statistiquement plausible, que « la lumière vient d'en haut ».

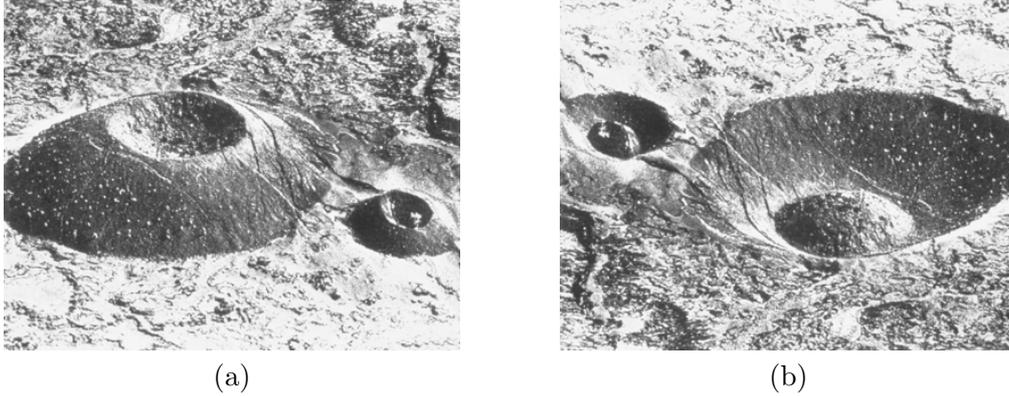


FIG. 2.9 – (a) Photographie de deux monticules de cendres des îles Hawaii. (b) Après retournement, on voit plutôt deux cratères. Cette photographie est la propriété intellectuelle de Whitman Richards.

L'ambiguïté concave/convexe est facile à démontrer dans le cas d'une surface lambertienne éclairée par une onde plane uniforme, sous l'hypothèse de la projection orthographique, pour lequel le modèle différentiel est l'équation (1.73). Si  $Z$  est solution de cette équation, alors une autre solution est  $Z' = -Z$ , pour peu qu'on change la direction d'éclairage  $\vec{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  en  $\vec{\omega}' = [-\omega_1 \ -\omega_2 \ \omega_3]^T$ . Il semble donc que cette « nouvelle » ambiguïté ne soit en réalité qu'un cas particulier de la première ambiguïté fondamentale du SFS (cf. paragraphe 2.2.1), puisqu'elle suppose la direction d'éclairage variable. Cependant, les vecteurs  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\omega}'$  coïncident lorsque  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Cela signifie que l'ambiguïté concave/convexe diffère de l'ambiguïté de la première ambiguïté fondamentale du SFS lorsque l'éclairage est frontal, c'est-à-dire lorsque le modèle différentiel est l'équation eikonale (1.74).

Intéressons-nous maintenant au modèle différentiel (1.96), qui correspond à une surface lambertienne éclairée par une source ponctuelle isotrope située au centre optique, sous l'hypothèse de la projection perspective. Prados *et al.* résolvent une EDP équivalente, dans laquelle les variables sont les coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  du point image et l'inconnue est la cote  $Z$  du point objet conjugué, en recherchant ses « solutions de viscosité » [Prados 04]. Ils montrent que ce problème est bien posé en l'absence de condition au bord, mais ils supposent en réalité qu'il existe un limbe fermé, ce qui constitue une condition au bord du type « contrainte d'état » (cf. paragraphe 3.2.4). En l'absence de toute condition au bord, l'unicité de la solution peut être mise en défaut. Par exemple, dans le cas où le niveau de gris est uniforme et égal à  $g_0$ , l'équation (1.96) s'écrit :

$$R \sqrt{R^2 + R_\theta^2 + \frac{R_\phi^2}{\sin^2 \theta}} = R_0^2, \quad (2.20)$$

où :

$$R_0 = \sqrt{\frac{I \rho_{\text{lamb}}}{4 \pi^2 g_0}}. \quad (2.21)$$

Restreignons la recherche des solutions de l'équation (2.20) aux fonctions  $R$  ne dépendant que de la variable  $\theta$ , qui correspondent à des surfaces à symétrie de révolution par rapport à l'axe optique (cf. figure 1.21). On doit donc résoudre l'équation différentielle suivante :

$$R \sqrt{R^2 + R'^2} = R_0^2, \quad (2.22)$$

où  $R'$  désigne la dérivée de  $R$ . Remarquons que l'équation (2.22) impose à  $R$  la contrainte suivante :

$$R \leq R_0. \quad (2.23)$$

Une solution évidente de l'équation (2.22) est :

$$\bar{R}(\theta) = R_0. \quad (2.24)$$

La surface correspondante  $\bar{\Sigma}$  est une hémisphère centrée en  $C$ . Plus généralement, l'équation (2.22) est une équation différentielle à variables séparables. Il est facile de la résoudre, pour  $R < R_0$  :

$$\frac{R dR}{\sqrt{R_0^4 - R^4}} = \pm d\theta. \quad (2.25)$$

On trouve la solution générale suivante, paramétrée par l'angle  $\theta_0$  :

$$R_{\theta_0}(\theta) = R_0 \sqrt{\cos [2(\theta - \theta_0)]}, \quad (2.26)$$

qui est définie pour  $\theta \in [0, \pi/2] \cap [-\pi/4 + \theta_0, \pi/4 + \theta_0]$ . Il faut imposer au domaine de définition de  $R_{\theta_0}$  de contenir la valeur 0 pour que la solution soit définie dans la direction de l'axe optique. Le paramètre  $\theta_0$  doit donc vérifier la condition suivante :

$$\theta_0 \in [-\pi/4, \pi/4]. \quad (2.27)$$

L'EDP (1.96) admet une infinité de solutions<sup>16</sup>, lorsque le niveau de gris est uniforme. Je propose d'appeler cette ambiguïté l'**ambiguïté concave/concave**, car toutes les surfaces  $\Sigma_{\theta_0}$  d'équation  $r = R_{\theta_0}(\theta)$  sont concaves (cf. figure 2.10). Il est notable que les surfaces  $\Sigma_{\theta_0}$  peuvent être continûment déformées, en modifiant la valeur du paramètre  $\theta_0$ , sans que cela modifie leur photographie. Il s'agit donc d'un premier cas de *déformation invisible*.

### 2.2.3 Équation eikonale de l'optique

Parmi tous les modèles différentiels du SFS, l'équation eikonale (1.74) se distingue car elle existe également en optique, sous une forme très voisine. Or, bien que l'**équation eikonale de l'optique** soit connue depuis un siècle environ, on ne trouve dans les ouvrages d'optique aucune mention relative à la question qui nous préoccupe dans ce chapitre : cette équation constitue-t-elle un problème bien ou mal posé ? Il faut expliquer ce paradoxe.

Le terme *eikonal* a été introduit par Bruns en 1895 [Bruns 95], à partir du mot grec *eikôn*, qui signifie « image », mais le caractère fondamental de l'équation eikonale en optique n'a été prouvé

<sup>16</sup> Il se peut d'ailleurs qu'elle possède aussi des solutions ne possédant pas la symétrie de révolution par rapport à l'axe optique.

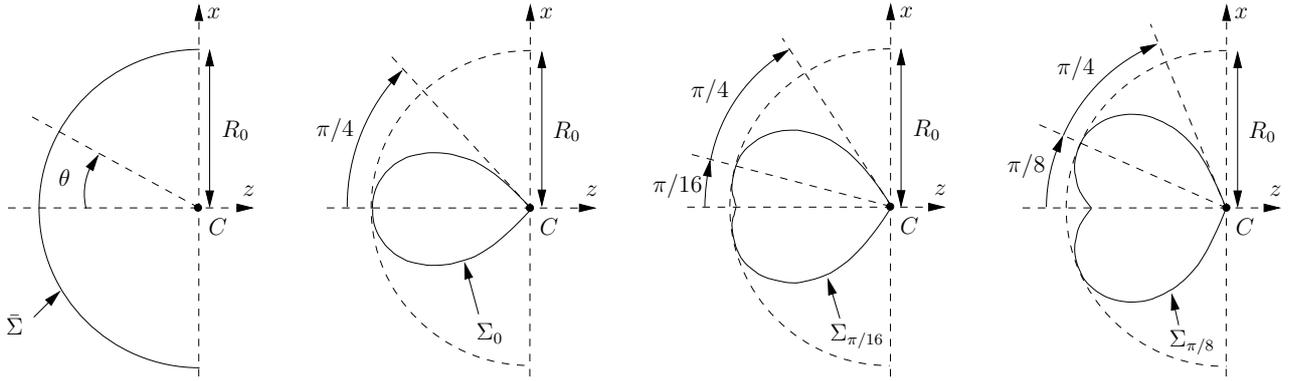


FIG. 2.10 – *Illustration de l'ambiguïté concave/concave* : ces quatre surfaces à symétrie de révolution par rapport à l'axe optique donnent la même image de synthèse, de niveau de gris uniforme  $g_0$ , par le modèle différentiel (1.96). Les surfaces  $\bar{\Sigma}$  et  $\Sigma_{\theta_0}$  sont tangentes en  $\theta = \theta_0$ . La tangente à la surface  $\Sigma_{\theta_0}$  en  $C$  est caractérisée par l'angle  $\theta = \theta_0 + \pi/4$ . Les surfaces  $\Sigma_{\pi/16}$  et  $\Sigma_{\pi/8}$  présentent une singularité en  $\theta = 0$ .

qu'en 1911 [Sommerfeld 11]. Si nous notons  $\mathcal{L}(x,y,z)$  le « chemin optique » en un point  $(x,y,z)$  de l'espace physique, qui est l'inconnue, et  $n(x,y,z)$  « l'indice de réfraction », qui est la donnée, alors l'équation eikonale de l'optique s'écrit [Pérez 96] :

$$\|\nabla\mathcal{L}(x,y,z)\|^2 = n(x,y,z)^2. \quad (2.28)$$

Tandis que les surfaces où  $\mathcal{L}$  est uniforme sont les « surfaces d'ondes », les courbes tangentes à  $\nabla\mathcal{L}$  constituent les « rayons lumineux » (loi de Malus). Le principe de Fermat et les lois de Descartes découlent de l'équation eikonale de l'optique, pour des fonctions  $n$  particulières. Une première différence entre cette équation et l'équation eikonale du SFS vient de ce que l'inconnue  $\mathcal{L}$  de l'optique dépend des trois variables d'espace  $(x,y,z)$ , alors que l'inconnue  $Z$  de l'équation eikonale du SFS ne dépend que de deux variables d'espace  $(x,y)$ . Mais il existe une autre différence, bien plus importante, entre ces deux équations.

L'équation eikonale (du SFS ou de l'optique) est une EDP du premier ordre, non linéaire. Contrairement aux EDP linéaires, qui constituent des problèmes mal posés en l'absence de condition au bord, il n'est pas évident de prédire si l'équation eikonale constitue un problème bien ou mal posé. Vu l'expression de son premier membre, on peut quand même affirmer que le gradient de l'inconnue ( $Z$  ou  $\mathcal{L}$ ) est nul en tout point où le second membre s'annule. Le second membre de l'équation eikonale du SFS s'annule en tout point singulier, mais le second membre de l'équation eikonale de l'optique est strictement positif. L'équation eikonale de l'optique n'admet donc pas l'équivalent des points singuliers du SFS. Or, nous verrons que ces points jouent un rôle important vis-à-vis du nombre de solutions de l'équation eikonale du SFS.

Le parallèle entre les deux équations eikonales, dont nous venons de voir qu'il est somme toute assez relatif, permet néanmoins de faire une analogie intéressante. Supposons que nous sachions attribuer à chaque point  $(x,y,z)$  de l'espace un indice de réfraction, de telle sorte que la fonction  $n$  soit différentiable. Supposons également que cette fonction ne dépende pas de  $z$ . Plaçons une source lumineuse ponctuelle en un point  $P$  et choisissons ce point comme origine. Nous pouvons affirmer, par raison de symétrie par rapport au plan  $Pxy$ , que le vecteur  $\nabla\mathcal{L}$ , en un point quelconque du plan  $Pxy$ , est contenu dans ce plan. L'équation eikonale (2.28) s'écrit donc, en un tel point :

$$\mathcal{L}_x(x,y,0)^2 + \mathcal{L}_y(x,y,0)^2 = n(x,y,0)^2. \quad (2.29)$$

La restriction du calcul de la fonction  $\mathcal{L}$  au plan  $Pxy$  est régie par l'équation (2.29), qui est équivalente à la résolution de l'équation eikonale (1.74) du SFS, en faisant les identifications suivantes :

$$\begin{cases} Z(x,y) = \mathcal{L}(x,y,0), \\ g(x,y) = \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi \sqrt{1 + G_t^2 n(x,y,0)^2}}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Par conséquent, les trajets des rayons lumineux dans le plan  $Pxy$  fournissent une solution de l'équation eikonale. On dispose ainsi d'un « calculateur analogique » qui permet de résoudre l'équation eikonale de manière exacte ! Peu importe que ce calculateur soit inutilisable en pratique. Ce qui importe, c'est que toute position  $P$  de la source ponctuelle donne une configuration spécifique des rayons lumineux. Cela suffit à prouver qu'en l'absence de point singulier (rappelons qu'il n'en existe pas en optique), l'équation eikonale (du SFS ou de l'optique) constitue un problème mal posé. En effet, l'affirmation contraire imposerait aux rayons lumineux issus d'une source ponctuelle, se propageant dans un milieu d'indice de réfraction fixé, de suivre des chemins indépendants de la position de la source, ce qui est absurde. Ce résultat est fondamental vis-à-vis de l'étude que nous menons dans ce chapitre. Nous allons maintenant présenter la méthode qui permet de résoudre *effectivement* l'équation eikonale. Nous pourrons ensuite donner une preuve plus rigoureuse de cette affirmation.

## 2.2.4 Méthode des caractéristiques

La **méthode des caractéristiques** est une méthode générale de résolution des EDP du premier ordre [Garabedian 64]. Une telle EDP a la forme générale suivante, lorsque l'inconnue  $f$  dépend de deux variables  $x$  et  $y$  :

$$F(x,y,f,f_x,f_y) = 0. \quad (2.31)$$

Supposons que  $f$ ,  $f_x$  et  $f_y$  soient connus en un « point de départ »  $(x,y)$ . Nous souhaitons propager cette connaissance au point  $(x + dx, y + dy)$  :

$$df = f_x dx + f_y dy, \quad (2.32a)$$

$$df_x = f_{xx} dx + f_{xy} dy, \quad (2.32b)$$

$$df_y = f_{yx} dx + f_{yy} dy. \quad (2.32c)$$

L'équation (2.32a) permet de calculer  $df$ , puisque  $f_x$  et  $f_y$  sont connus en  $(x,y)$ , mais les équations (2.32b) et (2.32c) font apparaître les dérivées d'ordre 2 de  $f$  en  $(x,y)$ , qui ne sont pas connues. Néanmoins, l'équation (2.31) étant vraie en tout point  $(x,y)$ , on obtient les deux équations supplémentaires suivantes, par dérivation :

$$\begin{cases} F_x + F_f f_x + F_{f_x} f_{xx} + F_{f_y} f_{yx} = 0, \\ F_y + F_f f_y + F_{f_x} f_{xy} + F_{f_y} f_{yy} = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Si la fonction  $f$  est de classe  $C^2$ , alors grâce au théorème de Schwarz, on peut inverser  $f_{xy}$  et  $f_{yx}$  dans les équations (2.33) :

$$\begin{cases} F_x + F_f f_x + F_{f_x} f_{xx} + F_{f_y} f_{xy} = 0, \\ F_y + F_f f_y + F_{f_x} f_{yx} + F_{f_y} f_{yy} = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Choisissons un déplacement élémentaire  $(dx, dy)$  parallèle à  $(F_{f_x}, F_{f_y})$  :

$$\begin{cases} dx = F_{f_x} dt, \\ dy = F_{f_y} dt, \end{cases} \quad (2.35)$$

où  $dt$  est un réel infinitésimal. En utilisant (2.35), les équations (2.32b) et (2.32c) se réécrivent :

$$\begin{cases} df_x = (F_{f_x} f_{xx} + F_{f_y} f_{xy}) dt, \\ df_y = (F_{f_x} f_{yx} + F_{f_y} f_{yy}) dt. \end{cases} \quad (2.36)$$

Enfin, grâce aux équations (2.34), ces expressions deviennent :

$$\begin{cases} df_x = -(F_x + F_f f_x) dt, \\ df_y = -(F_y + F_f f_y) dt. \end{cases} \quad (2.37)$$

On peut donc calculer l'inconnue  $f$  et ses deux dérivées partielles  $f_x$  et  $f_y$ , le long d'une courbe que l'on appelle une « caractéristique », dont la forme est imposée par l'expression de  $F$ , en intégrant le système des cinq équations différentielles couplées suivantes :

$$\dot{x} = F_{f_x} ; \quad \dot{y} = F_{f_y} ; \quad \dot{f} = f_x F_{f_x} + f_y F_{f_y} ; \quad \dot{f}_x = -F_x - F_f f_x ; \quad \dot{f}_y = -F_y - F_f f_y. \quad (2.38)$$

Dans ces équations, le point désigne la dérivation par rapport à  $t$ . Les cinq inconnues  $(x, y, f, f_x, f_y)$  dépendent en réalité d'une autre variable que  $t$ , notée  $u$ , qui est constante le long de chaque caractéristique mais qui varie d'une caractéristique à l'autre. L'intégration complète de l'EDP (2.31) requiert la donnée d'un point de départ par caractéristique. Cependant, l'intégration ne peut pas être menée indépendamment le long de chaque caractéristique. Une façon d'assurer la cohérence de l'intégration consiste à choisir, d'une part, une « courbe initiale »  $\mathcal{C}$  [Horn 75] et, d'autre part, le quintuplet  $(x, y, f, f_x, f_y)$  en chaque point de cette courbe de telle sorte que l'EDP (2.31) soit vérifiée. La courbe  $\mathcal{C}$  est donc entièrement constituée de points de départ. Bien sûr, il faut éviter qu'elle ne coïncide avec une caractéristique.

Intéressons-nous maintenant à l'équation eikonale (1.74), que nous écrivons :

$$\frac{G_t^2}{2} \|\nabla Z\|^2 = s. \quad (2.39)$$

L'équation (2.39) montre que  $Z$  est inversement proportionnel à  $G_t$ . Effectuons le changement d'inconnue suivant :

$$w = G_t Z. \quad (2.40)$$

On peut alors réécrire l'équation (2.39) sous la forme :

$$\frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 = s. \quad (2.41)$$

La pseudo-équation eikonale correspondant à cette nouvelle écriture de l'équation eikonale est, d'après (1.74), (1.80) et (2.39) :

$$\frac{1}{2} (p^2 + q^2) = s. \quad (2.42)$$

Pour toute solution  $w^*$  de l'équation eikonale (2.41), les fonctions  $w^* + w_0$ ,  $w_0$  constante, sont également solutions. D'après les équations (1.67) et (2.40), les points de la surface recherchée ont pour coordonnées  $(x/G_t, y/G_t, w(x, y)/G_t)$ . La signification de  $G_t$  est donc bien celle d'un facteur d'échelle. Les surfaces recherchées sont les graphes des fonctions  $w^* + w_0$  et toutes les surfaces qui leur sont homothétiques. Rechercher  $w$  au lieu de  $Z$  revient à fixer la valeur de  $G_t$  à 1. Afin de limiter encore plus le nombre de solutions, nous imposons en outre  $w^*(0, 0) = 0$ , ce qui fixe la valeur de la constante  $w_0$ .

De (1.74) et (2.39), on déduit que le niveau de gris  $g$  est lié à la fonction  $s$  par :

$$g = \frac{\rho_{\text{lamb}} S_0}{\pi \sqrt{2s + 1}}. \quad (2.43)$$

De (2.4), (2.11) et (2.43), il ressort qu'un point  $(x,y)$  est singulier si :

$$s(x,y) = 0. \quad (2.44)$$

La résolution de l'équation eikonale par la méthode des caractéristiques consiste donc à intégrer le système différentiel (2.38), dans le cas où  $F(x,y,w,w_x,w_y) = (w_x^2 + w_y^2)/2 - s$ , c'est-à-dire [Horn 75] :

$$\dot{x} = w_x ; \quad \dot{y} = w_y ; \quad \dot{w} = 2s ; \quad \dot{w}_x = s_x ; \quad \dot{w}_y = s_y. \quad (2.45)$$

Les équations (2.45) montrent qu'une caractéristique est tangente en tout point à  $\nabla w$ , c'est-à-dire qu'elle constitue une « ligne de plus grande pente » [Oliensis 91b].

## 2.2.5 Ambiguïté en l'absence de point singulier

Considérons l'équation eikonale suivante :

$$\|\nabla w\|^2 = 1 + x^2, \quad (2.46)$$

qui correspond à la fonction  $s_1(x,y) = (1 + x^2)/2$ . D'après (2.44), l'image de synthèse associée à cette équation ne comporte aucun point singulier (cf. figure 2.11). Les cinq équations différentielles (2.45) s'écrivent :

$$\dot{x} = w_x ; \quad \dot{y} = w_y ; \quad \dot{w} = 1 + x^2 ; \quad \dot{w}_x = x ; \quad \dot{w}_y = 0. \quad (2.47)$$

L'intégration d'un système différentiel couplé se fait souvent par découplage des équations. Or, on peut facilement éliminer du système (2.47) les inconnues  $w_x$  et  $w_y$  et se ramener au système différentiel suivant :

$$\partial_t^2 x(t,u) = x(t,u), \quad (2.48a)$$

$$\partial_t^2 y(t,u) = 0, \quad (2.48b)$$

$$\partial_t w(t,u) = 1 + x(t,u)^2. \quad (2.48c)$$

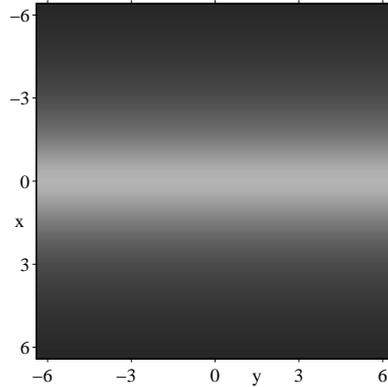


FIG. 2.11 – Image de synthèse associée à l'équation eikonale (2.46). Cette image provient de [Durou 07b].

Utilisons l'axe  $Oy$  comme courbe initiale  $\mathcal{C}$  et l'ordonnée du point courant de  $\mathcal{C}$  comme variable  $u$ . Nous pouvons imposer, par exemple :

$$\begin{cases} w_x(0,u) = \phi_1(u), \\ w_y(0,u) = \phi_2(u), \end{cases} \quad (2.49)$$

où les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  doivent vérifier les contraintes suivantes, pour  $u \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \phi_1(u)^2 + \phi_2(u)^2 = 1, \\ \phi_1(u) \neq 0, \end{cases} \quad (2.50)$$

de telle sorte que l'équation eikonale soit vérifiée et que le vecteur  $[w_x \ w_y]^T$  ne soit pas tangent à  $\mathcal{C}$ . L'intégration de (2.48a), en utilisant les « conditions initiales »  $x(0,u) = 0$  et  $\partial_t x(0,u) = \phi_1(u)$ , donne :

$$x(t,u) = \phi_1(u) \sinh(t). \quad (2.51)$$

L'intégration de (2.48b), en utilisant les conditions initiales  $y(0,u) = u$  et  $\partial_t y(0,u) = \phi_2(u)$ , donne :

$$y(t,u) = t \phi_2(u) + u. \quad (2.52)$$

L'équation (2.48c) se réécrit, en utilisant (2.51) :

$$\partial_t w(t,u) = 1 + \phi_1(u)^2 \frac{\cosh(2t) - 1}{2}, \quad (2.53)$$

avec la condition initiale suivante :

$$w(0,u) = \int_{v=0}^u \phi_2(v) dv + w(0,0). \quad (2.54)$$

Comme nous imposons  $w(0,0) = 0$ , l'intégration de l'équation (2.53) donne :

$$w(t,u) = \left[ 1 - \frac{\phi_1(u)^2}{2} \right] t + \frac{\phi_1(u)^2}{2} \frac{\sinh(2t)}{2} + \int_{v=0}^u \phi_2(v) dv. \quad (2.55)$$

On peut par exemple choisir  $\phi_1$  et  $\phi_2$  constantes, ce qui revient, d'après les contraintes (2.50), à choisir un réel  $\xi \in ] -\pi/2, \pi/2[$  tel que :

$$\begin{cases} \phi_1(u) = \cos \xi, \\ \phi_2(u) = \sin \xi. \end{cases} \quad (2.56)$$

En utilisant (2.56), les équations (2.51), (2.52) et (2.55) s'écrivent :

$$x(t,u) = \cos \xi \sinh(t), \quad (2.57a)$$

$$y(t,u) = t \sin \xi + u, \quad (2.57b)$$

$$w(t,u) = \left( 1 - \frac{\cos^2 \xi}{2} \right) t + \cos^2 \xi \frac{\sinh(2t)}{4} + u \sin \xi. \quad (2.57c)$$

Ces trois équations donnent une solution paramétrique de l'équation eikonale (2.46). On peut tirer des équations (2.57a) et (2.57b) :

$$\begin{cases} t = \operatorname{argsh} \frac{x(t,u)}{\cos \xi}, \\ u = y(t,u) - \sin \xi \operatorname{argsh} \frac{x(t,u)}{\cos \xi}. \end{cases} \quad (2.58)$$

En reportant ces expressions dans l'équation (2.57c), on trouve :

$$w(t,u) = \frac{\cos^2 \xi}{2} \operatorname{argsh} \frac{x(t,u)}{\cos \xi} + \frac{x(t,u)}{2} \sqrt{x(t,u)^2 + \cos^2 \xi} + y(t,u) \sin \xi. \quad (2.59)$$

L'égalité (2.59) étant vraie pour des valeurs quelconques de  $t$  et  $u$ , on en déduit la forme explicite des solutions  $w_\xi$  de l'équation eikonale (2.46), qui sont paramétrées par  $\xi$  :

$$w_\xi(x,y) = \frac{\cos^2 \xi}{2} \operatorname{argsh} \frac{x}{\cos \xi} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \cos^2 \xi} + y \sin \xi. \quad (2.60)$$

Les graphes des fonctions  $w_\xi$  dépendent continûment du paramètre  $\xi$ . Nous nous trouvons donc en présence d'un deuxième exemple de déformation invisible [Durou 07b]. Comme ces graphes constituent des cylindres, on peut plaquer dessus une feuille quadrillée (cf. figure 2.12).

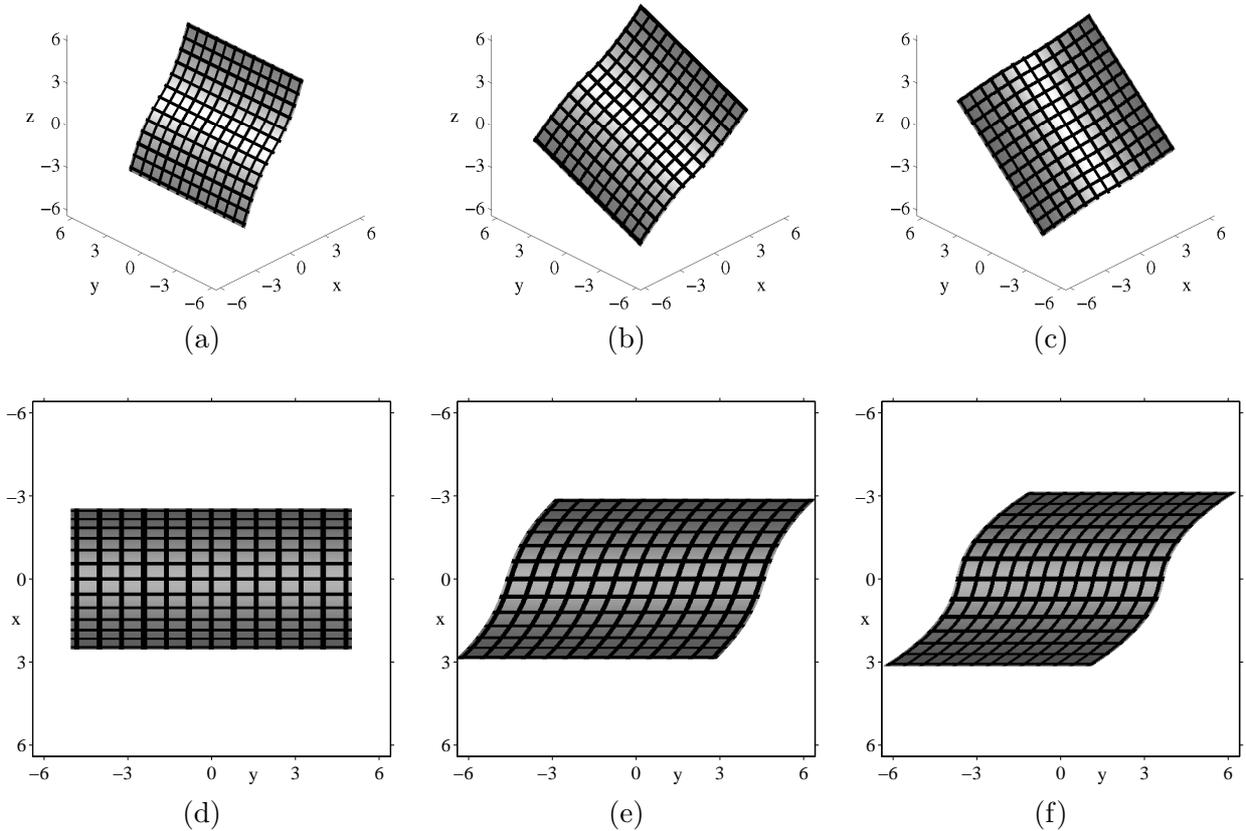


FIG. 2.12 – Feuille quadrillée plaquée sur les graphes des solutions  $w_0$  (a-d),  $w_{\pi/6}$  (b-e) et  $w_{\pi/3}$  (c-f) de l'équation eikonale (2.46). Les images de synthèse (d), (e) et (f) sont identiques à celle de la figure 2.11, si l'on « gomme » le quadrillage. Ces images proviennent de [Durou 07b].

Nous avons donc bien confirmé, dans le cas particulier de l'équation (2.46), que l'équation eikonale constitue un **problème mal posé en l'absence de point singulier**, comme cela avait été pressenti dans le paragraphe 2.2.3 grâce à un raisonnement par analogie avec l'équation eikonale de l'optique. En va-t-il de même pour une photographie contenant un point singulier ?

## 2.2.6 Ambiguïté en présence d'un point singulier

Intéressons-nous maintenant à l'équation eikonale suivante :

$$\|\nabla w\|^2 = 16x^2 + 4y^2, \quad (2.61)$$

qui correspond à la fonction  $s_2(x,y) = 8x^2 + 2y^2$ . L'image de synthèse associée à cette équation comporte un point singulier à l'origine (cf. figure 2.13). Les cinq équations différentielles (2.45) s'écrivent :

$$\dot{x} = w_x ; \quad \dot{y} = w_y ; \quad \dot{w} = 16x^2 + 4y^2 ; \quad \dot{w}_x = 16x ; \quad \dot{w}_y = 4y. \quad (2.62)$$

On tire de ces cinq équations couplées le système différentiel suivant :

$$\partial_t^2 x(t,u) = 16x(t,u), \quad (2.63a)$$

$$\partial_t^2 y(t,u) = 4y(t,u), \quad (2.63b)$$

$$\partial_t w(t,u) = 16x(t,u)^2 + 4y(t,u)^2. \quad (2.63c)$$

Dans un premier temps, utilisons comme courbe initiale  $\mathcal{C}$  l'axe  $Oy$  et comme paramètre  $u$  l'ordonnée du point courant sur  $\mathcal{C}$ , de même que dans le paragraphe 2.2.5. Nous pouvons imposer, par exemple :

$$\begin{cases} w_x(0,u) = 2u, \\ w_y(0,u) = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

La différence avec le paragraphe 2.2.5 vient de ce que  $\mathcal{C}$  contient maintenant un point singulier. Horn déplore qu'il soit impossible d'utiliser un tel point comme point de départ [Horn 75], mais cette affirmation est légèrement abusive. Si l'on se réfère au système différentiel (2.62), on constate effectivement que  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0,0)$  en un point singulier. Par conséquent, l'intégration reste « bloquée » en un tel point, mais cela ne pose réellement problème que pour la résolution *numérique* de l'équation (2.61). Pour sa résolution *exacte*, l'existence d'un point singulier équivaut à une condition au bord, puisque la connaissance de la normale en un tel point constitue une contrainte pour le système différentiel à résoudre. Il n'y a donc *a priori* aucune contraindication à choisir une courbe initiale  $\mathcal{C}$  contenant un point singulier.

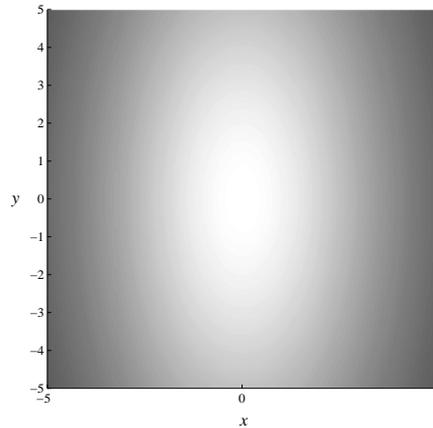


FIG. 2.13 – Image de synthèse associée à l'équation eikonale (2.61). Cette image provient de [Durou 00].

L'intégration de (2.63a), en utilisant les conditions initiales  $x(0,u) = 0$  et  $\partial_t x(0,u) = 2u$ , donne :

$$x(t,u) = \frac{u}{2} \sinh(4t). \quad (2.65)$$

L'intégration de (2.63b), en utilisant les conditions initiales  $y(0,u) = u$  et  $\partial_t y(0,u) = 0$ , donne :

$$y(t,u) = u \cosh(2t). \quad (2.66)$$

L'équation (2.63c) se réécrit, en utilisant (2.65) et (2.66) :

$$\partial_t w(t,u) = 2u^2 [\cosh(8t) + \cosh(4t)], \quad (2.67)$$

avec la condition initiale suivante, puisque  $w_y(0,u) = 0$  :

$$w(0,u) = w(0,0). \quad (2.68)$$

Comme nous imposons  $w(0,0) = 0$ , l'intégration de (2.67) donne :

$$w(t,u) = u^2 \sinh(4t) \cosh^2(2t). \quad (2.69)$$

L'élimination des paramètres  $t$  et  $u$  est un peu plus compliquée que dans le paragraphe 2.2.5. De (2.65) et (2.66), on tire :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \operatorname{argsh} \frac{x(t,u)}{y(t,u)}, \\ u = \frac{y(t,u) |y(t,u)|}{\sqrt{x(t,u)^2 + y(t,u)^2}}. \end{cases} \quad (2.70)$$

En reportant ces expressions dans l'équation (2.69), on trouve la forme explicite d'une solution  $\bar{w}$  de l'équation eikonale (2.61) :

$$\bar{w}(x,y) = 2x \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.71)$$

Le graphe de cette fonction est représenté sur la figure (2.14).

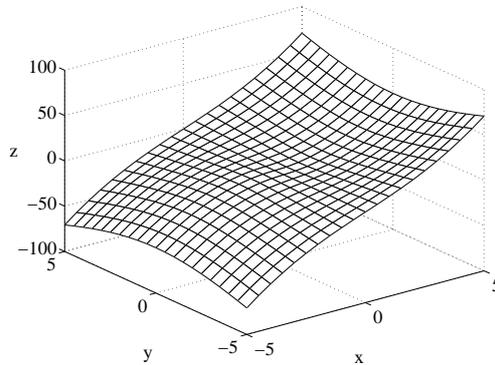


FIG. 2.14 – Graphe de la solution  $\bar{w}$  de l'équation eikonale (2.61).

La résolution que nous venons d'effectuer ressemble beaucoup à celle du paragraphe 2.2.5, mais il s'agit en réalité d'un cas tout à fait particulier. Il ne faudrait surtout pas en déduire que la présence d'un point singulier dans une photographie n'a aucune influence sur le nombre de solutions du SFS. En effet, effectuons une résolution équivalente en choisissant l'axe  $Ox$  comme courbe initiale  $\mathcal{C}$  et l'abscisse du point courant de  $\mathcal{C}$  comme paramètre  $u$ . En imposant  $w_x(0,u) = 0$  et  $w_y(0,u) = 4u$ , on trouve une autre solution de l'équation eikonale (2.61) :

$$x(t,u) = u \cosh(4t), \quad (2.72a)$$

$$y(t,u) = 2u \sinh(2t), \quad (2.72b)$$

$$w(t,u) = 4u^2 \sinh(4t) \cosh^2(2t). \quad (2.72c)$$

En utilisant ces trois égalités, on peut très bien calculer les coordonnées  $(x, y, w)$ , pour  $t$  et  $u$  donnés. Néanmoins, on aura le plus grand mal à exprimer les paramètres  $t$  et  $u$  en fonction de  $x(t, u)$  et  $y(t, u)$ , à partir de (2.72a) et (2.72b).

Tentons maintenant de résoudre une équation eikonale très similaire à (2.61) :

$$\|\nabla w\|^2 = 8x^2 + 4y^2. \quad (2.73)$$

L'utilisation de l'axe  $Oy$  comme courbe initiale  $\mathcal{C}$  et de l'ordonnée du point courant de  $\mathcal{C}$  comme paramètre  $u$  donne la solution suivante, si l'on impose de nouveau les conditions (2.64) :

$$\begin{cases} x(t, u) = \frac{u}{\sqrt{2}} \sinh(2\sqrt{2}t), \\ y(t, u) = u \cosh(2t), \\ w(t, u) = \frac{u^2}{2} \left[ \frac{\sinh(4\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} + \sinh(4t) \right]. \end{cases} \quad (2.74)$$

Cette fois encore, il est très compliqué d'exprimer  $t$  et  $u$  en fonction de  $x(t, u)$  et  $y(t, u)$ .

Un résultat (jamais publié) de ma thèse aide à prédire dans quel cas la forme explicite d'une solution peut être trouvée [Durou 93]. Plus précisément, ce résultat prédit certains cas où une droite passant par un point singulier est forcément une ligne de plus grande pente, c'est-à-dire une caractéristique, si la solution est « régulière » (analytique presque partout). Intéressons-nous aux équations eikonales du type (2.39), où la fonction  $s$  est régulière et admet un point singulier *isolé*. Avec un choix approprié du repère  $Oxy$ , une telle fonction peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s(x, y) = ax^2 + by^2 + o(x^3), \quad (2.75)$$

où  $a \geq b > 0$ . On suppose en outre que la fonction  $s$  est paire en  $x$  et en  $y$ . Les deux équations eikonales (2.61) et (2.73) vérifient bien toutes ces hypothèses. Le résultat est alors le suivant : pour toute solution régulière de l'équation eikonale (2.39), l'axe  $Ox$  constitue une ligne de plus grande pente et l'axe  $Oy$  constitue une ligne de plus grande pente si  $\sqrt{a/b}$  n'est pas entier. Pour l'équation eikonale (2.73), les axes  $Ox$  et  $Oy$  constituent donc deux lignes de plus grande pente pour toute solution régulière. En revanche, pour l'équation eikonale (2.61), l'axe  $Oy$  peut ne pas constituer une ligne de plus grande pente pour une solution régulière, puisque  $\sqrt{a/b} = 2$ . C'est la raison pour laquelle j'ai choisi l'équation eikonale (2.61) et l'axe  $Oy$  comme courbe initiale, au début de ce paragraphe, et pourquoi j'ai précisé ensuite qu'il ne fallait pas en déduire que la présence d'un point singulier dans une photographie n'a aucune influence sur le nombre de solutions du SFS.

Le résultat que je viens d'énoncer montre qu'il est très exceptionnel de pouvoir trouver une solution régulière en choisissant comme courbe initiale un des axes  $Ox$  ou  $Oy$ , lorsque l'origine  $O$  du repère est un point singulier, puisque ces axes sont généralement deux lignes de plus grande pente. En effet, nous n'avons pu trouver ainsi que la solution  $\bar{w}$  de l'équation eikonale (2.61), qui est effectivement une fonction régulière<sup>17</sup>. Rien ne nous oblige d'ailleurs à imposer que le vecteur  $\nabla w$  soit orthogonal à l'axe  $Oy$ , comme nous l'avons fait en (2.64), pour résoudre cette équation. On pourrait faire dépendre le vecteur  $\nabla w$  d'un paramètre  $\xi$ , comme dans le paragraphe 2.2.5, par exemple ainsi :

$$\begin{cases} w_x(0, u) = 2u \cos \xi, \\ w_y(0, u) = 2u \sin \xi. \end{cases} \quad (2.76)$$

17. D'une certaine façon, j'assimile une fonction régulière à une solution dont on peut trouver la forme explicite. Cette équivalence, qui n'est pas rigoureuse, a pour but de clarifier le raisonnement.

Cela signifie qu'il doit exister des **déformations invisibles de solutions régulières en présence d'un point singulier**, lorsque le SFS est régi par le modèle différentiel (2.39). L'existence d'une telle déformation invisible a été effectivement prouvée dans [Durou 00], dans le cas de l'équation eikonale (2.61). Sur la figure 2.15, on a représenté les graphes de deux fonctions  $w_0$  et  $w_1$  appartenant à une famille continue de solutions régulières de cette équation.

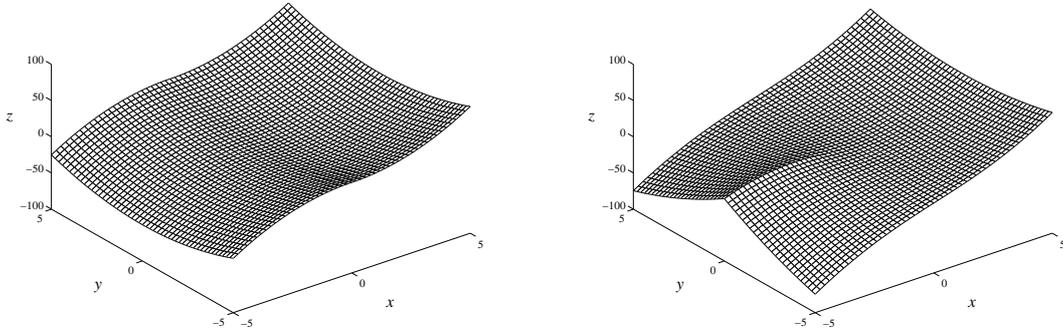


FIG. 2.15 – Graphes de deux fonctions  $w_0$  (à gauche) et  $w_1$  (à droite) appartenant à une famille continue de solutions régulières de l'équation eikonale (2.61). Ces images proviennent de [Durou 00].

En réalité, c'est grâce à un développement en série entière au point singulier (0,0) que cette déformation invisible a été obtenue, et non en utilisant la méthode des caractéristiques. Alors qu'un point singulier se prête mieux qu'un autre à un tel développement, il est plutôt plus compliqué d'appliquer la méthode des caractéristiques à une photographie comportant un point singulier, par lequel peuvent passer une infinité de lignes de plus grande pente, alors qu'il en passe une et une seule en un point « ordinaire » [Oliensis 91b]. La résolution par un développement en série entière d'une équation eikonale contenant un point singulier, qui a été proposée initialement par Bruss [Bruss 82], permet par exemple de trouver très facilement les deux autres solutions suivantes de l'équation eikonale (2.61) :

$$\begin{cases} w_+(x,y) = 2x^2 + y^2, \\ w_-(x,y) = 2x^2 - y^2. \end{cases} \quad (2.77)$$

Les graphes de ces fonctions sont représentés sur la figure 2.16.

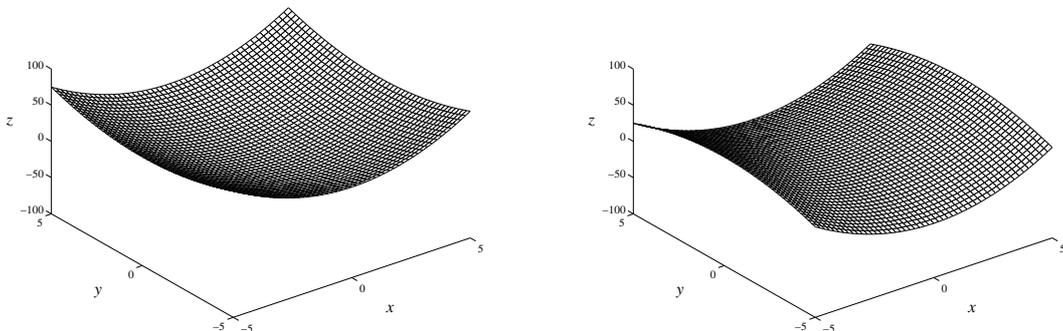


FIG. 2.16 – Graphes des solutions  $w_+$  (à gauche) et  $w_-$  (à droite) de l'équation eikonale (2.61). Ces images proviennent de [Durou 00].

On peut également trouver les solutions  $w_+$  et  $w_-$  en utilisant la méthode des caractéristiques, mais le tracé de quelques lignes de plus grande pente (cf. figure 2.17) montre pourquoi la résolution est plutôt plus compliquée : d'une part, toutes les lignes de plus grande pente du graphe de  $w_+$ , sauf  $Ox$ , sont tangentes à l'axe  $Oy$  au point singulier ; d'autre part, aucune ligne de plus grande pente du graphe de  $w_-$ , autre que  $Ox$  et  $Oy$ , n'intersecte  $Ox$  ou  $Oy$ .

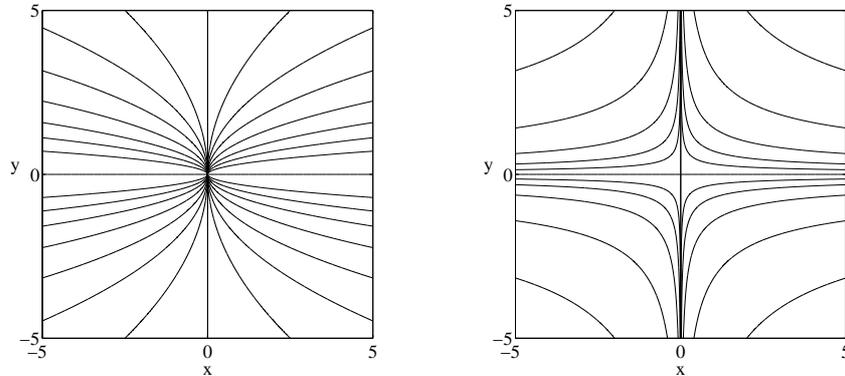


FIG. 2.17 – Le tracé de quelques lignes de plus grande pente des deux surfaces de la figure 2.16 montre qu'il passe un nombre très variable de lignes de plus grande pente par un point singulier. Il en passe une infinité dans le cas de  $w_+$  (à gauche), mais seulement deux dans le cas de  $w_-$  (à droite).

## 2.3 Conclusion

Le principal enseignement à tirer de ce chapitre est que, de manière générale, le SFS recèle plus d'ambiguïtés qu'il n'y paraît. Il faut donc être extrêmement prudent quant à son caractère bien posé, même lorsqu'on rajoute des contraintes aux modèles. Il est nécessaire, mais non suffisant, que le flux lumineux primaire et la BRDF de la scène soient connus. En outre, nous avons vu que le problème reste intrinsèquement mal posé en l'absence de point singulier. En présence d'un point singulier, il peut encore exister, plus exceptionnellement, des déformations invisibles. Par conséquent, l'unicité de la solution nécessite de mieux contraindre le problème. Effectivement, dans toutes les preuves d'unicité, l'existence d'un limbe fermé [Bruss 82, Oliensis 91b, Brooks 92a] ou d'un contour fermé le long duquel la normale est connue [Blake 85] sont requises, en plus de la présence d'un point singulier.

Il est tout à fait compréhensible qu'on cherche à quelles conditions le SFS admet une solution unique. La thèse de Horn [Horn 70] avait comme objectif l'élaboration d'un système de reconnaissance automatique de visages. En cherchant à reconstruire le relief des visages par SFS, Horn n'a pas réussi à atteindre cet objectif, que d'autres méthodes ont probablement permis d'atteindre plus simplement, mais il a posé les bases d'un sujet de recherche foisonnant. Quarante ans plus tard, il est nécessaire d'examiner le problème méticuleusement, comme je tente de le faire dans ce mémoire, mais cela n'a pas d'autre but que de parvenir à mieux le résoudre. Or, si dans ce chapitre, il a bien été question de la résolution du SFS par la méthode des caractéristiques, cela ne sera pas d'un grand secours pour la résolution *numérique* du SFS, comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

## Chapitre 3

# Résolution du problème

La résolution du SFS a fait l'objet d'une littérature très abondante. La multiplicité des modèles, conjuguée à la multiplicité des hypothèses sur la scène, sur les sources lumineuses ou sur l'appareil photographique, expliquent en partie cette abondance. On peut être surpris du très grand nombre d'auteurs<sup>1</sup> ayant proposé des algorithmes censés résoudre le SFS. Bien sûr, la plupart d'entre eux suivent une démarche typiquement *divergente*, selon la terminologie que j'ai définie dans l'introduction. On repère ainsi des « bouquets » d'articles dans lesquels un outil de résolution déjà éprouvé sur d'autres problèmes est adapté aux spécificités du SFS. Ce foisonnement de méthodes de résolution est précieux, mais il rend très hardue la tâche du néophyte.

Même pour celui qui a fait du SFS son thème de prédilection, selon une démarche *convergente*, il peut se révéler assez ingrat, voire techniquement difficile, de saisir toutes les subtilités des méthodes de résolution existantes. Outre quelques articles dans lesquels la description d'un certain nombre de méthodes de résolution peut être trouvée [Horn 90, Kimmel 95b, Kozera 98, Klette 99, Samaras 03], il n'y a eu à ce jour que trois véritables états de l'art sur le SFS. Le livre de Horn et Brooks [Horn 89a], qui a été publié en 1989, dresse un panorama complet des vingt premières années de recherche sur le SFS et fournit une bibliographie exhaustive de plus de 200 références. Dix ans plus tard, quatre chercheurs de l'Université d'Orlando (« University of Central Florida ») publient un nouvel état de l'art, dans lequel six méthodes de résolution sont testées et comparées [Zhang 99], et rendent leurs codes sources librement accessibles<sup>2</sup>. Pour finir, l'article de Zhang *et al.* a servi de base à un état de l'art très récent [Durou 08] que j'ai réalisé avec Maurizio Falcone et Manuela Sagona, chercheurs à l'Université de Rome (« Università di Roma La Sapienza »). Parallèlement à ce dernier article, un site web a été développé<sup>3</sup>, qui regroupe les codes sources des trois méthodes de résolution qui sont testées et comparées dans l'article, une interface web de tests en ligne, ainsi qu'une base bibliographique dédiée au SFS comptant environ 1200 références.

Suivant la ligne de conduite que je me suis donnée, il n'est pas question de compiler ici la matière déjà publiée. Ce chapitre n'est donc pas un état de l'art des méthodes de résolution du SFS. Il est divisé en deux parties, qui « calquent » les deux parties du chapitre 2 : la première concerne la résolution des modèles non différentiels du SFS, la deuxième celle de ses modèles différentiels.

---

1. J'ai répertorié plus de 1000 auteurs ayant publié sur le SFS!

2. Ces codes sources sont téléchargeables par ftp anonyme, à l'adresse [eustis.cs.ucf.edu](ftp://eustis.cs.ucf.edu) (132.170.108.42), dans le répertoire `pub/tech_paper/survey`

3. <http://www.irit.fr/sfs>

### 3.1 Résolution des modèles non différentiels du SFS

Il semble *a priori* plus simple de résoudre le SFS en utilisant ses modèles différentiels plutôt que ses modèles non différentiels, car cela réduit le nombre d'inconnues, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2. Dans ses premiers travaux, Horn utilise effectivement la méthode des caractéristiques [Horn 75, Horn 77], mais il se rend rapidement à l'évidence : cette méthode se prête mal à la numérisation. C'est la raison pour laquelle Horn et l'ensemble de ses collaborateurs du MIT se tournent ensuite vers la résolution des modèles non différentiels du SFS [Ikeuchi 81, Horn 86b, Brooks 89], dans laquelle la « théorie de la régularisation » joue un rôle de premier plan.

#### 3.1.1 Comparaison des modèles vis-à-vis de la résolution du SFS

Nous avons vu, dans le chapitre 1, que la modélisation du SFS fait apparaître trois types d'équations possédant des caractéristiques nettement différentes. Un premier type  $\mathcal{T}_1$  d'équations, constitué d'EDP du premier ordre, correspond à la modélisation différentielle du SFS. Ces équations sont différentielles et généralement non linéaires. Quelques auteurs se sont attachés à la résolution de modèles différentiels *linéaires* du SFS [Pentland 90, Kozera 97a, Ulich 98], mais de tels modèles sont limités à la surface de la Lune ou de quelques planètes [Horn 86a]. Le deuxième type  $\mathcal{T}_2$  d'équations rencontrées en SFS correspond à sa modélisation non différentielle. L'introduction d'inconnues intermédiaires, qui sont le plus souvent les paramètres  $p$  et  $q$  de la normale, transforme les EDP en équations non différentielles, qui sont encore non linéaires. Enfin, les inconnues intermédiaires sont liées à l'inconnue naturelle, qui est en général la cote  $Z$ , par les équations du gradient, qui constituent le troisième type  $\mathcal{T}_3$  d'équations du SFS. Ces dernières équations sont différentielles et linéaires.

Effectuons une **comparaison des modèles vis-à-vis de la résolution du SFS**, laquelle consiste soit à résoudre une équation  $\mathcal{E}_1$  de type  $\mathcal{T}_1$ , soit à résoudre successivement une équation  $\mathcal{E}_2$  de type  $\mathcal{T}_2$  et un système  $\mathcal{S}_3$  de deux équations de type  $\mathcal{T}_3$ . Il s'agit bien de résoudre  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{S}_3$  *successivement*, car leur résolution *simultanée* nous ramènerait, par élimination des inconnues intermédiaires, à l'équation  $\mathcal{E}_1$ . Cette deuxième démarche semble plus compliquée que la première, mais elle répartit la difficulté : alors que l'équation  $\mathcal{E}_1$  est *différentielle et non linéaire*, c'est-à-dire qu'elle cumule toutes les difficultés, l'équation  $\mathcal{E}_2$  est *non linéaire* mais *non différentielle*, tandis que le système  $\mathcal{S}_3$  est *différentiel* mais *linéaire*.

Dans le paragraphe 2.1.1, nous avons vu que l'équation  $\mathcal{E}_2$  est généralement « sous-contrainte », c'est-à-dire qu'elle admet une infinité de solutions en  $(p, q)$  (cf. figure 2.2). Nous allons voir dans le paragraphe 3.1.3 que le système  $\mathcal{S}_3$ , au contraire, est généralement « sur-contraint », c'est-à-dire qu'il n'admet aucune solution exacte. Résoudre l'équation  $\mathcal{E}_2$  puis le système  $\mathcal{S}_3$  revient donc à résoudre deux problèmes mal posés. Il semble donc que la « répartition de la difficulté » soit un leurre. À ce niveau du raisonnement, l'analyse du problème que nous avons menée dans le chapitre 2 s'avère précieuse. En effet, nous savons que la résolution de l'équation  $\mathcal{E}_1$  constitue elle aussi, la plupart du temps, un problème mal posé. Cela confirme donc bien qu'il est plus difficile, de manière générale, de résoudre l'équation  $\mathcal{E}_1$  que de résoudre l'équation  $\mathcal{E}_2$  puis le système  $\mathcal{S}_3$ .

Dans le chapitre 2, nous avons effectué la résolution exacte des équations (2.20), (2.46) et (2.61), qui sont toutes trois des équations de type  $\mathcal{T}_1$ . La résolution exacte n'aurait pas été possible en utilisant les modèles non différentiels correspondant à ces équations, sauf dans le cas de l'équation (2.46), qui constitue, nous allons le voir, un cas particulier.

#### 3.1.2 Résolution exacte d'un modèle non différentiel

Les graphes des solutions  $w_\xi$ , que nous avons trouvées dans le paragraphe 2.2.5 en résolvant l'EDP (2.46) par la méthode des caractéristiques, sont des cylindres, qui sont bien sûr localement cylindriques.

Par conséquent, d'après l'étude menée dans le paragraphe 2.1.4, nous devrions pouvoir trouver ces solutions par **résolution exacte du modèle non différentiel** (2.19). Il a été vu, dans le paragraphe 2.1.4, que toutes les normales d'un cylindre sont contenues dans un plan orthogonal aux génératrices du cylindre. En notant  $\psi$  l'angle permettant de repérer la normale  $\vec{\nu}$  dans ce plan et  $\chi$  l'angle que font les génératrices du cylindre avec le plan  $Cxy$  (cf. figure 3.1), les coordonnées de  $\vec{\nu}$  dans le repère  $Cxyz$  valent :

$$\vec{\nu} = [\sin \psi \quad -\sin \chi \cos \psi \quad \cos \chi \cos \psi]^T. \quad (3.1)$$

Par ailleurs, l'expression (1.69) de  $\vec{\nu}$  s'écrit, en utilisant (2.40) :

$$\vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla w\|^2}} [-w_x \quad -w_y \quad 1]^T. \quad (3.2)$$

En identifiant les expressions (3.1) et (3.2) de  $\vec{\nu}$ , et en utilisant l'équation eikonale (2.46), on obtient les trois égalités suivantes :

$$-w_x = \sin \psi \sqrt{2 + x^2}, \quad (3.3a)$$

$$-w_y = -\sin \chi \cos \psi \sqrt{2 + x^2}, \quad (3.3b)$$

$$1 = \cos \chi \cos \psi \sqrt{2 + x^2}. \quad (3.3c)$$

Les équations (3.3a) et (3.3b) sont un cas particulier des équations orthographiques du gradient (1.70). Quant à l'équation (3.3c), qui n'est autre que l'équation (2.19), elle comporte comme seule inconnue l'angle  $\psi$ . Sa résolution présente une ambiguïté sur le signe de  $\psi$ , mais ce signe  $\epsilon$  est uniforme sur l'ensemble de la surface, car l'équation (3.3c) montre que  $\cos \psi$  ne s'annule jamais. L'élimination de l'inconnue intermédiaire  $\psi$ , en utilisant (3.3c), donne le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} w_x = -\epsilon \sqrt{x^2 + 1 - \tan^2 \chi}, \\ w_y = \tan \chi. \end{cases} \quad (3.4)$$

En supposant que  $1 - \tan^2 \chi > 0$  et en imposant  $w(0,0) = 0$ , l'intégration des équations (3.4) donne les solutions suivantes, qui sont paramétrées par l'angle  $\chi$  :

$$w_\chi(x,y) = -\epsilon \left[ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1 - \tan^2 \chi} + \frac{1 - \tan^2 \chi}{2} \operatorname{argsh} \frac{x}{\sqrt{1 - \tan^2 \chi}} \right] + y \tan \chi. \quad (3.5)$$

L'expression (3.5) de  $w_\chi(x,y)$  s'identifie bien à l'expression (2.60) de  $w_\xi(x,y)$ , si  $\epsilon = -1$  et si les paramètres  $\xi$  et  $\chi$  sont tels que :

$$\begin{cases} \cos \xi = \sqrt{1 - \tan^2 \chi}, \\ \sin \xi = \tan \chi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Même si cela est rassurant, il est normal d'avoir trouvé les mêmes solutions en utilisant deux voies différentes, puisque ces deux voies sont formellement équivalentes.

Récapitulons les équations que nous avons été amenés à résoudre sur cet exemple. L'équation (2.46) est une EDP de type  $\mathcal{T}_1$ . L'équation (3.3c) est une équation non différentielle de type  $\mathcal{T}_2$  ne faisant intervenir qu'une seule inconnue intermédiaire  $\psi$ . Il se trouve que la non linéarité de l'équation (3.3c) n'est pas un gros obstacle à sa résolution : il y a seulement une ambiguïté globale sur le signe  $\epsilon$  de  $\psi$ . Quant aux équations du gradient (3.3a) et (3.3b), il s'agit de deux équations de type  $\mathcal{T}_3$ . Or, si  $\psi$  est connu, il est notable que l'intégration des équations (3.3a) et (3.3b) est plus simple que l'intégration des équations différentielles (2.47) correspondant à la méthode des caractéristiques, car elle donne

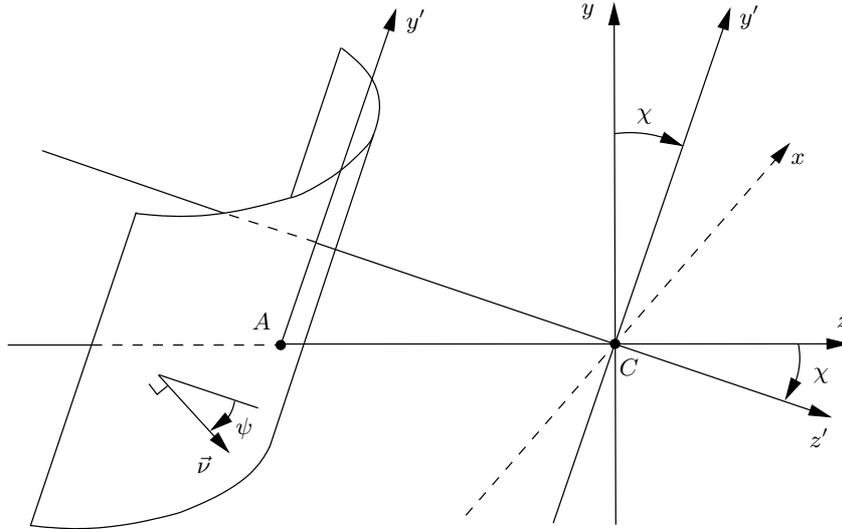


FIG. 3.1 – Pour une valeur fixée de l'angle  $\chi$ , la normale  $\vec{v}$  dépend d'un seul paramètre  $\psi$ , si la surface est un cylindre.

directement la forme explicite des solutions  $w_\chi$ . Qui plus est, l'intégration *numérique* serait elle aussi nettement plus simple pour les équations (3.3a) et (3.3b) que pour le système (2.47), car le choix du chemin d'intégration serait libre, alors que l'intégration des équations (2.47) doit nécessairement être menée le long des caractéristiques<sup>4</sup>. Néanmoins, cette liberté sur le chemin d'intégration a une contrepartie.

### 3.1.3 Intégrabilité d'un champ de normales

L'intégration d'un champ de normales consiste à calculer le relief d'une scène à partir de ses normales. Si l'on utilise le paramétrage  $(p, q)$  de la normale, les équations à intégrer sont les équations orthographiques du gradient (1.70) ou les équations perspectives du gradient (1.95). Grâce au changement d'inconnue (2.40), les équations orthographiques du gradient (1.70) se réécrivent :

$$\begin{cases} w_x = -p, \\ w_y = -q. \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système différentiel (3.7) s'intègre immédiatement<sup>5</sup> :

$$w(x, y) = w(0, 0) - \int_{(u, v) = (0, 0)}^{(x, y)} [p(u, v) du + q(u, v) dv]. \quad (3.8)$$

Cependant, on risque d'obtenir différentes valeurs en calculant l'expression (3.8) de  $w(x, y)$  le long de différents chemins d'intégration. Comme cela a déjà été dit, la liberté dont nous disposons vis-à-vis du chemin d'intégration permet de mener l'intégration, exacte ou approchée, plus facilement que pour la méthode des caractéristiques, mais il est difficilement acceptable que le résultat dépende du chemin d'intégration, sachant que tous les chemins d'intégration sont équivalents *a priori*.

4. C'est une des raisons pour lesquelles Horn a abandonné la méthode des caractéristiques.

5. C'est d'ailleurs ainsi que nous avons calculé les solutions  $w_\chi$  dans le paragraphe 3.1.2, car les équations (3.3a) et (3.3b) sont un cas particulier d'équations orthographiques du gradient.

Le résultat est indépendant du chemin d'intégration dans le cas où **le champ des normales est intégrable**. Or, il est bien connu que la circulation d'un champ de vecteurs entre deux points ne dépend pas du chemin d'intégration si le rotationnel de ce champ est nul<sup>6</sup>. Dans le cas présent, le champ dont on calcule la circulation dans l'expression (3.8) n'est pas le champ des normales, mais le champ des vecteurs  $\vec{v} = [-p \ -q \ 0]^T$ . Comme ce champ de vecteurs n'est défini que dans le plan image, on le prolonge par un champ  $\vec{V}$  défini sur  $\mathbb{R}^3$  de la façon suivante :

$$\vec{V}(x,y,z) = \vec{v}(x,y). \quad (3.9)$$

Le rotationnel du champ  $\vec{V}$  vaut donc :

$$\nabla \wedge \vec{V} = [0 \ 0 \ p_y - q_x]^T, \quad (3.10)$$

et s'annule si :

$$p_y - q_x = 0. \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) est généralement appelée la « contrainte d'intégrabilité » [Horn 86b, Frankot 88]. Je préconise de préciser **contrainte d'intégrabilité orthographique**, car nous allons voir qu'il existe une contrainte légèrement différente dans le cas de la projection perspective.

Sous l'hypothèse de la projection perspective, les équations à intégrer sont les équations perspectives du gradient (1.95)<sup>7</sup>. Ces équations étant non seulement *linéaires*, mais également *homogènes* en  $Z$ , il est judicieux de procéder au changement d'inconnue suivant :

$$\tilde{w} = \ln |Z|, \quad (3.12)$$

qui permet de réécrire les équations (1.95) :

$$\begin{cases} p = -\frac{d'}{1 + x\tilde{w}_x + y\tilde{w}_y} \tilde{w}_x, \\ q = -\frac{d'}{1 + x\tilde{w}_x + y\tilde{w}_y} \tilde{w}_y. \end{cases} \quad (3.13)$$

Le système (3.13) est linéaire en  $(\tilde{w}_x, \tilde{w}_y)$ . Son déterminant  $\mathcal{D}$  vaut :

$$\mathcal{D} = d' (x p + y q + d'). \quad (3.14)$$

En utilisant l'expression (1.64) de  $\vec{v}$ , et sachant que  $\overrightarrow{CP'} = [x \ y \ d']^T$ , on voit que  $\mathcal{D}$  ne s'annule que pour un point image  $P'$  tel que  $\overrightarrow{CP'} \cdot \vec{v} = 0$ , c'est-à-dire pour un point situé sur un limbe (cf. figure 3.2). Lorsque  $\mathcal{D} \neq 0$ , on résout facilement le système (3.13) :

$$\begin{cases} \tilde{w}_x = -\tilde{p}, \\ \tilde{w}_y = -\tilde{q}, \end{cases} \quad (3.15)$$

où les fonctions  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  sont définies par :

$$\begin{cases} \tilde{p} = \frac{p}{x p + y q + d'}, \\ \tilde{q} = \frac{q}{x p + y q + d'}. \end{cases} \quad (3.16)$$

6. On dit également d'un tel champ de vecteurs « qu'il dérive d'un potentiel ».

7. Rappelons que ces équations ne sont valides que pour les points où l'extrémité de la normale se trouve sur l'hémisphère nord de la sphère de Gauss, équateur exclu.

Le système différentiel (3.15) s'intègre immédiatement :

$$\tilde{w}(x,y) = \tilde{w}(0,0) - \int_{(u,v)=(0,0)}^{(x,y)} [\tilde{p}(u,v) du + \tilde{q}(u,v) dv]. \quad (3.17)$$

L'expression (3.17) de  $\tilde{w}(x,y)$ , qui est tout à fait similaire à l'expression (3.8) de  $w(x,y)$ , constitue la solution du problème de l'intégration *perspective* d'un champ de normales [Durou 07a]. La **contrainte d'intégrabilité perspective** s'écrit sous une forme similaire à (3.11) :

$$\tilde{p}_y - \tilde{q}_x = 0. \quad (3.18)$$

Ce qui diffère le plus entre les contraintes d'intégrabilité (3.11) et (3.18) n'est pas l'expression analytique de (3.18), qui serait nettement plus complexe que celle de (3.11) si on remplaçait  $p$  et  $q$  par leurs expressions (3.16), mais le fait que (3.18) n'est utilisable que si l'appareil photographique est calibré. En effet, les égalités (3.16) montrent que  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  dépendent de la distance  $d'$  et de la position du point principal  $O$  dans le plan image, puisque les coordonnées  $x$  et  $y$  sont exprimées dans un repère ayant  $O$  pour origine (cf. figure 3.2).

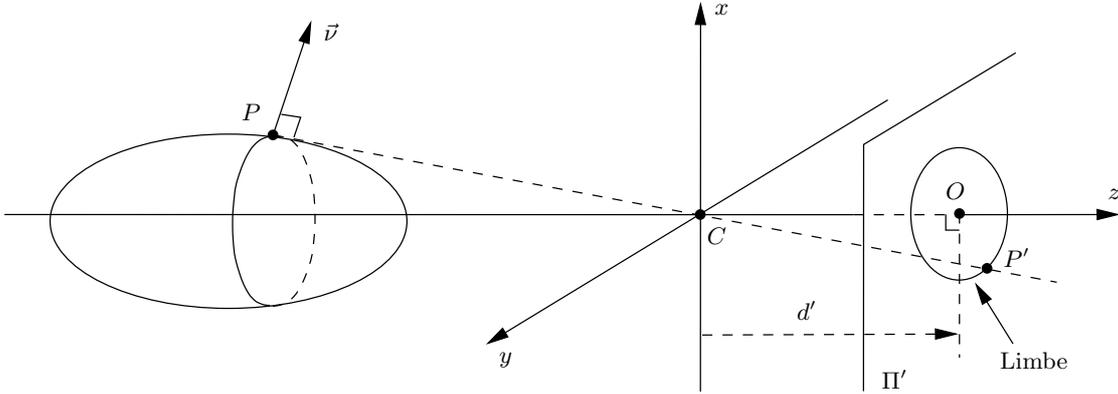


FIG. 3.2 – Un point image  $P'$  situé sur un limbe est conjugué d'un point objet  $P$  en lequel la normale  $\vec{v}$  est orthogonale à la direction du centre optique.

Lorsqu'un champ de normales ne vérifie pas les contraintes d'intégrabilité (3.11) ou (3.18), comment mener l'intégration? Bien qu'il ne soit pas spécifique au SFS, ce problème a été résolu par Frankot et Chellappa dans le cadre du SFS [Frankot 88], en projetant le champ à intégrer sur une base de fonctions intégrables. Horn et Brooks ont utilisé l'approche variationnelle [Horn 86b], que nous allons maintenant détailler.

Sous l'hypothèse de la projection orthographique, si l'on dispose d'un champ de normales ne vérifiant pas la contrainte (3.11), il n'existe pas de solution exacte aux équations orthographiques du gradient (3.7). On se contente alors d'une solution approchée au sens des moindres carrés, c'est-à-dire d'une fonction  $w^*$  qui minimise la *fonctionnelle* suivante [Horn 86b] :

$$\mathcal{F}_{\text{orth}}(w) = \iint_{(x,y) \in \Omega} [(w_x + p)^2 + (w_y + q)^2] dx dy, \quad (3.19)$$

où l'intégrale est calculée sur le « domaine de reconstruction »  $\Omega$ . Sous l'hypothèse de la projection perspective, il est plus simple de chercher une solution approchée  $\tilde{w}^*$  des équations (3.15) qu'une

solution approchée  $Z^*$  des équations perspectives du gradient (1.95). On cherche donc la fonction  $\tilde{w}^*$  qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}_{\text{pers}}(\tilde{w}) = \iint_{(x,y) \in \Omega} [(\tilde{w}_x + \tilde{p})^2 + (\tilde{w}_y + \tilde{q})^2] dx dy. \quad (3.20)$$

Or, une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une fonction minimise des fonctionnelles telles que  $\mathcal{F}_{\text{orth}}$  ou  $\mathcal{F}_{\text{pers}}$  est donnée par « l'équation d'Euler-Lagrange ».

### 3.1.4 Équation d'Euler-Lagrange

Soit la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}(f) = \iint_{(x,y) \in \Omega} F(x,y,f,f_x,f_y) dx dy, \quad (3.21)$$

et soit  $\delta$  une fonction pouvant être considérée comme un infiniment petit<sup>8</sup> devant  $f$ . Un développement limité au premier ordre en  $\delta$ ,  $\delta_x$  et  $\delta_y$  donne :

$$\mathcal{F}(f + \delta) - \mathcal{F}(f) = \iint_{(x,y) \in \Omega} (F_f \delta + F_{f_x} \delta_x + F_{f_y} \delta_y) dx dy, \quad (3.22)$$

où les dépendances en  $(x,y,f,f_x,f_y)$  des dérivées partielles de  $F$  sont omises, afin d'alléger les notations. D'après le théorème de Stokes, la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long d'une courbe fermée  $\mathcal{C}$  de l'espace 3D est égale au flux du rotationnel de  $\vec{V}$  à travers toute surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , si les orientations de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  sont cohérentes. Choisissons comme surface  $\mathcal{S}$  le domaine  $\Omega$ , qui est une surface plane, et comme courbe  $\mathcal{C}$  son contour  $\partial\Omega$ . Seule la troisième coordonnée du rotationnel de  $\vec{V}$  intervient donc dans le calcul du flux. Choisissons comme champ de vecteurs :

$$\vec{V} = [F_{f_y} \delta \quad -F_{f_x} \delta \quad 0]^T. \quad (3.23)$$

Le théorème de Stokes s'écrit donc :

$$\oint_{P \in \partial\Omega} [F_{f_y} \delta \quad -F_{f_x} \delta]^T \cdot d\vec{OP} = \iint_{(x,y) \in \Omega} \left[ \frac{\partial(-F_{f_x} \delta)}{\partial x} - \frac{\partial(F_{f_y} \delta)}{\partial y} \right] dx dy. \quad (3.24)$$

En utilisant (3.24), on peut réécrire l'équation (3.22) :

$$\mathcal{F}(f + \delta) - \mathcal{F}(f) = \iint_{(x,y) \in \Omega} \left( F_f - \frac{\partial F_{f_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{f_y}}{\partial y} \right) \delta dx dy - \oint_{P \in \partial\Omega} \delta [F_{f_y} \quad -F_{f_x}]^T \cdot d\vec{OP} \quad (3.25)$$

Une fonction  $f^*$  minimise  $\mathcal{F}$  si le membre gauche de (3.25) s'annule, pour une variation  $\delta$  quelconque. Or, les deux termes du membre droit variant indépendamment l'un de l'autre, doivent être simultanément nuls. La nullité du premier terme du membre droit de (3.25), pour une variation  $\delta$  quelconque, impose l'égalité suivante en tout point de  $\Omega$  :

$$F_f - \frac{\partial F_{f_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{f_y}}{\partial y} = 0, \quad (3.26)$$

qui est l'**équation d'Euler-Lagrange**. Quant au deuxième terme du membre droit de (3.25), sa nullité pour une variation  $\delta$  quelconque impose l'égalité suivante, en tout point  $P$  de  $\partial\Omega$  où la valeur de  $f$  n'est pas fixée :

$$[F_{f_y} \quad -F_{f_x}]^T \cdot d\vec{OP} = 0. \quad (3.27)$$

---

8. La fonction  $\delta$  constitue une « variation » de  $f$ , ce qui explique l'origine du terme « variationnel ».

L'équation (3.27) est généralement appelée la « condition au bord naturelle » [Horn 86b], mais je préconise de l'appeler « condition au bord par défaut », parce qu'elle n'est valide qu'aux points  $P$  de  $\partial\Omega$  où la valeur de  $f$  n'est pas fixée. Le problème des conditions au bord est un point crucial de la résolution *numérique* du SFS, comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce chapitre.

### 3.1.5 Intégration d'un champ de normales sans condition au bord

Une condition nécessaire pour que la fonction  $w^*$  minimise  $\mathcal{F}_{\text{orth}}$  est donc donnée par l'équation d'Euler-Lagrange, qui s'écrit, d'après (3.19) et (3.26) :

$$\nabla^2 w = -(p_x + q_y). \quad (3.28)$$

La condition nécessaire équivalente pour que la fonction  $\tilde{w}^*$  minimise  $\mathcal{F}_{\text{pers}}$  s'écrit, d'après (3.20) et (3.26) :

$$\nabla^2 \tilde{w} = -(\tilde{p}_x + \tilde{q}_y). \quad (3.29)$$

Les équations (3.28) et (3.29) sont des *équations de Poisson*.

Horn et Brooks disent de l'équation (3.28) qu'elle « n'admet pas une solution unique sans contrainte supplémentaire », ce qui est vrai, mais ils affirment aussi que « nous pouvons rajouter n'importe quelle fonction harmonique<sup>9</sup> à une solution pour obtenir une autre solution », ce qui est très discutable [Horn 86b]. En effet, il faut également tenir compte de la condition au bord par défaut, qui constitue une deuxième condition nécessaire. Horn et Brooks considèrent donc que l'intégration d'un champ de normales est un problème sous-contraint et qu'il est nécessaire de fixer la valeur de  $w$  au bord. Or, le problème est clairement sur-contraint en l'absence de condition au bord. C'est précisément ce qui explique l'existence de la contrainte d'intégrabilité (3.11).

Dans un article consacré à la résolution de l'équation de Poisson en vision par ordinateur [Simchony 90], Simchony *et al.* supposent qu'une condition au bord (de type Dirichlet ou de type Neumann) est disponible. Outre que cela est rarement le cas en vision monoculaire, faire une telle hypothèse dans le cas de l'intégration d'un champ de normales aurait comme conséquence catastrophique de supprimer *ipso facto* la condition au bord par défaut, qui suffit à rendre la solution unique (à une constante près), comme nous allons le voir.

Horn et Brooks proposent un schéma numérique de résolution de l'équation de Poisson (3.28) que l'on peut justifier en approchant l'expression (3.19) de  $\mathcal{F}_{\text{orth}}(w)$  par la somme discrète suivante, qui est valide si les pixels sont répartis dans le plan image selon une grille régulière à maille carrée :

$$\mathcal{E}_{\text{orth}}(\bar{w}) = \sum_{(i,j) \in \Omega_1} \sum \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\delta} + \frac{p_{i+1,j} + p_{i,j}}{2} \right)^2 + \sum_{(i,j) \in \Omega_2} \sum \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\delta} + \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j}}{2} \right)^2. \quad (3.30)$$

Dans l'expression (3.30),  $\delta$  désigne la distance entre pixels voisins,  $\Omega_1$  l'ensemble des pixels  $(i,j)$  de  $\Omega$  tels que  $(i+1,j) \in \Omega$ ,  $\Omega_2$  l'ensemble des pixels  $(i,j)$  de  $\Omega$  tels que  $(i,j+1) \in \Omega$ , et  $\bar{w}$  le vecteur des inconnues. Horn et Brooks considèrent comme inconnues les valeurs  $w_{i,j}$  de  $w$  aux pixels de l'intérieur  $\bar{\Omega}$  de  $\Omega$ , qui sont les pixels dont les quatre plus proches voisins sont dans  $\Omega$ . Ils ne considèrent pas comme inconnues les valeurs  $w_{i,j}$  de  $w$  aux pixels du bord  $\partial\Omega = \Omega \setminus \bar{\Omega}$ , puisqu'ils utilisent une condition au bord de type Dirichlet. La caractérisation  $\nabla \mathcal{E}_{\text{orth}} = 0$  d'un extremum de  $\mathcal{E}_{\text{orth}}$  s'obtient donc en dérivant (3.30) par rapport à  $w_{i,j}$ , pour  $(i,j) \in \bar{\Omega}$ , ce qui donne :

$$4w_{i,j} - (w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}) = \frac{\delta}{2} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j} + q_{i,j+1} - q_{i,j-1}). \quad (3.31)$$

9. Une fonction harmonique  $f$  vérifie l'équation de Laplace  $\nabla^2 f = 0$ .

L'équation (3.31) est bien une approximation numérique de l'équation de Poisson (3.28), si l'on approche le laplacien de  $w$  de la façon suivante :

$$\nabla^2 w(i,j) \approx \frac{w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}}{\delta^2}, \quad (3.32)$$

et si l'on utilise les différences finies :

$$\begin{cases} p_x(i,j) \approx \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\delta}, \\ q_y(i,j) \approx \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2\delta}. \end{cases} \quad (3.33)$$

La méthode d'intégration d'un champ de normales de Horn et Brooks, notée HB, consiste à résoudre les équations (3.31) par l'itération suivante [Horn 86b] :

$$w_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \left( w_{i+1,j}^k + w_{i,j+1}^k + w_{i-1,j}^k + w_{i,j-1}^k \right) + \frac{\delta}{8} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j} + q_{i,j+1} - q_{i,j-1}). \quad (3.34)$$

Nous allons voir que l'utilisation d'une condition de type Dirichlet est superflue.

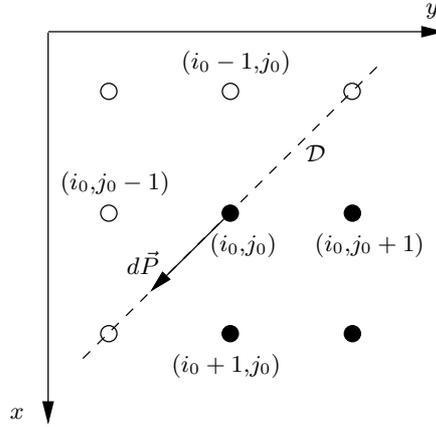


FIG. 3.3 – Seuls les pixels noirs se trouvent dans  $\Omega$ . Si  $(i_0, j_0)$ ,  $(i_0 + 1, j_0)$  et  $(i_0, j_0 + 1)$  se trouvent sur  $\partial\Omega$ , alors la droite  $\mathcal{D}$  est une approximation plausible de la tangente à  $\partial\Omega$  en  $(i_0, j_0)$ .

**En l'absence de condition au bord**, il convient d'utiliser la condition au bord par défaut. D'après (3.19) et (3.27), cette condition s'écrit, dans le cas de la projection orthographique :

$$[w_y + q \quad - (w_x + p)]^T \cdot d\overrightarrow{OP} = 0. \quad (3.35)$$

Soit  $(i_0, j_0)$  un pixel de  $\partial\Omega$ . Supposons que, parmi ses quatre plus proches voisins, seuls  $(i_0 + 1, j_0)$  et  $(i_0, j_0 + 1)$  soient dans  $\Omega$ , et que ces trois pixels se trouvent sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , c'est-à-dire que  $(i_0, j_0)$  se trouve sur un « coin » de  $\Omega$  (cf. figure 3.3). On peut alors considérer que la tangente à  $\partial\Omega$  en  $(i_0, j_0)$  est la droite  $\mathcal{D}$  de la figure 3.3. Comme  $d\overrightarrow{OP} = [dx \quad -dx]^T$ , la condition (3.35) s'écrit :

$$w_y + q + w_x + p = 0. \quad (3.36)$$

Par ailleurs, en l'absence de condition au bord, on doit également considérer comme inconnues les valeurs  $w_{i,j}$  de  $w$  aux pixels du bord  $\partial\Omega$ . Cela implique que les équations  $\partial\mathcal{E}_{\text{orth}}/\partial w_{i,j} = 0$  ne s'écrivent plus systématiquement sous la forme (3.31). Par exemple, la condition  $\partial\mathcal{E}_{\text{orth}}/\partial w_{i_0, j_0} = 0$  s'écrit :

$$2w_{i_0, j_0} - (w_{i_0+1, j_0} + w_{i_0, j_0+1}) = \frac{\delta}{2} (p_{i_0+1, j_0} + p_{i_0, j_0} + q_{i_0, j_0+1} + q_{i_0, j_0}). \quad (3.37)$$

On vérifie facilement que l'équation (3.37) traduit numériquement la condition au bord par défaut (3.36). On dispose ainsi d'une variante  $\text{HB}^+$  de la méthode d'intégration  $\text{HB}$  [Durou 07a], qui se dispense de toute condition au bord<sup>10</sup>. Le relief du buste de Beethoven qui est montré sur la figure 2.4 a été reconstruit grâce à la méthode d'intégration  $\text{HB}^+$ , en utilisant le champ des normales calculées par stéréophotométrie à partir des trois photographies de gauche de la figure 1.14.

Il suffit d'observer la très forte similarité entre les expressions (3.19) et (3.20) des fonctionnelles  $\mathcal{F}_{\text{orth}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{pers}}$  pour comprendre que la généralisation de la méthode d'intégration  $\text{HB}^+$  au cas perspectif est immédiate. Enfin, il va de soi que si l'on dispose de connaissances fiables sur le relief à reconstruire, leur prise en compte dans la méthode d'intégration  $\text{HB}^+$  est aisée : il suffit de retirer de  $\bar{w}$  les valeurs de  $w$  aux pixels concernés, que ces pixels se trouvent ou non sur  $\partial\Omega$ .

Même en l'absence de condition au bord, les équations du gradient, qui n'admettent généralement aucune solution exacte, admettent donc une solution approchée unique, à une constante près qui ne change pas la forme globale du relief. Intéressons-nous maintenant à la résolution des modèles non différentiels du SFS.

### 3.1.6 Régularisation des modèles non différentiels du SFS

Si la scène est éclairée par une onde plane uniforme, alors le modèle non différentiel général du SFS s'écrit sous la forme (2.1). Nous avons vu dans le paragraphe 2.1.1 que ce modèle est mal posé car il admet un nombre infini de solutions exactes. Sa résolution n'a donc de sens que si le problème est mieux contraint. Or, les modèles non différentiels sont tellement mal contraints que la donnée d'une condition au bord est insuffisante. D'ailleurs, sur ce point, les modèles non différentiels diffèrent fondamentalement des modèles différentiels, comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce chapitre.

Une première façon de contraindre les modèles non différentiels du SFS a déjà été évoquée dans le chapitre 2. Elle consiste à utiliser un modèle de surface local. En guise d'exemple, l'estimateur de la normale (2.18), avec  $\epsilon = -1$ , est appliqué à l'image de synthèse d'un vase (cf. figure 3.4). Le champ des normales ainsi calculé n'est probablement pas intégrable, mais le relief obtenu grâce à la méthode d'intégration  $\text{HB}^+$  est tout à fait « acceptable » (cf. figure 3.4-c). Plus précisément, l'écart quadratique moyen au relief réel de la figure 3.4-a vaut  $|\Delta w|_2 = 0,70$ , alors qu'il vaut 1,00, 0,38 et 0,62 pour les trois méthodes de résolution de [Durou 08] utilisées sans condition au bord.

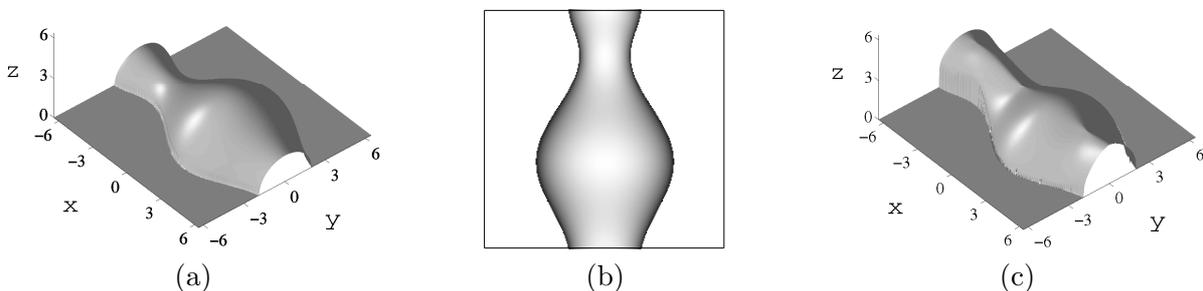


FIG. 3.4 – (a) Surface représentant un vase. (b) Image de synthèse correspondante. (c) Relief reconstruit en utilisant l'estimateur de la normale (2.18), avec  $\epsilon = -1$ , à partir de l'image (b).

10. En fait, il est nécessaire de fixer la valeur de  $w$  en un point de  $\Omega$ , car les équations orthographiques du gradient (3.7) ne sont jamais intégrables qu'à une constante près.

L'utilisation d'un modèle de surface local pour contraindre le problème est très simple, comme nous venons de le voir, mais de meilleurs résultats peuvent être obtenus grâce à la « théorie de la régularisation » [Tikhonov 67, Poggio 84], qui a ouvert la voie à un grand nombre de méthodes de résolution, dans le sillage de Horn et de ses collaborateurs [Ikeuchi 81, Frankot 88, Malik 89, Horn 90, Szeliski 91]. La **régularisation des modèles non différentiels du SFS**, qui constitue le principe de ces méthodes, consiste à adjoindre au modèle non différentiel une ou plusieurs contraintes sur la solution, de manière à former un système sur-contraint. On est alors ramené à un cas de figure similaire à celui de la résolution des équations du gradient, c'est-à-dire que la recherche de la solution exacte est remplacée par celle de la solution approchée au sens des moindres carrés<sup>11</sup>.

Les deux types de contraintes les plus souvent utilisées sont les contraintes d'intégrabilité et les « contraintes de lissage ». Par exemple, la résolution approchée du modèle non différentiel (2.1) combiné à la contrainte d'intégrabilité orthographique (3.11) revient à trouver les fonctions  $p^*$  et  $q^*$  qui minimisent la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}_{\text{Horn}}(p,q) = \iint_{(x,y) \in \Omega} [\mathcal{R}(p,q) - g]^2 dx dy + \lambda \iint_{(x,y) \in \Omega} (p_y - q_x)^2 dx dy. \quad (3.38)$$

Cette fonctionnelle a été proposée initialement dans [Horn 86b]. Le problème de sa minimisation ressemble beaucoup à la résolution approchée des équations du gradient, mais plusieurs nuances, en apparence mineures, rendent les deux problèmes très différents.

D'une part, l'expression (3.38) fait apparaître un coefficient  $\lambda \geq 0$ , qui peut être interprété comme un « poids » entre les équations (2.1) et (3.11). Il n'y a pas lieu d'utiliser un tel coefficient pour l'intégration d'un champ de normales, puisque les deux équations du gradient ont le même poids. La valeur de  $\lambda$  est généralement choisie de manière empirique, ce qui constitue une première faiblesse des méthodes de résolution découlant de cette stratégie.

D'autre part, le modèle non différentiel (2.1) est généralement non linéaire. Par conséquent, l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à la fonctionnelle  $\mathcal{F}_{\text{Horn}}$  est également non linéaire, alors que dans le cas de l'intégration d'un champ de normales, il s'agit d'une équation de Poisson, qui est linéaire. Il est surprenant que de nombreux auteurs aient tenté de résoudre de telles équations non linéaires par des schémas itératifs. En effet, cela revient à rajouter à la difficulté de la non linéarité, qui est inévitable si le modèle du SFS est non linéaire, et qui complique déjà beaucoup la résolution, une deuxième difficulté purement numérique, qui est celle de la *convergence*. Il existe peu de résultats généraux sur la convergence des itérations non linéaires, mais j'avais été intrigué, durant mon stage de DEA, par le comportement manifestement divergent de deux méthodes de résolution proposées par Strat [Strat 79] et par Smith [Smith 82]. La *preuve de divergence* à coup sûr de ces deux méthodes [Durou 96] constitue un chapitre entier de ma thèse. La seule *preuve de convergence* d'un schéma itératif de résolution d'une équation d'Euler-Lagrange non linéaire, dans le cadre du SFS, est due à Lee [Lee 85b]. Elle concerne une méthode de résolution proposée par Ikeuchi et Horn [Ikeuchi 81], mais Pascal Daniel a montré dans sa thèse [Daniel 00a] qu'elle impose sur la valeur du poids  $\lambda$  une contrainte telle que la méthode devient inutilisable, à cause d'une très grande lenteur de convergence.

Au lieu de chercher à résoudre l'équation d'Euler-Lagrange, il est plus simple de directement rechercher les fonctions  $p^*$  et  $q^*$  qui minimisent la fonctionnelle  $\mathcal{F}_{\text{Horn}}$ . Si l'on utilise une méthode d'optimisation appropriée, cela permet d'éviter la divergence. Dans [Daniel 00b], une méthode de résolution convergente à coup sûr combine très simplement une méthode d'optimisation classique « à direction de descente » et une technique de détermination du déplacement optimal par « recherche linéaire » [Bonnans 02].

---

11. L'utilisation de méthodes d'estimation plus robustes que les moindres carrés a donné lieu à plusieurs articles de Hancock et de ses collaborateurs de l'Université de York (« The University of York »), comme par exemple [Worthington 99].

Les conditions au bord, dont j’ai dit qu’elles contraignent insuffisamment le problème, sont systématiquement utilisées dans les schémas itératifs de la littérature. Il est inutile de prouver que cela est superflu : le raisonnement consiste à nouveau à montrer que la condition au bord par défaut suffit à rendre unique la solution approchée. La méthode convergente à coup sûr de Daniel a pu être ainsi améliorée et ne plus nécessiter de condition au bord<sup>12</sup>. Cette méthode, appelée DD (Daniel-Durou), fait partie des trois méthodes qui sont testées et comparées dans [Durou 08]. La figure 3.5-b montre un exemple de reconstruction par la méthode DD, à partir de la photographie de la figure 3.5-a.

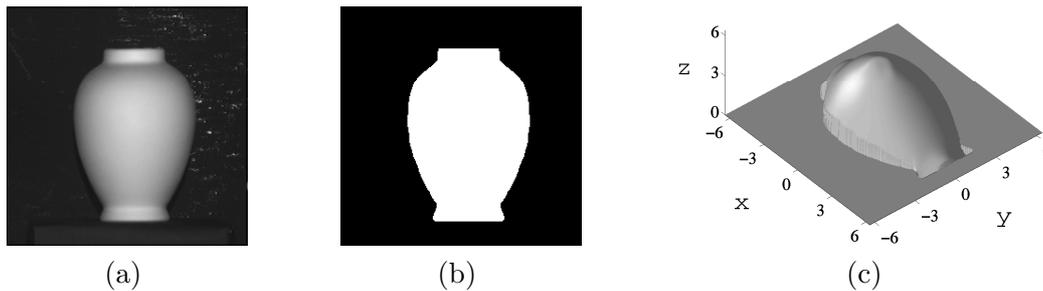


FIG. 3.5 – (a) Photographie d’un vase. (b) En blanc : pixels de  $\Omega$ . (c) Relief reconstruit par la méthode DD, à partir de la photographie (a). Ces images proviennent de [Durou 08].

Par ailleurs, la méthode DD étant une méthode d’optimisation *déterministe*, est inapte à trouver le minimum global d’une fonctionnelle telle que  $\mathcal{F}_{\text{Horn}}$ , qui n’est pas strictement convexe. Ce problème résiduel a été résolu dans le cadre d’un projet « jeunes chercheurs » du GdR ISIS mené en collaboration avec Xavier Descombes, chercheur à l’INRIA-Sophia Antipolis, en reformulant le SFS dans le *cadre bayésien*. Les deux termes d’une fonctionnelle telle que  $\mathcal{F}_{\text{Horn}}$  sont alors interprétés comme la *vraisemblance* et l’*a priori* du modèle. La figure 3.6 montre un exemple de reconstruction où une fonctionnelle légèrement différente de  $\mathcal{F}_{\text{Horn}}$  est minimisée par optimisation *stochastique*, à l’aide de l’algorithme du recuit simulé [Descombes 01]. Pour un relief aussi compliqué que celui de la figure 3.6-a, aucune méthode d’optimisation déterministe n’atteindrait un résultat comparable à celui de la figure 3.6-c, à moins de disposer d’une information supplémentaire sur le relief, comme par exemple la position des « creux » et des « bosses ». Enfin, comme l’algorithme du recuit simulé est très lent (environ une heure sur un *P3 733 MHz* pour le relief de la figure 3.6-c, alors que l’image 3.6-b ne comporte que  $64 \times 64$  pixels!), cette méthode de résolution a ensuite été couplée avec la méthode DD, dans une version « multi-échelle » conçue par Alain Cruzil [Cruzil 03].

## 3.2 Résolution des modèles différentiels du SFS

Dans ses premiers travaux, Horn résout le SFS par la méthode des caractéristiques [Horn 75, Horn 77], mais il faut attendre que des mathématiciens spécialistes des EDP s’intéressent au SFS pour que les modèles différentiels du SFS soient à nouveau étudiés. Ce mouvement, initié par Lions grâce à l’utilisation de la notion de « solutions de viscosité » [Rouy 92, Lions 93], a été poursuivi par Falcone *et al.* [Camilli 96, Falcone 97, Cristiani 07] puis par Prados *et al.* [Prados 05, Prados 06a]. Dupuis et Oliensis [Dupuis 94] et Kimmel *et al.* [Kimmel 95b] ont contribué eux aussi à ce regain d’intérêt pour la résolution des EDP du SFS.

<sup>12</sup>. Cependant, comme pour  $\text{HB}^+$ , une condition au bord reste très facile à intégrer à la méthode.

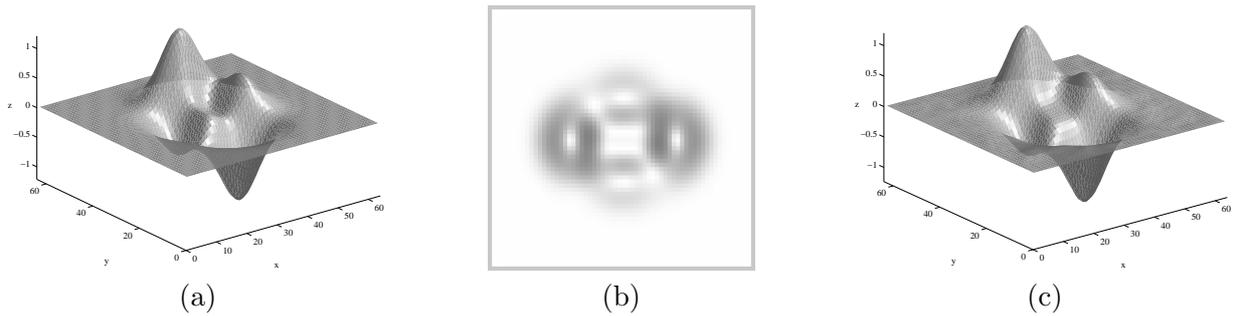


FIG. 3.6 – (a) Graphe de la fonction « peaks » de Matlab. (b) Image de synthèse correspondante. (c) Relief reconstruit par recuit simulé, à partir de l'image (b). Ces images proviennent de [Descombes 01].

### 3.2.1 Conditions au bord

Nous avons vu dans le paragraphe 3.1.5 que l'intégration des équations du gradient ne nécessite pas la donnée d'une condition au bord, car ce problème est naturellement sur-contraint. En revanche, les modèles non différentiels du SFS étant généralement sous-contraints, leur résolution requiert l'ajout d'une contrainte (cf. paragraphe 3.1.6). Si l'utilisation d'un modèle de surface local ou le recours à la théorie de la régularisation suffisent généralement pour rendre sur-contraints les modèles non différentiels du SFS, il n'en va pas de même pour une condition au bord, qui ne constitue pas une contrainte suffisamment forte. Les **conditions au bord** ne sont donc pas indispensables lorsqu'on résout le SFS sous sa forme non différentielle. À titre d'exemple, rappelons que la méthode DD n'utilise effectivement aucune condition au bord.

La situation est très différente lorsqu'on résout le SFS sous sa forme différentielle. En effet, si les modèles différentiels du SFS constituent en général des problèmes mal posés, ils sont quand même beaucoup plus contraints que les modèles non différentiels. Par exemple, il existe en chaque point de l'image de la figure 2.11 une infinité de valeurs  $(p, q)$  qui vérifient la pseudo-équation eikonale correspondant à l'équation eikonale (2.46), qui s'écrit, d'après (2.42) :

$$p^2 + q^2 = 1 + x^2. \quad (3.39)$$

En revanche, la famille continue de solutions  $w_\xi$  de l'équation eikonale (2.46) ne dépend que du paramètre  $\xi$ . La solution de cette équation eikonale devient donc unique dès que la valeur de  $\xi$  est fixée. Les figures 2.12-a, 2.12-b et 2.12-c montrent que l'ambiguïté sur la solution est également levée si l'on utilise une condition au bord « appropriée », comme par exemple la valeur de  $w$  en un certain nombre de points de  $\Omega$ <sup>13</sup>.

L'utilisation d'une condition au bord est-elle vraiment indispensable pour résoudre les modèles différentiels du SFS? Intéressons-nous au modèle différentiel le plus simple du SFS, c'est-à-dire à l'équation eikonale (2.41). Il est assez tentant de résoudre cette équation en recherchant la fonction  $w^*$  qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}_{\text{eiko}}(w) = \iint_{(x,y) \in \Omega} (\|\nabla w\|^2 - 2s)^2 dx dy, \quad (3.40)$$

13. Ces points ne doivent pas forcément se trouver sur le bord  $\partial\Omega$ , mais je parle quand même de « condition au bord » pour ces points.

qui peut être approchée par la somme discrète :

$$\mathcal{E}_{\text{eiko}}(\bar{w}) = \sum_{(i,j) \in \Omega_3} \sum_{(i,j) \in \Omega_3} \left[ \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\delta} \right)^2 + \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\delta} \right)^2 - 2s_{i,j} \right]^2, \quad (3.41)$$

où  $\Omega_3$  désigne l'ensemble des pixels  $(i,j)$  de  $\Omega$  tels que  $(i+1,j) \in \Omega$  et  $(i,j+1) \in \Omega$ . Ne pas imposer de condition au bord sur  $w$ <sup>14</sup> revient à considérer comme inconnues toutes les valeurs  $w_{i,j}$  apparaissant dans l'expression (3.41). Or, il est tout à fait possible que la fonction  $\mathcal{E}_{\text{eiko}}$  admette un minimum absolu *unique*, même si l'équation eikonale (2.41) admet une famille continue de solutions exactes, c'est-à-dire même s'il existe une déformation invisible. La résolution numérique est donc susceptible de lever l'ambiguïté sur la solution, mais d'une façon arbitraire qui n'est pas acceptable. Par exemple, dans le cas de l'équation eikonale (2.46), qui admet une famille continue de solutions  $w_\xi$ , supposons que pour toute valeur non nulle de  $\xi$ , on ait l'inégalité stricte suivante :

$$\mathcal{E}_{\text{eiko}}(\bar{w}_0) < \mathcal{E}_{\text{eiko}}(\bar{w}_\xi). \quad (3.42)$$

On ne devrait pas en conclure que la résolution numérique de l'équation eikonale (2.46) est bien posée, car l'écart entre les deux membres de l'inégalité (3.42), qui proviendrait sans doute de phénomènes de quantification numérique, ne serait pas significatif. On comprend pourquoi Hadamard englobe dans la définition d'un problème bien posé l'unicité de la solution et son *bon conditionnement* : le problème de la résolution numérique de l'équation eikonale (2.46) sans condition au bord, qui équivaut à la recherche du minimum absolu de la fonction  $\mathcal{E}_{\text{eiko}}$ , reste donc mal posé, même si ce minimum est unique, à cause de son *mauvais conditionnement*.

Par conséquent, pour les modèles différentiels du SFS comme pour ses modèles non différentiels, l'absence de toute contrainte supplémentaire rend la résolution mal posée. Pour les modèles non différentiels, la présence d'une condition au bord ne suffit pas à rendre la résolution bien posée. En revanche, nous verrons dans le paragraphe 3.2.4 que ce n'est pas le cas pour les modèles différentiels. Auparavant, intéressons-nous aux deux autres manières de rendre bien posée la résolution des modèles différentiels du SFS : l'utilisation d'un modèle de surface et le recours à la théorie de la régularisation.

### 3.2.2 Utilisation d'un modèle de surface

Un premier moyen de rendre bien posés les modèles différentiels du SFS consiste à **utiliser un modèle de surface**. Contrairement aux modèles de surfaces utilisés pour rendre bien posés les modèles non différentiels du SFS, qui sont généralement des modèles locaux (cf. paragraphes 2.1.3 et 2.1.4), des modèles de surfaces locaux et globaux ont été utilisés pour résoudre les modèles différentiels du SFS.

Samaras et Metaxas ont obtenu de très bons résultats en utilisant un modèle de surface *local* constitué de facettes planes se rejoignant par les arêtes (éléments finis de continuité  $C^0$ ), définies par une grille non régulière de points de contrôle qui peut être localement densifiée [Samaras 98]. La méthode a été étendue aux modèles du SFS tenant compte de la projection perspective [Samaras 03].

Dans sa thèse, Frédéric Courteille a utilisé des modèles de surface *globaux* tenant également compte de la projection perspective [Courteille 08]. Par rapport à un modèle de surface local, un modèle de surface global diminue le nombre de paramètres. Cela permet, d'une part, de réduire considérablement les temps de calcul et, d'autre part, de ne plus utiliser systématiquement les niveaux de gris de tous les pixels. Dans l'exemple de la figure 3.7, le modèle de surface global utilisé est une surface de Bézier comportant  $4 \times 4$  points de contrôle. La recherche des valeurs optimales des paramètres du modèle de

---

14. Rappelons qu'on impose  $w(0,0) = 0$ .

surface est effectuée par optimisation *déterministe*. Seuls 3% des pixels sont utilisés, qui sont choisis parmi ceux dont le niveau de gris semble fidèle au modèle de SFS utilisé (cf. figure 3.7-b). Le temps de calcul vaut environ une seconde sur un *P4 2,4 GHz*.

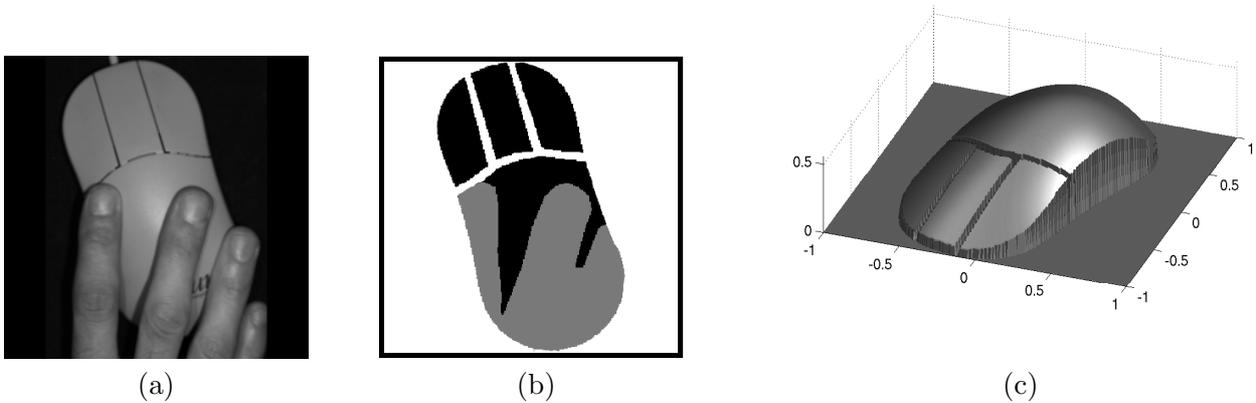


FIG. 3.7 – (a) Photographie d'une souris. (b) En noir : pixels dont le niveau de gris semble fidèle au modèle de SFS utilisé. (c) Relief calculé en utilisant une surface de Bézier comportant  $4 \times 4$  points de contrôle, par optimisation déterministe, à partir de la photographie (a). Ces images proviennent de [Courteille 08].

Étant donné le faible nombre d'inconnues des modèles de surface globaux, il est tentant d'utiliser une méthode d'optimisation stochastique. Le résultat de la figure 3.8 a été obtenu en utilisant un autre modèle de surface global, en l'occurrence une surface *B-spline* comportant  $16 \times 16$  points de contrôle, ainsi que l'algorithme du recuit simulé [Courteille 06c]. Le temps de calcul vaut 25 minutes environ.

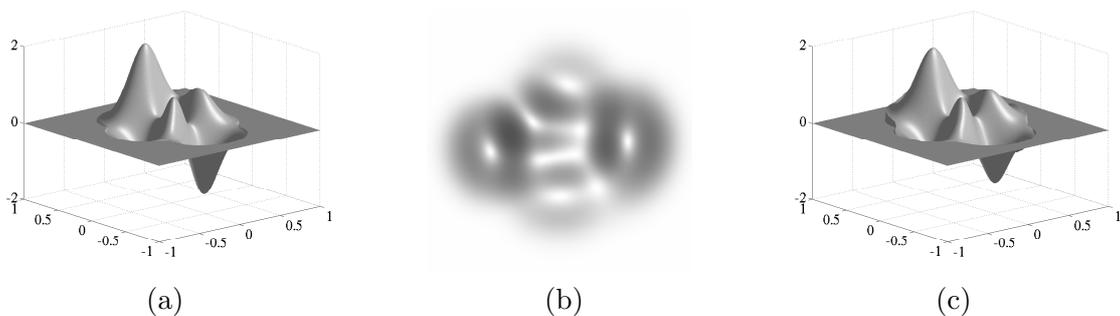


FIG. 3.8 – (a) Graphe de la fonction « peaks » de Matlab. (b) Image de synthèse correspondante. (c) Relief calculé en utilisant une surface *B-spline* comportant  $16 \times 16$  points de contrôle, par optimisation stochastique, à partir de l'image (b). Ces images proviennent de [Courteille 06c].

### 3.2.3 Régularisation des modèles différentiels du SFS

S'il n'est pas acceptable de résoudre l'équation eikonale (2.41) en recherchant le minimum de la fonction  $\mathcal{E}_{\text{eiko}}$  (cf. paragraphe 3.2.1), on peut quand même recourir à la **régularisation des modèles**

**différentiels du SFS**, en utilisant par exemple la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}_{\text{LB}}(w) = (1 - \lambda) \iint_{(x,y) \in \Omega} (\|\nabla w\|^2 - 2s)^2 dx dy + \lambda \iint_{(x,y) \in \Omega} (w_{xx}^2 + w_{yy}^2) dx dy. \quad (3.43)$$

Le terme de régularisation de  $\mathcal{F}_{\text{LB}}$ , c'est-à-dire la deuxième intégrale de (3.43), est une « contrainte de lissage » d'ordre 2 très classique [Terzopoulos 86]. Leclerc et Bobick approchent l'expression (3.43) par la somme discrète suivante [Leclerc 91] :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{LB}}(\bar{w}) = & (1 - \lambda) \sum_{(i,j) \in \Omega_3} \left[ \left( \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\delta} \right)^2 + \left( \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\delta} \right)^2 - 2s_{i,j} \right]^2 \\ & + \lambda \sum_{(i,j) \in \Omega_4} \left[ \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\delta^2} \right)^2 + \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\delta^2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $\Omega_4$  désigne l'ensemble des pixels de  $\Omega$  ayant leurs quatre plus proches voisins dans  $\Omega$ . La méthode de résolution proposée par Leclerc et Bobick est similaire aux méthodes de résolution des modèles non différentiels utilisant un terme de régularisation que nous avons mentionnées dans le paragraphe 3.1.6, mais le poids  $\lambda$  décroît tout au long de la recherche itérative du minimum de  $\mathcal{E}_{\text{LB}}$ . Certains des tests effectués dans [Leclerc 91] utilisent une condition au bord, d'autres non. Les auteurs disent ne pas vraiment savoir dans quel cas une condition au bord est requise. Or, d'après ce que nous avons vu dans les paragraphes 3.1.5, 3.1.6 et 3.2.1, il ressort que l'utilisation d'une condition au bord est superflue lorsque  $\lambda > 0$ , mais qu'elle est requise si  $\lambda = 0$ , sans quoi la solution serait probablement mal conditionnée.

Enfin, si Leclerc et Bobick font une légère confusion entre l'unicité de la solution et son bon conditionnement, il faut leur reconnaître le mérite d'avoir, les premiers, imaginé une méthode dont le résultat est une solution de viscosité du SFS !

### 3.2.4 Solutions de viscosité du SFS

Supposons que la méthode de Leclerc et Bobick soit contrainte par une condition au bord « appropriée ». Pour chaque valeur de  $\lambda > 0$ , la fonction  $\mathcal{E}_{\text{LB}}$  atteint alors son minimum pour un unique vecteur  $\bar{w}_\lambda^*$ . Néanmoins, lorsque  $\lambda$  tend vers 0, l'optimisation ne porte plus que sur le terme d'attache aux données, puisque le terme de lissage n'est plus contrôlé. Or, une solution de viscosité d'une EDP du premier ordre peut être définie comme la limite d'une famille de solutions de problèmes comportant un terme de lissage d'ordre 2 (le fameux « terme de viscosité »), lorsque le poids de ce terme tend vers 0 [Barles 94]. Par ailleurs, une solution de viscosité est une solution « faible », c'est-à-dire différentiable presque partout. Par conséquent, elle peut comporter des arêtes, contrairement aux solutions « classiques » des EDP. D'après ces similitudes, il semble donc bien que le résultat de la méthode de Leclerc et Bobick soit une solution de viscosité du SFS.

La méthode « FS » (Falcone-Sagona) permet de calculer l'approximation d'une **solution de viscosité du SFS** par un schéma « semi-lagrangien » [Falcone 97]. Elle est appliquée à la photographie de Lena (cf. figure 3.9-a). Les hypothèses permettant d'utiliser comme modèle du SFS l'équation eikonale (2.41) sont loin d'être valides, ce qui explique la très mauvaise adéquation entre le relief calculé (cf. figure 3.9-b) et le relief supposé du visage de Lena. Cependant, cet exemple provenant de [Durou 08] illustre deux propriétés caractéristiques des solutions de viscosité. D'une part, le relief reconstruit comporte un nombre important d'arêtes qui le font ressembler à un sol raviné. D'autre part, on est frappé par la ressemblance entre la photographie originale 3.9-a de Lena et l'image 3.9-c calculée en utilisant l'équation eikonale (2.41), à partir du relief 3.9-b. En fait, cela n'a rien de surprenant, car une solution de viscosité du SFS est une solution *exacte* du modèle différentiel.

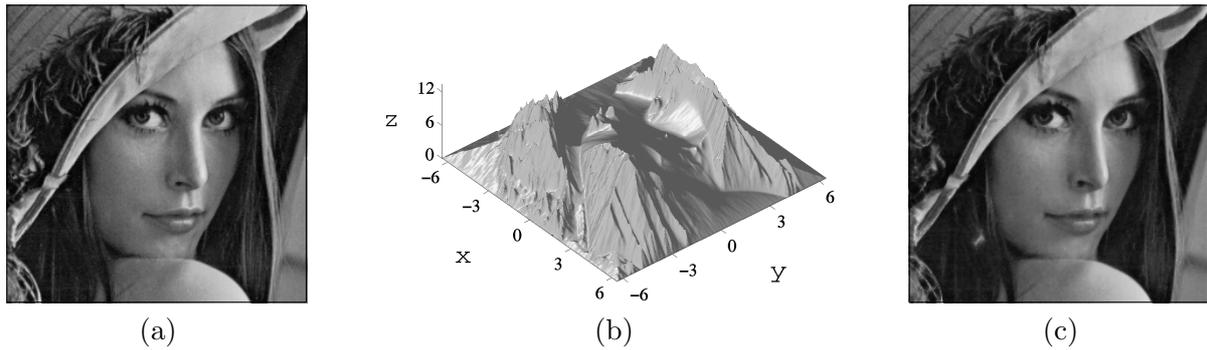


FIG. 3.9 – (a) Photographie de Lena. (b) Relief reconstruit par la méthode FS [Falcone 97], à partir de la photographie (a), sous l’hypothèse que le modèle du SFS approprié est l’équation eikonale (2.41). (c) Image calculée à partir du relief (b), en utilisant l’équation eikonale (2.41). Ces images proviennent de [Durou 08].

Il serait intéressant de mener la résolution de l’équation eikonale (2.41) en utilisant la méthode des caractéristiques. En réalité, la méthode FS utilise la condition au bord de type Dirichlet  $w = 0$  et calcule la « solution de viscosité maximale » [Camilli 96], qui force  $w$  à croître du bord  $\partial\Omega$  de la photographie  $\Omega$  vers son centre. On pourrait donc utiliser  $\partial\Omega$  comme « courbe initiale » (cf. paragraphe 2.2.4), puisque les valeurs de  $w$ ,  $w_x$  et  $w_y$  sont connues en chaque point de  $\partial\Omega$  : on utilise la condition au bord  $w = 0$  ; il s’ensuit que  $w_x = 0$  ou  $w_y = 0$ , selon que le point de départ se trouve sur un bord vertical ou horizontal de la photographie ; en utilisant l’équation eikonale (2.41), on peut donc calculer la valeur de la composante non nulle de  $\nabla w$ , au signe près ; enfin, comme  $w$  croît vers le centre de la photographie, cela permet de lever l’ambiguïté sur le sens de  $\nabla w$ . La figure 3.10 montre que des arêtes apparaîtraient aux croisements des lignes caractéristiques. Nous voyons donc qu’il est théoriquement possible de trouver les solutions de viscosité du SFS par la méthode des caractéristiques, en l’appliquant à des « morceaux » de la photographie séparés par des arêtes. Kimmel et Bruckstein ont effectivement proposé une variante de la méthode des caractéristiques [Kimmel 95a], dans laquelle l’intégration est menée simultanément le long de toutes les caractéristiques, de manière à calculer des courbes de niveau (« isohypses ») de la solution<sup>15</sup>. Nous avons initialement sélectionné la méthode de Kimmel et Bruckstein comme méthode de test pour notre état de l’art [Durou 08], mais des difficultés techniques telles que la gestion du croisement des caractéristiques nous en ont finalement dissuadés.

Enfin, dans le seul article que Lions a consacré au SFS [Lions 93], une étude précise des différents types de conditions au bord est menée. En particulier, le théorème 1 de cet article montre que la présence d’un point singulier unique et d’un limbe fermé suffit à assurer l’existence et l’unicité de la solution de viscosité de l’équation eikonale. Le limbe fournit une condition au bord très peu contraignante (en comparaison des conditions au bord de types Dirichlet ou Neumann) appelée « contrainte d’état » (*state constraint*), qui a été introduite par Soner [Soner 86], à tel point que Prados *et al.* parlent même de « solutions de viscosité du SFS sans condition au bord » [Prados 06b]. Or, ce théorème est tout à fait similaire à un théorème d’existence et d’unicité dû à Oliensis, qui concerne les solutions de classe  $C^2$  [Oliensis 91b]. Il est surprenant qu’Oliensis ne soit pas cité dans [Lions 93], mais cela montre, comme je l’ai laissé entendre dans l’introduction, que la « communauté » du SFS souffre parfois d’un certain cloisonnement.

<sup>15</sup>. L’analogie avec l’optique est flagrante : au lieu de calculer les trajets des rayons lumineux (les caractéristiques), on calcule la forme des surfaces d’onde (les courbes de niveau).

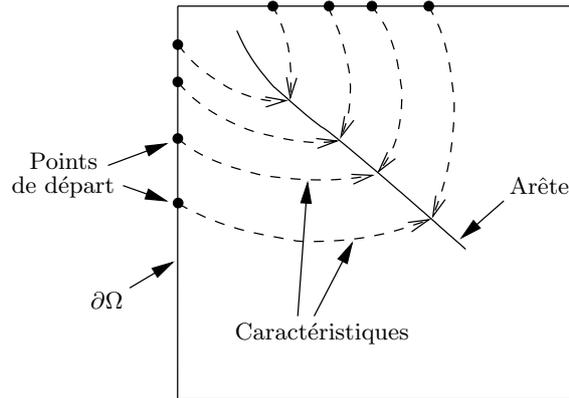


FIG. 3.10 – Les croisements entre caractéristiques forment des arêtes.

### 3.3 Conclusion

Le principal enseignement que l'on doit tirer de ce chapitre est que le moyen de rendre bien posée la résolution du SFS est très différent si l'on utilise un modèle différentiel ou un modèle non différentiel. Un modèle non différentiel du SFS doit nécessairement être contraint par l'utilisation d'un modèle de surface local ou d'un terme de régularisation. L'utilisation d'une condition au bord est insuffisante. En revanche, pour un modèle différentiel du SFS, l'utilisation d'une condition au bord est suffisante, au même titre que l'utilisation d'un modèle de surface ou d'un terme de régularisation.

Par ailleurs, une solution de viscosité nécessite d'être contrainte par une condition au bord, car le seul terme de régularisation qui lui est attaché s'annule, puisqu'il s'agit du terme de viscosité. La difficulté des méthodes de recherche des solutions de viscosité consiste par conséquent à choisir la « bonne » condition au bord, alors que la difficulté des autres méthodes de résolution consiste à « bien choisir » le modèle de surface ou le terme de régularisation.

Enfin, si la fidélité d'une solution de viscosité au niveau de gris est indéniable, puisqu'il s'agit d'une solution *exacte* du modèle différentiel du SFS, ce qui n'est pas le cas des autres méthodes de résolution, on peut se demander si cela est vraiment souhaitable dans le cas où les photographies sont bruitées. On peut également se demander, au vu de l'exemple de reconstruction de la figure 3.9, si une solution exacte doit toujours être considérée comme une « bonne » solution.

# Perspectives

Mes projets de recherche sont de différents ordres. D'une part, l'étude détaillée que j'ai effectuée à l'occasion de la rédaction de ce manuscrit m'a permis de dégager plusieurs perspectives prometteuses relatives au SFS, dont deux pourraient faire l'objet de thèses. D'autre part, je projette de faire de ce mémoire l'embryon d'une monographie sur le SFS. Enfin, il est probable que je doive me résoudre à suivre une démarche plus divergente dans mes recherches, selon la promesse faite en introduction.

La résolution numérique constitue le point d'achoppement chronique du SFS. En particulier, les schémas numériques de résolution par optimisation se heurtent au problème récurrent des minima locaux. Ce problème a été en partie résolu grâce à l'utilisation de méthodes d'optimisation stochastique, qui sont très lentes. Dans sa thèse, Frédéric Courteille a montré que l'utilisation conjointe d'un modèle de surface à faible nombre de paramètres et de l'algorithme du recuit simulé permet de reconstruire des reliefs compliqués dans des temps « raisonnables » [Courteille 06c], mais il n'a pas pu explorer cette voie prometteuse autant qu'il l'aurait souhaité. Cette première perspective pourrait faire l'objet d'une thèse.

Une des préoccupations actuelles en SFS vise à l'élargissement des techniques de résolution existantes à des modèles plus réalistes que l'équation eikonale. Or, il serait très fastidieux de reprendre systématiquement le cheminement que j'ai suivi dans ce document : modélisation, analyse du problème et résolution. Qui plus est, les modèles simples sont rarement réalistes. Il semble plus pertinent d'utiliser les fonctionnalités d'OpenGL, comme par exemple la gestion des ombres portées ou des réflexions multiples, ou encore la possibilité de choisir une BRDF. À ma connaissance, cet outil n'a jamais encore été utilisé pour calculer le relief par SFS. Cette deuxième perspective pourrait également faire l'objet d'une thèse.

En ce qui concerne l'analyse mathématique du problème, la piste des surfaces développables semble prometteuse, dans la mesure où le problème est bien mieux posé que dans le cas général. De plus, la simulation de la mise à plat des documents bombés est une application directe de ce type de surfaces. L'utilisation des contours détectés sur la photographie d'un document, en plus de son niveau de gris, peut même rendre le problème parfaitement bien posé, à condition que le contour soit une « géodésique » de la surface, c'est-à-dire qu'il forme un segment de droite sur la surface mise à plat. Cette piste de recherche a démarré récemment, dans le cadre d'un projet mené en collaboration avec Jean-Marc Schlenker, chercheur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT, UMR 5219).

C'est sous l'angle de la vision humaine que j'ai le moins exploré le SFS. Il me semble opportun de tenter sa reformulation dans le cadre de la « théorie du Gestalt », qui s'écarte des approches très algorithmiques qu'affectionne la communauté de la vision par ordinateur. En particulier, cette théorie a pour ambition de trouver des solutions non paramétriques, qui sont peut-être plus en accord avec la manière dont l'homme interprète les images qu'il perçoit. Or, il semble que l'interprétation du relief grâce à l'analyse du niveau de gris soit une tâche relativement aisée pour notre système visuel. Des résultats spectaculaires ont pu être atteints, par exemple, en matière de détection de contours. Ce projet va faire l'objet d'une demande de délégation CNRS auprès de Jean-Michel Morel, dans le Centre de Mathématiques et de Leurs Applications (CMLA, UMR 8536).

Par ailleurs, j'envisage d'écrire une monographie sur le SFS, dans la foulée de mon mémoire d'habilitation. Même si, dans presque tous les ouvrages d'analyse d'images, un chapitre est consacré au SFS, il s'agit généralement d'une introduction à vocation pédagogique. Seul l'ouvrage de Horn et Brooks [Horn 89a], paru en 1989 aux éditions du MIT, est entièrement dédié au SFS, mais sur les quelque 1200 références bibliographiques que j'ai recensées à ce jour<sup>16</sup>, moins de 250 avaient paru en 1989. Qui plus est, cet ouvrage est pour l'essentiel une collection de 16 articles, dont 14 ont été publiés avant 1986, date à laquelle seulement 135 articles avaient paru. Même en tenant compte de la tendance actuelle à « sur-publier », qui explique une certaine inflation du nombre de publications récentes, l'ouvrage de Horn et Brooks semble donc quelque peu obsolète, d'autant plus que ce n'est qu'à partir des années 1990 que les mathématiciens, à qui l'on doit de nombreuses contributions originales, ont commencé à s'intéresser au SFS. La rédaction d'un nouvel ouvrage semble donc réellement nécessaire. L'éparpillement des publications sur le SFS, qui se situe au carrefour de plusieurs disciplines, rend la rédaction d'un ouvrage de synthèse difficile<sup>17</sup>, mais je pense avoir acquis une expertise suffisante pour mener à bien ce projet.

Enfin, il est probablement temps que je m'oriente vers des problèmes plus variés que le seul SFS. Certes, la recherche en vision par ordinateur ne doit pas se borner à produire des algorithmes. Elle doit s'inspirer de la rigueur des mathématiques pour étudier les problèmes sous leur forme générique et ne pas se cantonner à chercher des solutions. Cependant, les technologies ont beaucoup évolué en vingt ans. Avec les nouvelles générations de capteurs, la vision monoculaire va peut-être marquer le pas, surtout si les résultats obtenus ne sont pas plus probants, au profit d'autres techniques de reconstruction 3D. À titre d'exemple, j'ai déjà signalé que le relief de la figure 2.4 a été obtenu à partir des trois photographies de gauche de la figure 1.14, en combinant la technique de la « stéréophotométrie » et une méthode d'intégration originale d'un champ de normales [Durou 07a]. Obtenir un résultat de qualité équivalente par SFS, à partir d'une seule de ces trois photographies, peut être considéré comme une gageure.

Bien entendu, les quelques applications du SFS qui ont été mentionnées dans ce mémoire ne sont pas négligeables et tendent à prouver qu'il ne s'agit pas seulement d'un exercice de style. Néanmoins, si j'envisage de persévérer dans la reconstruction 3D, il semble inéluctable que ce soit avec d'autres techniques que le SFS. Cela a d'ailleurs déjà été le cas avec le *shape from contour* [Courteille 06b] et la stéréophotométrie [Durou 07a]. Des résultats tel que celui de la figure 2.4 valident d'ores et déjà la pertinence de cette amorce d'évolution.

---

16. [www.irit.fr/sfs/biblio](http://www.irit.fr/sfs/biblio)

17. J'ai trouvé des articles sur le SFS dans près de 150 journaux différents et dans autant de conférences ou *workshops* !

# Annexe A

## Curriculum vitae

- Né le 8 novembre 1963 à Toulouse.
- Baccalauréat (série C) obtenu en 1981 au lycée Bellevue de Toulouse.
- 1981-1983 : classes préparatoires au lycée Pierre de Fermat de Toulouse.
- 1983-1988 : élève de l'École Normale Supérieure.
  - Statut : élève fonctionnaire stagiaire.
  - 1983-1984 : licence et maîtrise de physique de l'Université Paris 6.
  - 1984-1985 : DEA « Physique des Gaz et des Plasmas » de l'Université Paris 11.
  - 1985-1986 : agrégation de sciences physiques (option physique).
  - 1986-1987 : début de thèse de physique à l'École Polytechnique.
  - 1987-1988 : DEA d'informatique à l'Université Paris 11 (Intelligence Artificielle).
- 1988-1989 : service national à l'École Militaire de Paris.
  - Statut : scientifique du contingent.
  - Emploi : enseignant en physique et en informatique à l'EMSST (Enseignement Militaire Supérieur Scientifique et Technique).
- 1989-1993 : thèse en informatique à l'Université Paris 11.
  - Statuts : AMN (Allocataire Moniteur Normalien) pendant les trois premières années, puis ATER pendant la quatrième année.
  - Laboratoire d'accueil : département Images de l'ENST (École Nationale Supérieure des Télécommunications).
  - Directeur de recherche : Henri Maître.
  - Titre : « Reconnaissance du relief à partir de l'éclairage ».
  - Soutenance : le 26 février 1993, devant le jury composé de René Caubet (Université Paul Sabatier, Toulouse), Pierre-Louis Lions (Université Paris 9), Henri Maître (ENST), Claude Puech (École Normale Supérieure, rapporteur), Claude Richetin (Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, rapporteur) et Wladimir Mercouff (Université Paris 11).
- 1993-1994 : professeur de sciences physiques de l'enseignement secondaire.
  - Statut : professeur remplaçant de l'académie de Créteil.
  - Emplois : collègue Victor Hugo d'Aulnay-sous-Bois (Seine-Saint-Denis) puis classe de mathématiques supérieures du lycée Albert Schweitzer du Raincy (Seine-Saint-Denis).
- 1994-2007 : enseignant-chercheur en informatique à l'Université Paul Sabatier.
  - Statut : maître de conférences.
  - Enseignements : cf. annexe D.
  - Laboratoire d'accueil : équipe TCI (Traitement et Compréhension d'Images) de l'IRIT.



# Annexe B

## Activités de recherche

### B.1 Thème de recherche principal

#### B.1.1 Contributions scientifiques sur le SFS

- Durant ma thèse, sous la direction d'Henri Maître, je me suis intéressé, d'une part, à la stabilité numérique d'une classe de méthodes de résolution itératives (contribution 1) et, d'autre part, à l'existence de points particuliers dans l'image pour lesquels la profondeur peut être déterminée sans ambiguïté (contribution 2).
- J'ai encadré la thèse de Pascal Daniel, dans laquelle deux contributions ont été apportées: la réalisation d'un montage optique permettant de vérifier la validité des hypothèses usuelles faites en SFS (contribution 3) et une étude détaillée des méthodes de résolution par optimisation déterministe (contribution 4).
- Avec Didier Piau, du Laboratoire de Probabilités, Combinatoire et Statistique (LPCS, EA 2032), j'ai mené une étude sur l'existence et l'unicité des solutions analytiques du problème. Cette étude a permis de prouver l'existence de déformations invisibles (contribution 5).
- J'ai co-encadré avec Frédéric Adragna (CNES Toulouse) la thèse de David Petit sur l'« extraction du 3D par interférométrie radar haute résolution ». Cela a permis de reformuler la modélisation de la radarclinométrie, qui est l'équivalent du SFS pour les images radar (contribution 6).
- Grâce à l'obtention d'un « projet jeunes chercheurs » du GDR ISIS, j'ai pu collaborer avec Xavier Descombes, membre du projet Ariana de l'INRIA-Sophia Antipolis. Nous avons reformulé le problème du SFS dans un cadre bayésien et effectué sa résolution par optimisation stochastique (contribution 7).
- J'ai effectué plusieurs séjours dans l'équipe de Maurizio Falcone, au département de mathématiques de l'Université « La Sapienza » de Rome, afin de me former aux solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Cette collaboration a débouché sur un travail d'état de l'art (contribution 8).
- J'ai réalisé avec Frédéric Courteille un site de tests en ligne de méthodes de résolution du SFS, dont les codes sources sont en libre accès (contribution 9).
- J'ai été porteur du projet franco-italien PLATONOV (« Photocopies de Livres Anciens par Techniques d'Optimisation Numérique et sOLutions de Viscosité »), projet Galilée de l'association Égide, qui s'est étalé sur deux ans (2004 et 2005) et qui a impliqué: l'équipe TCI de l'IRIT, le projet Ariana de l'INRIA-Sophia Antipolis et l'équipe de Maurizio Falcone. Ce projet, qui constituait le corps de la thèse de Frédéric Courteille, visait à appliquer le SFS à la numérisation photographique des documents anciens (contribution 10).
- J'ai encadré, avec Pierre Gurdjos et Alain Couzil, la thèse de Frédéric Courteille. Une nouvelle

méthode de résolution du SFS, faisant intervenir la notion de *spline*, a permis d'obtenir des résultats très prometteurs sur images réelles (contribution 11).

- Je mène depuis plusieurs années une recherche bibliographique sur le SFS. Les références sont accessibles en ligne au format BibTeX (contribution 12).
- La thèse de Frédéric Courteille a permis de développer une nouvelle technique d'intégration d'un champ de normales sans condition aux limites, que nous avons pu appliquer dans le cadre de la stéréophotométrie (contribution 13).
- Enfin, depuis mai 2007, je suis porteur du projet 3SD (« *Shape from Shading* pour les Surfaces Développables »), projet « I(M+RI)T » de jumelage entre l'IRIT et l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT, UMR 5219). Ce projet est mené en collaboration avec Jean-Marc Schlenker, chercheur à l'IMT. Les premiers résultats semblent montrer que le SFS est bien posé pour les surfaces développables, si la normale est connue en un point ordinaire (contribution 14).

### B.1.2 Validation de ces contributions

- Contribution 1: Jean-Denis Durou, Henri Maître, « On Convergence in the Methods of Strat and of Smith for Shape from Shading », International Journal of Computer Vision, vol. 17, no. 3, p. 273-289, mars 1996.
- Contribution 3: Pascal Daniel, Jean-Denis Durou, « Creation of Real Images which are Valid for the Assumptions Made in Shape from Shading », Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Image Analysis and Processing - ICIAP'99, p. 418-423, Venise, Italie, 27-29 septembre 1999.
- Contribution 4: Pascal Daniel, Jean-Denis Durou, « From Deterministic to Stochastic Methods for Shape from Shading », Proceedings of the 4<sup>th</sup> Asian Conference on Computer Vision - ACCV 2000, p. 187-192, Taipei, Taiwan, 8-11 janvier 2000.
- Contribution 5: Jean-Denis Durou, Didier Piau, « Ambiguous Shape from Shading with Critical Points », Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 12, no. 2, p. 99-108, avril 2000.
- Contribution 7: Alain Crouzil, Xavier Descombes, Jean-Denis Durou, « A Multiresolution Approach for Shape from Shading Coupling Deterministic and Stochastic Optimization », IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 25, no. 11, p. 1416-1421, novembre 2003.
- Contribution 8: Jean-Denis Durou, Maurizio Falcone, Manuela Sagona, « Numerical Methods for Shape-from-shading: A New Survey with Benchmarks », Computer Vision and Image Understanding, vol. 109, no. 1, p. 22-43, janvier 2008.
- Contribution 9: <http://www.irit.fr/sfs>
- Contribution 10: Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Shape from Shading for the Digitization of Curved Documents », Machine Vision and Applications, vol. 18, no. 5, p. 301-316, octobre 2007.
- Contribution 11: Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « 3D-Spline Reconstruction Using Shape from Shading: Spline from Shading », Image and Vision Computing, vol. 26, no. 4, p. 466-479, avril 2008.
- Contribution 12: <http://www.irit.fr/sfs/biblio>
- Contribution 13: Jean-Denis Durou, Frédéric Courteille, « Integration of a Normal Field without Boundary Condition », Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision, 1<sup>st</sup> Workshop on Photometric Analysis for Computer Vision, Rio de Janeiro, Brésil, 14 octobre 2007.
- Contribution 14: Jean-Denis Durou, Jean-Marc Schlenker, « Shape-from-shading for Surfaces Applicable to Planes », Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer

Vision, 1<sup>st</sup> Workshop on Photometric Analysis for Computer Vision, Rio de Janeiro, Brésil, 14 octobre 2007.

## B.2 Autres thèmes de recherche

- J'ai encadré la rédaction du document de thèse de Hirotaka Suzuki, ses encadrants ayant tous deux été recrutés outre-mer : Jacky Desachy à l'Université des Antilles et de la Guyane et Pascal Matsakis à l'Université de Missouri-Columbia (États-Unis). Cette thèse portait sur la comparaison de différentes techniques d'optimisation stochastique (recuit simulé, méthode tabou, algorithmes génétiques) dans le cadre de la classification supervisée. Elle a été soutenue en juillet 2002.
- J'ai co-encadré, en collaboration avec Frédéric Adragna, la thèse de David Petit. Cette thèse portait essentiellement sur la reconstruction 3D par interférométrie à partir d'images radar de haute résolution. Elle a été soutenue en janvier 2004.
- J'ai co-encadré, en collaboration avec Pierre Gurdjos et Frédéric Courteille, le stage de M2 recherche d'Ivan Pétilot. Ce stage portait sur l'utilisation de l'image des contours d'un document pour calculer son relief (*shape from contour*), en vue de la simulation de sa mise à plat. Il a été soutenu en juillet 2005.
- À la suite de ce dernier stage, la technique développée a été reprise et améliorée. Il en a résulté un prototype de logiciel de simulation de la mise à plat, dénommé « FlatBOOK », qui a été sélectionné parmi les 30 finalistes du trophée des « Espoirs Européens de l'Innovation 2006 », organisé à l'occasion de la 11<sup>ème</sup> édition du Forum européen de la jeune entreprise innovante - Innovact 2006, en octobre 2006 à Reims.

## B.3 Activités d'encadrement

### B.3.1 Encadrement de thèses

- Pascal Daniel, « Peut-on extraire le relief d'une seule image? ». Thèse de l'Université Paul Sabatier soutenue en janvier 2000. Encadrement à 100% (encadrant officiel par dérogation).
- David Petit, « Extraction du 3D par interférométrie radar à haute résolution ». Thèse de l'Université Paul Sabatier soutenue en janvier 2004. Encadrement à 50% (encadrant officiel par dérogation ; co-encadrant : Frédéric Adragna, CNES Toulouse).
- Frédéric Courteille, « Vision monoculaire : contributions théoriques et application à la numérisation des documents ». Thèse de l'Université Paul Sabatier soutenue en octobre 2006. Encadrement à 60% (encadrant officiel par dérogation ; co-encadrants : Pierre Gurdjos et Alain Cruzil).

Autre encadrement :

- Hirotaka Suzuki, « Exploitation de connaissances structurelles en classification d'images : une approche par partition floue et optimisation combinatoire ». Thèse de l'Université Paul Sabatier soutenue en juillet 2002. Encadrement de la rédaction du manuscrit (encadrants : Jacky Desachy, Université des Antilles et de la Guyane ; Pascal Matsakis, University of Missouri-Columbia).

### B.3.2 Encadrement de stages de recherche

- Pascal Daniel, « Reconnaissance du relief à partir de l'éclairément : méthodes itératives ». Stage du DEA IIL de l'Université Paul Sabatier soutenu en juillet 1996. Encadrement à 100%.

- Nicolas Bertrand, « *Shape from shading* et recuit simulé ». Stage du DEA IIL de l'Université Paul Sabatier soutenu en juillet 1999. Encadrement à 100%.
- Thaddée Comby, « Premiers pas vers la reconstruction 3D d'utérus à partir d'images endoscopiques ». Stage du DEA IIL de l'Université Paul Sabatier soutenu en juin 2001. Encadrement à 50% (encadrant officiel : Alain Ayache, équipe VPCAB de l'IRIT).
- Frédéric Rivain, « 3D Reconstruction from a Single Image ». Stage de fin d'études de l'École Centrale de Paris soutenu en juillet 2001. Encadrement à 50% (encadrant officiel : Marc Cardle, Darwin College, Oxford, Royaume-Uni).
- Frédéric Courteille, « Prise en compte du modèle sténopé pour l'extraction du relief en monovision ». Stage du DEA IIL de l'Université Paul Sabatier soutenu en juillet 2003. Encadrement à 60% (co-encadrants : Pierre Gurdjos et Alain Crouzil).
- Ivan Pétillet, « Utilisation des contours en reconstruction 3D ». Stage du M2 recherche IIIH de l'Université Paul Sabatier soutenu en juillet 2005. Encadrement à 50% (co-encadrants : Pierre Gurdjos et Frédéric Courteille).

## B.4 Animation scientifique au sein de l'IRIT

### B.4.1 Animation scientifique de l'équipe TCI

- Début 2000, j'ai lancé et animé, avec Pierre Gurdjos, une série de réunions hebdomadaires intitulées « les jeudis de l'équipe TCI », réunions scientifiques permettant aux membres de l'équipe ou à des membres extérieurs d'exposer leurs recherches récentes. Ces réunions ont eu lieu pendant un an environ, à raison de deux réunions par mois, soit une vingtaine de réunions en tout.
- J'ai été le principal organisateur du congrès ORASIS 2001 :  
<http://www.irit.fr/ACTIVITES/ORASIS2001/index.html>  
 Ce congrès a permis de souder l'équipe TCI autour d'un projet, son organisation étant entièrement à notre charge (site Internet, communication, recherche de sponsors, organisation scientifique, organisation matérielle, édition des actes). Suivant en cela la politique scientifique du Conseil Régional de Midi-Pyrénées, nous l'avons délocalisé hors de l'agglomération toulousaine, à Cahors, et nous avons également organisé une rencontre entre industriels et chercheurs. Il y a donc eu un deuxième événement, appelé VISIOMIP :  
<http://www.irit.fr/ACTIVITES/ORASIS2001/VISIOMIP.html>

### B.4.2 Diffusion de l'activité scientifique de l'équipe TCI

- J'effectue la saisie des publications de l'équipe TCI sur la base des publications de l'IRIT (environ 300 références bibliographiques).
- Fin 2001, j'ai lancé l'idée de publier un rapport d'activités annuel, synthétique et très illustré, constitué d'une trentaine de pages au format A5. J'ai rédigé les cinq premiers numéros de ce rapport en collaboration avec Alain Crouzil et Pierre Gurdjos :  
[http://www.irit.fr/ACTIVITES/EQ\\_TCI/rapport.php](http://www.irit.fr/ACTIVITES/EQ_TCI/rapport.php)

### B.4.3 Rapprochement avec d'autres équipes de recherche

- Le comité éditorial d'ORASIS 2001 a réuni la plupart des chercheurs permanents en vision par ordinateur de la région Midi-Pyrénées : Alain Crouzil, Patrice Dalle, Pierre Gurdjos et René Payrissat de l'équipe TCI de l'IRIT ; Bernard Thiesse, Vincent Charvillat et Philippe Marthon

de l'équipe VPCAB de l'IRIT ; Michel Devy et Frédéric Lerasle de l'équipe Robotique du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS, UPR 8001) ; Jean-José Orteu de l'École des Mines d'Albi ; Thierry Simon de l'IUT de Figeac.

- Dans l'élan de ce congrès, un collectif de recherche en vision artificielle de Midi-Pyrénées, baptisé « VISIOMIP », a été créé. J'ai co-organisé avec Michel Devy, en décembre 2001, une rencontre entre nos différentes équipes de recherche, au cours de laquelle vingt-deux thésards ont présenté leurs travaux (l'animation de ce collectif a été récemment reprise par Alain Crouzil).
- Dans le cadre du salon SITEF 2000 (salon international biennal de l'innovation et de la prospective, ayant lieu à Toulouse), j'ai co-organisé une demi-journée consacrée à la vision par ordinateur, en collaboration avec les équipes de recherche en vision par ordinateur du LAAS, du Centre de Recherche Cerveau et Cognition (CerCo, UMR 5549) et de l'ONERA Toulouse.
- J'ai organisé deux demi-journées de rencontre entre les cinq équipes de recherche de l'IRIT relevant du thème « Analyse et synthèse de l'information » (équipes SAMOVA, SIRV, SC, TCI et VPCAB, soit environ trente-cinq permanents et quarante doctorants) : en juillet 2002, seize exposés ont eu lieu entre les membres de ces équipes ; en avril 2003, huit exposés et sept démonstrations ont eu lieu devant l'ensemble des membres du laboratoire.

#### B.4.4 Animation du séminaire de l'IRIT

Je suis membre de la commission d'animation du séminaire de l'IRIT depuis 2001 :

- 2001-2002 : suivi d'un cycle de cinq séminaires sur l'apprentissage, avec Gilles Richard.
- 2002-2003 : mise en place et suivi d'un cycle de neuf séminaires sur l'optimisation, avec Pierre Gurdjos et Bernard Thiesse.
- 2003-2004 : suivi d'un cycle de neuf séminaires sur la classification, avec Jean-Yves Tourneret.
- 2003-2004 : mise en place et organisation d'un tutoriel de huit leçons sur les solutions de viscosité des équations aux dérivées partielles et leurs applications en traitement d'images.

### B.5 Animation scientifique en dehors de l'IRIT

#### B.5.1 Organisation de conférences

- 8<sup>èmes</sup> journées ORASIS, Cahors, 5-8 juin 2001 : conférence francophone de vision par ordinateur (quatre-vingt-dix participants).
- VISIOMIP, Cahors, 7 juin 2001 : rencontre entre chercheurs et industriels de Midi-Pyrénées autour de la vision industrielle (cent vingt participants).

#### B.5.2 Relecture d'articles

- Membre du comité de programme et relecteur pour les conférences francophones ORASIS 2001, ORASIS 2003 et ORASIS 2005.
- Relecteur pour les conférences francophones RFIA 2004 et RFIA 2006, et pour la conférence internationale EUSIPCO 2006.
- Relecteur pour la revue francophone Technique et Science Informatiques.
- Relecteur pour les revues internationales Journal of Mathematical Imaging and Vision, International Journal of Remote Sensing, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence et Computer Vision and Image Understanding.

### B.5.3 Participation à des jurys de thèse

- Examinateur de la thèse d'Emmanuel Prados, « Application of the theory of the viscosity solutions to the Shape From Shading problem », thèse de l'Université de Nice-Sophia Antipolis soutenue le 12 novembre 2004 (directeur de recherche: Olivier Faugeras, projet Odyssee de l'INRIA-Sophia Antipolis).

### B.5.4 Participation à des projets de recherche

- Avril 1999 - décembre 2000 : partenaire du projet « Shape from shading et recuit simulé : application à la radarclinométrie », projet « jeunes chercheurs » du GdR ISIS.  
Porteur du projet : Xavier Descombes, INRIA-Sophia Antipolis.
- 2004 - 2005 : porteur du projet franco-italien PLATONOV (« Photocopies de Livres Anciens par Techniques d'Optimisation Numérique et sOlutions de Viscosité »), projet Galilée de l'association Égide.  
Partenaires du projet : équipe TCI de l'IRIT, projet Ariana de l'INRIA-Sophia Antipolis, département de mathématiques de l'Université « La Sapienza » de Rome.
- Octobre 2006 - octobre 2008 : partenaire du projet « Nanomultiplex », projet de l'Institut des Techniques Avancées du Vivant (ITAV, Cancéropôle de Toulouse).  
Autres partenaires du projet : Institut de Pharmacologie et de Biologie des Systèmes (IPBS, UMR 5089), Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS, UPR 8001), Laboratoire de Microbiologie et Génétique Moléculaires (LMGM, UMR 5100), Laboratoire de Biologie Moléculaire Eucaryote (LBME, UMR 5099), entreprises Genomic Vision (startup de l'Institut Pasteur) et Magellium.  
Porteur du projet : Laurence Salomé, IPBS.
- Mai 2007 - mai 2008 : porteur du projet 3SD (« *Shape from Shading* pour les Surfaces Développables »), projet commun « I(M+RI)T » entre l'IRIT et l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT, UMR 5219).  
Partenaire du projet : Jean-Marc Schlenker, IMT.

## Annexe C

# Bibliographie personnelle

### C.1 Rédaction d'actes de conférences

- Patrice Dalle, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « ORASIS 2001, congrès francophone de vision par ordinateur », Cahors, 5-8 juin 2001.

### C.2 Articles en revues

*Pour les articles en revues, l'ordre donné aux noms des auteurs est l'ordre alphabétique.*

#### C.2.1 Revues internationales

- Jean-Denis Durou, Henri Maître, « On Convergence in the Methods of Strat and of Smith for Shape from Shading », International Journal of Computer Vision, vol. 17, no. 3, p. 273-289, mars 1996.
- Jean-Denis Durou, Didier Piau, « Ambiguous Shape from Shading with Critical Points », Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 12, no. 2, p. 99-108, avril 2000.
- Alain Crouzil, Xavier Descombes, Jean-Denis Durou, « A Multiresolution Approach for Shape from Shading Coupling Deterministic and Stochastic Optimization », IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 25, no. 11, p. 1416-1421, novembre 2003.
- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Shape from Shading for the Digitization of Curved Documents », Machine Vision and Applications, vol. 18, no. 5, p. 301-316, octobre 2007.
- Jean-Denis Durou, Maurizio Falcone, Manuela Sagona, « Numerical Methods for Shape-from-shading: A New Survey with Benchmarks », Computer Vision and Image Understanding, vol. 109, no. 1, p. 22-43, janvier 2008.
- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « 3D-Spline Reconstruction Using Shape from Shading: Spline from Shading », Image and Vision Computing, vol. 26, no. 4, p. 466-479, avril 2008.

#### C.2.2 Revues nationales

- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos. « Numérisation de documents bombés : simulation de la mise à plat par *shape from shading* », Traitement du Signal, vol. 23, no. 1, p. 7-23, 2006.

## C.3 Articles en conférences ou *workshops* avec comité de sélection et actes publiés

### C.3.1 Conférences et *workshops* internationaux

- Jean-Denis Durou, Laurent Mascarilla, Didier Piau, « Non-Visible Deformations », Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Image Analysis and Processing - ICIAP'97, volume I, p. 519-526, Florence, Italie, 17-19 septembre 1997.
- Pascal Daniel, Jean-Denis Durou, « Creation of Real Images which are Valid for the Assumptions Made in Shape from Shading », Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Image Analysis and Processing - ICIAP'99, p. 418-423, Venise, Italie, 27-29 septembre 1999.
- Pascal Daniel, Jean-Denis Durou, « From Deterministic to Stochastic Methods for Shape from Shading », Proceedings of the 4<sup>th</sup> Asian Conference on Computer Vision - ACCV 2000, p. 187-192, Taipei, Taiwan, 8-11 janvier 2000.
- David Petit, Frédéric Adragna, Jean-Denis Durou, « The Filtering of Layover Areas in High-resolution IFSAR for the Building Extraction », SAR Image Analysis, Modeling, and Techniques III, p. 230-240, Barcelone, Espagne, 25-27 septembre 2000.
- Jean-Denis Durou, « Shape from Shading and Simulated Annealing: Application to Radarclinometry », Abstracts of the 5<sup>th</sup> Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale - SIMAI 2000, p. 376, Ischia Porto, Italie, 5-9 juin 2000.
- David Petit, Loïc Soucille, Jean-Denis Durou, Frédéric Adragna, « Spatial Phase Behavior in SAR Images », SAR Image Analysis, Modeling, and Techniques IV, p. 53-63, Toulouse, 17-21 septembre 2001.
- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Towards shape from shading under realistic photographic conditions », Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition - ICPR 2004, volume II, p. 277-280, Cambridge, Royaume-Uni, 23-26 août 2004.
- Frédéric Courteille, Jean-Denis Durou, Géraldine Morin, « Shape from Shading: Reconstruction using a B-spline Model », Abstracts of Curves and Surfaces 2006, p. 46, Avignon, 29 juin-5 juillet 2006.
- Frédéric Courteille, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Transform your Digital Camera into a Flatbed Scanner », Proceedings of the 9<sup>th</sup> European Conference on Computer Vision, 2<sup>nd</sup> Workshop on Applications of Computer Vision, p. 40-48, Graz, Autriche, 12 mai 2006.
- Frédéric Courteille, Jean-Denis Durou, Géraldine Morin, « A Global Solution to the SFS Problem Using B-spline Surface and Simulated Annealing », Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition - ICPR 2006, volume II, p. 332-335, Hong Kong, 20-24 août 2006.
- Frédéric Courteille, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Shape from Contour for the Digitization of Curved Documents », Proceedings of the 8<sup>th</sup> Asian Conference on Computer Vision - ACCV 2007, volume II, p. 196-205, Tokyo, Japon, 18-22 novembre 2007.
- Jean-Denis Durou, Frédéric Courteille, « Integration of a Normal Field without Boundary Condition », Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision, 1<sup>st</sup> Workshop on Photometric Analysis for Computer Vision, Rio de Janeiro, Brésil, 14 octobre 2007.
- Jean-Denis Durou, Jean-Marc Schlenker, « Shape-from-shading for Surfaces Applicable to Planes », Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision, 1<sup>st</sup> Workshop on Photometric Analysis for Computer Vision, Rio de Janeiro, Brésil, 14 octobre 2007.

### C.3.2 Conférences et *workshops* nationaux

- Jean-Denis Durou, Laurent Mascarilla, Didier Piau, « Déformations invisibles », Actes du 11<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA '98, volume III, p. 219-225, Clermont-Ferrand, 20-22 janvier 1998.
- Pascal Daniel, Jean-Denis Durou, « Réalisation d'images réelles vérifiant les hypothèses du *shape from shading* », Actes des 7<sup>èmes</sup> Journées ORASIS - ORASIS'99, p. 161-170, Aussois, 26-30 avril 1999.
- David Petit, Jean-Denis Durou, Frédéric Adragna, « Détection automatique des repliements en interférométrie radar par analyse de cohérences de pente multi-décalages », Actes des 8<sup>èmes</sup> Journées ORASIS - ORASIS 2001, p. 173-182, Cahors, 5-8 juin 2001.
- David Petit, Jean-Denis Durou, Frédéric Adragna, Loïc Soucille, « Corrélation spatiale de la phase des images radar », Actes du 18<sup>ème</sup> Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images - GRETSI'01, p. 487-490, Toulouse, 10-13 septembre 2001.
- Xavier Descombes, Jean-Denis Durou, David Petit, « Recuit simulé pour le *shape from shading* », Actes du 18<sup>ème</sup> Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images - GRETSI'01, p. 513-516, Toulouse, 10-13 septembre 2001.
- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « *Shape from shading* en conditions réalistes d'acquisition photographique », Actes du 14<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2004, volume II, p. 925-934, Toulouse, 28-30 janvier 2004.
- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Mise à plat de documents par *shape from shading* », Actes-CD des 10<sup>èmes</sup> Journées ORASIS - ORASIS 2005, Fournol, 24-27 mai 2005.
- Frédéric Courteille, Ivan Pétillet, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Comment transformer un appareil photographique en scanner à plat », Actes-CD du 15<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2006, Tours, 25-27 janvier 2006.
- Frédéric Courteille, Alain Crouzil, Jean-Denis Durou, Pierre Gurdjos, « Reconstruction de *spline* 3D par *shape from shading*: *spline from shading* », Actes-CD du 15<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2006, Tours, 25-27 janvier 2006.
- Jean-Denis Durou, Frédéric Courteille, Pierre Gurdjos, « Simulation de la mise à plat des documents gauches par *shape from contour* », 16<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2008, p. 417-426, Amiens, 21-25 janvier 2008.
- Jean-Denis Durou, Frédéric Courteille, « Intégration d'un champ de normales sans condition au bord », 16<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2008, p. 331-340, Amiens, 21-25 janvier 2008.

## C.4 Séminaires et exposés

### C.4.1 Séminaires

- « La reconnaissance du relief à partir de l'éclairément », séminaire de l'IRIT, janvier 1995.
- « Déformations invisibles », rencontres en analyse d'images IRIT / Université de La Rochelle, avril 1998.
- « Shape from shading and computer vision », séminaire du département de mathématiques de l'Université « La Sapienza » de Rome, mars 1999.
- « *Shape from shading* et recuit simulé: premiers résultats », séminaire du projet Odysée de l'INRIA-Sophia Antipolis, mars 2001.

- « Shape from shading and simulated annealing », séminaire du département de mathématiques de l'Université « La Sapienza » de Rome, avril 2001.
- « Shape from shading: a survey », séminaire du projet Ariana de l'INRIA-Sophia Antipolis, février 2002.
- « Shape from shading under perspective projection », séminaire du département de mathématiques de l'Université « La Sapienza » de Rome, septembre 2003.
- « Document unwarping using shape from contour », séminaire du département de mathématiques de l'Université « La Sapienza » de Rome, septembre 2005.

#### **C.4.2 Exposés de vulgarisation scientifique**

- « Vision par ordinateur et analyse de scènes », Salon des Industries et des Technologies du Futur - SITEF 2000, Toulouse, octobre 2000.
- « Le métier de chercheur - un exemple de recherche menée à l'IRIT en analyse d'images », Fête de la Science, Cahors, octobre 2004.

# Annexe D

## Autres activités

### D.1 Enseignement

Depuis ma nomination en 1994 à l'Université Paul Sabatier, je me suis intégré dans un assez grand nombre d'équipes pédagogiques. Qui plus est, j'ai contribué à la création d'un nombre important d'enseignements nouveaux. De 1997 à 2007, j'ai participé à la création de 66 heures de cours, 56 heures de TD et 52 heures de TP. Dans les deux listes ci-dessous qui énumèrent les enseignements que j'ai effectués, ceux dont j'ai été le concepteur sont repérés par un simple astérisque \*, et ceux dont j'ai été un concepteur parmi d'autres sont repérés par un double astérisque \*\* (les autres concepteurs sont alors nommés).

#### D.1.1 Période antérieure à la réforme 3-5-8

- Première année de DEUG :
  - TD et TP de Pascal.
- Licence d'informatique :
  - TP d'Ada dans le module « Programmation logique et impérative ».
  - TD\*\* et TP\*\* de C et de shell dans le module « Systèmes et réseaux » et réalisation d'un site web\*\* (avec Philippe Joly et Alain Cruzil).
- Maîtrise d'informatique :
  - Cours\* et TP\*\* de vision par ordinateur dans le module optionnel « Analyse et synthèse d'images » (avec Laurent Mascarilla) et réalisation d'un site web\*\* (avec Anne-Marie Pochet).
  - TP d'analyse d'images dans le module optionnel « Analyse et synthèse d'images ».
  - Cours\* et TP\*\* de traitement du signal dans le module optionnel « Traitement du signal et reconnaissance des formes » (avec Pascal Matsakis) et réalisation d'un site web\*.
- DESS IIN (Ingénierie de l'Image Numérique) :
  - Cours\* et TP\* de photographie dans le module « Analyse d'images ».
- DEA IIL (Informatique de l'Image et du Langage) :
  - Cours\* d'optimisation dans le module « Méthodes numériques, symboliques et neuronales pour le multimédia ».
  - Cours\* de vision monoculaire dans le module optionnel « Vision par ordinateur ».

### D.1.2 Période postérieure à la réforme 3-5-8

- Deuxième année de la nouvelle licence d'informatique (L2):
  - TD\*\* et TP\*\* de systèmes d'exploitation dans le module « Réseaux et systèmes » (avec Alain Crouzil) et gestion d'un site wiki\*.
- Première année du M1 d'informatique:
  - Cours\*, TD\* et TP\*\* (avec Pierre Gurdjos) d'estimation de paramètres dans le module « Systèmes multimédia » et gestion d'un site wiki\*\* (avec Jérôme Farinas).
  - TP\* d'analyse d'images et de vision par ordinateur dans le module optionnel « Analyse d'images et vision par ordinateur » et gestion d'un site wiki\*.
- M2 professionnel IIN (Ingénierie de l'Image Numérique):
  - Cours\* et TD\* de mathématiques pour l'image dans le module « Outils mathématiques et fondements théoriques ».
  - Cours\* et TP\* de photographie dans le module « Analyse d'images ».
  - Cours\* et TD\* de traitement du signal dans le module « Outils mathématiques et fondements théoriques ».
- M2 recherche IIIH (Image, Information, Hypermédia):
  - Cours\* d'analyse numérique dans le module « Outils fondamentaux pour le traitement de l'information ».
  - Cours\* de vision 3D dans le module « Vision par ordinateur ».

### D.1.3 Création de sites Internet

Dès 1997, j'ai contribué à la création de plusieurs sites Internet pour l'enseignement. Trois de ces sites peuvent être consultés en libre accès :

1. Langages C et shell en licence d'informatique (avec Philippe Joly et Alain Crouzil):  
[http://www.irit.fr/ACTIVITES/EQ\\_TCI/ENSEIGNEMENT/CetSHELL/welcome.html](http://www.irit.fr/ACTIVITES/EQ_TCI/ENSEIGNEMENT/CetSHELL/welcome.html)
2. Vision par ordinateur en maîtrise d'informatique (avec Laurent Mascarilla et Anne-Marie Pochet):  
<http://www.irit.fr/~Jean-Denis.Durou/ENSEIGNEMENT/VISION/index.html>
3. Traitement du signal en maîtrise d'informatique (avec Pascal Matsakis):  
<http://www.irit.fr/~Jean-Denis.Durou/ENSEIGNEMENT/TS/index.html>

## D.2 Tâches d'intérêt collectif

- Membre de la commission de spécialistes des sections 26 et 27 de l'INPT (Institut National Polytechnique de Toulouse) de 1998 à 2001.
- Membre du conseil scientifique de l'UFR MIG (Mathématiques, Informatique, Gestion) de l'Université Paul Sabatier, de novembre 2004 à octobre 2006.

# Bibliographie

- [Aggarwal 01] M. AGGARWAL, H. HUA et N. AHUJA. *On Cosine-fourth and Vignetting Effects in Real Lenses*. Dans Proceedings of the 8<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision (volume I), pages 472–479, Vancouver, Canada, juillet 2001.
- [Barles 94] G. BARLES. Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Springer-Verlag, 1994.
- [Basri 07] R. BASRI, D. W. JACOBS et I. KEMELMACHER. *Photometric Stereo with General, Unknown Lighting*. *International Journal of Computer Vision*, 72(3):239–257, mai 2007.
- [Belhumeur 98] P. N. BELHUMEUR et D. J. KRIEGMAN. *What is the Set of Images of an Object Under All Possible Lighting Conditions?* *International Journal of Computer Vision*, 28(3):245–260, juillet 1998.
- [Blake 85] A. BLAKE, A. ZISSERMAN et G. KNOWLES. *Surface descriptions from stereo and shading*. *Image and Vision Computing*, 3(4):183–191, novembre 1985.
- [Bonnans 02] J.-F. BONNANS, J.-C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C. A. SAGASTIZÁBAL, éditeurs. Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects. Springer-Verlag, 2002.
- [Born 99] M. BORN et E. WOLF. Principles of Optics. Cambridge University Press, septième édition, 1999.
- [Boutry 46] G.-A. BOUTRY. Optique instrumentale. Masson, 1946.
- [Brooks 85] M. J. BROOKS et B. K. P. HORN. *Shape and Source from Shading*. Dans Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (volume II), pages 932–936, Los Angeles, Californie, États-Unis, août 1985.
- [Brooks 89] M. J. BROOKS et B. K. P. HORN. *Shape and Source from Shading*. Dans B. K. P. HORN et M. J. BROOKS, éditeurs, Shape from Shading, Chapitre 3, pages 53–68. MIT Press, 1989.
- [Brooks 92a] M. J. BROOKS, W. CHOJNACKI et R. KOZERA. *Circularly Symmetric Eikonal Equations and Non-uniqueness in Computer Vision*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 165(1):192–215, 1992.
- [Brooks 92b] M. J. BROOKS, W. CHOJNACKI et R. KOZERA. *Impossible and Ambiguous Shading Patterns*. *International Journal of Computer Vision*, 7(2):119–126, janvier 1992.
- [Bruns 95] H. BRUNS. *Das Eikonal*. *Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Klasse der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 21:325–435, 1895.
- [Bruss 82] A. R. BRUSS. *The Eikonal Equation: Some Results Applicable to Computer Vision*. *Journal of Mathematical Physics*, 23(5):890–896, mai 1982.
- [Camilli 96] F. CAMILLI et M. FALCONE. *An Approximation Scheme for the Maximal Solution of the Shape-from-Shading Model*. Dans Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (volume I), pages 49–52, Lausanne, Suisse, septembre 1996.

- [Chandraker 05] M. K. CHANDRAKER, F. KAHL et D. J. KRIEGMAN. *Reflections on the Generalized Bas-Relief Ambiguity*. Dans Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (volume I), pages 788–795, San Diego, Californie, États-Unis, juin 2005.
- [Chen 02] C.-Y. CHEN, R. KLETTE et R. KAKARALA. *Albedo Recovery Using a Photometric Stereo Approach*. Dans Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition (volume III), pages 700–703, Québec City, Canada, août 2002.
- [Chojnacki 94] W. CHOJNACKI, M. J. BROOKS et D. GIBBINS. *Revisiting Pentland’s Estimator of Light Source Direction*. *Journal of the Optical Society of America - Part A: Optics, Image Science, and Vision*, 11(1):118–124, 1994.
- [Courteille 04] F. COURTEILLE, A. CROUZIL, J.-D. DUROU et P. GURDJOS. *Shape from shading en conditions réalistes d’acquisition photographique*. Dans Actes du 14<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (volume II), pages 925–934, Toulouse, France, janvier 2004.
- [Courteille 06a] F. COURTEILLE. *Vision monoculaire : contributions théoriques et applications à la numérisation des documents*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, octobre 2006.
- [Courteille 06b] F. COURTEILLE, J.-D. DUROU et P. GURDJOS. *Transform your Digital Camera into a Flatbed Scanner*. Dans Proceedings of the 9<sup>th</sup> European Conference on Computer Vision, 2<sup>nd</sup> Workshop on Applications of Computer Vision, pages 40–48, Graz, Autriche, mai 2006.
- [Courteille 06c] F. COURTEILLE, J.-D. DUROU et G. MORIN. *A Global Solution to the SFS Problem Using B-spline Surface and Simulated Annealing*. Dans Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition (volume II), pages 332–335, Hong Kong, août 2006.
- [Courteille 07] F. COURTEILLE, A. CROUZIL, J.-D. DUROU et P. GURDJOS. *Shape from Shading for the Digitization of Curved Documents*. *Machine Vision and Applications*, 18(5):301–316, octobre 2007.
- [Courteille 08] F. COURTEILLE, A. CROUZIL, J.-D. DUROU et P. GURDJOS. *3D-Spline Reconstruction Using Shape from Shading: Spline from Shading*. *Image and Vision Computing*, 26(4):466–479, avril 2008.
- [Cristiani 07] E. CRISTIANI et M. FALCONE. *Fast Semi-Lagrangian Schemes for the Eikonal Equation and Applications*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(5):1979–2011, 2007.
- [Crouzil 03] A. CROUZIL, X. DESCOMBES et J.-D. DUROU. *A Multiresolution Approach for Shape from Shading Coupling Deterministic and Stochastic Optimization*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(11):1416–1421, novembre 2003.
- [Daniel 00a] P. DANIEL. *Peut-on extraire le relief d’une seule image?* Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, janvier 2000.
- [Daniel 00b] P. DANIEL et J.-D. DUROU. *From Deterministic to Stochastic Methods for Shape From Shading*. Dans Proceedings of the 4<sup>th</sup> Asian Conference on Computer Vision, pages 187–192, Taipei, Taiwan, janvier 2000.
- [Deng 96] Y. P. DENG et J. G. LI. *Some results: Shape from shading as a fully well-constrained problem*. *Pattern Recognition Letters*, 17(2):169–174, février 1996.

- [Descombes 01] X. DESCOMBES, J.-D. DUROU et D. PETIT. *Recuit simulé pour le shape from shading*. Dans Actes du 18<sup>ème</sup> Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, pages 513–516, Toulouse, France, septembre 2001.
- [Dupuis 94] P. DUPUIS et J. OLIENSIS. *An Optimal Control Formulation and Related Numerical Methods for a Problem in Shape Reconstruction*. *Annals of Applied Probability*, 4(2):287–346, 1994.
- [Durou 93] J.-D. DUROU. *Reconnaissance du relief à partir de l'éclairément*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, Orsay, France, février 1993.
- [Durou 96] J.-D. DUROU et H. MAÎTRE. *On Convergence in the Methods of Strat and of Smith for Shape from Shading*. *International Journal of Computer Vision*, 17(3):273–289, mars 1996.
- [Durou 00] J.-D. DUROU et D. PIAU. *Ambiguous Shape from Shading with Critical Points*. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(2):99–108, avril 2000.
- [Durou 07a] J.-D. DUROU et F. COURTEILLE. *Integration of a Normal Field without Boundary Condition*. Dans Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision, 1<sup>st</sup> Workshop on Photometric Analysis for Computer Vision, Rio de Janeiro, Brésil, octobre 2007.
- [Durou 07b] J.-D. DUROU et J.-M. SCHLENKER. *Shape-from-shading for Surfaces Applicable to Planes*. Dans Proceedings of the 11<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision, 1<sup>st</sup> Workshop on Photometric Analysis for Computer Vision, Rio de Janeiro, Brésil, octobre 2007.
- [Durou 08] J.-D. DUROU, M. FALCONE et M. SAGONA. *Numerical Methods for Shape-from-shading: A New Survey with Benchmarks*. *Computer Vision and Image Understanding*, 109(1):22–43, janvier 2008.
- [Falcone 97] M. FALCONE et M. SAGONA. *An algorithm for the global solution of the Shape-from-Shading model*. Dans Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Image Analysis and Processing (volume I), volume 1310 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 596–603, Florence, Italie, septembre 1997.
- [Falcone 03] M. FALCONE, M. SAGONA et A. SEGhini. *A global algorithm for the Shape-from-Shading model with “black shadows”*. Dans F. BREZZI, A. BUFFA, S. CORSARO et A. MURLI, éditeurs, *Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2001*, pages 503–512. Springer-Verlag, 2003.
- [Fesenkov 62] V. FESENKOV. *Photometry of the Moon*. Dans Z. KOPAL, éditeur, *Physics and Astronomy of the Moon*, pages 99–130. Academic Press, 1962.
- [Forsyth 90] D. A. FORSYTH et A. ZISSERMAN. *Shape from shading in the light of mutual illumination*. *Image and Vision Computing*, 8(1):42–49, février 1990.
- [Forsyth 91] D. A. FORSYTH et A. ZISSERMAN. *Reflections on Shading*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7):671–679, juillet 1991.
- [Forsyth 01] D. A. FORSYTH. *Shape from texture and integrability*. Dans Proceedings of the 8<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision (volume II), pages 447–452, Vancouver, Canada, juillet 2001.
- [Forsyth 02] D. A. FORSYTH et J. PONCE. *Sources, Shadows and Shading*. Dans *Computer Vision: A Modern Approach*, Chapitre 3, pages 45–79. Prentice-Hall, 2002.
- [Frankot 88] R. T. FRANKOT et R. CHELLAPPA. *A Method for Enforcing Integrability in Shape from Shading Algorithms*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(4):439–451, juillet 1988.

- [Funt 93] B. V. FUNT et M. S. DREW. *Color Space Analysis of Mutual Illumination*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(12):1319–1326, décembre 1993.
- [Garabedian 64] P. GARABEDIAN. *Partial Differential Equations*. John Wiley and Sons, 1964.
- [Hadamard 64] J. HADAMARD. *Théorie des équations aux dérivées partielles*. Éditions scientifiques, Pékin, Chine, 1964.
- [Hapke 63] B. W. HAPKE. *A Theoretical Photometric Function for the Lunar Surface*. *Journal of Geophysical Research*, 68(15):4571–4586, août 1963.
- [Helmholtz 89] H. HELMHOLTZ. *Optique physiologique*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1989. Réimpression de l'édition originale publiée en 1867.
- [Horn 70] B. K. P. HORN. *Shape from Shading: a Method for Obtaining the Shape of a Smooth Opaque Object from One View*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, États-Unis, novembre 1970.
- [Horn 75] B. K. P. HORN. *Obtaining Shape from Shading Information*. Dans P. H. WINSTON, éditeur, *The Psychology of Computer Vision*, Chapitre 4, pages 115–155. McGraw-Hill, 1975.
- [Horn 77] B. K. P. HORN. *Understanding Image Intensities*. *Artificial Intelligence*, 8(2):201–231, avril 1977.
- [Horn 79] B. K. P. HORN et R. W. SJOBERG. *Calculating the Reflectance Map*. *Applied Optics*, 18(11):1770–1779, juin 1979.
- [Horn 86a] B. K. P. HORN. *Reflectance Map: Shape from Shading*. Dans *Robot Vision*, Chapitre 11, pages 243–277. MIT Press, 1986.
- [Horn 86b] B. K. P. HORN et M. J. BROOKS. *The Variational Approach to Shape From Shading*. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33(2):174–208, février 1986.
- [Horn 89a] B. K. P. HORN et M. J. BROOKS, éditeurs. *Shape from Shading*. MIT Press, 1989.
- [Horn 89b] B. K. P. HORN et M. J. BROOKS. *The Variational Approach to Shape From Shading*. Dans B. K. P. HORN et M. J. BROOKS, éditeurs, *Shape from Shading*, Chapitre 7, pages 173–214. MIT Press, 1989.
- [Horn 90] B. K. P. HORN. *Height and Gradient from Shading*. *International Journal of Computer Vision*, 5(1):37–75, août 1990.
- [Horn 93] B. K. P. HORN, R. SZELISKI et A. L. YUILLE. *Impossible Shaded Images*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(2):166–170, février 1993.
- [Ikeuchi 81] K. IKEUCHI et B. K. P. HORN. *Numerical Shape from Shading and Occluding Boundaries*. *Artificial Intelligence*, 17(1–3):141–184, août 1981.
- [Kajiya 86] J. T. KAJIYA. *The Rendering Equation*. Dans *Proceedings of the 13<sup>th</sup> Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pages 143–150, Dallas, Texas, États-Unis, août 1986.
- [Kimmel 95a] R. KIMMEL et A. M. BRUCKSTEIN. *Tracking Level Sets by Level Sets: A Method for Solving the Shape from Shading Problem*. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(1):47–58, juillet 1995.
- [Kimmel 95b] R. KIMMEL, K. SIDDIQI, B. B. KIMIA et A. M. BRUCKSTEIN. *Shape from Shading: Level Set Propagation and Viscosity Solutions*. *International Journal of Computer Vision*, 16(2):107–133, octobre 1995.

- [Klette 99] R. KLETTE, R. KOZERA et K. SCHLÜNS. *Reflectance-Based Shape Recovery*. Dans B. JÄHNE, H. HAUSSECKER et P. GEISSLER, éditeurs, *Signal Processing and Pattern Recognition*, volume 2 de *Handbook of Computer Vision and Applications*, Chapitre 19, pages 531–590. Academic Press, 1999.
- [Koenderink 76] J. J. KOENDERINK et A. J. van DOORN. *Geometry of Binocular Vision and a Model for Stereopsis*. *Biological Cybernetics*, 21:29–35, 1976.
- [Koenderink 80] J. J. KOENDERINK et A. J. van DOORN. *Photometric Invariants Related to Solid Shape*. *Optica Acta*, 27(7):981–996, juillet 1980.
- [Koenderink 83] J. J. KOENDERINK et A. J. van DOORN. *Geometrical Modes as a General Method to Treat Diffuse Interreflections in Radiometry*. *Journal of the Optical Society of America - Part A: Optics, Image Science, and Vision*, 73(6):843–850, juin 1983.
- [Kozera 97a] R. KOZERA et R. KLETTE. *Finite Difference Based Algorithms for Linear Shape from Shading*. *Machine Graphics and Vision*, 6(2):157–201, 1997.
- [Kozera 97b] R. KOZERA et R. KLETTE. *Well-Posedness of Linear Shape from Shading Problem*. Dans *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns*, volume 1296 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 130–137, Kiel, Allemagne, septembre 1997.
- [Kozera 98] R. KOZERA. *An Overview of the Shape from Shading Problem*. *Machine Graphics and Vision*, 7(1–2):291–312, 1998.
- [Leclerc 91] Y. G. LECLERC et A. F. BOBICK. *The Direct Computation of Height from Shading*. Dans *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 552–558, Maui, Hawaï, États-Unis, juin 1991.
- [Lee 85a] C.-H. LEE et A. ROSENFELD. *Improved Methods of Estimating Shape from Shading Using the Light Source Coordinate System*. *Artificial Intelligence*, 26(2):125–143, mai 1985.
- [Lee 85b] D. LEE. *A Provably Convergent Algorithm for Shape from Shading*. Dans *Proceedings of the DARPA Image Understanding Workshop*, pages 489–496, Miami Beach, Floride, États-Unis, décembre 1985.
- [Lions 93] P.-L. LIONS, E. ROUY et A. TOURIN. *Shape-from-Shading, viscosity solutions and edges*. *Numerische Mathematik*, 64(3):323–353, mars 1993.
- [Malik 89] J. MALIK et D. MAYDAN. *Recovering Three-Dimensional Shape from a Single Image of Curved Objects*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6):555–566, juin 1989.
- [Meyzonnette 99] J.-P. MEYZONNETTE et T. LÉPINE. *Bases de radiométrie optique*. Cépaduès Éditions, 1999.
- [Minnaert 61] M. MINNAERT. *Photometry of the Moon*. Dans G. P. KUIPER et B. M. MIDDLEHURST, éditeurs, *Planets and Satellites*, volume 3 de *The Solar System*, Chapitre 6, pages 213–248. University of Chicago Press, 1961.
- [Nayar 91] S. K. NAYAR, K. IKEUCHI et T. KANADE. *Shape from Interreflections*. *International Journal of Computer Vision*, 6(3):173–195, août 1991.
- [Nayar 97] S. K. NAYAR, X.-S. FANG et T. E. BOULT. *Separation of Reflection Components Using Color and Polarization*. *International Journal of Computer Vision*, 21(3):163–186, février 1997.
- [Nicodemus 77] F. E. NICODEMUS, J. C. RICHMOND, J. J. HSIA, I. W. GINSBERG et T. LIMPERIS. *Geometrical Considerations and Nomenclature for Reflectance*. NBS Monograph 160, National Bureau of Standards, Washington, D.C., États-Unis, octobre 1977.

- [Okatani 97] T. OKATANI et K. DEGUCHI. *Shape Reconstruction from an Endoscope Image by Shape from Shading Technique for a Point Light Source at the Projection Center*. *Computer Vision and Image Understanding*, 66(2):119–131, mai 1997.
- [Oliensis 90] J. OLIENSIS. *Existence and Uniqueness in Shape from Shading*. Dans Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition (volume I), pages 341–345, Atlantic City, New Jersey, États-Unis, juin 1990.
- [Oliensis 91a] J. OLIENSIS. *Shape from Shading as a Partially Well-Constrained Problem*. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 54(2):163–183, septembre 1991.
- [Oliensis 91b] J. OLIENSIS. *Uniqueness in Shape from Shading*. *International Journal of Computer Vision*, 6(2):75–104, juin 1991.
- [Pentland 82] A. P. PENTLAND. *Finding the illuminant direction*. *Journal of the Optical Society of America*, 72(4):448–455, avril 1982.
- [Pentland 84] A. P. PENTLAND. *Local Shading Analysis*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(2):170–187, mars 1984.
- [Pentland 90] A. P. PENTLAND. *Linear Shape From Shading*. *International Journal of Computer Vision*, 4(2):153–162, mars 1990.
- [Poggio 84] T. POGGIO et V. TORRE. *Ill-Posed Problems and Regularization Analysis in Early Vision*. Technical Memo AIM-773, Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, États-Unis, avril 1984.
- [Prados 03] E. PRADOS et O. FAUGERAS. *“Perspective Shape from Shading” and Viscosity Solutions*. Dans Proceedings of the 9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision (volume II), pages 826–831, Nice, France, octobre 2003.
- [Prados 04] E. PRADOS, O. FAUGERAS et F. CAMILLI. *Shape from Shading: a well-posed problem?* Rapport de Recherche 5297, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sophia Antipolis, France, août 2004.
- [Prados 05] E. PRADOS et O. FAUGERAS. *A generic and provably convergent Shape-From-Shading Method for Orthographic and Pinhole Cameras*. *International Journal of Computer Vision*, 65(1–2):97–125, novembre 2005.
- [Prados 06a] E. PRADOS, F. CAMILLI et O. FAUGERAS. *A unifying and rigorous Shape From Shading method adapted to realistic data and applications*. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(3):307–328, octobre 2006.
- [Prados 06b] E. PRADOS, F. CAMILLI et O. FAUGERAS. *A viscosity solution method for Shape-From-Shading without image boundary data*. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(2):393–412, mars-avril 2006.
- [Prados 06c] E. PRADOS et O. FAUGERAS. *Rôle clé de la Modélisation en “Shape From Shading”*. Dans Actes du 15<sup>ème</sup> Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Tours, France, janvier 2006.
- [Pérez 96] J.-P. PÉREZ. *Optique - Fondements et applications*. Masson, cinquième édition, 1996.
- [Rindfleisch 66] T. RINDFLEISCH. *Photometric Method for Lunar Topography*. *Photometric Engineering*, 32(2):262–277, mars 1966.
- [Rouy 88] E. ROUY. *Approximation numérique des solutions de viscosité des équations d’Hamilton-Jacobi et exemple*. Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, Paris, France, novembre 1988.
- [Rouy 92] E. ROUY et A. TOURIN. *A Viscosity Solutions Approach to Shape-from-shading*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(3):867–884, juin 1992.

- [Sacadura 93] J.-F. SACADURA. Initiation aux transferts thermiques. Technique et Documentation, quatrième édition, 1993.
- [Samaras 98] D. SAMARAS et D. N. METAXAS. *Incorporating Illumination Constraints in Deformable Models*. Dans Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pages 322–329, Santa Barbara, Californie, États-Unis, juin 1998.
- [Samaras 03] D. SAMARAS et D. N. METAXAS. *Incorporating Illumination Constraints in Deformable Models for Shape from Shading and Light Direction Estimation*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(2):247–264, février 2003.
- [Shimshoni 94] I. SHIMSHONI et J. PONCE. *Recovering The Shape of Polyhedra Using Line-Drawing Analysis and Complex Reflectance Models*. Dans Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pages 514–519, Seattle, Washington, États-Unis, juin 1994.
- [Simchony 90] T. SIMCHONY, R. CHELLAPPA et M. SHAO. *Direct Analytical Methods for Solving Poisson Equations in Computer Vision Problems*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(5):435–446, mai 1990.
- [Smith 82] G. B. SMITH. *The Recovery of Surface Orientation from Image Irradiance*. Dans Proceedings of the DARPA Image Understanding Workshop, pages 132–141, Palo Alto, Californie, États-Unis, septembre 1982.
- [Sommerfeld 11] A. SOMMERFELD et J. RUNGE. *Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik*. *Annalen der Physik*, 35:277–289, 1911.
- [Soner 86] H. M. SONER. *Optimal control with state-space constraint I*. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 24(3):552–562, 1986.
- [Stewart 97] A. J. STEWART et M. S. LANGER. *Toward Accurate Recovery of Shape from Shading Under Diffuse Lighting*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(9):1020–1025, septembre 1997.
- [Strat 79] T. M. STRAT. A Numerical Method for Shape-From-Shading From a Single Image. Master’s thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, États-Unis, 1979.
- [Szeliski 91] R. SZELISKI. *Fast Shape from Shading*. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):129–153, mars 1991.
- [Tagare 91] H. D. TAGARE et R. J. P. de FIGUEIREDO. *A Theory of Photometric Stereo for a Class of Diffuse Non-Lambertian Surfaces*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(2):133–152, février 1991.
- [Tan 06] C. L. TAN, L. ZHANG, Z. ZHANG et T. XIA. *Restoring Warped Document Images through 3D Shape Modeling*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(2):195–208, février 2006.
- [Tankus 03] A. TANKUS, N. SOCHEN et Y. YESHURUN. *A New Perspective [on] Shape-from-Shading*. Dans Proceedings of the 9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision (volume II), pages 862–869, Nice, France, octobre 2003.
- [Tankus 05] A. TANKUS et N. KIRYATI. *Photometric Stereo under Perspective Projection*. Dans Proceedings of the 10<sup>th</sup> IEEE International Conference on Computer Vision (volume I), pages 611–616, Pékin, Chine, octobre 2005.
- [Terzopoulos 86] D. TERZOPOULOS. *Regularization of Inverse Visual Problems Involving Discontinuities*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4):413–424, juillet 1986.

- [Tian 97] Y.-L. TIAN et H. T. TSUI. *Shape Recovery from a Color Image for Non-Lambertian Surfaces*. *Journal of the Optical Society of America - Part A: Optics, Image Science, and Vision*, 14(2):397–404, février 1997.
- [Tikhonov 67] A. N. TIKHONOV et V. Y. ARSENIN. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Mir, 1967.
- [Todd 83] J. T. TODD et E. MINGOLLA. *Perception of Surface Curvature and Direction of Illuminant from Patterns of Shading*. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 9:583–595, 1983.
- [Tsai 98] P.-S. TSAI et M. SHAH. *Shape from shading with variable albedo*. *Optical Engineering*, 37(4):1212–1220, avril 1998.
- [Ulich 98] G. ULICH. *Provably Convergent Methods for the Linear and Nonlinear Shape from Shading Problem*. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(1):69–82, juillet 1998.
- [Van Diggelen 51] J. VAN DIGGELEN. *A Photometric Investigation of the Slopes and Heights of the Ranges of Hills in the Maria of the Moon*. *Bulletin of the Astronomical Institute of the Netherlands*, 11(423):283–290, juillet 1951.
- [Wada 97] T. WADA, H. UKIDA et T. MATSUYAMA. *Shape from Shading with Interreflections Under a Proximal Light Source: Distortion-Free Copying of an Unfolded Book*. *International Journal of Computer Vision*, 24(2):125–135, septembre 1997.
- [Wildey 86] R. L. WILDEY. *Radarclinometry for the Venus Radar Mapper*. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 52(1):41–50, janvier 1986.
- [Woodham 80] R. J. WOODHAM. *Photometric Method for Determining Surface Orientation from Multiple Images*. *Optical Engineering*, 19(1):139–144, 1980.
- [Worthington 99] P. L. WORTHINGTON et E. R. HANCOCK. *New Constraints on Data-Closeness and Needle Map Consistency for Shape-from-Shading*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(12):1250–1267, décembre 1999.
- [Zhang 99] R. ZHANG, P.-S. TSAI, J. E. CRYER et M. SHAH. *Shape from Shading: A Survey*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8):690–706, août 1999.
- [Zheng 91] Q. ZHENG et R. CHELLAPPA. *Estimation of Illuminant Direction, Albedo, and Shape from Shading*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7):680–702, juillet 1991.
- [Zheng 06] Y. ZHENG, S. LIN et S. B. KANG. *Single Image Vignetting Correction*. Dans *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (volume I)*, pages 461–468, New York, New York, États-Unis, juin 2006.