

U.R.A. 169 du C.N.R.S.

Aspects des systèmes dynamiques
Des équations différentielles
aux itérations de fonctions

Journées X-UPS 1994

Juillet 1994

F-91128 Palaiseau Cedex
Tél. : ((33)) (1) 69 33 40 88 • Fax : ((33)) (1) 69 33 30 19
Internet : secret@orphee.polytechnique.fr

Sommaire

Préface	iii
Bibliographie	iv

Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques

<i>V.I. Arnold</i>	1
1 Les faux espaces \mathbf{R}^4 et les systèmes dynamiques	1
2 La topologie pseudopériodique	1
3 Les nombres des points périodiques et des cycles limites	3
4 Complexité topologique asymptotique des intersections	4
5 Croissance des nombres de Milnor en dynamique holomorphe	6
6 La variante infinitésimale du 16 ^e problème de Hilbert et les intégrales abéliennes	8
7 La matérialisation des résonances en dynamique holomorphe	10
8 Irrésolubilité analytique et irrésolubilité géométrique dans la théorie du chaos	12
Bibliographie	15

Complexité de suites à valeurs dans un ensemble fini : quelques exemples

<i>P. Arnoux</i>	19
1 Qu'est-ce que la complexité d'une suite ?	19
2 L'exemple le plus simple : les suites sturmiennes	21
3 Suites engendrées par des systèmes dynamiques	25
4 Un exemple : les différences secondes de la suite $[n^2\alpha]$	26
5 Un autre exemple : les suites de billard cubique	28
6 Suites de billard : la conjecture de Tamura	30
7 Quelques autres résultats	31
Bibliographie	32

L'ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme ?

<i>A. Douady</i>	35
----------------------------	----

I Propriétés de continuité	36
1 La métrique de Hausdorff	36
2 Applications semi-continues à valeurs dans $\text{Comp}^*(E)$	37
3 Points périodiques	39
3.1 Multiplicateur	39
3.2 Cycles attractifs	40
3.3 Cycles paraboliques	41
3.4 Cycles indifférents irrationnels	42

4	Ensemble de Julia rempli et ensemble de Julia d'un polynôme	42
5	Semi-continuités de $K(f)$ et $J(f)$ en fonction de f	44
6	L'effet des bassins attractifs	47
7	L'effet des disques de Siegel	48
8	Un théorème de Mañe-Sad-Sullivan	50
II	L'implosion parabolique	51
9	Un exemple parabolique typique	51
10	Le batteur à œufs	52
11	Scenarios imaginables	52
12	L'implosion	55
13	La raison des discontinuités	57
14	Coordonnées de Fatou	58
15	Prolongement des coordonnées de Fatou	61
16	Persistence des coordonnées de Fatou	62
17	La phase	64
18	Applications de Lavaurs	66
19	Les ensembles $K(f_0, g_\sigma)$ et $J(f_0, g_\sigma)$	66
20	Le cas où le point critique s'échappe	68
21	Le cas où σ est réel	70
22	Et pour ε non réel?	70
23	L'éléphant limite	72
24	Autres polynômes ayant un cycle parabolique	74
	Bibliographie	76

Du billard convexe aux géodésiques du tore

<i>P. Le Calvez</i>	79
1 Le billard convexe	80
2 Applications déviant la verticale	84
a Un exemple explicite	85
b Au voisinage d'un point fixe elliptique	85
c Le pendule entretenu	86
3 Dynamique des homéomorphismes du cercle	87
4 Orbites périodiques des applications déviant la verticale	89
5 Etude des configurations minimales	92
6 Géodésiques minimales du tore de dimension 2	99
7 Ce qui se passe en dimension supérieure	106
Bibliographie	115

Préface

*De plus en plus, les mathématiques exigeront
que l'on ait le courage d'assumer leurs conséquences*
M. Crichton, Jurassic Park, septième itération

La théorie des systèmes dynamiques avait initialement pour objet l'étude du comportement qualitatif des trajectoires d'un champ de vecteurs sur une variété (espace des phases en physique par exemple). On s'intéresse ensuite au flot au temps 1 de ce champ de vecteurs : c'est un difféomorphisme de la variété. On remplace l'étude des trajectoires par l'étude du comportement des itérés de ce difféomorphisme : une discrétisation du temps en quelque sorte (voir [1] ou [3] par exemple). Un tel difféomorphisme peut aussi apparaître comme application de premier retour d'une trajectoire au voisinage d'une trajectoire périodique.

Par extension, l'étude du système dynamique associé à une application f d'un espace dans lui-même est celle du comportement de certaines parties de l'espace sous l'effet des itérées $f \circ f \circ \dots \circ f$ lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini.

Les textes présentés dans ce volume abordent ces différents aspects.

Vladimir Arnold propose une liste de questions encore non résolues dans la théorie. Une des questions importantes, et qui est aussi abordée sous un autre angle dans le texte de Patrice Le Calvez, est la recherche d'orbites périodiques (ou de points périodiques dans le cas discret) pour un système dynamique.

Adrien Douady s'intéresse à la variation des ensembles de Julia en fonction du polynôme d'une variable complexe qui les définit. Le livre [5] est une bonne introduction au sujet.

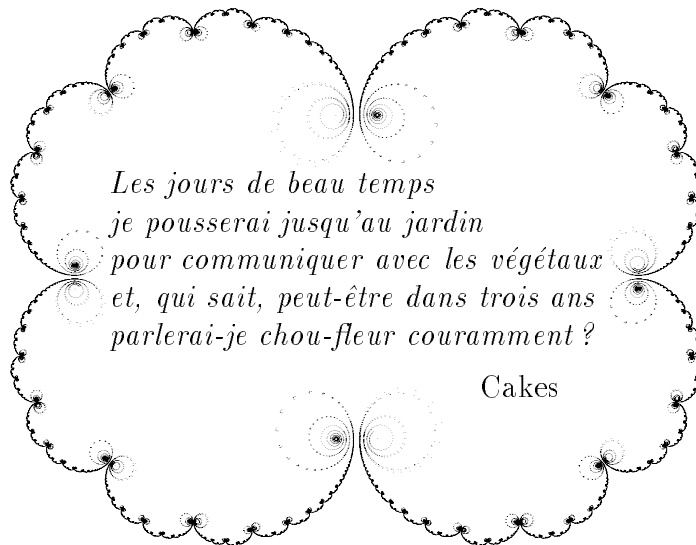
Enfin Pierre Arnoux s'intéresse à des systèmes dynamiques discrets, représentés par des suites.

Le lecteur curieux trouvera de bons articles d'introduction dans l'Encyclopedia Universalis, par exemple [4].

Nicole Berline et Claude Sabbah

Bibliographie

- [1] V.I. ARNOLD, *Equations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1974.
- [2] V.I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1987.
- [3] V.I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.
- [4] A. CHENCINER, *Systèmes dynamiques différentiables*, Encyclopedia Universalis.
- [5] H.-O. PEITGEN, P. RICHTER, *the Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986.



Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques

VLADIMIR I. ARNOLD

“Si j’ai fait quelque chose en mathématique, ce n’est pas à cause de savoir beaucoup, mais plutôt parce que j’ignorais beaucoup” disait I.G. Petrovski, un de mes maîtres en mathématique. “Mais il a été toujours très important ajoute-t-il de savoir qu’un problème n’est pas encore résolu”. Les huit problèmes qui suivent sont, à ma connaissance, ouverts, et j’espère qu’il vous serait utile de le savoir.

1. Les faux espaces \mathbf{R}^4 et les systèmes dynamiques

Est-ce qu’on rencontre les faux \mathbf{R}^4 (variétés différentiables homéomorphes mais pas difféomorphes à l’espace linéaire \mathbf{R}^4) dans l’analyse habituelle ?

Je propose une construction naturelle, qui en principe décrit toutes les fausses variétés \mathbf{R}^4 par des formules explicites ([1]).

Considérons un champ de vecteurs dans l’espace linéaire \mathbf{R}^5 .

La variété des orbites d’un tel champ (convenablement choisi) est difféomorphe à n’importe quelle fausse variété \mathbf{R}^4 donnée.

En effet, le produit cartésien du faux \mathbf{R}^4 avec \mathbf{R} est difféomorphe à l’espace \mathbf{R}^5 linéaire. Ainsi chaque faux \mathbf{R}^4 peut être défini par 5 fonctions différentiables de 5 variables, par les composantes du champ.

PROBLÈME. — *Est-ce qu’on peut obtenir un faux \mathbf{R}^4 à partir d’un champ de vecteurs à composantes polynomiales ? trigonométriques ? analytiques ? élémentaires ? Peut-on écrire explicitement un tel champ de vecteurs ?*

2. La topologie pseudopériodique

La topologie pseudopériodique est motivée par les problèmes de la physique quantique des solides et par la géométrie des quasicristaux, par l’étude des 1-formes fermées mais pas exactes, par l’étude du mélange lent et des “toiles d’araignée stochastiques” dans les systèmes de Hamilton intégrables et presque intégrables.

DÉFINITION. — *Une application pseudopériodique est la somme d’une application linéaire et d’une application périodique.*

Exemple. — L'expression

$$f(x, y) = ax + by + \sin x + \cos y$$

définit une fonction pseudopériodique dans \mathbf{R}^2 (à réseau des périodes $2\pi\mathbf{Z}^2$).

DÉFINITION. — Une variété pseudopériodique est l'image inverse d'un point par une application pseudopériodique.

Exemple. — L'intersection d'une surface périodique dans \mathbf{R}^3 (par exemple d'une surface de Fermi) avec un plan irrationnel (orthogonal au "champ magnétique") est une courbe pseudopériodique, étudiée par S. Novikov [2].

Considérons une courbe pseudopériodique (mais pas périodique) dans \mathbf{R}^n (en fixant le réseau des périodes \mathbf{Z}^n).

Supposons que le rang de la partie linéaire de l'application correspondante est maximal (égal à $n - 1$). Dans ce cas la courbe contient évidemment une branche infinie (à distance finie d'une ligne droite).

PROBLÈME. — La composante non-compacte d'une telle courbe pseudo-périodique est-elle toujours unique ?

Remarque 1. — La conjecture d'unicité de la branche infinie n'est pas démontrée même si la partie linéaire de l'application pseudopériodique est générique (vérifiant, par exemple, les inégalités diophantiennes usuelles, violées seulement par les applications linéaires qui appartiennent à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle).

Remarque 2. — L'exemple des courbes planes ($n = 2$) montre qu'il peut exister une infinité des composantes compactes.

Remarque 3. — Le même exemple montre que dans le cas périodique il peut exister un nombre arbitraire (impair) de branches infinies.

Remarque 4. — Dans le cas $n = 2$ (plus généralement, pour les hypersurfaces pseudopériodiques de dimension $n - 1$ dans \mathbf{R}^n) il n'y a qu'une composante non-compacte ([3]).

Remarque 5. — Si l'application pseudopériodique $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$, définissant notre courbe, n'a pas de points singuliers (ce qui arrive, par exemple, quand la perturbation périodique est faible par rapport à la partie principale linéaire), chaque courbe $f^{-1}(c)$ n'a qu'une seule composante. Dans ce cas l'application f est "rectifiable" : elle peut être réduite à sa partie linéaire par un difféomorphisme du tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ (voir [4]; pour $n = 2$ ce résultat est du à A.N. Kolmogorov [5]).

Remarque 6. — Récemment I. Dynnikov (étudiant du troisième cycle à l'Université de Moscou) a démontré la conjecture d'unicité de la composante infinie pour les courbes planaires pseudopériodiques dans \mathbf{R}^3 (quand une des deux fonctions pseudopériodiques, définissant la courbe, est linéaire).

Exemple. — La courbe plane d'équation

$$y = ax + F(x, y, bx)$$

(ou F est une fonction de période 1 par rapport à chacune de ses trois variables) contient une seule branche infinie, si a est un nombre irrationnel.

Remarque 7. — I. Dynnikov a aussi démontré la conjecture de S.P. Novikov [2] sur les intersections des surfaces de Fermi avec des plans. La conjecture de Novikov affirmait que *chaque composante connexe d'une telle courbe est située dans un voisinage fini d'une ligne droite*. La conjecture est démontrée pour les plans génériques (vérifiant des conditions diophantiennes habituelles). Cependant, Tzarev et Dynnikov ont construit des contre-exemples à cette conjecture pour des plans exceptionnels (formant un ensemble de mesure nulle).

3. Les nombres des points périodiques et des cycles limites

DÉFINITION. — *Un point x est périodique de période n pour une application A si ce point est un point fixe pour l'itération de A :*

$$A^n x = x .$$

Soit $A : M \rightarrow M$ un difféomorphisme analytique d'une variété analytique compacte (par exemple, du tore T^2).

PROBLÈME. — *Est-ce que le nombre des points périodiques de période n est majoré par une fonction exponentielle de n ?*

On suppose ici que les points périodiques sont non dégénérés (que 1 n'est pas une valeur propre de la dérivée de A^n en x). Les difféomorphismes A génériques n'ont pas des points périodiques dégénérés.

Remarque 1. — L'exemple d'application du tore T^2 , donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montre que le nombre des points périodiques de période n peut croître au moins comme une fonction exponentielle de n (même pour des applications génériques).

Remarque 2. — M. Artin et B. Mazur ont démontré que le nombre de points de période n est majoré par $Ce^{\lambda n}$ pour les variétés et les applications algébriques [6].

PROBLÈME. — *Est-ce que le nombre des orbites périodiques de période au plus T d'un champ de vecteurs polynomial (dans une boule compacte de \mathbf{R}^m) est majoré par une fonction exponentielle de T ?*

Remarque 3. — Par contre, pour les variétés et applications C^∞ aucune majoration n'est possible ([7]).

CONJECTURE. — *Le nombre des points périodiques d'une application C^∞ croît presque toujours au plus comme une fonction exponentielle de la période.*

“Presque toujours” veut dire ici “pour presque toutes les valeurs des paramètres (au sens de la mesure de Lebesgue) dans chaque famille générique d'applications dépendant d'un nombre assez grand de paramètres”.

Remarque 4. — Cette définition de généricité, permettant de négliger les phénomènes qu'on ne rencontre que dans les cas exceptionnels au sens de la théorie de mesure dans les familles à un nombre fini des paramètres, est *très différente* de celles des topologues et des probabilistes.

Les topologues, utilisant la catégorie, vont négliger un ensemble de Cantor dont la mesure constitue 99% de la mesure totale de la variété considérée.

Les probabilistes considèrent des mesures dans les espaces de fonctions, concentrées sur des fonctions pas très lisses (comme le mouvement Brownien).

La définition de “presque toujours” décrite plus haut, introduite par Kolmogorov [8], est bien adapté à la théorie des systèmes dynamiques.

4. Complexité topologique asymptotique des intersections

Ce problème généralisant le problème 3 est motivé par la théorie des solitons (voir [2]).

Considérons deux sous-variétés compactes X^k et Y^ℓ dans une variété compacte M^m . Soit $A : M \rightarrow M$ une application différentiable. Considérons les images successives de X par l'action des itérations A^n de A . Pour mesurer leur complexité (croissante avec le temps n) on considère leurs intersections avec la variété immobile Y :

$$Z(n) = (A^n X) \cap Y .$$

Cette intersection Z est généralement une variété lisse de dimension $s = k + \ell - m$.

Le problème est d'étudier le comportement asymptotique de la complexité topologique $|Z(n)|$ de $Z(n)$ en fonction du temps n .

Exemple 1. — Si les dimensions de X et de Y sont complémentaires, $Z(n)$ est génériquement un ensemble fini et $|Z(n)|$ est le nombre de ses points.

Exemple 2. — Soit $g : \Omega \rightarrow \Omega$ un système dynamique générique. Considérons $M = \Omega \times \Omega$, $A = (\text{Id}, g)$, $X = Y =$ la diagonale de M . Dans ce cas $Z(n)$ est l'ensemble fini des paires (x, x) où x est un point périodique de période n de g . Le problème 3 est donc un cas particulier du problème 4.

Remarque 1. — Si (A, M, X, Y) sont des applications et variétés *algébriques* réelles, la complexité topologique croît au plus comme une fonction exponentielle du temps :

$$|Z(n)| \leq C e^{\lambda n}.$$

C'est démontré dans [9], [10] pour les mesures de la complexité topologique telles que les nombres de Betti, les nombres caractéristiques *etc.*

Considérons maintenant le cas des variétés et applications C^∞ .

PROBLÈME. — *Est-ce que la complexité topologique de l'intersection $Z(n)$ est majorée par une fonction exponentielle du temps n presque toujours ?*

Remarque 2. — Si A est un difféomorphisme, la conjecture est démontrée dans [10] pour les mesures suivantes de la complexité topologique : nombre de composantes connexes, nombres de Betti, nombres de Morse, nombres caractéristiques, volume Riemannien, courbure totale absolue *etc.*

Les démonstrations sont basées sur le lemme de Borel-Cantelli (l'inégalité de Tchebyshev) des probabilistes d'une part et sur la majoration des nombres de Betti par la courbure totale absolue due à Chern et Lashov [11] d'autre part.

Remarque 3. — On peut aussi majorer le nombre des générateurs et le nombre des relations du groupe fondamental. Mais je ne sais démontrer aucune majoration des longueurs des relations.

Remarque 4. — “Presque toujours” dans [10] veut dire : pour presque toutes les valeurs du paramètre t dans les familles génériques de variétés immobiles Y_t on a

$$|Z_t(n)| \leq C(t) e^{\lambda n}$$

pourvu que le nombre des paramètres, $p = \dim\{t\}$, soit suffisamment grand. Les arguments “tomographiques” de [10] utilisent p d'ordre de grandeur m^2 .

Remarque 5. — Probablement, le résultat de [10] reste vrai presque toujours si ce n'est pas Y , mais A ou bien X qui dépend des paramètres.

Remarque 6. — Il existe des exemples C^∞ et même *analytiques* où $|Z(n)|$ croît plus vite que n'importe quelle fonction donnée (pour une suite croissante n_i des moments du temps).

L'exemple [12] de O. Koslovskii (étudiant du premier cycle à l'Université de Moscou) est particulièrement instructif. Dans cet exemple M est le tore $T^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$, $X = Y$ est le cercle $y = 0$ et A est un difféomorphisme analytique de la forme

$$(x, y) \mapsto (x + 2\pi\lambda, y + f(x)).$$

On choisit un nombre irrationnel λ et une série *très lacunaire*

$$f(x) = \sum_i f_{M_i} \sin M_i x .$$

La possibilité d'obtenir une croissance arbitraire de $|Z(n_i)|$ est assuré par l'existence des nombres irrationnels λ dont des éléments des fractions continues croissent aussi vite qu'on veut.

5. Croissance des nombres de Milnor en dynamique holomorphe

C'est une variante locale du problème 4. Considérons deux germes de courbes holomorphes passant par l'origine du plan \mathbf{C}^2 :

$$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \hookleftarrow (Y, 0)$$

et un germe d'application holomorphe préservant l'origine $A : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$.

On fait bouger X par les itérations de A et on étudie les intersections de $A^n X$ avec Y .

DÉFINITION. — *Le nombre de Milnor $\mu(n)$ est la multiplicité d'intersection des courbes $A^n X$ et Y à l'origine.*

Exemple. — $A(x, y) = (x, y^2)$, $X = \{(x, x)\}$, $Y = \{(x, 0)\}$. Les images $A^n X$ sont les "paraboles" $y = x^{2^n}$, donc $\mu(n) = 2^n$.

Revenons au cas général des (A, X, Y) quelconque.

PROBLÈME. — *Est-ce-que les nombres de Milnor $\mu(n)$ sont majorés par une fonction exponentielle du temps n ?*

On suppose ici que A est de multiplicité finie et que $A^n X$ et Y sont différentes pour chaque n .

Remarque 1. — La majoration exponentielle est démontrée dans [13] pour le cas des courbes $A^n X$ lisses (comme celles de l'exemple).

Remarque 2. — Il semble que la même majoration exponentielle soit vraie pour des sous-variétés holomorphes de dimension quelconque $(X^k, 0)$, $(Y^\ell, 0)$ de $(\mathbf{C}^m, 0)$ et pour les nombres de Milnor généralisés qui sont définis par la construction suivante.

Considérons une filtration $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ algébrique de l'espace $V_1 = J^\infty$ des jets infinis des paires d'applications holomorphes

$$f : (\mathbf{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^m, 0), \quad g : (\mathbf{C}^\ell, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^m, 0)$$

à l'origine.

Les variétés V_i sont des sous-variétés algébriques de J^∞ . Cela veut dire que chacune de ces variétés est définie par des équations polynomiales (donc portant sur un nombre fini de coefficients de Taylor). Ce nombre fini dépend cependant de i .

DÉFINITION. — *Le nombre de Milnor généralisé $\mu(f, g)$ est le plus grand des nombres i pour lesquels la paire (f, g) appartient à V_i .*

Exemple. — Les variantes locales des invariants topologiques (ou plus généralement discrets) des intersections considérées dans le problème 4 sont des nombres de Milnor généralisés (associés à des filtrations très spéciales).

CONJECTURE. — *Les nombres de Milnor généralisés $\mu(n)$ des paires $(A^n X, Y)$ sont majorés par une fonction exponentielle de n (pourvu que A soit une application de multiplicité finie et que tous ces nombres de Milnor soient finis).*

Remarque 3. — Pour les difféomorphismes A cette conjecture est vraie. De plus, dans ce cas *la suite des nombres de Milnor généralisés $\mu(n)$ est bornée par une constante.* La démonstration de ce fait ([13]) est basée sur le théorème suivant de Skolem.

Soit $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_m f(n-m)$ une suite récurrente. Alors l'ensemble des valeurs de n telles que $f(n) = 0$ est l'union d'un ensemble fini et d'un ensemble fini de progressions arithmétiques.

Ce théorème de la théorie des nombres, démontré par un logicien, appartient en effet à la théorie des systèmes dynamiques.

Remarque 4. — Les résultats de [13] généralisent un théorème de M. Shub et D. Sullivan [14] : les valeurs de l'indice de Poincaré des itérations d'un difféomorphisme (C^1) à son point fixe sont bornées (à condition que tous ces indices soient finis). Dans les deux résultats les suites des valeurs (du nombre de Milnor généralisé et de l'indice) sont périodiques à partir d'un certain moment.

Le théorème de Shub et Sullivan a été généralisé par D. Fried [26] qui a considéré au lieu de l'indice de Poincaré les indices complexes de Atiyah-Bott.

6. La variante infinitésimale du 16^e problème de Hilbert et les intégrales abéliennes

Le 16^e problème de Hilbert a deux parties : la question sur les ovals des courbes algébriques et celle sur les cycles limites des champs de vecteurs polynomiaux.

Entre ces deux problèmes il y a encore une question intermédiaire : l'étude des cycles limites nouveaux-nés des courbes de niveau d'une intégrale première.

Ce problème contient, comme cas particulier, l'étude du nombre des zéros réels des périodes des intégrales abéliennes en fonction des paramètres. Supposons qu'un champ de vecteurs polynomial dans le plan ait une intégrale première, dont les courbes de niveau sont des cycles (remplissant au moins un certain anneau du plan).

Considérons les petites variations polynomiales (de degré fixé) de ce champ de vecteurs. Les places de naissance des cycles limites sont données en première approximation par les zéros d'une certaine intégrale (trouvée par Poincaré) le long des orbites fermées non perturbées (ces orbites sont les courbes de niveau de l'intégrale première).

PROBLÈME. — *Est-ce-que le nombre de zéros de l'intégrale de Poincaré est borné (par une constante ne dépendant que du degré des perturbations) ?*

Exemple. — Le système de Lotka-Volterra généralisé

$$\dot{x} = x(a + bx + cy), \quad \dot{y} = y(d + ex + fy)$$

a parfois une intégrale première

$$I = x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

ou z est une fonction linéaire (non homogène) de x et y . Les orbites non perturbées $I = \text{const}$ sont des courbes algébriques ou non, dépendant des coefficients (a, \dots, f) . Le problème est de savoir *si le nombre des orbites non perturbées qui engendrent des cycles limites est borné en fonction des degrés des perturbations.*

Remarque 1. — Ce nombre est probablement borné par une constante commune pour toutes les valeurs des coefficients du système initial.

Mais on n'a pas démontré que le nombre des zéros de l'intégrale de Poincaré est borné même pour le cas des intégrales hypergéométriques (au sens de Gelfand, Varchenko, Aomoto et al.). correspondant aux systèmes de Lotka-Volterra généralisés individuels (et même aux systèmes de Lotka-Volterra non généralisés, où $b = f = 0$).

Remarque 2. — Dans le cas particulier où le système non perturbé est un système de Hamilton à fonction de Hamilton H polynomiale le problème peut être

formulé en termes de périodes d'intégrales abéliennes. Considérons l'intégrale abélienne complète

$$(1) \quad I(h) = \oint Pdx + Qdy$$

le long de l'ovale de la courbe algébrique $H(x, y) = h$. Les polynômes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ décrivent la variation infinitésimale du champ de vecteurs de Hamilton, et I est l'intégrale de Poincaré.

Le problème est de borner le nombre des zéros réels de la fonction I pour tous les polynômes (P, Q) de degré fixé.

Ce problème de borne uniforme des nombres des zéros réels des intégrales abéliennes complètes a été résolu par A.N. Varchenko [15] et par A.G. Hovanskii [16] par deux méthodes différentes. Mais ni l'une ni l'autre démonstration ne donnent une borne explicite, on démontre seulement *l'existence* d'une telle borne pour le nombre des racines réelles de I .

Remarque 3. — Dans le cas encore plus spécial du système à fonction de Hamilton cubique

$$(2) \quad H(x, y) = y^2 + x^3 - x$$

la borne exacte du nombre des zéros des intégrales de Poincaré (cette fois elliptiques) a été trouvée par G.S. Petrov, un étudiant du premier cycle de l'Université de Moscou [17].

La famille des fonctions (1) qu'on obtient de tous les polynômes P, Q (de degré borné) forme un espace linéaire de dimension finie N . Il existe donc des perturbations (P, Q) telles que l'intégrale de Poincaré $I(h)$ a au moins $N - 1$ zéros réels (situés même en des points arbitraires h_i).

DÉFINITION. — *Une famille linéaire de dimension N des fonctions d'une variable est une famille de Tchebyshev, si le nombre de zéros de chaque fonction (non identiquement nulle) de la famille est plus petit que N .*

L'équation différentielle linéaire dont les fonctions de la famille sont les solutions est appelée alors *une équation disconjuguée*.

THÉORÈME (Petrov). — *La famille d'intégrales de Poincaré $I(h)$, correspondant au hamiltonien cubique (2), est une famille de Tchebyshev.*

Les perturbations (P, Q) définissant l'intégrale (1) sont ici des polynômes arbitraires de degré au plus n . La famille des intégrales (1) est en ce cas de dimension n . Ainsi le nombre maximal des zéros réels des intégrales de Poincaré (1) dans le cas (2) est égal au degré de la perturbation moins 1.

Remarque 4. — Les résultats de Petrov montrent que l'équation de Picard-Fuchs (de la connection de Gauss-Manin correspondante) est disconjuguée. La théorie de Sturm symplectique (voir [18]) suggère que cette propriété de disconjugaison doit être liée à un principe variationnel pour cette équation de Picard-Fuchs linéaire, dont le lagrangien (quadratique) doit être défini positif.

Dans ce cas les théorèmes de la géométrie symplectique entraîneraient la propriété de disconjugaison lagrangienne : le nombre des moments de la non transversalité d'un plan lagrangien mobile avec un plan immobile serait minimal.

Pour un hamiltonien hyperelliptique $H = y^2 + p(x)$ ce programme a été réalisé par A.B. Givental [19]. Il a démontré la propriété de disconjugaison lagrangienne de l'équation de Picard-Fuchs correspondante.

Malheureusement, la disconjugaison lagrangienne n'implique pas directement une borne pour le nombre de zéros des solutions particulières de l'équation linéaire de Hamilton (elle donne seulement la borne du nombre de zéros de certains déterminants, formes de plusieurs solutions).

7. La matérialisation des résonances en dynamique holomorphe

Il est bien connu depuis les travaux de Poincaré en mécanique céleste que les résonances (les commensurabilités des fréquences) entraînent la divergence des séries décrivant les mouvements perturbés (due aux "petits dénominateurs" qui s'annulent quand une résonance exacte a lieu).

La divergence de la série de Taylor de la fonction $\arctg x$ pour $|x| > 1$ s'explique par la présence d'une singularité complexe au point i . Cette singularité, présentant un obstacle topologique à la convergence, matérialise une divergence autrement mystérieuse.

L'idée de la matérialisation des résonances est de trouver des obstacles topologiques à la convergence des séries de la théorie des perturbations dans le comportement des orbites du système perturbé dans l'espace des phases complexe.

On trouvera beaucoup d'exemples de réalisation de ce programme dans [20], [21], [22]. Les démonstrations de Poincaré et de Siegel de la divergence des séries de la théorie des perturbations peuvent être interprétées comme des indications de la présence d'orbites périodiques (de très longues périodes) dans les voisinages complexes de l'espace des phases réels.

Je présente ici ma vieille (1958) conjecture de ce genre qui reste, semble-t-il, non démontrée même aujourd'hui (au moins formellement).

Considérons une application holomorphe d'un voisinage G d'un cercle S^1 (plongé dans le plan complexe \mathbf{C}) sur un autre voisinage du même cercle,

$$A : (G, S^1) \rightarrow (G', S^1) .$$

Supposons, que A induise sur le cercle S^1 un difféomorphisme, conjugué à une rotation R_λ d'angle $2\pi\lambda$ par un difféomorphisme conjuguant B qui est holomorphe sur un voisinage du cercle :

$$A = BR_\lambda B^{-1} .$$

Supposons que le “nombre de rotation de Poincaré”, λ , soit irrationnel.

Remarque 1. — D’après une autre conjecture de 1958, démontrée par M. Herman [23], le difféomorphisme holomorphe B existe si le nombre de rotation λ de A vérifie les conditions diophantiennes habituelles (violées seulement par un ensemble de λ de mesure de Lebesgue nulle).

Exemple. — Une fonction f holomorphe au voisinage de l’axe réel, 2π -périodique et réelle sur cette axe, définit un difféomorphisme $x \mapsto x + f(x)$ du cercle $\{x \bmod 2\pi\}$, si $f'(x) > -1$ sur l’axe réel.

Supposons que l’anneau maximal M (difféomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}$) dans lequel l’application A est conjuguée à la rotation, soit contenu dans le voisinage G du cercle S^1 avec sa frontière ∂M .

Dans ce cas la conjecture de la matérialisation des résonances peut être formulée comme le

PROBLÈME. — *Est-ce-que chaque voisinage de chaque point de la frontière ∂M contient un point périodique de A ? Est-ce-que c’est au moins vrai génériquement ?*

Remarque 2. — Les points périodiques de A sont en dehors du voisinage du cercle où A est conjugué à une rotation irrationnelle R_λ . Donc ces points empêchent la convergence des séries de la théorie des perturbations et matérialisent les résonances.

Remarque 3. — Dans le cas où le difféomorphisme conjuguant B n’est pas holomorphe, on attend l’existence des points périodiques dans chaque voisinage de chaque point du cercle S^1 .

Remarque 4. — Les conjectures d’approximation de la frontière de conjugaison par les points périodiques peuvent être formulées pour le cas local d’un point fixe d’application holomorphe $A : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ ayant la dérivée $e^{2\pi i \lambda}$ à l’origine. On attend génériquement des points périodiques au voisinage du bord ∂M du disque maximal M où A est holomorphiquement conjugué à une rotation.

Remarque 5. — Pour les nombres de rotation λ irrationnels exceptionnels J.C. Yoccoz et R. Perez-Marco ont construit des applications polynomiales A telles que les points périodiques n’approximent pas la frontière ∂M de l’anneau ou du disque d’holomorphie du difféomorphisme conjuguant.

Remarque 6. — Par contre, pour les nombres de rotation λ génériques ils ont démontré la conjecture d’approximation pour les applications polynomiales et rationnelles.

Remarque 7. — Il semble que le problème reste ouvert (au moins formellement) même pour des applications définies par des *polynômes trigonométriques*, par exemple pour les applications de forme $x \mapsto x + a + b \sin x$, pour lesquelles la conjecture d'approximation a été originalement formulée en 1958.

Remarque 8. — Il reste beaucoup à faire dans le programme général de la matérialisation des résonances. Je cite, par exemple, les travaux récents de M.B. Mishustin sur les formes normales des voisinages des courbes holomorphes sur les surfaces holomorphes.

Remarque 9. — Tout récemment J. Moser a étudié les perturbations des courbes holomorphes sur la surface du tore $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^4$ lors d'une perturbation pseudo-holomorphe de la structure holomorphe du tore. Sans doute on peut construire une théorie de matérialisation des résonances pour ce problème, parallèle à la théorie des bifurcations des courbes elliptiques sur les surfaces holomorphes, construite dans [21].

8. Irrésolubilité analytique et irrésolubilité géométrique dans la théorie du chaos

Il semble que le comportement chaotique des systèmes dynamiques rend indécidable les questions trop précises sur leur structure.

Je présente ici quelques vieilles conjectures (voir [24], [25]) sur la non décidabilité de problèmes classiques de la théorie des systèmes dynamiques tels que les problèmes de la stabilité des points stationnaires, de l'intégrabilité en quadrature des équations différentielles ordinaires et de l'intégrabilité complète des systèmes de Hamilton en mécanique. Mes définitions de l'irrésolubilité sont très différentes de celles de l'algèbre et de la théorie des algorithmes des logiciens.

Dans l'esprit de la géométrie des variétés, la résolubilité d'un problème ne doit pas dépendre du système des coordonnées utilisé pour définir les données du problème (les parties droites des équations différentielles, les fonctions de Hamilton *etc.*)

DÉFINITION 1. — *Un problème est géométriquement irrésoluble si, parmi les problèmes qu'on obtient du problème donné par des changements difféomorphes des coordonnées et des paramètres, il n'y a pas de problème résoluble analytiquement (au sens de la définition 2 donnée dans la suite).*

Exemple. — Considérons un champ de vecteurs dépendant des paramètres au voisinage d'un point stationnaire. Le problème de la stabilité de ce point pour cette famille est géométriquement irrésoluble si ce problème est analytiquement irrésoluble pour chaque famille équivalente (par les difféomorphismes locaux dépendant des paramètres) à la famille donnée.

Remarque 1. — Le problème de l'intégration d'une équation différentielle est géométriquement résoluble au voisinage d'un point non singulier du champ de vecteurs correspondant, bien que ce problème peut être analytiquement irrésoluble pour certains champs. Ce problème est probablement géométriquement irrésoluble au voisinage d'un point singulier, même pour les champs polynomiaux.

La définition de la résolubilité analytique des problèmes analytiques locaux dont il est question plus haut (et qui est décrite plus bas) est très libérale. Par exemple, toutes les équations diophantiennes sont dans ce sens résolubles. Donc l'irrésolubilité analytique dans ce sens est une propriété beaucoup plus forte que l'irrésolubilité algorithmique.

Comme données d'un problème analytique local, je considère un nombre fini de séries de Taylor *dans un système de coordonnées fixées*. Pour le problème de la stabilité d'un point stationnaire ce sont les séries des composantes du champ de vecteurs en ce point. L'espace de leurs polynômes de Taylor de degré donné est donc aussi muni des coordonnées privilégiées. La définition de résolubilité analytique décrit les opérations permises menant à la solution.

On commence par la définition des fonctions, des variétés et des applications *admissibles* dans les espaces arithmétiques \mathbf{R}^N et \mathbf{C}^N . Ce sont des ensembles minimaux de variétés et d'"applications" ayant les propriétés suivantes :

1. les espaces arithmétiques \mathbf{R}^N et \mathbf{C}^N (pour tout n) sont des variétés admissibles ;
2. chaque application rationnelle est admissible ;
3. l'image et l'image inverse par une application admissible d'une variété admissible est admissible ;
4. les intersections et les unions de paires des variétés admissibles sont admissibles, aussi bien que les compléments et les produits directs ;
5. la composition de deux applications admissibles est admissible ;
6. une application (même multiforme) est admissible si et seulement si son graphe est une variété admissible ;
7. si $f(x, y)$ est une fonction admissible, alors sa dérivée par rapport à x ainsi que sa primitive (dont la branche est fixée par les valeurs initiales sur une sous-variété admissible) sont admissibles.

Remarque 2. — La primitive en question est donnée par l'intégration complexe. Le graphe de cette fonction multiforme est donc une variété admissible.

Ainsi le prolongement analytique est dans cette théorie une opération admissible, aussi bien que toutes les opérations arithmétiques, la dérivation, l'intégration, les substitutions et l'inversion.

Remarque 3. — On peut construire une notion de résolubilité analytique basée sur l'intégration réelle. Cette théorie est différente de celle qu'on discute ici. Par exemple, la fonction sin sur la droite réelle est admissible si l'intégration complexe est permise, mais n'est pas contenue dans l'ensemble minimal des fonctions admissibles, si seule l'intégration réelle est permise (bien que la restriction de cette fonction sur chaque intervalle fini de la droite réelle soit toujours une fonction admissible).

La fonction sin étant admissible, l'ensemble des entiers l'est aussi. Il résulte que l'ensemble des valeurs entières du paramètre y , tel que le polynôme $f(x, y)$ a une racine entière x , est admissible, quelque soit le polynôme donné f à coefficients entiers.

Considérons pour simplifier un problème analytique local *binaire*, c'est-à-dire ayant deux solutions possibles : "oui" ou "non" (comme le problème de la stabilité d'un point stationnaire). Pour chaque valeur de k l'espace des polynômes de Taylor de degré k des données d'un problème local binaire est divisé en trois parties :

A_k : les polynômes de Taylor pour lesquels la réponse est "oui" (indépendamment des termes de plus haut degré).

B_k : Les polynômes de Taylor pour lesquels la réponse est "non" (indépendamment des termes de plus haut degré).

C_k : Les polynômes de Taylor pour lesquels la réponse dépend des termes de plus haut degré.

DÉFINITION 2 (Voir [24]). — *Un problème analytique local binaire est analytiquement résoluble si*

1. les ensembles A_k, B_k, C_k sont des variétés admissibles (pour chaque k),
2. les codimensions des variétés C_k tendent vers l'infini avec le degré k des polynômes de Taylor.

PROBLÈME. — *Est-ce que le problème de la stabilité d'un point stationnaire d'un champ de vecteurs dans \mathbf{R}^n est géométriquement résoluble ?*

Remarque 4. — Une vieille conjecture (voir par exemple [25]) dit que ce problème n'est probablement ni analytiquement ni même géométriquement résoluble (au moins si $n \geq 3$).

Je pense que les ensembles A_k, B_k, C_k ne sont pas admissibles même pour des valeurs de k assez petites, peut être même pour $k = 2$ (pour $k = 1$ ces ensembles sont admissibles d'après le théorème classique de Lyapounov, quelque soit n).

Remarque 5. — Je pense que les problèmes de l'intégrabilité en quadrature et de l'intégrabilité complète des systèmes de Hamilton eux aussi ne sont ni analytiquement ni même géométriquement résolubles (dans un sens semblable à celui décrit plus haut pour les problèmes locaux binaires).

Remarque 6. — Il est même possible qu'il existe des systèmes complètement intégrables dont l'intégrabilité n'est cependant *pas décidable par des opérations analytiques* utilisant les données du problème (notamment l'expression de la fonction de Hamilton en termes des coordonnées standards (p, q) dans l'espace des phases). Je ne vois pas de raison pour que cela n'arrive pas, par exemple, pour les fonctions de Hamilton polynomiales.

Remarque 7. — J'espère que la démonstration d'insolubilité de problèmes tels que le problème de la stabilité (dans le sens décrit plus haut) n'est pas possible sans un vrai progrès dans la compréhension du comportement des systèmes dynamiques : ce n'est pas un problème de logique.

Les problèmes précédents sont formulés, suivant la tradition russe, dans une forme aussi peu générale que possible. Il est facile de les généraliser. Je crois, quand même, que ce sont les problèmes concrets qui restent la source principale — et peut être unique — de l'inspiration des mathématiciens et de toutes les théories générales.

Bibliographie

- [1] V.I. ARNOLD, *Problems on singularities and dynamical systems*, in *Developments in Mathematics. The Moscow School (V.I. Arnold, M. Monastyrsky Editors)*, Chapman & Hall, London (1993).
- [2] S.P. NOVIKOV, *Quasiperiodic structures in topology*, in *Topological Methods in Modern Mathematics, J.W. Milnor's Jubilee volume*, Publish or Perish, Houston (1993), 223–234.
- [3] V.I. ARNOLD, *Topological and ergodic properties of closed differential 1-forms*, *Funct. Anal. Appl* **25** : **2** (1991), 1–12.
- [4] V.I. ARNOLD, *Polyintegrable flows*, *Algebra and Analysis (St. Petersburg Math. J.)* **4** : **6** (1992), 54–62.
- [5] A.N. KOLMOGOROV, *On dynamical systems with integral invariant on the torus*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **93** : **5** (1953), 763–766 (en russe, traduction anglaise dans : A.N. Kolmogorov, *Selected Papers Vol 1*, Mathematics and Mechanics (V.M. Tikhomirov Editor), Kluwer, Dordrecht (1991), 344–348).
- [6] M. ARTIN, B. MAZUR, *On periodic points*, *Annals of Mathematics* **81** (1965), 82–99.
- [7] E. GONZALES-ROSALES, *On the growth of the number of periodic points of dynamical systems*, *Funct. Anal.* **25** : **4** (1991), 14–22 ; **26** : **2** (1992), 29–35.
- [8] A.N. KOLMOGOROV, *General theory of dynamical systems and classical mechanics*, in *Proc. Int. Congr. Math. (1954) Amsterdam*, Vol 1 (1957), 315–333

- (en russe, traduction anglaise dans : A.N. Kolmogorov, *Selected Papers Vol 1*, Mathematics and Mechanics (V.M. Tikhomirov Editor), Kluwer, Dordrecht (1991), 355–374).
- [9] V.I. ARNOLD, *Dynamics of intersections*, in *Analysis etc, Research papers published in honor of Jürgen Moser's 60th Birthday* (P. Rabinovitz, E. Zehnder Editors), Academic Press, San Diego (1990), 77–84.
- [10] V.I. ARNOLD, *Dynamics of complexity of intersections*, Boletim da Sociedade Brasileira de Mathematica **21 : 1** (1990), 1–10.
- [11] S.S. CHERN, R. LASHOF, *On the total curvature of immersed manifolds*, Amer. Math. J. **79** (1957), 306–318; Michigan Math. Journ. **5** (1958), 5–12.
- [12] O.S. KOZLOVSKI, *The Dynamics of Intersections of Analytic Manifolds*, Russian Acad. of Sciences Doklady **45 : 2** (1992), 425–427.
- [13] V.I. ARNOLD, *Majoration of Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems*, in *Topological Methods in Modern Mathematics, J.W. Milnor's Jubilee volume*, Publish or Perish, Houston (1993), 379–390.
- [14] M. SHUB, D. SULLIVAN, *A remark on the Lefschetz fixed points formula for differentiable maps*, Topology **13** (1974), 189–191.
- [15] A.N. VARCHENKO, *Estimation of the number of zeros of an abelian integral depending on a parameter and limit cycles*, Funct. Anal. and Appl. **18 : 2** (1984), 14–25.
- [16] A.G. KHOVANSKIĬ, *Real analytic manifolds with the property of finiteness and complex abelian integrals*, Funct. Anal. and Appl. **18 : 2** (1984), 40–50.
- [17] G.S. PETROV, *The number of zeros of complete elliptic integrals*, Funct. Anal. and Appl. **18 : 2** (1984), 73–74; **20 : 1** (1986), 46–49; **22 : 1** (1988), 83–84; **23 : 2** (1989), 88–89; **24 : 3** (1990), 45–50; Mat. Zametki **44 : 3** (1988), 393–401.
- [18] V.I. ARNOLD, *Sturm theorems and symplectic geometry*, Funct. Anal. and Appl. **19 : 4** (1985), 1–10.
- [19] A.B. GIVENTAL, *Sturm theorems for hyperelliptic integrals*, Algebra and Analysis **1 : 5** (1989), 95–102 (traduction anglaise : Leningrad Math. J. **1 : 5** (1990), 1157–1163).
- [20] V.I. ARNOLD, *Notes on singularities of finite codimension in the complex dynamical systems*, Funct. Anal. and Appl. **3 : 1** (1969), 1–6.
- [21] V.I. ARNOLD, *Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and structure of the neighborhood of an elliptic curve on a complex surface*, Funct. Anal. and Appl. **10 : 4** (1975), 1–12.

- [22] V.I. ARNOLD, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer, New-York, 1983.
- [23] M. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. IHES **49** (1979), 5–233.
- [24] V.I. ARNOLD, *Local problems of analysis*, Vestnik Mosk. Univ. Ser. 1, Math. Mech. **25 : 2** (1970), 52–56.
- [25] V.I. ARNOLD, in *Mathematical developments arising from Hilbert's problems*, Proc. Symp. in Pure Math. (AMS, Providence) **28** (1974), 59.
- [26] D. FRIED, *Periodic points of holomorphic maps*, Topology **25 : 4** (1986), 429–441.

CEREMADE

Université de Paris-Dauphine

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny

75775 Paris cedex 16

France

Adresse électronique : arnold@ceremade.dauphine.fr

Complexité de suites à valeurs dans un ensemble fini : quelques exemples

PIERRE ARNOUX

1. Qu'est-ce que la complexité d'une suite ?

Nous considérons ici des suites à valeurs dans un ensemble fini \mathcal{A} , appelé alphabet. On en rencontre dans des situations diverses : bien entendu, dans tout ce qui relève du codage de l'information (texte, son...), mais aussi en biologie (génomique), et en physique (étude de l'évolution d'un système au cours du temps, quand on ne peut faire que des mesures discrètes). Une méthode assez générale pour obtenir de telles suites est de prendre un système dynamique $T : X \rightarrow X$, et une fonction de codage $f : X \rightarrow \mathcal{A}$ (ou, ce qui revient au même, une partition finie de X indexée par \mathcal{A}) ; on considère alors les suites de terme général $f(T^n(x))$, codage symbolique de l'orbite du point x sous l'action de T . On peut considérer suivant les cas des suites infinies (indexées par \mathbf{N}) ou bi-infinies (indexées par \mathbf{Z}) ; nous nous restreindrons ici au cas des suites infinies.

On s'intéresse particulièrement à évaluer le caractère plus ou moins aléatoire d'une telle suite ; si l'on connaît n symboles de la suite, que peut-on dire des suivants ? Une méthode possible consiste à compter le nombre de combinaisons possibles de n symboles consécutifs. C'est ce que l'on appelle la *complexité* de la suite ; donnons d'abord quelques définitions :

On appelle *mot* sur l'alphabet \mathcal{A} une suite finie $W = w_1 \dots w_n$ à valeurs dans \mathcal{A} ; on notera $|W| = n$ la longueur du mot, et $|W|_{\mathbf{a}}$ le nombre d'occurrences de la lettre \mathbf{a} dans W . On dit qu'un mot W est *facteur* de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'il existe un entier k tel que $W = u_k \dots u_{k+n-1}$.

DÉFINITION. — *On appelle complexité de la suite u la fonction p qui, à tout entier n , associe le nombre de facteurs de longueur n de u .*

Il est clair que, si l'alphabet \mathcal{A} est de cardinal k , $p(n)$ est borné par k^n ; il est facile de montrer que, puisqu'un mot de longueur $n+m$ peut se décomposer en deux mots de longueur respective n et m , on a $p(n+m) \leq p(n)p(m)$. On en déduit que $\log(p(n))/n$ admet une limite finie quand n tend vers l'infini ; c'est ce qu'on appelle *l'entropie* de la suite. Une suite d'entropie $\log k$ contient tous les mots possibles ; une suite d'entropie strictement positive peut être considérée comme très aléatoire.

Dans cet exposé, nous allons montrer comment, dans certains cas, on peut calculer explicitement la complexité d'une suite en considérant un système dynamique. Nous nous intéresserons à des suites peu aléatoires, d'entropie nulle.

Si la complexité d'une suite est majorée par une exponentielle, peut-on donner des minoration ? on a un lemme évident :

LEMME. — *la complexité est une fonction croissante.*

En effet, tout facteur de longueur n de u est le début d'au moins un facteur de longueur $n + 1$, et deux facteurs distincts sont les débuts de deux facteurs distincts, il y a donc au moins autant de facteurs de longueur $n + 1$ que de facteurs de longueur n .

On ne peut pas faire mieux en général : les suites les moins aléatoires sont les suites périodiques, et pour une telle suite, le nombre de mots de longueur n est borné par la période de la suite ; la complexité est alors constante à partir d'un certain rang. Plus généralement, rappelons qu'une suite est dite *ultimement périodique* si elle est périodique à partir d'un certain rang. On a en fait une caractérisation complète des suites de complexité bornée :

LEMME. — *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La suite u est ultimement périodique.*
- (ii) *La complexité est bornée*
- (iii) *il existe un entier n tel que $p(n) = p(n + 1)$.*

Démonstration. — Si la suite est périodique de période t à partir du rang n_0 , on a toujours $p(n) \leq n_0 + t$, donc *i* implique *ii* ; il est clair que *ii* implique *iii*, il suffit donc de montrer que *iii* implique *i*.

Mais s'il y a autant de facteurs de longueur n et $n + 1$, chaque facteur de longueur n est le début d'un et d'un seul facteur de longueur $n + 1$; autrement dit, quand on connaît n lettres, on connaît la suivante. De plus, comme il n'y a qu'un nombre fini de facteurs, on retrouve en au plus $p(n)$ fois un facteur déjà vu, et la suite est alors périodique à partir de l'apparition de ce facteur. \square

On en déduit qu'*a contrario*, la complexité d'une suite non ultimement périodique est strictement croissante ; comme $p(1)$ vaut au moins 2, sinon il n'y aurait qu'un symbole et la suite serait constante, la complexité d'une suite non ultimement périodique vérifie $p(n) \geq n + 1$.

DÉFINITION. — *On dit qu'une suite est sturmiennne si elle est non ultimement périodique et de complexité minimale $p(n) = n + 1$.*

Remarquons que, puisque $p(1) = 2$, une suite sturmiennne est définie sur un alphabet à 2 lettres, que l'on peut nommer $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$. Les suites sturmiennnes sont en quelque sorte les plus ordonnées des suites non périodiques ; elles ont été étudiées par de nombreux auteurs, nous citerons [HM], [He], [CH].

2. L'exemple le plus simple : les suites sturmiennes

Les suites sturmiennes possèdent de nombreuses caractérisations, combinatoires, dynamiques, arithmétiques, voire géométriques, que l'on peut résumer dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour une suite non ultimement périodique sur l'alphabet à deux lettres $\{0, 1\}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) (complexité) *La suite est de complexité minimale : $p(n) = n + 1$.*

(ii) (équilibre) *Les nombres de 0 contenus dans deux facteurs de même longueur diffèrent au plus de 1 : si U et V sont deux facteurs de u tels que $|U| = |V|$, alors $|U|_0 - |V|_0 \leq 1$.*

(iii) (engendrement par substitutions) *Il existe deux suites a_n et b_n d'entiers strictement positifs, vérifiant $a_n \geq b_n$, et une lettre $\mathbf{a} = 0$ ou 1 telles que, pour tout n , la suite u débute par le mot $S^{b_1} \sigma_1^{a_1-1} S^{b_2} \sigma_0^{a_2} S^{b_3} \sigma_1^{a_3} \dots S^{b_{2n}} \sigma_0^{a_{2n}}(\mathbf{a})$, où S est l'application qui, à un mot, associe ce mot privé de sa première lettre et σ_0 (resp. σ_1) est l'application (substitution, ou encore morphisme du monoïde libre) qui à un mot associe le mot obtenu en remplaçant 0 par 0 et 1 par 10 (resp. 0 par 01 et 1 par 1)*

(iv) (arithmétique) *Il existe deux nombres α, β dans l'intervalle $[0, 1[$, avec α irrationnel, tels que la suite u_n soit définie par $u_n = [(n+1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta]$ ou $u_n = \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil$, où $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x (partie entière de x), et $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x .*

(v) (rotation) *Il existe deux réels α et β dans $[0, 1[$, avec α irrationnel, tels que la suite u soit donnée par le codage de l'orbite de β pour le système dynamique*

$$R_\alpha : [0, 1[\rightarrow [0, 1[\quad x \mapsto x + \alpha \bmod 1$$

par rapport à la partition $[0, 1 - \alpha[, [1 - \alpha, 1[$ (ou par le codage obtenu en prenant les intervalles ouverts à gauche et fermés à droite)

Remarque. — Les propriétés *iv* et *v* sont susceptibles d'une interprétation simple : si l'on trace dans le plan, quadrillé par les horizontales et les verticales à coordonnées entières, la droite $y = \alpha x + \beta$, et que l'on compte le nombre d'horizontales que cette droite coupe entre 2 verticales successives (ce nombre vaut 0 ou 1 si $\alpha < 1$), on obtient la suite u (cf. Figure 1); sous cette forme, le sens de la propriété d'équilibre est assez clair.

Il peut être plus naturel de regarder le codage obtenu en notant \mathbf{H} chaque fois que la droite considérée coupe une horizontale, et \mathbf{V} à chaque fois qu'elle coupe une verticale. Ce codage s'obtient à partir du précédent en remplaçant 0 par \mathbf{V} et 1 par \mathbf{HV} ; on peut montrer que la suite obtenue est encore sturmiennne, comme image d'une suite sturmiennne par une "bonne" substitution.

On peut aussi montrer que cette suite est directement associée à la rotation d'angle $\alpha/(1 + \alpha)$; le raisonnement qui suit peut paraître peu naturel, mais il fait

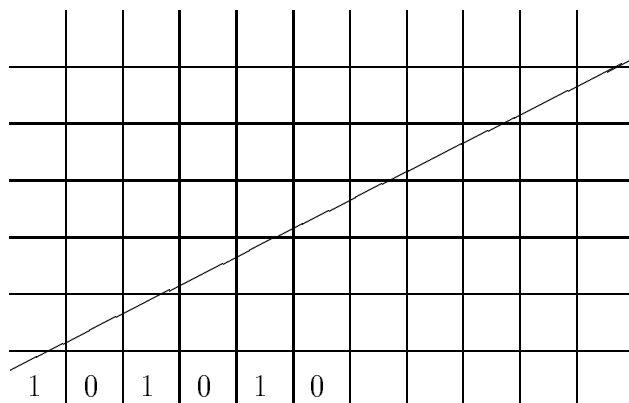


Figure 1

jouer le même rôle aux deux coordonnées et il est donc plus facile à généraliser, comme nous le verrons plus loin.

Notons L_n la ligne brisée (“escalier”) qui joint les points de la forme $(k, n - k)$ et les points de la forme $(k, n + 1 - k)$, pour $k \in \mathbf{Z}$, par des segments horizontaux et verticaux; une droite de pente α coupe une fois et une seule chaque ligne brisée L_n , et le codage est déterminé par le fait qu’elle coupe L_n en un segment horizontal ou vertical. Notons D la droite $x + y = 0$, et cherchons le codage associé à la droite issue d’un point p de D ; pour trouver le n -ième terme de la suite, on projette L_n sur D parallèlement à la direction $(1, \alpha)$, ce qui donne un pavage périodique de D en deux types d’intervalles, de longueurs respectives $1/(1 + \alpha)$ et $\alpha/(1 + \alpha)$ (si l’on prend le vecteur $(-1, 1)$ comme base); le type d’intervalle auquel appartient p donne le terme cherché de la suite. Si l’on décale le point p de $(-1, 1)$, on retrouve le même codage; on peut donc quotienter D par un groupe de translation pour se ramener à un cercle partitionné en deux intervalles, et le dessin montre que la partition obtenue à partir de L_{n+1} se déduit de la partition obtenue de L_n par une rotation de $\alpha/(1 + \alpha)$, d’où le résultat cherché (voir la figure 2).

Une autre façon d’obtenir cette suite est de jouer au billard sur le carré, en partant dans la direction $(1, \alpha)$ et en notant **H** (resp. **V**) chaque fois que l’on touche un côté horizontal (resp. vertical). \square

Preuve du théorème. — La preuve complète est assez longue; nous ne pouvons ici donner que des indications. On trouvera une preuve complète, sous forme de problème, dans l’épreuve optionnelle d’informatique de l’agrégation de mathématiques 1994.

Les propriétés i et ii sont combinatoires, et la preuve de leur équivalence est aussi purement combinatoire (et non triviale!).

Les propriétés iv et v sont évidemment équivalentes : iv n’est rien d’autre que l’écriture explicite du codage donné par v . On peut remarquer en particulier qu’utiliser la fonction $[x]$ (resp. $\lceil x \rceil$) pour iv revient à prendre les intervalles fermés à gauche

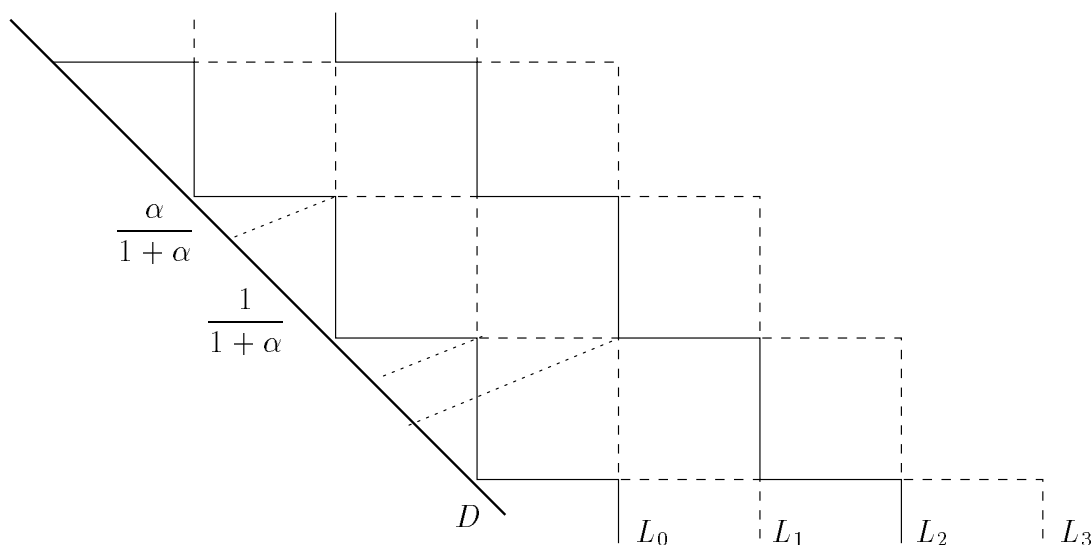


Figure 2

(resp. à droite) dans v ; en fait, les suites obtenues par l'un ou l'autre codage sont les mêmes sauf pour un nombre dénombrables de valeurs de β (de la forme $p - n\alpha$) où elles diffèrent en deux positions.

Il est facile de montrer que toute suite obtenue par codage d'une rotation est de complexité minimale, et nous le prouverons à la fin de cette section. C'est la réciproque qui est difficile, et c'est ici qu'intervient la propriété *iii*, qui est la plus compliquée à interpréter.

Ce qui est simple à montrer, c'est que toute suite sturmienne peut se réécrire par σ_0 ou σ_1 ; en effet, puisque $p(2) = 3$, il n'y a que trois facteurs de longueur 2; or, puisque la suite n'est pas périodique, elle n'est pas constante, donc les deux lettres **0** et **1** apparaissent une infinité de fois, donc les deux mots **01** et **10** aussi; donc l'un des deux facteurs **00** et **11** n'apparaît pas. Supposons que ce soit **11**; alors, tout **1** est suivi par **0**, et l'on peut recoder la suite en utilisant **0** et **10**; autrement dit, il existe une unique suite v telle que $u = \sigma_0(v)$. Il suffirait alors que v soit sturmienne pour pouvoir itérer, et obtenir u comme issue d'une suite infinie de recodage.

Il y a malheureusement un problème technique : en général, ce n'est pas la suite v qui est sturmienne, mais la suite Sv , c'est-à-dire v privée de son premier terme; en effet, si u commence par un **0**, on ne peut savoir directement si celui-ci doit être considéré, pour le recodage, comme le mot **0** ou comme la deuxième lettre du mot **10**. On peut cependant montrer que l'on peut toujours écrire u sous la forme $\sigma_0(v)$ ou $S\sigma_0(v)$, où v est une suite sturmienne; c'est ici qu'intervient l'application S de décalage.

Puisque toute suite de codage pour une rotation est sturmienne, elle peut se recoder de cette façon, et on peut alors interpréter la suite (a_n) : ce n'est autre que le développement en fraction continue du nombre α ; la suite b_n est associée, de

façon plus complexe, au nombre β . Il est alors assez simple de prouver que toute suite sturmienne est une suite de rotation, puisqu'il suffit alors de prendre les suites (a_n) et (b_n) données par la propriété *iii*, de construire les réels α et β , et de montrer que le codage associé donne bien la suite cherchée. La propriété *iii* donne en fait une interprétation combinatoire du développement en fraction continue du nombre α ; dans la cas où ce développement est périodique, la suite peut prendre une forme très simple.

En particulier, si l'on pose $a_n = 1$, $b_n = 0$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$, on obtient les deux codages possibles pour l'orbite, par la rotation d'angle $(\sqrt{5} - 1)/2$, du point $(3 - \sqrt{5})/2$. On les trouve donc en partant d'une des deux lettres, en remplaçant $\mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{1}$) par $\mathbf{01}$ (resp. $\mathbf{101}$) et en itérant. On peut montrer que l'orbite de $(\sqrt{5} - 1)/2$ pour la même rotation est, elle, donnée en itérant la substitution dite de *Fibonacci*, $\mathbf{1} \mapsto \mathbf{10}$, $\mathbf{0} \mapsto \mathbf{1}$; le mot infini obtenu, dit *mot de Fibonacci*, est la suite sturmienne la plus facile à exhiber. \square

Il reste à montrer que la suite donnée par le codage de l'orbite d'une rotation est sturmienne; nous allons en donner deux preuves. Pour montrer que la suite $[(n + 1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta]$ est sturmienne, on peut utiliser la propriété d'équilibre: le nombre de $\mathbf{1}$ compris entre u_k et u_{k+n-1} est égal par construction à $[(k + n)\alpha + \beta] - [k\alpha + \beta]$, et il est clair que, pour n fixé, ce nombre ne peut prendre au plus que deux valeurs distinctes suivant n . On peut aussi étudier directement la complexité, et la preuve qui suit est plus susceptible de généralisation.

Fixons quelques notations. Pour α irrationnel fixé, on note R_α la rotation d'angle α sur le cercle identifié à l'intervalle $[0, 1[$; on note \mathcal{P} la partition en les deux intervalles $I_0 = [0, 1 - \alpha[$ et $I_1 = [1 - \alpha, 1[$. L'application f de codage est donnée par $f(x) = \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{1}$) si $x \in I_0$ (resp. I_1), et on cherche la complexité de la suite $u(\beta) = (f(R_\alpha^n \beta))_{n \in \mathbf{N}}$.

Mais un facteur de $u(\beta)$ qui apparaît en position k est un facteur initial de $u(b + k\alpha)$: plutôt que de chercher tous les facteurs de β de longueur n , avec β fixé, on peut chercher le facteur initial de toutes les suites $u(x)$.

La première lettre de $u(x)$ est déterminée par la position de x par rapport à la partition \mathcal{P} ; la deuxième lettre est déterminée par la position de $R_\alpha x$ par rapport à \mathcal{P} , ou encore par la position de x par rapport à $R_\alpha^{-1}\mathcal{P}$. En effet on a $u_1(x) = \mathbf{0}$ si et seulement si $R_\alpha x \in I_0$, ou $x \in R_\alpha^{-1}I_0$. Pour connaître le facteur initial de $u(x)$, il faut placer x par rapport aux partition $\mathcal{P}, \mathcal{R}_\alpha^{-\infty}\mathcal{P}, \dots, \mathcal{R}_\alpha^{-\infty}\mathcal{P}$, et il y a donc autant de facteurs initiaux possibles que d'ensembles dans l'intersection $\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}_\alpha^{-\infty}\mathcal{P} \wedge \dots \wedge \mathcal{R}_\alpha^{-\infty}\mathcal{P}$ de ces partitions.

Un calcul immédiat montre que la partition $R_\alpha^{-k}\mathcal{P}$ est constituée des deux intervalles $[-k\alpha, 1 - (k + 1)\alpha[$ et $[1 - (k + 1)\alpha, 1 - k\alpha[$ (attention, tous ces calculs se font modulo 1! voir figure 3); l'intersection des n premiers itérés inverses de la partition \mathcal{P} est donc donnée par $n + 1$ points, et la partition obtenue a donc $n + 1$ éléments. On a bien prouvé qu'il y a $n + 1$ facteurs initiaux de longueur n possibles, donc au plus $n + 1$ facteurs possibles pour $u(\beta)$. Compte tenu du fait que la suite $u(\beta)$ n'est pas ultimement périodique, elle est de complexité $n + 1$. On pourrait en

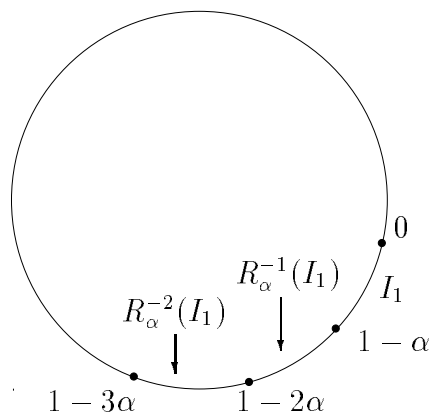


Figure 3

fait, en utilisant le fait que l'orbite d'un point pour une rotation irrationnelle sur le cercle est dense, montrer directement que tous les facteurs initiaux possibles sont des facteurs de $u(\beta)$.

3. Suites engendrées par des systèmes dynamiques

On peut en fait généraliser la démonstration précédente. Considérons, comme dans l'introduction, un système dynamique $T : X \rightarrow X$, une partition \mathcal{P} indicée par \mathcal{A} , et la fonction f de codage associée. Notons $u(x) = (f(T^n x))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite donnée par le codage de l'orbite de x ; comme ci-dessus, il est clair qu'un facteur de $u(x)$ qui apparaît en position k est facteur initial de $u(T^k(x))$.

Par ailleurs, la lettre d'ordre k de $u(x)$ donne la position de x par rapport à la partition $T^{-k}\mathcal{P}$, et comme ci-dessus, il y a donc autant de facteurs initiaux de longueur n que d'atomes dans l'intersection $\mathcal{P} \wedge T^{-1}\mathcal{P} \wedge \dots \wedge T^{-n+1}\mathcal{P}$; on a donc :

PROPOSITION. — *Soit $u(x)$ la suite donnée par le codage de l'orbite de x pour le système $T : X \rightarrow X$ par rapport à la partition \mathcal{P} ; la complexité d'ordre n de u est majorée par le nombre d'atomes de la partition $\mathcal{P} \wedge T^{-1}\mathcal{P} \wedge \dots \wedge T^{-n+1}\mathcal{P}$.*

Il est en général impossible d'aller plus loin, pour deux raisons : d'une part, l'orbite de x peut éviter de larges régions de X (par exemple, si l'orbite de x est périodique), et les mots initiaux correspondants n'apparaîtront pas comme facteurs de $u(x)$; d'autre part, la région associée à un mot initial peut être très petite, voire réduite à un nombre fini de points, et dans ce cas le mot correspondant n'apparaîtra pas dans la plupart des orbites.

Dans la cas d'un système dynamique topologique, on peut donner des conditions qui évitent ces phénomènes, et l'on a :

PROPOSITION. — *Soit X un espace métrique compact, et T un homéomorphisme de X . Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a, a \in \mathcal{A}\}$ une partition de X qui vérifie la condition suivante :*

(*) Pour toute suite finie $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$, l'ensemble $P_{\mathbf{a}_0} \cap T^{-1}P_{\mathbf{a}_1} \cap \dots \cap T^{-n+1}P_{\mathbf{a}_{n-1}}$ est vide ou d'intérieur non vide.

Alors, si x est un point d'orbite dense pour T , la complexité de la suite $u(x)$ est égale au nombre d'atomes des partitions $\mathcal{P} \wedge T^{-1}\mathcal{P} \wedge \dots \wedge T^{-n+1}\mathcal{P}$

Démonstration. — En effet, tout mot initial correspond à un ensemble qui contient un ouvert; par densité de l'orbite de x , ce mot initial est un facteur de $u(x)$. \square

Il y a un cas où l'on vérifie facilement la condition sur x : on dit qu'un système dynamique topologique est **minimal** s'il n'admet pas de sous-ensemble fermé invariant, ou, de manière équivalente, si toute orbite est dense; dans ce cas, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit $T : X \rightarrow X$ un système dynamique minimal, et soit \mathcal{P} une partition de X vérifiant la condition (*) de la proposition précédente; alors, pour tout point x , la complexité de la suite $u(x)$ est égale au nombre d'atomes des partitions $\mathcal{P} \wedge T^{-1}\mathcal{P} \wedge \dots \wedge T^{-n+1}\mathcal{P}$; en particulier, toutes les suites de codages ont la même complexité (et en fait, les mêmes facteurs).

La suite de l'exposé est consacrée à quelques applications de ce lemme. On va, pour quelques types de suites, exhiber un système dynamique associé, montrer qu'il est minimal, et calculer, par des méthodes géométriques, le nombre d'atomes de la partition associée.

4. Un exemple : les différences secondes de la suite $[n^2\alpha]$

On a vu qu'une suite sturmiennne peut être obtenue comme suite des différences de termes consécutifs de la suite à valeurs entières $[n\alpha + \beta]$. On peut essayer de généraliser en considérant la suite w définie par $w_n = [n^2\alpha]$, avec α irrationnel. Pour obtenir une suite à valeurs dans un alphabet fini, il faut cette fois prendre la suite u des différences secondes, donnée par $u_n = w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n$.

Cette suite n'est bien sûr plus associée à une rotation, mais on peut aussi l'obtenir comme suite de codage d'un système dynamique. Plus précisément, nous allons donner une transformation T du tore \mathbf{T}^2 et une fonction f sur \mathbf{T}^2 , ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, et telles que l'on ait $u_n = f(T^n(0, 0))$.

Il est facile de trouver f et T en écrivant $n^2\alpha$ comme une suite récurrente; en effet, si l'on considère l'application affine A définie par $A(x, y) = (x + y + \alpha, y + 2\alpha)$, on vérifie immédiatement que $A^n(0, 0) = (x_n, y_n) = (n^2\alpha, n\alpha)$. On peut alors écrire u_n en fonction de x_n et y_n , puisqu'on a par définition :

$$\begin{aligned} u_n &= w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n \\ &= [x_{n+2}] - 2[x_{n+1}] + [x_n] \\ &= [x_n + 2y_n + 4\alpha] - 2[x_n + y_n + \alpha] + [x_n] \end{aligned}$$

On peut donc écrire $u_n = f(x_n, y_n)$, avec $f(x, y) = [x + 2y + 4\alpha] - 2[x + y + \alpha] + [x]$; on vérifie immédiatement que f est \mathbf{Z}^2 -périodique, donc peut être considéré comme une application définie sur le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, et que de même A , étant associée à une matrice de $SL(2, \mathbf{Z})$, passe au quotient en une transformation affine T de \mathbf{T}^2 .

On sait que T , qui est ce qu'on appelle un produit croisé au-dessus d'une rotation, est minimal dès que α est irrationnel; cela découle de travaux de Furstenberg. En fait, on ne montre pas que toute orbite est dense, mais une propriété bien plus forte : toute orbite est équirépartie sur le tore \mathbf{T}^2 (cf [F], ou [CFS], p. 100-104).

On est donc en position d'appliquer le théorème précédent; il reste à montrer que \mathcal{P} satisfait la propriété (*), et à calculer le nombre d'atomes.

Mais d'après l'écriture de f , les intérieurs des atomes de la partition \mathcal{P} sont les cellules de la décomposition cellulaire de \mathbf{T}^2 engendrée par les trois cercles $x = 0$, $x + y + \alpha = 0$ et $x + 2y + 4\alpha = 0$ (cf. figure 4); un calcul simple montre que la partition $T^{-n}\mathcal{P}$ est engendrée de même par les cercles $H_k = T^{-k}H_0$ d'équation $x + ky + k^2\alpha = 0$, pour $n \leq k \leq n + 2$.

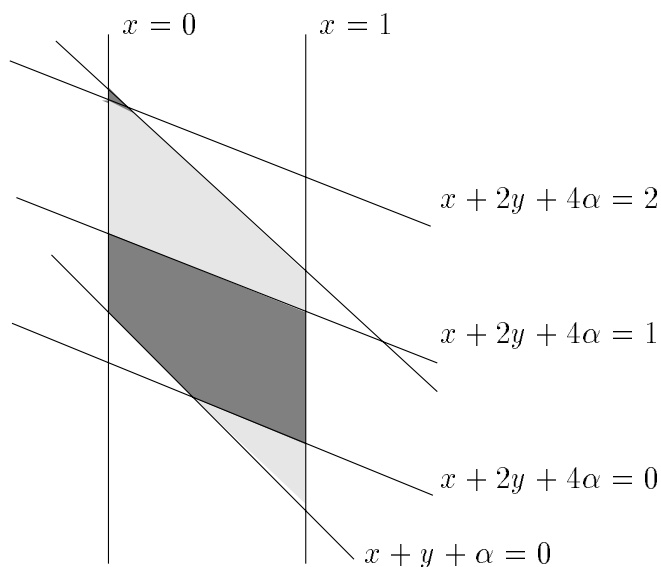


Figure 4 : Les 4 atomes de \mathcal{P}

Ces cellules sont des polygones avec un nombre fini de côtés; pour que la condition (*) ne soit pas satisfaite, il faudrait qu'il y ait une coïncidence de sommets entre certaines de ces cellules, et qu'au moins 3 des cercles H_K aient une intersection non vide, ce qui est impossible par irrationalité de α .

On peut alors calculer effectivement la complexité; nous avons une décomposition cellulaire du tore, donnée par un nombre fini de cercles, dont nous voulons connaître le nombre F_n de faces. Puisque toute arête a deux sommets, et que tout sommet, appartenant à deux cercles, délimite 4 arêtes, les nombres S_n de sommets et A_n d'arêtes vérifient $A_n = 2S_n$. Compte tenu de la relation d'Euler sur le tore, $S - A + F = 0$, on en déduit qu'il y a autant de faces que de sommets. On se ramène donc

à calculer le nombre de points d'intersections de H_j et H_k , ou encore, en faisant agir T^j , de H_0 et H_{k-j} , qui vaut $|k-j|$. En faisant la somme sur tous les couples d'hyperplans, on obtient :

$$p(n) = \sum_{0 \leq j < k \leq n+1} (k-j) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

D'où le résultat :

THÉORÈME. — *la complexité de la suite u des différences secondes de $[n^2\alpha]$ est donnée par :*

$$p(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

En particulier, comme pour les suites sturmiennes, la complexité ne dépend pas de la valeur de α .

Remarque. — En toute rigueur, nous avons compté, non pas le nombre d'atomes de l'intersection $\mathcal{P} \wedge T^{-1}\mathcal{P} \wedge \dots \wedge T^{-n+1}\mathcal{P}$, mais le nombre de composantes connexes de ces atomes ; il faudrait donc, ce qui peut être fait moyennant un peu de travail supplémentaire, montrer que ces atomes sont connexes ; voir [AMM] pour plus de détails.

Ces arguments se généralisent à des suites obtenues à partir de polynômes de degré quelconque ; rappelons que, si w est une suite à valeurs réelles, la suite $v = \Delta w$ des différences est définie par : $v_n = w_{n+1} - w_n$. Le résultat énoncé ci-dessus est un cas particulier du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit Q un polynôme de degré d à coefficients réels dont le coefficient dominant est irrationnel ; la suite $(\Delta^d([Q(n)]))_{n \in \mathbf{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et sa complexité, qui ne dépend que de d , est donnée par la formule :*

$$p(n) = \frac{1}{V(0, 1, \dots, d-1)} \sum_{0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_d \leq n+d-1} V(k_d, \dots, k_1)$$

où $V(k_d, \dots, k_1) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (k_j - k_i)$ est le déterminant de Vandermonde associé à (k_d, \dots, k_1) .

Il est remarquable que la complexité trouvée ne dépende que du degré du polynôme.

5. Un autre exemple : les suites de billard cubique

Au lieu de généraliser la définition arithmétique des suites sturmiennes, on peut regarder la définition géométrique : billard carré, ou droite dans le plan ; nous considérerons donc le billard cubique, c'est-à-dire le système formé par un point mobile dans un cube, sans forces extérieures, avec réflexions élastiques sur les parois.

On code chacune des trajectoires par la suite des faces du cube qu'elle rencontre (on note **0**, **1** et **2** les trois types de faces, on ne fait pas de différence entre les faces parallèles). A toute trajectoire est ainsi associée un mot infini sur l'alphabet $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$. On a le résultat suivant :

THÉORÈME. — *La complexité d'une trajectoire de pente (α, β, γ) , où α, β et γ sont rationnellement indépendants, est égale à $n^2 + n + 1$.*

On trouvera une démonstration détaillée dans [AMST]; nous donnons ci-dessous les grandes lignes de la preuve. On supposera, pour simplifier les calculs, que α, β, γ sont trois réels rationnellement indépendants dans leur ensemble qui satisfont : $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

La première étape est de remarquer que, de façon analogue aux suites sturmiennes, il est équivalent d'étudier le billard cubique ou d'étudier une droite de pente irrationnelle dans \mathbf{R}^3 et ses intersections avec les plans $x = n, y = n, z = n$ pour tout entier n .

On procède alors de façon analogue à l'étude faite pour la droite de pente irrationnelle dans le plan : Si l'on appelle hauteur du point (a, b, c) le nombre $a + b + c$, on appelle Σ_n la "surface plissée" qui joint les sommets de hauteur $n, n + 1, n + 2$ (voir figure 5). La droite considérée coupe chaque surface plissée une fois et une seule, dans un de ses trois types de faces. Si l'on projette la surface plissée sur le plan diagonal $x + y + z = 0$, on obtient un pavage périodique de ce plan; un calcul simple montre que l'on passe du pavage projeté de Σ_n au pavage projeté de Σ_{n+1} par une translation de vecteur $(1 - \alpha, -\beta, -\gamma)$, projection sur le plan diagonal du vecteur $(1, 0, 0)$ (on pourrait projeter un autre des trois vecteurs de base, car les différences entre ces trois projections appartiennent au groupe de translation du pavage); en quotientant par le groupe du pavage, on se ramène donc à étudier une translation du tore \mathbf{T}^2 , codée par rapport à une partition en trois quadrilatères. Il est bien connu (théorème de Kronecker) qu'une translation irrationnelle du tore est minimale.

Il faut alors, comme précédemment, montrer que la partition considérée satisfait à la condition (*), ce qui vient de l'hypothèse d'irrationalité, puis montrer que les atomes de l'intersection des partitions itérées sont connexes, et on se ramène à un problème de comptage.

La partition intersectée d'ordre n vient d'une triangulation du tore avec S_n sommets, A_n arêtes et F_n faces, qui satisfait la formule d'Euler $S_n - A_n + F_n = 0$. La partition d'ordre 1, qui est la projection d'un cube en perspective, a 3 sommets, 6 arêtes et 3 faces, qui correspondent aux trois lettres du codage. On passe de la partition d'ordre n à la partition d'ordre $n + 1$ en rajoutant 3 segments et un point (projection d'un cube de hauteur plus grande que les précédents); mais ces trois segments recourent les arêtes déjà existantes. On montre que les segments ajoutés à l'étape n recourent les segments ajoutés à l'étape i en 2 points si $i < n - 1$, et en 0 points si $i = n - 1$ (plus exactement, dans ce cas ils recourent ces segments en leur extrémité, ce qui ne rajoute pas de nouveau sommet). On a donc $S_{n+1} = S_n + 2n + 1$, et donc $S_n = n^2 + 2$. On montre de même que $A_{n+1} = A_n + 4n + 3$, donc $A_n = 2n^2 + n + 3$, d'où l'on déduit le résultat cherché.

Figure 5

6. Suites de billard : la conjecture de Tamura

Une fois que l'on a réussi à calculer la complexité du billard carré et du billard cubique, il est bien sûr tentant, comme on l'a fait pour les parties entières de polynômes, de généraliser en dimension quelconque.

DÉFINITION. — *Nous noterons $p(n, s)$ le nombre de facteurs de longueur n dans une suite engendrée par le billard dans le cube de dimension $s + 1$*

Le cas $s = 1$ correspond au billard carré, c'est-à-dire aux suites sturmiennes, $s = 2$ est le billard cubique de la section précédente, $s = 0$ est un cas dégénéré, billard sur un segment, correspondant à une suite constante de complexité 1.

Il est à noter que nous ne savons pas si $P(n, s)$ est bien défini dans le cas général : la définition que nous avons donnée suppose implicitement que la complexité d'une suite de billard cubique irrationnel ne dépend que de la dimension, et pas de la direction initiale, ce qui n'a pas de raison d'être vrai *a priori*.

Cependant, il est facile de vérifier que $p(n, s)$ est bien défini pour $n < 3$, et que l'on a $p(0, s) = 1$ (cas du mot vide), $p(1, s) = s + 1$ (nombre de lettres, c'est-à-dire d'hyperfaces du cube de dimension $s + 1$), et $p(2, s) = s^2 + s + 1$ (car tous les mots \mathbf{ij} , avec $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, sont possibles, mais un seul des mots \mathbf{ii} est possible. D'autre part, J.I. Tamura a calculé numériquement la complexité pour un certain nombre d'exemples de dimension supérieure à 3.

Si l'on résume les résultats connus, on trouve le tableau de la page suivante, où les chiffres en italique résultent de simulations numériques

$n \setminus s$	0	1	2	3	4	5	...	s
0	1	1	1	1	1	1		1
1	1	2	3	4	5	6		$s + 1$
2	1	3	7	13	21	31		$s^2 + s + 1$
3	1	4	13	34	73	136		
4	1	5	21	73	209			
5	1	6	31	136				
...								
n	1	$n + 1$	$n^2 + n + 1$					

Au vu de ces résultats, J.I. Tamura a conjecturé que la fonction $p(n, s)$ est définie et symétrique : $p(n, s) = p(s, n)$.

On peut pousser la conjecture plus loin : il est clair que l'on a $p(n, s) < (s + 1)^n$, car c'est le nombre de mots de longueur n que l'on peut former avec $s + 1$ lettres ; au vu des résultats obtenus, il est donc naturel de supposer que, pour n fixé, $p(n, s)$ est une polynôme unitaire de degré n en s .

Mais on peut alors calculer de proche en proche chaque ligne, puisque, par symétrie, les n premières lignes déterminent les n premières colonnes, et que l'on connaît donc n valeurs du polynôme unitaire de degré $n + 1$ associé à la ligne suivante, ce qui le détermine complètement ; le calcul peut être fait explicitement, et conduit à la conjecture suivante :

CONJECTURE. — *La fonction $p(n, s)$ est donnée par :*

$$p(n, s) = \sum_{i=0}^{\inf(n,s)} \frac{n!s!}{(n-i)!i!(s-i)!}$$

Cette conjecture est en parfait accord avec les simulations numériques, et a été vérifiée dans un grand nombre de cas particuliers ; elle n'est cependant pas démontrée dès que n et s sont plus grands que 2 : les calculs de comptage qui généralisent ceux de la section précédente deviennent alors inextricable. On n'a par ailleurs à l'heure actuelle aucune preuve que cette fonction soit définie dans le cas général ; en fait, même dans les cas $n = 1$ ou $n = 2$, la démonstration la plus simple consiste à calculer explicitement $p(n, s)$ et à montrer que le résultat ne dépend pas de la direction. Il existe dans ce cas des preuves directes, sans calculer la valeur mais en montrant directement que le nombre de mots ne varie pas quand on change la direction, mais elles sont plus compliquées.

On n'a également aucune idée, même heuristique, de la raison pour laquelle cette fonction serait symétrique en n et s .

7. Quelques autres résultats

Citons pour terminer quelques autres cas où l'on sait calculer explicitement la complexité :

Une autre généralisation du billard carré est le billard dans un polygone rationnel (c'est-à-dire dont les angles sont des multiples rationnels de π); dans ce cas, P. Hubert a montré (cf. [Hu]) que, si, dans un polygone à q côtés, les angles sont de la forme $k_1\pi/r, k_2\pi/r, \dots, k_q\pi/r$, où les entiers k_1, k_2, \dots, k_q, r sont premiers entre eux dans leur ensemble, alors la suite obtenue en codant une trajectoire non périodique par les côtés qu'elle rencontre est de complexité $p(n) = n(q - 2)r + 2r$; si l'on veut appliquer la formule au carré, il faut faire attention que ce codage distingue les côtés parallèles, contrairement à celui que nous avons étudié plus haut, d'où le résultat $4n + 4$ qu'on obtient ici. On ne sait pas par contre quelle est la complexité du billard dans un polygone irrationnel, et encore moins ce qui se passe pour un polyèdre autre que le cube ou un cylindre sur un polygone rationnel.

On peut également s'intéresser aux généralisations de la propriété *iii*, c'est-à-dire aux suites engendrées par substitution; dans ce cas, B. Mossé (cf. [Mo]) a montré que la suite $p(n + 1) - p(n)$ est bornée, donc que $p(n)$ est sous-linéaire, et a donné un algorithme effectif de calcul de $p(n)$; mais la complexité n'a pas en général de forme simple, même pour une suite substitutive très simple telle que la suite de Morse, obtenue en partant de **1**, en remplaçant **1** par **10** et **0** par **01** et en itérant. Pour d'autres résultats sur ce sujet, on peut aussi consulter [A].

Bibliographie

- [A] J.P. ALLOUCHE, *Sur la complexité des suites infinies*, Prépublication.
- [AMST] P. ARNOUX, C. MAUDUIT, I. SHIOKAWA, J.I. TAMURA, *Complexity of sequences defined by billiards in the cube*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), 1–12.
- [AMM] P. ARNOUX, C. MAUDUIT, G. MEIGNIEZ, *Complexité de suites engendrées par des récurrences unipotentes*, En cours de rédaction.
- [CFS] I. P. CORNFELD, S.V. FOMIN, YA. G. SINAI, *Ergodic theory*, Springer Verlag, 1982.
- [CH] E.M. COVEN, G.A. HEDLUND, *Sequences with minimal block growth*, Mathematical Systems Theory **7** (1973), 138–153.
- [F] H. FÜRSTENBERG, *Strict ergodicity and transformation of the torus*, Amer. J. Math. **83** (1961), 573–601.
- [He] G. A. HEDLUND, *Sturmian minimal sets*, Amer. J. Math. **66** (1944), 605–620.
- [HM] G.A. HEDLUND, M. MORSE, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
- [Hu] P. HUBERT, *Complexité des suites définies par des trajectoires de billard dans un polygone rationnel*, Bull. Soc. Math. France (1993), à paraître.

- [Mo] B. MOSSÉ, *Notion de reconnaissabilité pour les substitutions et complexité des suites automatiques*, Prépublication N. 93-21 du Laboratoire de Mathématiques Discrètes (1993).

Laboratoire de Mathématiques discrètes
UPR CNRS 9016
Faculté des Sciences de Luminy
Case 930
163 avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France

Adresse électronique : arnoux@lmd.univ-mrs.fr

L'ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme ?

ADRIEN DOUADY

Introduction

Etant donné un polynôme complexe $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ de degré $d \geq 2$, on définit l'ensemble de Julia rempli $K(f)$ et l'ensemble de Julia proprement dit $J(f)$ (§4). Tous deux sont des compacts non vides de \mathbf{C} . L'ensemble $J(f)$ est la frontière de $K(f)$, et $K(f)$ est la réunion de $J(f)$ avec les composantes connexes bornées de $\mathbf{C} - J(f)$. L'ensemble $K(f)$ peut être d'intérieur vide (auquel cas $J(f) = K(f)$), ou d'intérieur non vide. L'ensemble $J(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Les composantes connexes de l'intérieur de $K(f)$ sont toujours reliées à des points périodiques non répulsifs de f . Les points périodiques sont décrits au §3.

Dans cet exposé, nous examinons à quel point $K(f)$ et $J(f)$ dépendent continûment de f , quand f parcourt l'ensemble \mathcal{P}_d des polynômes de degré d .

Il nous faut d'abord donner un sens à la question. On le fait en définissant la *métrique de Hausdorff* sur l'ensemble $\text{Comp}^*(\mathbf{C})$ des compacts non vides de \mathbf{C} (§1). La distance de Hausdorff est définie comme sup de deux semi-distances ce qui permet de décomposer la continuité pour des applications à valeurs dans $\text{Comp}^*(\mathbf{C})$ en semi-continuités supérieure et inférieure. Au contraire de ce qui se passe pour les fonctions à valeurs dans \mathbf{R} , les deux semi-continuités jouent des rôles très différents : la semi-continuité supérieure est beaucoup plus naturelle.

L'application $f \mapsto K(f)$ est semi-continue supérieurement, et $f \mapsto J(f)$ est semi-continue inférieurement. Toutes deux sont continues en f_0 si $K(f_0)$ est d'intérieur vide.

Le fait pour $K(f_0)$ d'avoir un intérieur non vide peut être dû à la présence de cycles attractifs, de cycles paraboliques ou de disques de Siegel. Il peut y en avoir plusieurs pour le même f_0 si $d > 2$, mais en degré 2 ils s'excluent mutuellement. Nous examinons l'effet sur la continuité de ces trois types de cycles.

Les cycles attractifs ne causent en fait aucune discontinuité (§6). Les disques de Siegel causent une discontinuité dans $f \mapsto J(f)$, mais aucune pour $f \mapsto K(f)$ (§7).

Un cycle parabolique cause une discontinuité dans $f \mapsto K(f)$ et dans $f \mapsto J(f)$. Ces discontinuités peuvent être décrites et analysées avec précision. Nous les ferons dans la partie II pour l'exemple le plus simple : l'application $z \mapsto z + z^2$. L'outil principal pour cette étude est fourni par les *coordonnées de Fatou*.

Je remercie l'Union des Professeurs de Spéciale et l'Ecole Polytechnique, en particulier Nicole Berline et Claude Sabbah, qui ont organisé cette rencontre, Bodil Branner et Nuria Fagella pour leur aide dans la préparation de ce texte et Jacques Carette qui a réalisé les figures à l'ordinateur. Ce texte paraît en anglais dans les comptes-rendus d'une rencontre semblable (short course) organisée par Robert Devaney de l'université de Boston et qui a eu lieu à Cincinnati sous l'égide de l'American Mathematical Society.

Partie I

Propriétés de continuité

1. La métrique de Hausdorff

Soit E un espace métrique. Notons $\text{Comp}(E)$ l'ensemble des compacts de E et posons $\text{Comp}^*(E) = \text{Comp}(E) - \{\emptyset\}$. Nous allons munir $\text{Comp}^*(E)$ d'une distance appelée la distance de Hausdorff. Nous donnons la définition et quelques propriétés dans le cadre général des espaces métriques arbitraires, mais en fait nous nous intéressons seulement au cas $E = \mathbf{C}$.

Soient X et Y deux compacts de E . Nous disons que X est contenu dans Y à r près si X est contenu dans le r -voisinage de Y , c'est à dire si $d(x, Y) \leq r$ pour tout $x \in X$. Nous notons $\partial(X, Y)$ le plus petit r tel que $X \subset Y$ à r près, soit

$$\partial(X, Y) = \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

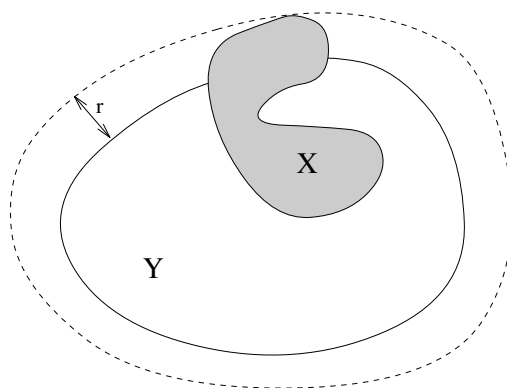


Figure 1

La *distance de Hausdorff* d_H est définie par

$$d_H(X, Y) = \sup(\partial(X, Y), \partial(Y, X)).$$

Les conventions usuelles concernant l'ensemble vide nous amènent à poser $d(x, \emptyset) = \infty$, $\partial(X, \emptyset) = \infty$ pour $X \neq \emptyset$ et $\partial(\emptyset, \emptyset) = 0$. Pour éviter des difficultés sans

pertinence, nous travaillons sur $\text{Comp}^*(E)$, autrement dit nous ne considérerons que des compacts non vides.

PROPOSITION 1.1. — *La fonction d_H est une distance sur $\text{Comp}^*(E)$.*

LEMME 1.2.

- (a) On a $\partial(X, Y) = 0$ si et seulement si $X \subset Y$.
- (b) Pour X, Y, Z dans $\text{Comp}^*(E)$, on a

$$\partial(X, Z) \leq \partial(X, Y) + \partial(Y, Z).$$

Démonstration.

- (a) On a

$$\partial(X, Y) = 0 \iff (\forall x \in X) d(x, Y) = 0 \iff (\forall x \in X) x \in Y \iff X \subset Y.$$

On a la deuxième équivalence parce que Y est fermé.

- (b) Posons $r_1 = \partial(X, Y)$ et $r_2 = \partial(Y, Z)$. Pour $x \in X$, on peut trouver $y \in Y$ tel que $d(x, y) \leq r_1$, puis $z \in Z$ tel que $d(y, z) \leq r_2$. On a alors $d(x, z) \leq r_1 + r_2$, d'où $d(x, Z) \leq r_1 + r_2$. Comme cela vaut pour tout $x \in X$, on a $\partial(X, Z) \leq r_1 + r_2$.

c.q.f.d.

Démonstration de la Proposition 1.1.

- (a) $d_H(X, Y) = d_H(Y, X)$ est évident sur la définition.
- (b) $d_H(X, Y) = 0 \iff \partial(X, Y) = \partial(Y, X) = 0 \iff (X \subset Y \text{ et } Y \subset X) \iff X = Y$.
- (c) De $\partial(X, Z) \leq \partial(X, Y) + \partial(Y, Z)$ et $\partial(Z, X) \leq \partial(Y, X) + \partial(Z, Y)$ on tire $d_H(X, Z) \leq d_H(X, Y) + d_H(Y, Z)$.

c.q.f.d.

A partir de maintenant nous munissons $\text{Comp}^*(E)$ de la distance de Hausdorff et nous le considérons donc comme un espace métrique. Ceci nous permet d'utiliser des expressions comme " $X_n \rightarrow X$ quand $n \rightarrow \infty$ " ou " X_λ dépend continûment de $\lambda \in \Lambda$ ".

2. Applications semi-continues à valeurs dans $\text{Comp}^*(E)$

La distance de Hausdorff $(X, Y) \mapsto d_H(X, Y)$ est le sup des deux semi-distances $(X, Y) \mapsto \partial(X, Y)$ et $(X, Y) \mapsto \partial(Y, X)$. Ceci nous permet de décomposer la propriété de continuité pour une application $\Lambda \rightarrow \text{Comp}^*(E)$ en semi-continuités supérieure et inférieure.

Comparons avec \mathbf{R} : la distance $(x, y) \mapsto |y - x|$ sur \mathbf{R} peut s'exprimer comme

$$|y - x| = \sup((y - x)^+, (x - y)^+)$$

où $r^+ = \sup(r, 0)$. Rappelons qu'une fonction $f : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *semi-continue supérieurement* en λ_0 si

$$(f(\lambda) - f(\lambda_0))^+ \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

c'est-à-dire :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad f(\lambda) < f(\lambda_0) + \varepsilon.$$

On dit que f est *semi-continue inférieurement* en λ_0 si

$$(f(\lambda_0) - f(\lambda))^+ \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \lambda_0$$

c'est à dire

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad f(\lambda) > f(\lambda_0) - \varepsilon.$$

Par analogie, nous disons qu'une application $\phi : \Lambda \rightarrow \text{Comp}^*(E)$ est *semi-continue supérieurement* en λ_0 si

$$\partial(\phi(\lambda), \phi(\lambda_0)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

c'est à dire

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad \phi(\lambda) \subset \phi(\lambda_0) \text{ à } \varepsilon \text{ près.}$$

Nous disons que ϕ est *semi-continue inférieurement* en λ_0 si

$$\partial(\phi(\lambda_0), \phi(\lambda)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

c'est à dire

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad \phi(\lambda) \supset \phi(\lambda_0) \text{ à } \varepsilon \text{ près.}$$

Mais il y a une différence avec le cas de \mathbf{R} , qui est toute en faveur du nouveau cas. Dans le cas de \mathbf{R} , il est difficile à quelqu'un de normal, même après quelques efforts, de s'y retrouver entre les deux semi-continuités. Dans le cas de $\text{Comp}^*(E)$, les deux semi-continuités jouent des rôles très différents : la semi-continuité supérieure est très naturelle à considérer, à cause de l'interprétation donnée dans la Prop. 2.1. ci-dessous, tandis que la semi-continuité inférieure est une propriété un peu bizarre.

Si E et F sont deux espaces métrisables, on dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *propre* si f est continue et si l'image inverse de tout compact de F est un compact de E . Toute application propre est fermée, c'est à dire que l'image d'un fermé est fermé ([Bbk])

PROPOSITION 2.1. — *Soient E un espace métrique, Λ un espace métrisable et $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de sous-ensembles de E . Considérons l'espace \mathcal{H} des $(X, x) \in \Lambda \times E$ tels que $x \in X_\lambda$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *l'application $\lambda \mapsto X_\lambda$ est semi-continue supérieurement de Λ dans $\text{Comp}^*(E)$;*
- (2) *\mathcal{H} est fermé dans $\Lambda \times E$ et la projection $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \Lambda$ est propre et surjective.*

Démonstration.

(2) \Rightarrow (1) : Pour tout λ , l'ensemble X_λ est un compact non vide de E . Etant donné $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A = \{(\lambda, x) \in \mathcal{H} \mid d(x, X_{\lambda_0}) \geq \varepsilon\}$ est un fermé de \mathcal{H} ne rencontrant pas $p_{\mathcal{H}}^{-1}(\lambda_0)$. Donc $p_{\mathcal{H}}(A)$ est fermé dans Λ et $W = \Lambda - p_{\mathcal{H}}(A)$ est un voisinage de λ_0 . Pour $\lambda \in W$, on a $\partial(X_\lambda, X_{\lambda_0}) < \varepsilon$.

(1) \Rightarrow (2) : Puisque $X_\lambda \neq \emptyset$ pour tout λ , la projection $p_{\mathcal{H}}$ est surjective. Soit $L \subset \Lambda$ un compact, et soient $((\lambda_n, x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans $p_{\mathcal{H}}^{-1}(L)$. Comme (λ_n) est une suite dans L , on peut supposer qu'elle tend vers un point $\lambda_0 \in L$. Posons $r_n = d(x_n, X_{\lambda_0})$. Par semi-continuité, $r_n \leq \partial(X_{\lambda_n}, X_{\lambda_0}) \rightarrow 0$.

Pour tout n on peut trouver un point $y_n \in X_{\lambda_0}$ tel que $d(x_n, y_n) = r_n$. De la suite (y_n) dans X_{λ_0} on peut extraire une suite convergeant vers un point $y_0 \in X_{\lambda_0}$. Alors $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda_0, x_0)$.

c.q.f.d.

Remarque 2.2. — Si Λ est localement compact, la condition (2) est équivalente à :

(2') \mathcal{H} est fermé dans $\Lambda \times E$, pour chaque $\lambda_0 \in \Lambda$ on peut trouver un voisinage V de λ_0 dans Λ et un compact K dans E tels que $X_\lambda \subset K$ pour $\lambda \in V$, et $p_{\mathcal{H}}$ est surjective.

Si E est compact, (2) est équivalente à :

(2'') \mathcal{H} est fermé dans $\Lambda \times E$ et $p_{\mathcal{H}}$ est surjective.

3. Points périodiques

3.1. Multiplicateur

Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ un polynôme complexe de degré d . On note f^k le k -ième itéré de f .

Un point $x \in \mathbf{C}$ est *périodique de période k* si $f^k(x) = x$, $f^i(x) \neq x$ pour $0 < i < k$. Le *cycle* engendré par x est alors $\xi = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$, où $x_i = f^i(x)$. Le *multiplicateur* de ξ est

$$\rho_\xi = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{k-1}) = (f^k)'(x_i) \text{ pour tout } i.$$

Pour z voisin de x_i , $f^k(z) - x_i$ est approximativement $\rho_\xi \cdot (z - x_i)$.

On dit que le cycle ξ est *attractif* si $|\rho_\xi| < 1$, *répulsif* si $|\rho_\xi| > 1$, *indifférent (ou neutre)* si $|\rho_\xi| = 1$. Les cycles indifférents se divisent en *cycles paraboliques* (cas où ρ_ξ est une racine de l'unité) et *cycles indifférents irrationnels*.

Le *multiplicateur* d'un point périodique est le multiplicateur du cycle qu'il engendre. Un point périodique est attractif, répulsif, *etc.*, s'il en est ainsi du cycle qu'il engendre.

3.2. Cycles attractifs

Si x est un point périodique attractif de période k , le bassin A_x de x est

$$\{z \in \mathbf{C} \mid f^{nk}(z) \rightarrow x \text{ quand } n \rightarrow \infty\}.$$

C'est un ouvert contenu dans $\overset{\circ}{K}$, et $x \in A_x$. Le bassin immédiat A_x^0 est la composante connexe de A_x contenant x . Le bassin (resp. bassin immédiat) du cycle engendré par x est

$$A_\xi = \bigcup_{0 \leq i < k} A_{x_i} \quad (\text{resp. } A_\xi^0 = \bigcup_{0 \leq i < k} A_{x_i}^0).$$

Le résultat suivant est classique. Rappelons qu'un point critique de f est un point où la dérivée f' s'annule.

THÉORÈME 3.1 (Fatou, Julia). — *Le bassin immédiat d'un cycle attractif contient toujours un point critique.*

COROLLAIRE. — *Le nombre maximum de cycles attractifs pour un polynôme de degré d est $d - 1$.*

En effet, un polynôme de degré d a au plus $d - 1$ points critiques distincts.

En fait on a un meilleur résultat :

THÉORÈME 3.2. — *Le nombre maximum de cycles non répulsifs pour un polynôme de degré d est $d - 1$.*

Plan de la démonstration. — La démonstration repose sur la notion d'application à allure polynomiale. Une application à allure polynomiale $f : U' \rightarrow U$, où U est U' sont deux ouverts de \mathbf{C} limités par des courbes de Jordan γ et γ' avec $\overline{U'} \subset U$, est une application holomorphe $U' \rightarrow U$ qui admet un prolongement continu $\overline{U'} \rightarrow \overline{U}$ induisant une application $\gamma' \rightarrow \gamma$. Le degré de f est le degré de l'application induite $\gamma' \rightarrow \gamma$. Une application à allure polynomiale de degré d a $d - 1$ points critiques (en comptant avec multiplicité). Si f est un polynôme de degré d , l'application

$$f : f^{-1}(D_R) \rightarrow D_R$$

est à allure polynomiale pour R assez grand.

Le théorème 3.1 s'étend aux applications à allure polynomiale : tout cycle attractif attire au moins un point critique. Il suffit de recopier la démonstration pour les polynômes. Par conséquent, une application à allure polynomiale de degré d a au plus $d - 1$ points critiques.

L'avantage de ce nouveau cadre est le suivant : alors qu'il est difficile de modifier un polynôme de façon à rendre attractifs tous les cycles non répulsifs, cela est très facile pour les applications à allure polynomiale. Par suite une application à allure polynomiale de degré d a au plus $d - 1$ cycles non répulsifs — sinon l'application modifiée donnerait une contradiction. Ceci s'applique notamment aux polynômes.

c.q.f.d.

3.3. Cycles paraboliques

Soit maintenant x un point parabolique de période k et de multiplicateur $\rho = e^{2i\pi p/q}$ (p et q premiers entre eux). Alors f^{kq} est tangent à l'identité en x . On peut trouver Q demi-droites d'origine x appelées les *axes d'attraction*, alternant avec Q autres appelées les *axes de répulsion*, avec la propriété suivante : si z est voisin de x sur un axe d'attraction (resp. de répulsion), f^{kq} rapproche (resp. éloigne) z de x . Les axes d'attraction et de répulsion sont déterminés de la façon suivante :

En mettant l'origine en x , l'application f^{kq} se met sous la forme

$$z \mapsto z(1 + cz^Q + O(z^{Q+1}))$$

avec $c \neq 0$, $Q \geq 1$. Les valeurs de z pour lesquelles cz^Q est réel < 0 (resp. > 0) forment les axes d'attraction (resp. de répulsion).

L'application linéaire tangente $z \mapsto \rho \cdot z$ envoie les axes d'attraction sur axes de répulsion et axes de répulsion sur axes de répulsion. On voit ainsi que Q est nécessairement un multiple de q .

Pour chaque axe d'attraction L , il y a des points z tels que $f^{kqn}(z) \rightarrow x$ tangentiellement à L . Ces points forment un ouvert non vide A_L qui contient un segment S de L ayant x pour une de ses extrémités. Nous appelons A_L le *bassin* de L , et la composante connexe A_L^0 de L qui contient S le *bassin immédiat*. Le point x est sur la frontière de A_L^0 . Le bassin (resp. bassin immédiat) de x est la réunion des A_L (resp. A_L^0) pour L axe d'attraction, et si ξ est le cycle engendré par x nous définissons A_ξ (resp. A_ξ^0) comme la réunion des bassins (resp. bassins immédiats) des points du cycle.

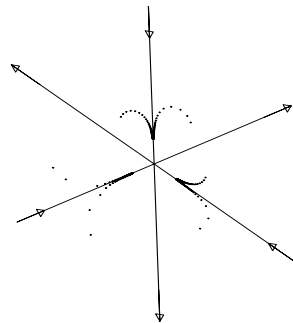


Figure 2

Le résultat suivant est analogue au Th. 3.1 :

THÉORÈME 3.3 (Fatou, Julia). — *Le bassin immédiat d'un cycle parabolique contient toujours au moins un point critique (en fait $\nu = Q/q$ points critiques).*

3.4. Cycles indifférents irrationnels

Soit maintenant x un point périodique indifférent irrationnel de période k et de multiplicateur $\rho = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Alors x peut être linéarisable (cas de Siegel) ou non linéarisable (cas de Cremer). On dit que x est *linéarisable* s'il y a un voisinage ouvert U de x tel que $f^k(U) = U$ et un isomorphisme $\phi : U \rightarrow \mathbf{D}$ tel que $\phi \circ f^k \circ \phi^{-1} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ soit la rotation $z \mapsto \rho \cdot z$. Le plus grand U possible est le *disque de Siegel* Δ_x de x .

Des résultats de Cremer, Siegel, Bruno, Yoccoz donnent des conditions pour qu'un point périodique indifférent irrationnel soit linéarisable. Pour les polynômes quadratiques, on a

THÉORÈME 3.4 (Bruno, Yoccoz). — *Soit f un polynôme quadratique avec un point périodique indifférent irrationnel x de période k et de multiplicateur $\rho = e^{2i\pi\theta}$, $\theta \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Soient p_n/q_n les réduites du développement de θ en fraction continue. Alors x est linéarisable si et seulement si*

$$(B) \quad \sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty.$$

L'implication $(B) \Rightarrow$ linéarisabilité est due à Bruno, et vaut pour un polynôme de degré quelconque, et même pour tout germe de fonction holomorphe. La réciproque est due à Yoccoz.

4. Ensemble de Julia rempli et ensemble de Julia d'un polynôme

Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ un polynôme complexe de degré $d \geq 2$. On note f^n le n -ième itéré de $f : f^0 = I$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Nous écrivons parfois z_n pour $f^n(z)$.

On dit que z *s'échappe* par f si $f^n(z) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. On peut trouver un $R > 0$ tel que tout z vérifiant $|z| \geq R$ s'échappe. Une telle valeur de R est appelée un *rayon d'échappement*. Pour $f : z \mapsto a_d z^d + \dots + a_0$, le rayon

$$R = \frac{1 + |a_d| + \dots + |a_0|}{|a_d|}$$

est un rayon d'échappement.

En fait, dès qu'un point commence à s'échapper pour de bon, la convergence vers ∞ est incroyablement rapide. Par exemple, pour $f(z) = z^2 + c$ avec $|c| \leq 2$, si $|z_n| \geq 3$ pour un certain n , on a $|z_{n+10}| > 10^{300}$: c'est plus que le rapport du volume de l'univers connu jusqu'aux quasars les plus lointains au volume d'un proton.

Nous notons $K(f)$ l'ensemble des points qui ne s'échappent pas par f , et nous l'appelons *l'ensemble de Julia rempli* de f . *L'ensemble de Julia* proprement dit est la frontière $J(f)$ de $K(f)$. L'ensemble $K(f)$ est compact. En effet, il est contenu dans D_R dès que R est un rayon d'échappement, et il est fermé : si un point z s'échappe, on a $|f^n(z)| > R$ pour un certain n , d'où $|f^n(z')| > R$ avec le même n si z' est assez voisin de z , et l'ensemble des points qui s'échappent est ouvert.

L'ensemble $K(f)$ n'est jamais vide, car il contient les points fixes de f , solutions de $f(z) - z = 0$. En fait il est toujours infini non dénombrable. Il résulte du principe du maximum que son complémentaire $\mathbf{C} - K(f)$ ne peut pas avoir de composante connexe bornée, donc $\mathbf{C} - K(f)$ est connexe.

Suivant les coefficients de f , l'ensemble $K(f)$ peut être connexe ou non connexe, il peut être d'intérieur vide (auquel cas $J(f) = K(f)$) ou d'intérieur non vide. En vertu d'un théorème de Fatou et Julia, $K(f)$ est connexe si et seulement si aucun point critique de f ne s'échappe.

PROPOSITION 4.1.

- (a) *Tout point périodique attractif appartient à $\overset{\circ}{K}(f)$.*
- (b) *Tout point périodique répulsif appartient à $J(f)$.*
- (c) *Tout point parabolique appartient à $J(f)$.*
- (d) *Tout point de Siegel (indifférent irrationnel linéarisable) appartient à $\overset{\circ}{K}(f)$.*
- (e) *Tout point de Cremer (indifférent irrationnel non linéarisable) appartient à $J(f)$.*

Démonstration. — (a) et (d) sont immédiats. Le bassin attractif ou le disque de Siegel de x est un voisinage de x contenu dans $K(f)$. Réciproquement, supposons que x soit un point périodique de période k avec $x \in \overset{\circ}{K}(f)$, et soit U la composante connexe de $\overset{\circ}{K}(f)$ contenant x . Alors f^k applique U dans U . L'ouvert U est isomorphe à \mathbf{D} , soit $\phi : U \rightarrow \mathbf{D}$ un isomorphisme tel que $\phi(x) = 0$ et considérons $h = \phi \circ f^k \circ \phi^{-1} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$. On a $h(0) = 0$, et $h'(0)$ est le multiplicateur $\rho = (f^k)'(x)$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|\rho| \leq 1$, et si $|\rho| = 1$ l'application h est la rotation $z \mapsto \rho z$. Ceci démontre (b) et (e).

Remarquons que si x est parabolique avec $\rho = e^{2\pi ip/q}$, alors f^{kq} est tangente à l'identité en x , mais ne peut être l'identité puisque c'est un polynôme de degré d^{kq} . Donc x ne peut être linéarisable, et ceci établit (c).

c.q.f.d.

D'après un théorème de Sullivan, et des résultats antérieurs de Fatou, les composantes de l'intérieur de $K(f)$ sont toujours reliées à des cycles non répulsifs, d'une façon que nous allons décrire.

Les ensembles de la forme suivante :

- (A) Bassin immédiat d'un point périodique attractif
- (P) Bassin immédiat d'un axe d'attraction d'un point parabolique
- (S) Disque de Siegel

sont des composantes connexes de $\overset{\circ}{K}(f)$.

Si U est une composante connexe de $\overset{\circ}{K}(f)$, son image $f(U)$ est encore une composante connexe de $\overset{\circ}{K}(f)$. On dit que U est périodique si $f^k(U) = U$ pour un certain

$k > 0$, prépériodique si $f^\ell(U)$ est périodique pour un certain $\ell \geq 0$. Les composantes de l'un des types (A), (P), (S) ci-dessus sont périodiques.

THÉORÈME 4.2 (Sullivan). — *Toute composante connexe de $\overset{\circ}{K}(f)$ est prépériodique.*

THÉORÈME 4.3 (Fatou). — *Toute composante connexe périodique de $\overset{\circ}{K}(f)$ est de l'un des types (A), (P), (S).*

COROLLAIRE 4.4. — *Si tous les cycles de f sont répulsifs, on a $\overset{\circ}{K}(f) = \emptyset$.*

L'ensemble $J(f)$, frontière de $K(f)$, est compact, non vide et d'intérieur vide. L'ensemble $K(f)$ est la réunion de $J(f)$ avec les composantes connexes bornées de $\mathbf{C} - J(f)$. D'après un théorème de Fatou et Julia, $J(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Pour tout $\alpha \in J(f)$, l'ensemble $J(f)$ est la fermeture de l'ensemble des images inverses itérées de α .

5. Semi-continuités de $K(f)$ et $J(f)$ en fonction de f

Notons \mathcal{P}_d l'ensemble des polynômes complexes de degré d . Un tel polynôme s'écrit

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_0 \quad \text{avec } a_d \neq 0.$$

Ainsi \mathcal{P}_d peut s'identifier à $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^d$, ce qui le munit d'une topologie.

THÉORÈME 5.1.

- (a) *L'application $f \mapsto K(f)$ de \mathcal{P}_d dans $\text{Comp}^*(\mathbf{C})$ est semi-continue supérieure-ment.*
- (b) *L'application $f \mapsto J(f)$ de \mathcal{P}_d dans $\text{Comp}^*(\mathbf{C})$ est semi-continue inférieure-ment.*

Démonstration.

- (a) Pour $f \in \mathcal{P}_d$, considérons le rayon d'échappement

$$R_f = \frac{1 + |a_d| + \cdots + |a_0|}{(a_d)}.$$

Il dépend continûment de f . L'ensemble des couples $(f, z) \in \mathcal{P}_d \times \mathbf{C}$ tels que z s'échappe par f est

$$\{(f, z) \mid (\exists n) |f^n(z)| > R_f\}.$$

Il est donc ouvert, et son complémentaire $\mathcal{K} = \{(f, z) \mid z \in K(f)\}$ est fermé dans $\mathcal{P}_d \times \mathbf{C}$. Comme $K(f) \neq \emptyset$ pour tout f et $\mathcal{K} \subset \{(f, z) \mid |z| \leq R_f\}$, la projection $p_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_d$ est propre et surjective (cf. Remarque 2.2). On peut donc appliquer la Proposition 2.1.

(b) Nous allons utiliser la description de $I(f)$ comme fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Soient f_0 un point de \mathcal{P}_d et $\varepsilon > 0$. On peut trouver un ensemble fini $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ de points périodiques répulsifs pour f_0 qui remplit $J(f_0)$ à $\varepsilon/2$ près, c'est à dire tel que $\partial(J(f_0), X) \leq \varepsilon/2$. Chaque x_i est solution d'une équation $f_0^{k_i}(z) - x = 0$. C'est une solution simple de cette équation, car la dérivée est $\rho_{x_i} - 1 \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites; on trouve un voisinage W de f_0 dans \mathcal{P}_d et des fonctions holomorphes $\xi_i : W \rightarrow \mathbf{C}$ telles que $\xi_i(f_0) = x_i$ et $\xi_i(f)$ périodique de période k_i pour f . Si on a choisi W assez petit, $\xi_i(f)$ est encore répulsif, et $|\xi_i(f) - x_i| \leq \varepsilon/2$ pour tout $f \in W$. On a alors $\partial(X, J(f)) \leq \partial(X, \{\xi_i(f)\}) \leq \varepsilon/2$ et $\partial(J(f_0), J(f)) \leq \varepsilon$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 5.2. — *Soit $f_0 \in \mathcal{P}_d$ un point tel que $\overset{\circ}{K}(f_0) = \emptyset$, de sorte que $J(f_0) = K(f_0)$. Alors les deux applications $f \mapsto K(f)$ et $f \mapsto J(f)$ sont continues en f_0 .*

Ceci résulte du théorème 5.1, et du lemme 5.4 ci-dessous. Nous démontrons d'abord le lemme 5.3, non pour l'utiliser mais simplement pour s'échauffer.

LEMME 5.3. — *Soient Λ un espace topologique, u et v deux fonctions $\Lambda \rightarrow \mathbf{R}$ avec u semi-continue inférieurement et v semi-continue supérieurement. On suppose que $u(\lambda) \leq v(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $u(\lambda_0) = v(\lambda_0)$. Alors u et v sont continues en λ_0 .*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage W de λ_0 tel que, pour $\lambda \in W$, on ait $u(\lambda) \geq u(\lambda_0) - \varepsilon$ et $v(\lambda) \leq v(\lambda_0) + \varepsilon$. Pour $\lambda \in W$, on a donc $u(\lambda_0) - \varepsilon \leq u(\lambda) \leq v \leq v(\lambda_0) + \varepsilon = u(\lambda_0) + \varepsilon$, d'où $|u(\lambda) - u(\lambda_0)| \leq \varepsilon$ et $|v(\lambda) - v(\lambda_0)| \leq \varepsilon$.

c.q.f.d.

LEMME 5.4. — *Soient Λ un espace topologique, $\lambda \mapsto X_\lambda$ et $\lambda \mapsto Y_\lambda$ deux applications $\Lambda \rightarrow \text{Comp}^*(E)$, la première semi-continue inférieurement et la seconde semi-continue supérieurement. On suppose que $X_\lambda \subset Y_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $X_{\lambda_0} = Y_{\lambda_0}$. Alors $\lambda \mapsto X_\lambda$ et $\lambda \mapsto Y_\lambda$ sont continues en λ_0 .*

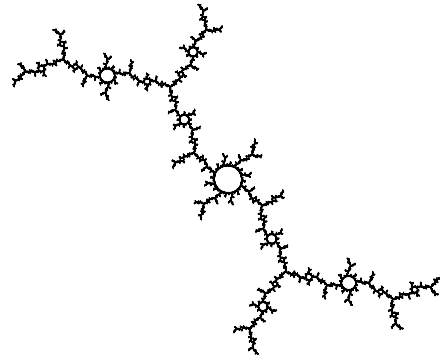
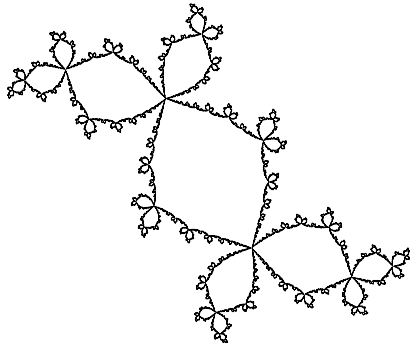
Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage w de λ_0 dans Λ tel que $\partial(X_{\lambda_0}, X_\lambda) \leq \varepsilon$ et $\partial(Y_\lambda, Y_{\lambda_0}) \leq \varepsilon$ pour $\lambda \in W$. Pour $\lambda \in W$, on a aussi

$$\partial(Y_{\lambda_0}, Y_\lambda) = \partial(X_{\lambda_0}, Y_\lambda) \leq \partial(X_{\lambda_0}, X_\lambda) \leq \varepsilon$$

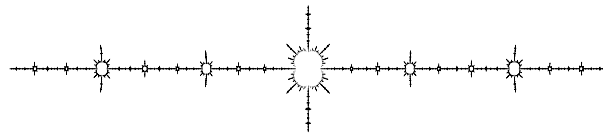
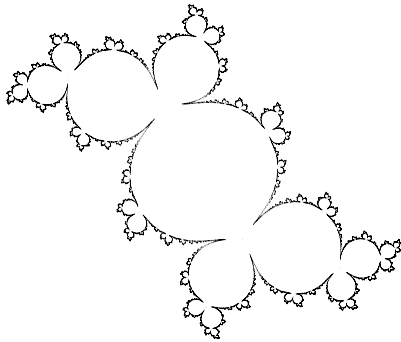
et

$$\partial(X_\lambda, X_{\lambda_0}) = \partial(X_\lambda, Y_{\lambda_0}) \leq \partial(Y_\lambda, Y_{\lambda_0}) \leq \varepsilon.$$

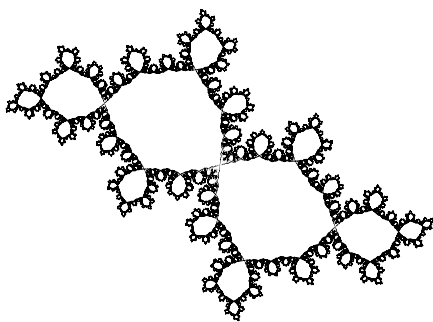
c.q.f.d.



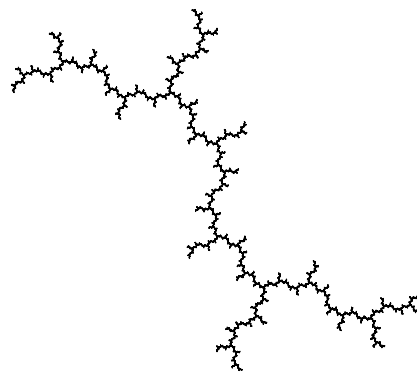
deux avec des cycles attractifs



deux avec des cycles paraboliques



un avec un disque de Siegel

si tous les cycles sont répulsifs,
 $\mathring{K}(f) = \emptyset$ (ici $f(z) = z^2 + i$)

6. L'effet des bassins attractifs

Dans ce paragraphe, on montre que les bassins attractifs ne produisent de discontinuité ni dans $f \mapsto K(f)$ ni dans $f \mapsto J(f)$.

Notons $A(f)$ la réunion des bassins des cycles attractifs de f . L'ensemble $A(f)$ est réunion de composantes connexes de $\overset{\circ}{K}(f)$. Il est donc ouvert, et $J(f) \cup A(f)$ est fermé donc compact.

PROPOSITION 6.1.

- (a) *L'application $f \mapsto J(f) \cup A(f)$ est une application semi-continue inférieurement $\mathcal{P}_d \rightarrow \text{Comp}^*(\mathbf{C})$*
- (b) *L'application $f \mapsto K(f) - A(f)$ est une application semi-continue supérieurement $\mathcal{P}_d \rightarrow \text{Comp}^*(\mathbf{C})$.*

COROLLAIRE 6.2. — *Si l'intérieur de $K(f_0)$ est formé exclusivement de bassins attractifs, les applications $f \mapsto K(f)$ et $f \mapsto J(f)$ sont continues en f_0 .*

LEMME 6.3. — *L'ensemble $\mathcal{A} = \{(f, z) \mid z \in A(f)\}$ est ouvert dans $\mathcal{P}_d \times \mathbf{C}$.*

Avant de démontrer ce lemme, introduisons une définition. Nous dirons qu'une partie L de \mathbf{C} est un *piège contractant* de période divisant k pour f si L est un compact convexe non vide et $f^k(L) \subset \overset{\circ}{L}$ avec $|f^k| < 1$ sur L . Si L est un piège contractant de période divisant k pour f , il existe un point $x \in L$ tel que $f^{nk}(z) \rightarrow x$ pour tout $z \in L$. Le point x est un point périodique attractif pour f et L est contenu dans son bassin immédiat.

Si x est un point périodique attractif pour f , le disque fermé $\overline{D}_{x,r}$ est un piège contractant pour f si r est assez petit. Si L est un piège contractant pour f_0 , c'est aussi un piège contractant pour f si f est assez voisin de f_0 .

Démonstration du Lemme 6.3. — Soit $(f_0, z_0) \in \mathcal{A}$. On peut trouver un piège contractant L pour f_0 et un entier n tel que $f_0^n(z_0) \in \overset{\circ}{L}$. Pour (f, z) assez voisin de (f_0, z_0) , on a encore $f^n(z) \in \overset{\circ}{L}$ avec le même n , et L est un piège contractant pour f , d'où $z \in A(f)$ et $(f, z) \in \mathcal{A}$.

c.q.f.d.

Démonstration de la Proposition 6.1.

(a) Fixons $f_0 \in \mathcal{P}_d$ et $\varepsilon > 0$. Soit $X = X_1 \cup X_2$ un ensemble fini dans $J(f_0) \cup A(f_0)$, le remplissant à $\varepsilon/2$ près, avec $X_1 \subset J(f_0)$ et $X_2 \subset A(f_0)$. On peut trouver un voisinage W de f_0 dans \mathcal{P}_d tel que, pour $f \in W$, on ait $\partial(X_1, J(f)) \leq \varepsilon/2$ et $X_2 \subset A(f)$. Alors

$$\partial(X, J(f) \cup A(f)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \partial(J(f_0) \cup A(f_0), J(f) \cup A(f)) \leq \varepsilon$$

(b) La projection $p_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_d$ est propre et $\mathcal{K} - \mathcal{A}$ est fermé dans \mathcal{K} , donc $p_{\mathcal{K}}$ induit une application propre $\mathcal{K} - \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_d$. Cette application est surjective car $K(f) - A(f) \supset J(f) \neq \emptyset$ pour tout f . On peut donc appliquer la Proposition 2.1.
c.q.f.d.

Démonstration du Corollaire 6.2. — On peut appliquer le lemme 5.4. aux couples $(f \mapsto J(f) \cup A(f), f \mapsto K(f))$ et $(f \mapsto J(f), f \mapsto K(f) - A(f))$.
c.q.f.d.

7. L'effet des disques de Siegel

Il est facile de voir que la présence d'un disque de Siegel produit une discontinuité dans $f \mapsto J(f)$. Il est beaucoup moins évident que cela n'en produit pas dans $f \mapsto K(f)$.

PROPOSITION 7.1. — *Soit f_0 un polynôme de degré d ayant un point périodique indifférent irrationnel linéarisable x . Alors $f \mapsto J(f)$ n'est pas continue en f_0 .*

Démonstration. — Soit k la période de x , le point x est solution simple de l'équation $f_0^k(z) - z = 0$, car la dérivée est $\rho_x - 1 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, on peut trouver une fonction holomorphe $\xi : W \rightarrow \mathbf{C}$, où W est un voisinage de f_0 dans \mathcal{P}_d , telle que $\xi(f_0) = x$ et $\xi(f)$ périodique de période k pour f . L'application $f \mapsto \rho_{\xi(f)} = (f^k)'(\xi(f))$ est holomorphe sur W , et non constante (sinon tous les polynômes de degré d auraient un cycle indifférent!). C'est donc une application ouverte, et on peut trouver une suite $f_n \rightarrow f_0$ telle que $\xi(f_n)$ soit répusif. On a alors $\xi(f_n) \in J(f_n)$, et $\partial(\{x\}, J(f_n)) = d(x, J(f_n)) \rightarrow 0$. Mais $x \notin J(f_0)$, donc $d(x, J(f_0)) \neq 0$. Il en résulte que $\partial(J(f_n), J(f_0))$ ne tend pas vers 0.
c.q.f.d.

PROPOSITION 7.2. — *Soit f_0 un polynôme de degré d ayant un point périodique indifférent irrationnel avec un disque de Siegel Δ . Alors $\partial(\overline{\Delta}, J(f)) \rightarrow 0$ quand $f \rightarrow f_0$ dans \mathcal{P}_d .*

Soit k la période de x et soit $\phi : \Delta \rightarrow \mathbf{D}$ un isomorphisme conjuguant f_0^k à la rotation $z \mapsto e^{2i\pi\theta}z$. Pour $r < 1$, posons $\Gamma_r = \{z \in \Delta \mid |\phi(z)| = r\}$. Etant donné $\alpha > 0$, on dit qu'une suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une *orbite de f_0 à α près* si $(\forall n) |z_{n+1} - f_0(z_n)| \leq \alpha$. On dit que (z_n) couvre un compact L à ε près si $\cup \overline{D}_{z_n, \varepsilon} \supset L$.

LEMME 7.3. — *Pour tout $r < 1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que :*

- (a) *toute suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui est une orbite de f_0 à α près avec $z_0 \in \Gamma_r$ couvre Γ_r à ε près;*
- (b) *toute suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui est une orbite pour f_0 à α près avec $z_0 \in \Delta$, $|\phi(z_0)| \leq r$, et $z_N \notin \Delta$ ou $|\phi(z_N)| > r$ pour un certain N , couvre Γ_r à ε près.*

Démonstration.

(a) Fixons $r < 1$ et $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\varepsilon < d(\Gamma_r, \mathbf{C} - \Delta)$. On peut trouver un entier m tel que, pour tout $z \in \Gamma_r$, l'ensemble $\{f_0^{ki}(z)\}_{0 \leq i < m}$ remplisse Γ_r à $\varepsilon/2$ près. On peut alors trouver α tel que, pour toute suite (z_n) qui est une orbite pour f_0^k à α près avec

$$|z_i - f_0^{ki}(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } 0 \leq i < m.$$

Alors $\{z_i\}_{0 \leq i < m}$ couvre Γ_r à ε près. Remarquons qu'on peut trouver un α qui marche pour tout $r \in [r_1, r_2]$ si $r_1 < r_2 < 1$.

(b) On peut trouver ε_1 tel que $|r - r'| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow d_H(\Gamma_r, \Gamma_{r'}) \leq \varepsilon/2$, et α_1 tel que $|z - z'| \leq \alpha_1 \Rightarrow |\phi(z) - \phi(z')| \leq \varepsilon_1$. D'après la partie (a), on peut trouver un α_2 tel que toute orbite pour f_0 à α_2 près avec $d(z_0, \Gamma_r) \leq \varepsilon/2$ couvre Γ_r à ε près. Prenons $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$. Si (z_n) satisfait aux hypothèses de (b), $|\phi(z_n)|$ bouge par pas $\leq \varepsilon_1$ tant qu'il est défini. Il y a donc un n_0 tel que $|\phi(z_{n_0})| - r \leq \varepsilon_1$, et les z_{n_0+p} couvrent Γ_r à ε près.

c.q.f.d.

LEMME 7.4. — *Pour $z \in \Delta$, la distance $d(z, K(f))$ tend vers 0 quand $f \rightarrow f_0$.*

Démonstration. — Soit y un point périodique répulsif pour f_0 . D'après le théorème des fonctions implicites, on peut trouver un voisinage W de f_0 dans \mathcal{P}_d et des fonctions analytiques ξ et $\eta : W \rightarrow \mathbf{C}$ telles que $\xi(f_0) = x$, $\eta(f_0) = y$, $\xi(f)$ et $\eta(f)$ périodiques pour f . Si $z = x$, on a $d(z, K(f)) \leq |z - \xi(f)| \rightarrow 0$; on peut donc supposer $z \neq x$ et ne s'intéresser qu'aux polynômes f pour lesquels $z \notin K(f)$. Puisque $\xi(f) \in K(f)$ et $z \notin K(f)$, il existe un point $w \in [\xi(f), z]_\Delta \cap J(f)$, où $[z', z]_A = \phi^{-1}([\phi(z'), \phi(z)])$.

Arbitrairement près de W , on peut trouver un point $z_0 \in J(f)$ qui soit une image inverse itérée par f de $\eta(f)$. On peut supposer $|\phi(z_0)| \subset V = |\phi(z)|$. Si f est suffisamment proche de f_0 , l'orbite de z_0 par f est une orbite pour f_0 à α près. On a $|\phi(z_0)| \leq r$ et il existe un N tel que $z_N = \eta(f) \notin \Delta$ ou $|\phi(\eta(f))| > r$. Donc (z_n) couvre Γ_r à ε près. En particulier il y a un n tel que $|z - z_n| < \varepsilon$, donc $d(z, K(f)) < \varepsilon$.

c.q.f.d.

Démonstration de la Proposition 7.2. — Fixons ε et soit Z un ensemble fini dans Δ couvrant $\overline{\Delta}$ à $\varepsilon/2$ près. D'après le lemme 7.4, on peut trouver un voisinage W de f_0 dans \mathcal{P}_d tel que $d(z, K(f)) \leq \varepsilon/2$ pour $z \in Z$ et $f \in W$. On a alors $\partial(\overline{\Delta}, K(f)) \leq \varepsilon$ pour tout $f \in W$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 7.5. — *Posons $U = \cup_n f^{-n}(\Delta)$. On a $\partial(J(f_0) \cup U, K(f)) \rightarrow 0$ quand $f \rightarrow f_0$*

COROLLAIRE 7.6. — *Soit $f_0 \in \mathcal{P}_d$ un polynôme sans cycle parabolique. Alors $f \mapsto K(f)$ est continue en f_0 .*

Indication. — L'intérieur de $K(f_0)$ est formé exclusivement de bassins de cycles attractifs et de disques de Siegel avec leurs images inverses itérées.

8. Un théorème de Mañe-Sad-Sullivan

Savoir que deux compacts sont proches pour la distance de Hausdorff ne nous dit en rien qu'ils se ressemblent du point de vue topologique. Ainsi tout compact peut être approché par des ensembles de Cantor, voire par des ensembles finis.

La théorie de Mañe-Sad-Sullivan fournit des cas où l'on sait que des ensembles de Julia — ou des ensembles de Julia remplis — sont homéomorphes. Voici un des résultats principaux :

THÉORÈME 8.1. — *Soit Λ une variété \mathbf{C} -analytique et $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille \mathbf{C} -analytique de polynômes de degré d . Supposons que Λ soit simplement connexe, et que f_λ n'ait de cycle parabolique pour aucun λ . Choisissons un point de base $\lambda_0 \in \Lambda$. Alors*

(a) *on peut trouver de façon unique, une famille d'homéomorphismes*

$$(\phi_\lambda = \phi_{\lambda_0, \lambda} : J(f_{\lambda_0}) \rightarrow J(f_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$$

de façon que :

- (i) $(\lambda, x) \mapsto \phi_\lambda(x)$ *soit continue sur $\Lambda \times J(f_{\lambda_0})$;*
 - (ii) ϕ_λ *conjugue f_{λ_0} à f_λ , c'est à dire $\phi_\lambda \circ f_{\lambda_0} = f_\lambda \circ \phi_\lambda$;*
- (b) *on peut étendre, pour chaque λ , l'application ϕ_λ en un homéomorphisme $\phi_\lambda : K(f_{\lambda_0}) \rightarrow K(f_\lambda)$. Il n'y a pas d'unicité. On peut s'arranger pour que $\phi_\lambda(x)$ dépende continûment de (λ, x) , mais pas toujours pour que ϕ_λ conjugue f_{λ_0} à f_λ .*

COROLLAIRE 8.2. — *Soit S la fermeture dans \mathcal{P}_d de l'ensemble des polynômes ayant un cycle indifférent. Si f_0 et f_1 sont dans la même composante connexe de $\mathcal{P}_d - S$, l'ensemble $J(f_1)$ est homéomorphe à $J(f_0)$, et $K(f_1)$ est homéomorphe à $K(f_0)$.*

On peut trouver une démonstration du Th. 8.1 dans [MSS] ou dans [D4]. Le corollaire 8.2 s'en déduit immédiatement : on peut trouver un ouvert simplement connexe Λ dans $\mathcal{P}_d - S$ contenant f_0 et f_1 .

Remarques.

(1) Fixons f_0 dans $\mathcal{P}_d - S$. Pour f proche de f_0 , le compact $K(f)$ est l'image de $K(f_0)$ par un homéomorphisme proche de l'identité. Ceci est plus fort que la conclusion du Cor. 7.6. Mais l'hypothèse aussi est plus forte : on demande qu'il y ait tout un voisinage de f_0 dans \mathcal{P}_d formé de polynômes n'ayant pas de cycle indifférent (on peut remplacer indifférent par parabolique, ça ne change rien).

(2) Dans le cas $d = 2$, pour les polynômes de la forme $z \mapsto z^2 + c$, l'ensemble S est la frontière de l'ensemble de Mandelbrot. Le corollaire affirme en particulier que, pour c_0 et c_1 dans la même composante connexe de $\overset{\circ}{M}$, les ensembles $K(f_{c_0})$ et $K(f_{c_1})$ sont homéomorphes, ainsi que $J(f_{c_0})$ et $J(f_{c_1})$.

Partie II

L'implosion parabolique

Dans cette IIème partie nous analysons sur un exemple les discontinuités en un point f_0 causées pour $f \mapsto K(f)$ et $f \mapsto J(f)$ par la présence d'un cycle parabolique pour f_0 . Les §§ 9 à 13 sont essentiellement descriptifs. L'exposé devient plus technique au § 14. Le résultat principal est énoncé au § 11 (Th. 11.3). Les §§ 14 à 21 sont consacrés à donner l'essentiel de sa démonstration.

9. Un exemple parabolique typique

Nous choisissons l'exemple le plus simple possible, à savoir :

$$f_0 : z \mapsto z + z^2.$$

Un *point parabolique* de période k pour un polynôme de degré $d > 1$ est un point α avec $f^k(\alpha) = \alpha$ et $\rho = (f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi p/q}$ pour des entiers $k > 0$, $q > 0$, $0 \leq p < q$ avec p et q premiers entre eux. Pour $f_0 : z \mapsto z + z^2$ on a $d = 2$, $\alpha = 0$, $k = 1$, $q = 1$, $p = 0$. Nous allons faire de cet exemple une étude approfondie.

Le polynôme f_0 est affinement conjugué à $z \mapsto z^2 + 1/4$. Le point $1/4$ est le point de rebroussement de la grande cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot. L'ensemble de Julia rempli $K(f_0)$ est le *chou-fleur* centré en $\omega = -1/2$. Sa frontière $J(f_0)$ est une courbe de Jordan.

Considérons maintenant

$$f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon,$$

qui est affinement conjugué à $z \mapsto z^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon$, pour ε réel voisin de 0.

Pour $\varepsilon < 0$, le point $\frac{1}{4} + \varepsilon$ est à l'intérieur de la cardioïde, l'application f_ε a un point fixe attractif, $K(f_\varepsilon)$ est un disque topologique, $J(f_\varepsilon)$ est une courbe de Jordan; on a

$$K(f_\varepsilon) \rightarrow K(f_0) \quad \text{et} \quad J(f_\varepsilon) \rightarrow J(f_0) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$, le point $\frac{1}{4} + \varepsilon$ est à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot, donc $K(f_\varepsilon)$ est un ensemble de Cantor et $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$. Comme $J(f_0) \neq K(f_0)$, il y a forcément une discontinuité dans l'une au moins des applications $\varepsilon \mapsto K(f_\varepsilon)$, $\varepsilon \mapsto J(f_\varepsilon)$ sur \mathbf{R}_+ en $\varepsilon = 0$.

10. Le batteur à œufs

Considérons maintenant $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit, disons $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 = \frac{1}{25}$. On a $K(f_\varepsilon) \cap \mathbf{R} = \emptyset$ car $f_\varepsilon(x) > x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, donc tout point réel s'échappe.

L'application f_ε a deux points fixes $\alpha = i\sqrt{\varepsilon}$ et $\bar{\alpha} = -i\sqrt{\varepsilon}$. Si on conjugue par l'homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ de façon à envoyer α et $\bar{\alpha}$ en i et $-i$, l'application devient

$$F_\varepsilon : Z \mapsto Z + \sqrt{\varepsilon}(Z^2 + 1)$$

qui est la méthode d'Euler de pas $\sqrt{\varepsilon}$ pour l'équation différentielle

$$\dot{Z} = Z^2 + 1.$$

Les solutions de cette équation différentielle décrivent les cercles du faisceau de cercles ayant pour points limites i et $-i$. Les orbites de F_ε suivent approximativement ces cercles. C'est ce que nous appelons la *dynamique du batteur à œufs*.

Cette description est valable dans un compact fixe du plan des Z quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (ça donne un compact qui se rétrécit dans le plan des z).

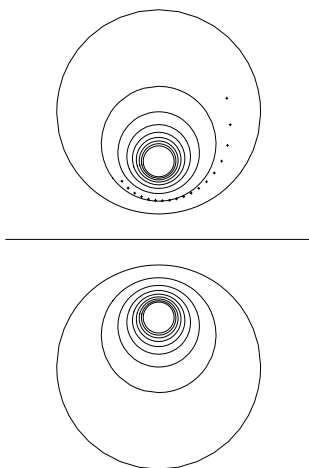


Figure 3

Tandis que les points tournent sur ces cercles, ils dérivent lentement de α ou $\bar{\alpha}$ vers \mathbf{R} , car chaque pas se fait sur la tangente. Les multiplicateurs sont $1 \pm 2i\sqrt{\varepsilon}$, donc α et $\bar{\alpha}$ sont très légèrement répulsifs. L'effet dominant est la rotation.

11. Scenarios imaginables

Qu'arrive-t-il à l'ensemble de Cantor $K(f_\varepsilon) = J(f_\varepsilon)$ quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0? A priori, on peut imaginer deux scénarios (voir planche 2). Pour les décrire, introduisons une notation. L'ensemble de Cantor triadique $C_{1/3}$ est obtenu à partir de $I = [0, 1]$ par la recette suivante : on enlève le tiers du milieu ouvert puis on enlève

le tiers du milieu (ouvert) de chacun des intervalles qui restent et on recommence : enfin on prend l'intersection des compacts ainsi obtenus. Pour $0 < \delta$, notons C_δ l'ensemble de Cantor obtenu par le même procédé, sauf qu'à chaque pas on enlève de chaque intervalle de longueur ℓ un intervalle ouvert centré de longueur $\delta \cdot \ell$.

Quand $\delta \rightarrow 0$, le Cantor C_δ tend vers I (pour la métrique de Hausdorff).

Scenario 11.1. — Pour $\varepsilon > 0$ petit, $J(f_\varepsilon)$ se trouve sur une courbe voisine de $J(f_0)$ tout comme C_δ se trouve dans I pour δ petit. En d'autres termes on a une famille continue (Γ_ε) de courbes de Jordan, et J_ε est obtenu à partir de Γ_ε en ôtant une infinité de petits arcs ouverts.

Scenario 11.2. — Pour $\varepsilon > 0$ petit, $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$ est obtenu à partir de $K(f_0)$ en y faisant une fente fine le long du segment $K(f_0) \cap \mathbf{R}$, et une infinité d'autres fentes très fines qui disconnectent complètement cet ensemble. Ainsi $K(f_\varepsilon)$ se trouve situé dans $K(f_0)$ (ou dans un disque topologique voisin) comme $C_\delta \times C_\delta$ dans le carré I^2 pour δ petit.

Le premier scenario ne donnerait aucune discontinuité pour $f \mapsto J(f)$, mais en donnerait une pour $f \mapsto K(f)$, car $K(f_0)$ n'est pas approximativement contenu dans $K(f_\varepsilon) = J(f_\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ petit.

Le second scenario ne donnerait pas de discontinuité pour $f \mapsto K(f)$, mais en donnerait une pour $f \mapsto J(f)$, car $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$ n'est pas approximativement contenu dans $J(f_0)$.

Ce qui se passe en fait ne suit aucun de ces deux scenarios. C'est bien plus horrible, donc bien plus beau. Pour commencer les deux applications $\varepsilon \mapsto J(f_\varepsilon)$ et $\varepsilon \mapsto K(f_\varepsilon)$ ont une discontinuité. Est-ce que ça veut dire que $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$ a une limite L quand $\varepsilon \rightarrow 0$ avec $J(f_0) \not\subseteq L \not\subseteq K(f_0)$, ou qu'il n'y a pas de limite du tout ?

Il faut bien qu'il y ait un peu une limite, pour la raison suivante : Pour $\varepsilon \leq 1$, $K(f_\varepsilon)$ est contenu dans \overline{D}_4 . Or $\text{Comp}^*(\overline{D}_4)$ est compact. Je vous ai caché cela au § 1 mais, pour tout espace métrique compact E l'espace $\text{Comp}^*(E)$ est compact pour la métrique de Hausdorff. Donc de toute suite (ε_n) tendant vers 0 on peut extraire une suite (ε_{n_k}) telle que $K(f_{\varepsilon_{n_k}})$ ait une limite L . On a $J(f_0) \subset L \subset K(f_0)$ en vertu des propriétés de semi-continuité, et en fait on peut montrer qu'on a toujours $J(f_0) \not\subseteq L \not\subseteq K(f_0)$. Mais L dépend de la suite d'où on est parti, et éventuellement de la sous-suite choisie, de sorte que $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$ ne tend pas vers une limite. Comme nous le verrons au § 21, ce qui se produit est ce qui suit :

THÉORÈME 11.3. — *On peut trouver une application $\tau :]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbf{T}$ appelée la fonction phase, admettant un relèvement continu $\tilde{\tau} :]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbf{R}$ qui tend vers $-\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (de sorte que τ n'a pas de limite), et une application continue injective $\theta \mapsto L_\theta$ de \mathbf{T} dans $\text{Comp}^*\mathbf{C}$ vérifiant $J(f_0) \not\subseteq L_\theta \not\subseteq K(f_0)$ pour tout θ , de façon que $K(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow L_\theta$ pour toute suite (ε_ν) tendant vers 0 avec $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \theta$.*

Dans l'espace $\text{Comp}^*\mathbf{C}$, les points L_θ forment un cercle topologique, et la courbe $(K(f_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ spirale asymptotiquement à ce cercle quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Les points $K(f_0)$ et $J(f_0)$ sont isolés de cette figure.

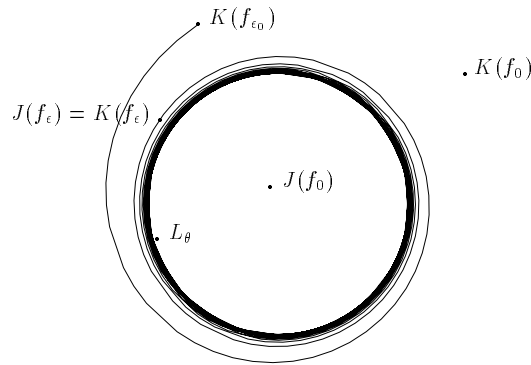


Figure 4

12. L'implosion

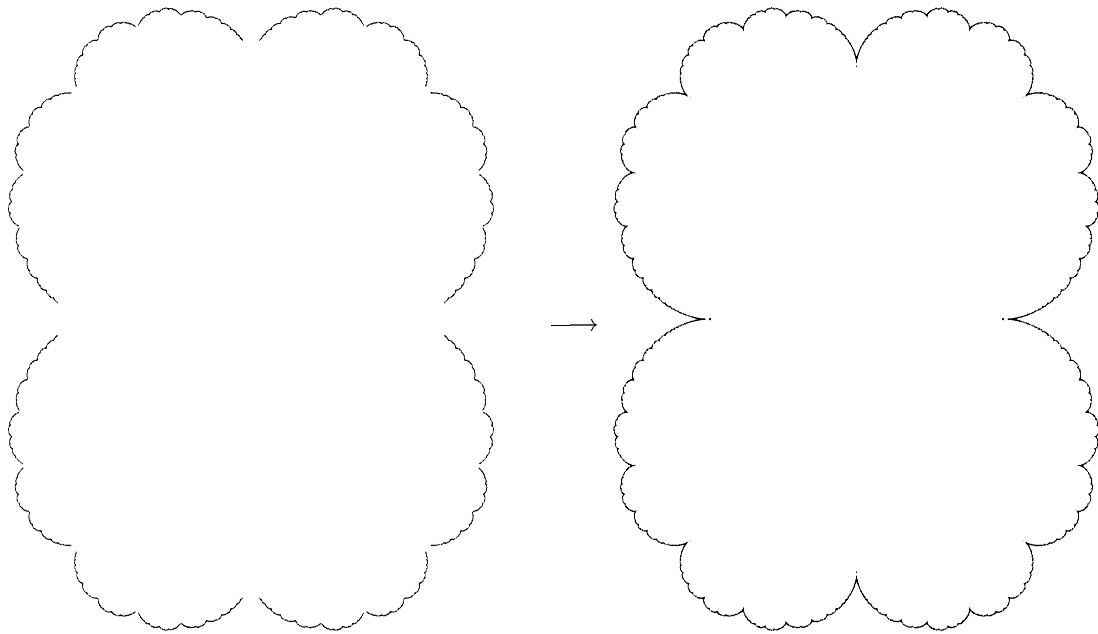
Ce paragraphe est seulement descriptif.

Les dessins à l'ordinateur montrent quelque chose d'assez semblable au scenario 1, sauf qu'il y a des boucles en pointillé qui spiralent vers l'intérieur (planche 3). Le diamètre de ces boucles ne tend pas vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ chaque (grande) boucle porte une suite de petites boucles. Quand ε varie, les petites boucles voyagent le long des grandes boucles, et quand la phase a fait un tour la suite se retrouve approximativement dans la même position, simplement décalée, et les dessins sont pratiquement indiscernables. Au même moment, les toutes petites boucles qui sont sur les petites boucles sont aussi revenues à leur place.

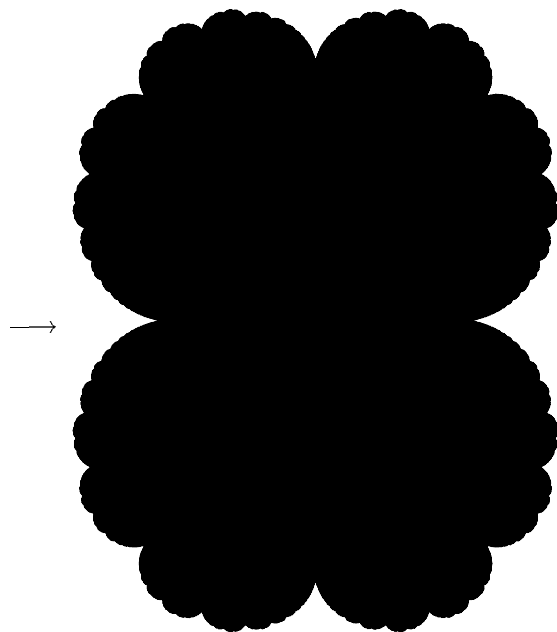
Suivons un point x_ε quand ε varie depuis $\varepsilon = \varepsilon_0$ jusqu'à ε tendant vers 0, au moyen des homéomorphismes $\phi_{\varepsilon_0,\varepsilon} : K(f_{\varepsilon_0}) \rightarrow K(f_\varepsilon)$ évoqués au § 8. Autrement dit, posons

$$x_\varepsilon = \phi_{\varepsilon_0,\varepsilon}(x)$$

où x est un point choisi dans $J(f_{\varepsilon_0})$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le point x_ε tend vers un point $x_0 \in J(f_0)$, et ceci définit une application $\phi_{\varepsilon_0,0} : J(f_{\varepsilon_0}) \rightarrow J(f_0)$. Cette application est continue, elle est surjective mais non injective : les points de $J(f_0)$ qui sont dans l'orbite inverse de $\alpha_0 = 0$ ont deux images réciproques par $\phi_{\varepsilon_0,0}$, les autres points en ont une. Bien que $\phi_{\varepsilon_0,0}$ soit continue, la convergence de $\phi_{\varepsilon_0,\varepsilon}$ vers $\phi_{\varepsilon_0,0}$ a lieu ponctuellement, il n'y a pas d'uniformité. Une bonne raison est que $\partial(J(f_\varepsilon), J(f_0)) \not\rightarrow 0$.



Scenario 1



Scenario 2

Imaginons maintenant ε variant de 0 à ε_0 . Les points de l'orbite inverse de α_0 se cassent en deux dès que ε devient > 0 . Les autres points ont chacun un mouvement continu, mais il n'y a pas d'uniformité dans cette continuité. Il y a des points qui bougent très vite vers l'intérieur, de sorte qu'une région fixe de $\overset{\circ}{K}(f_0)$ à une distance > 0 de $J(f_0)$ peut très bien se trouver envahie par des points de $J(f_\varepsilon)$ dès que ε devient > 0 .

C'est cette situation que j'essaie de décrire de façon imagée en disant que $J(f_0)$ subit une implosion, comme un tube de télévision rempli de vide.

13. La raison des discontinuités

L'application $f \mapsto K(f)$ peut se factoriser en

$$f \mapsto \{f^n\}_{n \in \mathbf{N}} \mapsto K(f).$$

Dans ce paragraphe, nous essayons d'expliquer que la cause de la discontinuité réside dans la première application $f \mapsto \{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Fixons des points de base réels dans V^- et V^+ , disons $a = -1/8$ et $b = 1/8$. Pour $\varepsilon > 0$, on a $f_\varepsilon^n(a) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, définissons le temps de batteur à œufs $T(\varepsilon)$ comme le plus petit n tel que $f_\varepsilon^n(a) \geq b$. On a $f_\varepsilon^{T(\varepsilon)}(a) \in [b, f_\varepsilon(b)]$, donc de toute suite de valeurs de ε tendant vers 0 on peut extraire une suite (ε_n) telle que $f_{\varepsilon_n}^{T(\varepsilon_n)}(a)$ ait une limite b^* .

PROPOSITION 13.1 (P. Lavaurs). — *Pour une telle suite, l'application $f_{\varepsilon_n}^{T(\varepsilon_n)}$ converge, uniformément sur tout compact de $\overset{\circ}{K}(f_0)$, vers une fonction holomorphe $g : \overset{\circ}{K}(f_0) \rightarrow \mathbf{C}$, qui commute à f_0 .*

Cette proposition sera démontrée au §18, après qu'on ait introduit des coordonnées où il est particulièrement commode de travailler. Il s'agit des coordonnées de Fatou. La proposition 13.1 jette quelque lueur sur la raison des discontinuités.

Appelons *dynamique sur \mathbf{C}* un ensemble \mathcal{G} d'application $g : U \rightarrow \mathbf{C}$, avec $U \subset \mathbf{C}$ ouvert, qui soit stable par restriction et composition. Autrement dit :

- (1) $(g : U \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}, \quad U' \subset U \Rightarrow g|_{U'} \in \mathcal{G}.$
- (2) $(g_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}, (g_2 : U_2 \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}, \quad g(U_1) \subset U_2 \Rightarrow g_2 \circ g_1 \in \mathcal{G}.$

La dynamique \mathcal{G} est *fermée* si, pour toute suite $(g_n : U_n \rightarrow \mathbf{C})$ dans \mathcal{G} , si $g_n \rightarrow g$ uniformément sur tout compact de U , on a $(g : U \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}$.

On dit qu'une suite (\mathcal{G}_ν) de dynamiques sur \mathbf{C} converge géométriquement vers une dynamique \mathcal{G} si

- (1) Pour $(g : U \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}$ on peut trouver une suite (g_ν) avec $(g_\nu : U_\nu \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}_\nu, g_\nu \rightarrow g$ uniformément sur tout compact de U ;
- (2) si $\nu_k \rightarrow \infty, (g_{\nu_k} : U_{\nu_k} \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}_{\nu_k}$ pour tout $k, g_{\nu_k} \rightarrow g : U \rightarrow \mathbf{C}$ uniformément sur tout compact de U , alors on a $(g : U \rightarrow \mathbf{C}) \in \mathcal{G}$.

La notion de limite géométrique est familière aux spécialistes des groupes kleiniens.

Etant donné un polynôme $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, la *dynamique* $[f]$ engendrée par f est l'ensemble des restrictions des itérées de f . Pour ce qui est des polynômes $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$, la situation est la suivante : Pour chaque $\varepsilon \geq 0$ la dynamique $[f_\varepsilon]$ est fermée. Mais $[f_0]$ n'est pas la limite des $[f_\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$ tendant vers 0. Pour une suite (ε_n) comme dans la Proposition 13.1, l'application $g : \mathring{K}(f_0) \rightarrow \mathbf{C}$ appartient à la limite des $[f_{\varepsilon_n}]$, mais pas à $[f_0]$.

Nous ne prétendons pas pouvoir définir une application $\mathcal{G} \mapsto K(\mathcal{G})$ avec des propriétés de continuité raisonnables, mais on peut quand même affirmer que c'est la discontinuité de $f \mapsto [f]$ qui se reflète dans celle de $f \mapsto K(f)$, et aussi dans celle de $f \mapsto J(f)$.

14. Coordonnées de Fatou

Revenons à l'application $f_0 : z \mapsto z + z^2$. On peut trouver des cartes dans lesquelles l'expression de f_0 est

$$\zeta \mapsto \zeta + 1.$$

Plus précisément, notons V^- et V^+ les disques ouverts ayant pour diamètre $] -1/4, 0[$ et $] 0, 1/4[$ respectivement.

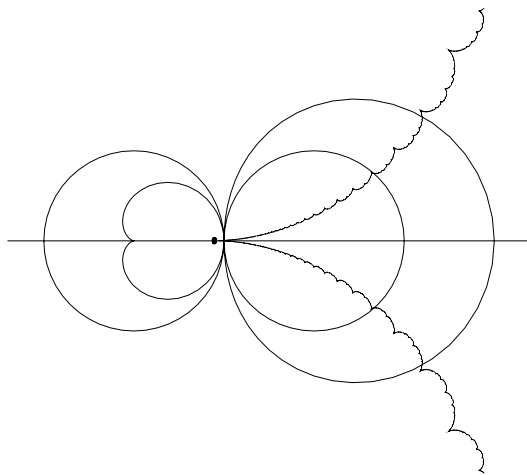


Figure 5

LEMME 14.1.

- (a) L'application f_0 est injective sur V^- et sur V^+ .
- (b) On a $f_0(V^-) \subset V^-$ et $f_0(V^+) \supset V^+$

Démonstration. — Faisons le changement de variable $Z = -\frac{1}{z}$. L'application $z \mapsto z_1 = z + z^2$ devient $F : Z \mapsto Z_1 = Z + 1 + \frac{1}{Z-1}$. Les disques V^+ et V^- deviennent les demi-plans

$$U^+ = \{z = x + iy \mid x < -1/4\} \quad \text{et} \quad U^- = \{z = x + iy \mid x > 1/4\} \text{ respectivement.}$$

Sur $U_+ \cup U_-$, l'application se comporte comme la translation $Z \mapsto Z + 1$: le terme d'erreur est majoré par $1/4$ et sa dérivée par $1/9$. En particulier F est injective sur U^+ et U^- , on a $F(U^+) \subset U^-$ et $F(U^-) \supset U^+$. Le lemme en découle.

c.q.f.d.

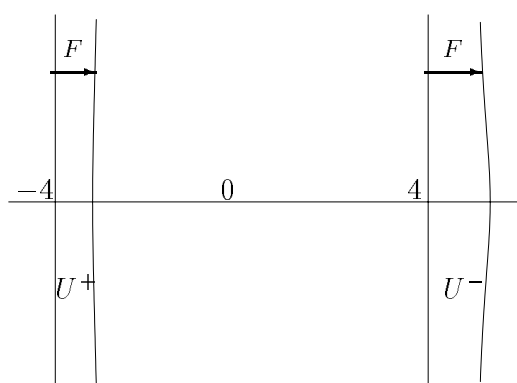


Figure 6

Nous allons maintenant faire un nouveau changement de variable $Z \mapsto \zeta$ de façon à nous débarrasser du terme d'erreur. Appelons *région gauche* (resp. *région droite*) un ensemble dans \mathbf{C} de la forme $\{z = x + iy \mid x < h(y)\}$ (resp. $>$) où $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue.

THÉORÈME ET DÉFINITION 14.2. — *On peut trouver des applications holomorphes injectives $\phi^+ : V^+ \rightarrow \mathbf{C}$ et $\phi^- : V^- \rightarrow \mathbf{C}$ telles que*

- (a) $\phi^+(V^+)$ est une région gauche et $\phi^-(V^-)$ est une région droite.
- (b) $\phi^+(f_0(z)) = \phi^+(z) + 1$ si z et $f(z)$ sont dans V^+ , $\phi^-(f_0(z)) = \phi^-(z) + 1$ si $z \in V^-$.

De telles applications sont appelées des coordonnées de Fatou. Elles sont uniques à une constante additive près.

Esquisse de démonstration. — Reprenons les notations du Lemme 14.1 et de sa démonstration. Notons $X^+ = V^+/p = U^+/F$ le quotient de V^+ par la relation d'équivalence identifiant z et $f(z)$ quand ils sont tous deux dans V^+ . L'espace X^+ est une cylindre topologique et une surface de Riemann.

Il résulte du théorème d'uniformisation de Riemann que toute surface de Riemann homéomorphe à un cylindre est \mathbf{C} -analytiquement isomorphe à B_h/\mathbf{Z} , où $B_h = \{z = x + iy \mid |y| < h/2\}$, pour un certain $h \in]0, +\infty]$ appelé le *module*, ou à H/\mathbf{Z} où H est le demi-plan supérieur (module infini unilatéral). Dans le cas qui nous concerne, on peut montrer que le module est infini bilatéral, autrement dit $X^+ \simeq \mathbf{C}/\mathbf{Z}$. Choisissons un isomorphisme $\psi : X^+ \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et notons χ_F l'application de passage au quotient $U^+ \rightarrow X^+$. Comme U^+ est simplement connexe, l'application $\psi \circ \chi_F : U^+ \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ se relève en une application $\phi_U^+ : U^+ \rightarrow \mathbf{C}$. En composant avec le changement de variable $z \mapsto Z = -\frac{1}{z}$, on obtient une application $\phi^+ : V^+ \rightarrow \mathbf{C}$. Par construction, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 V^+ & \xrightarrow[\approx]{z \rightarrow Z} & U^+ & \xrightarrow{\phi_U^+} & \mathbf{C} \\
 \chi_f \downarrow & & \downarrow \chi_F & & \downarrow \chi_{\mathbf{Z}} \\
 V^+/f & \xrightarrow{\approx} & U^+/F & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}/\mathbf{Z}
 \end{array}$$

Si Z et Z_1 sont deux points de U^+ avec $Z_i = F(Z)$, les points $\phi_U^+(Z)$ et $\phi_U^+(Z_1)$ ont même image par $\chi_{\mathbf{Z}}$, donc diffèrent d'un entier et cet entier ne dépend pas de \mathbf{Z} (application continue d'un connexe dans un discret). On peut vérifier que $\phi_U^+(Z_1) - \phi_U^+(Z) = 1$ (pourvu qu'on n'ait pas échangé les deux bouts), et que $\phi^+(z) = \phi_U^+(Z)$ a les propriétés voulues.

On construit de même ϕ^- .

On voit facilement que des coordonnées de Fatou sont nécessairement obtenues par ce procédé. Il y a certains choix dans la construction :

- choix de ψ : si on prend soin de ne pas échanger les deux bouts, ψ ne peut être modifié que par une translation dans le groupe \mathbf{C}/\mathbf{Z} ;
- choix du relèvement ϕ de $\psi \circ \chi_F$ — qui ne peut être modifié que par une translation entière.

Ces choix ne modifient les coordonnées de Fatou que par l'addition d'une constante.

c.q.f.d.

Remarque. — On peut choisir les coordonnées de Fatou réelles sur $\mathbf{R} \cap V^+$ et $\mathbf{R} \cap V^-$.

15. Prolongement des coordonnées de Fatou

PROPOSITION 15.1.

- (a) La coordonnée de Fatou attractive $\phi^- : V^- \rightarrow \mathbf{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe $\hat{\phi}^- : \overset{\circ}{K}(f_0) \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\hat{\phi}^-(f_0(z)) = \hat{\phi}^-(z) + 1$$

pour tout $z \in \overset{\circ}{K}(f_0)$.

- (b) L'inverse $\psi^+ : \phi^+(V^+) \rightarrow V^+$ de la coordonnée de Fatou répulsive se prolonge en une application $\hat{\psi}^+ \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\hat{\psi}(\xi + 1) = f_0(\hat{\psi}^+(\xi))$$

pour tout $\xi \in \mathbf{C}$.

Nous appelons $\hat{\phi}^-$ la coordonnée de Fatou étendue et $\hat{\psi}^+$ le paramétrage de Fatou étendu.

Démonstration. — Reprenons les notations de 14.1. Pour $Z \in U^-$, $|F^n(Z)|$ tend vers ∞ et $\text{Arg } F^n(Z)$ tends vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, donc pour $z \in U^-$ le point $f_0^n(z)$ tend vers 0 tangentiellement à \mathbf{R}_- . Au point parabolique 0, l'unique axe d'attraction est \mathbf{R}_- , et \mathbf{R}_+ est l'axe de répulsion. Le disque ouvert V^- est contenu dans le bassin de 0, et ce bassin est $\overset{\circ}{K}(f_0)$ puisque $\overset{\circ}{K}(f_0)$ est connexe. C'est aussi le bassin immédiat.

(a) Pour $z \in \overset{\circ}{K}(f_0)$ on a $f_0^n(z) \in V^-$ pour n assez grand. On pose $\hat{\phi}^-(z) = \phi^-(f_0^n(z)) - n$ pour n assez grand, en remarquant que cela ne dépend pas du choix de n .

(b) Pour $\xi \in \mathbf{C}$, on a $\xi - n \in U^+$ pour n assez grand. On pose alors $\hat{\psi}^+(\xi) = f_0^n(\psi^+(\xi))$, en remarquant que cela ne dépend pas du choix de n .

On vérifie immédiatement que $\hat{\phi}^-$ et $\hat{\psi}^+$ répondent à la question.

c.q.f.d.

Notons ω le point critique $-1/2$ de f_0 , qui est centre de symétrie pour $K(f_0)$. Ajustons la coordonnée de Fatou ϕ^- de façon que $\hat{\phi}^-(\omega) = 0$. Nous avons alors :

PROPOSITION 15.2. — L'application $\hat{\phi}^- : \overset{\circ}{K}(f_0) \rightarrow \mathbf{C}$ est un revêtement ramifié de degré infini, ramifié seulement au-dessus des entiers négatifs. Les points critiques de ϕ^- sont les points précritiques de f_0 , c'est à dire les points de $\cup f_0^{-n}(\omega)$.

Nous n'avons pas pour $\hat{\psi}^+$ une aussi jolie description. Plutôt que de donner de la Prop. 15.2 une démonstration en forme, nous trouvons plus instructif de donner une description détaillée (sans démonstration) de $\hat{\phi}^-$.

Dans V^- , colorions le demi-disque supérieur en jaune, le demi-disque inférieur en marron et k diamètre $V^- \cap \mathbf{R}$ en grenat. Remarquons que $f_0(z)$ a la même couleur que z . On prolonge ce coloriage à tout $\mathring{K}(f_0)$ en mettant z de la même couleur que $f_0^n(z)$ pour n grand. On obtient ce que nous appelons *l'échiquier parabolique*. Ce qui est marqué en grenat est $S = U f_0^{-n}]-1, 0[$, les cases sont les composantes connexes de $\mathring{K}(f_0) - S$. Les deux *cases principales* sont les cases B' et B'' qui contiennent les demi-disques supérieur et inférieur de V^- .

L'application $\hat{\phi}^-$ induit un homéomorphisme biholomorphe de B' sur le demi-plan supérieur H , réalisant donc l'uniformisation de Riemann. Puisque $\hat{\phi}^-$ conjugue f_0 à la translation $\xi \mapsto \xi + 1$ dans H , nous pouvons dire que $f_0 : B' \rightarrow B'$ est une application parabolique (c'est peut être de là que vient la terminologie de "points paraboliques").

La situation est symétrique pour B'' .

Les coins des cases de l'échiquier sont les points précritiques ; $\hat{\phi}^-$ les envoie sur les entiers négatifs.

Pour chaque case B , il existe un entier n tel que f_0^n applique B biholomorphiquement sur B' ou B'' .

16. Persistance des coordonnées de Fatou

Considérons maintenant $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit (disons $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{25}$). Prenons pour V_ε^+ (resp. V_ε^-) le disque bordé par le cercle passant par $1/4$ (resp. $-1/4$) et les deux points fixes $\alpha = i\sqrt{\varepsilon}$ et $\bar{\alpha} = -i\sqrt{\varepsilon}$.

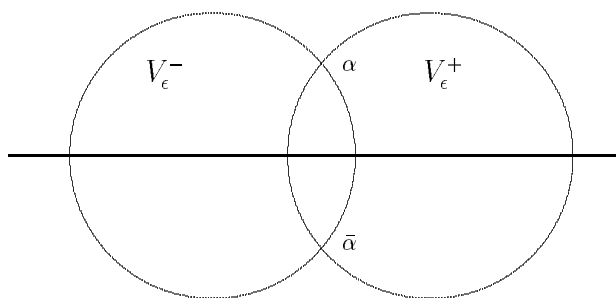


Figure 7

N'espérons plus obtenir une application $V_\varepsilon^- \rightarrow \mathbf{C}$ conjuguant f_ε à $\xi \mapsto \xi + 1$ et appliquant V_ε^- sur une région droite, car l'orbite d'un point de V_ε^- en sort toujours au bout d'un temps fini.

PROPOSITION ET DÉFINITION 16.1. — *On peut trouver des applications holomorphes injectives $\phi_\varepsilon^+ : V_\varepsilon^+ \rightarrow \mathbf{C}$ et $\phi_\varepsilon^- : V_\varepsilon^- \rightarrow \mathbf{C}$ telles que*

(a) $\phi_\varepsilon^+(V_\varepsilon^+)$ est une région de la forme

$$\{\zeta = \xi + i\eta \mid h_1^+(\eta) < \xi < h^+(\eta)\},$$

où h^+ et h_1^+ sont des fonctions continues $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ avec $h^+ - h_1^+ > 1$, et de même pour ϕ_ε^- .

(b) $\phi_\varepsilon^+(f_\varepsilon(z)) = \phi_\varepsilon^+(z) + 1$ chaque fois que z et $f_\varepsilon(z)$ sont tous deux dans V_ε^+ , et de même pour ϕ_ε^- .

Nous appelons encore ces applications coordonnées de Fatou. Elles sont uniques à une constante additive près. Sur $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ elles diffèrent d'une constante.

Esquisse de démonstration. — Nous allons adapter la démonstration de la Prop. 14.2. Le changement de variable qui convient ici est

$$z \mapsto Z = \frac{1}{2\alpha} \text{Log} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

en choisissant sur V_ε^- (resp. V_ε^+) la branche du Log qui est voisine de 0 quand ε , donc α tend vers 0 à z fixé.

Ceci transforme V_ε^- et V_ε^+ en deux bandes verticales U_ε^- et U_ε^+ .

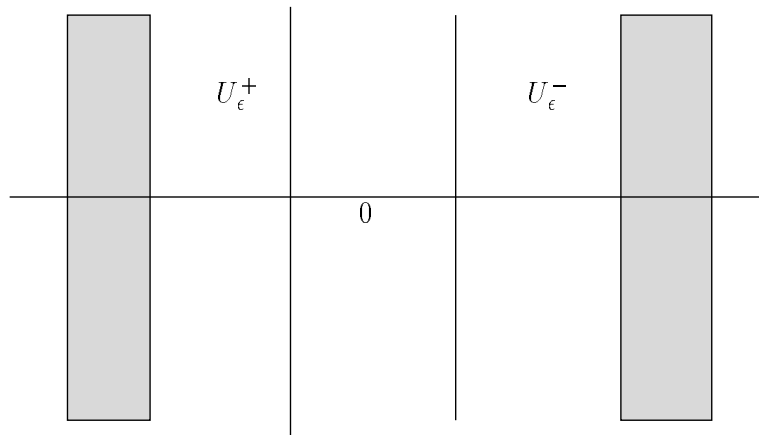


Figure 8

L'application $f_\varepsilon : z \mapsto z_1$ devient une application $F_\varepsilon : Z \mapsto Z_1$ définie par

$$Z_1 = Z + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{Arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+z}.$$

Pour $|z| \leq 1/4$, le terme $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{Arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+z}$ est assez voisin de $\frac{1}{1+z}$ pour qu'on soit sûr que sa partie réelle est > 0 . Les espaces quotients $X_\varepsilon^+ = U_\varepsilon^+/F_\varepsilon$ et $X_\varepsilon^- = U_\varepsilon^-/F_\varepsilon$ sont des anneaux \mathbf{C} -analytiques, c'est à dire des surfaces de Riemann homéomorphes

à des cylindres, et on peut montrer que leur module est infini bilatéral. La démonstration rejoint alors celle de 14.2 pour montrer (a), (b) et l'unicité à constante additive près. Sur l'ouvert $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$, le changement de variable $z \mapsto Z$ ne prend pas la même valeur suivant que z est considéré comme élément de V_ε^- ou de V_ε^+ . Cet ouvert donne les deux bandes $U_\varepsilon^- \cap T_{\frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}} U_\varepsilon^+$. Ces bandes sont assez larges pour être sûr que l'orbite par F_ε de tout point de U_ε^- ou U_ε^+ les rencontre, de sorte que les inclusions de $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ dans V_ε^- et V_ε^+ induit des bijections de $(V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+)/f_\varepsilon$ sur $X_\varepsilon^- = V_\varepsilon^-/f_\varepsilon$ et $X_\varepsilon^+ = V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$. En particulier $(V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+)/f_\varepsilon$ est un cylindre de module infini bilatéral. On peut alors appliquer le raisonnement qui classe l'unicité à constante additive près aux restrictions de ϕ_ε^+ et ϕ_ε^- à $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$.

c.q.f.d.

Remarque 16.2. — Avec les conventions que nous avons prises, l'application $z \mapsto Z$ tend quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers l'application $z \mapsto Z = -\frac{1}{z}$ considérée au § 14. Pour obtenir cet avantage, nous en avons sacrifié un autre. Sur l'ouvert V_ε^- et V_ε^+ , on a deux valeurs de Z qui diffèrent de $\frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}$. Avec un autre choix, on aurait pu s'arranger pour qu'elles coïncident.

17. La phase

Les coordonnées de Fatou ϕ_ε^- et ϕ_ε^+ tendent-elles vers ϕ_0^- et ϕ_0^+ quand ε tend vers 0?

La question a besoin d'être précisée pour deux raisons :

(1) Le domaine de définition dépend de ε . Mais cela ne pose guère de problème, car $\mathcal{V}^- = \{(\varepsilon, z) \mid z \in V_\varepsilon^-\}$ et $\mathcal{V}^+ = \{(\varepsilon, z) \mid z \in V_\varepsilon^+\}$ sont ouverts dans $[0, 1] \times \mathbf{C}$.

(2) Les applications ϕ_ε^- et ϕ_ε^+ ne sont définies qu'à une constante additive près. Il faut donc les fixer par une normalisation.

Choisissons donc des points de base, par exemple $a = -1/8$ et $b = 1/8$ (qui sont dans V_ε^\pm pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$) et normalisons ϕ_ε^- et ϕ_ε^+ par $\phi_\varepsilon^-(a) = \phi_\varepsilon^+(b) = 0$.

PROPOSITION 17.1. — *Avec ces conventions*

$$(\varepsilon, z) \mapsto \phi_\varepsilon^-(z) \quad \text{et} \quad (\varepsilon, z) \mapsto \phi_\varepsilon^+(z)$$

sont continues sur \mathcal{V}^- et \mathcal{V}^+ respectivement.

La démonstration, sans être vraiment difficile, nécessite quelques outils d'analyse complexe. Nous ne la donnons pas ici.

Pour $\varepsilon > 0$, les fonctions ϕ_ε^- et ϕ_ε^+ diffèrent d'une constante sur $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$. Nous appelons cette constante la *phase relevée* $\tilde{\tau}(\varepsilon)$, c'est à dire que nous posons

$$\tilde{\tau}(\varepsilon) = \phi_\varepsilon^+(z) - \phi_\varepsilon^-(z) \quad \text{pour} \quad z \in V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+.$$

La phase relevée est reliée au temps de batteur à œufs $T(\varepsilon)$ introduit au § 13 (plus petit n tel que $f_\varepsilon^n(a) \geq b$) par le résultat suivant :

PROPOSITION 17.3. — On a $-T(\varepsilon) \leq \tilde{\tau}(\varepsilon) < -T(\varepsilon) + 1$.

Démonstration. — Posons $a' = f_\varepsilon^{T(\varepsilon)}(a)$, et $a'' = f_\varepsilon^m(a)$ avec m choisi de façon que $a'' \in V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$.

On a $\phi_\varepsilon^-(a'') = m$ et $\phi_\varepsilon^+(a'') = \phi_\varepsilon^+(a') - (T(\varepsilon) - m)$, d'où $\tilde{\tau}(\varepsilon) = \phi_\varepsilon^+(a'') - \phi_\varepsilon^-(a'') = -T(\varepsilon) + \phi_\varepsilon^+(a')$. Mais $a' \in [b, f_\varepsilon(b)[$ par définition de $T(\varepsilon)$, et ϕ_ε^+ applique $[b, f_\varepsilon(b)[$ sur $[0, 1[$, d'où $0 \leq \phi_\varepsilon^+(a') < 1$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 17.4. — La phase relevée $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ tend vers $-\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

En effet $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$, puisque $f_\varepsilon^n(a) \rightarrow f_0^n(a) \in [a, 0[$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ avec n fixé.

Remarque 17.5. — On peut montrer que $\tilde{\tau}(\varepsilon) = \frac{-M}{\sqrt{\varepsilon}} + \eta + O(1)$ avec $\eta \in \mathbf{R}$.

On note $\tau(\varepsilon)$ la classe de $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ dans $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et nous l'appelons la *phase*. On a $\tau(\varepsilon) = 0$ si et seulement si l'orbite de a contient b . En général, $\tau(\varepsilon)$ nous renseigne sur la position relative des orbites de a et b à droite de b . Comme conséquence du Cor.17.4, on a :

COROLLAIRE 17.6. — La phase $\tau(\varepsilon)$ n'a pas de limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour $\sigma \in \mathbf{C}$, notons T_σ la translation $Z \mapsto Z + \sigma$.

PROPOSITION 17.7. — Pour $\varepsilon > 0$, l'application

$$(\phi_\varepsilon^+)^{-1} \circ T_{n+\tilde{\tau}(\varepsilon)} \circ \phi_\varepsilon^-$$

coïncide avec f_ε^n là où elle est définie.

Démonstration. — Soit $\xi \in V_\varepsilon^- = \phi_\varepsilon^-(V_\varepsilon^-)$ un point tel que $\xi + n + \tilde{\tau}(\varepsilon) \in V_\varepsilon^+$. Soit m le plus grand entier $\leq n$ tel que $\xi + m \in V_\varepsilon^-$. Alors $\xi + i \in V_\varepsilon^-$ pour $0 \leq i \leq m$, $\xi + m + \tilde{\tau}(\varepsilon) \in V_\varepsilon^+$ et par suite aussi $\xi + j + \tilde{\tau}(\varepsilon) \in V_\varepsilon^+$ pour $m \leq j \leq n$. Si $\zeta = \phi_\varepsilon^-(z)$, on a

$$f^m(z) = (\phi_\varepsilon^-)^{-1}(\xi + m) = (\phi_\varepsilon^+)^{-1}(\xi + m + \tilde{\tau}(\varepsilon))$$

et

$$f^n(z) = f^{n-m}(f^m(z)) = (\phi_\varepsilon^+)^{-1}(\xi + n + \tilde{\tau}(\varepsilon)).$$

c.q.f.d.

COROLLAIRE 17.8. — Soient x un point de V_ε^- et $n \in \mathbf{N}$ tels que $f_\varepsilon^n(x) \in V_\varepsilon^+$ et $f_\varepsilon^i(x) \in V_\varepsilon^- \cup V_\varepsilon^+$ pour $0 \leq i \leq n$. Alors l'expression de f_ε^n au voisinage de x , dans les cartes ϕ_ε^- et ϕ_ε^+ , est

$$\xi \mapsto \xi + n + \tilde{\tau}(\varepsilon).$$

18. Applications de Lavaurs

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'application g qui intervient dans la Proposition 13.1.

DÉFINITION 18.1. — *Une application de Lavaurs pour f_0 est une application $\overset{\circ}{K}(f_0) \rightarrow \mathbf{C}$ de la forme g_σ de la forme $\widehat{\psi}^+ \circ T_\sigma \circ \widehat{\phi}^-$, où $\widehat{\phi}^-$ et $\widehat{\phi}^+$ sont la coordonnée et le paramétrage de Fatou étendus pour f_0 , et T_σ la translation $\xi \mapsto \xi + \sigma$.*

On a $g_\sigma \circ f_0 = f_0 \circ g_{\sigma+1}$. L'ensemble des applications de Lavaurs ne dépend pas du choix des coordonnées de Fatou, mais la correspondance $\sigma \mapsto g_\sigma$ en dépend.

La proposition qui suit est un raffinement de la proposition 13.1.

PROPOSITION 18.2. — *Soit (ε_ν) est une suite tendant vers 0 dans $]0, \varepsilon_0]$, et (n_ν) une suite d'entiers tendant vers $+\infty$. Supposons que $\tilde{\tau}(\varepsilon_\nu) + n_\nu$ tende vers une limite $\sigma \in \mathbf{R}$. Alors $f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu}$ tend, uniformément sur tout compact de $\overset{\circ}{K}(f_0)$, vers l'application de Lavaurs g_σ .*

Démonstration. — Supposons d'abord que $x_0 \in V_0^-$ et que σ soit tel que $\phi_0^-(x) + \sigma \in U_0^+ = \phi_0^+(V_0^+)$. On peut alors trouver un voisinage Λ de x tel que

$$(\phi_{\varepsilon_\nu}^+)^{-1} \circ T_{n_\nu + \tilde{\tau}(\varepsilon_\nu)} \circ \phi_{\varepsilon_\nu}^-$$

soit défini sur Λ pour ν assez grand, et converge uniformément sur Λ vers g_0 . Sur Λ , on a $(\phi_{\varepsilon_\nu}^+)^{-1} \circ T_{n_\nu + \tilde{\tau}(\varepsilon_\nu)} \circ \phi_{\varepsilon_\nu}^- = f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu}$, donc $f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu} \rightarrow g_\sigma$ uniformément sur Λ .

Soit maintenant x un point arbitraire de $\overset{\circ}{K}(f_0)$ et $\sigma \in \mathbf{R}$ un réel arbitraire. On peut trouver $m_1 \in \mathbf{N}$ tel que $x' = f_0^{m_1}(x) \in V_0^-$, et $\sigma' = \sigma - m_1 - m_2$ avec $m_2 \in \mathbf{N}$ tel que $\phi_0^-(x') + \sigma' \in U_0^+$. Posant $n'_\nu = n_\nu - m_1 - m_2$, l'application $f_{\varepsilon_\nu}^{n'_\nu}$ tend vers g_σ , uniformément sur un voisinage de x' , donc $f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu}$ tend vers $f_0^{m_2} \circ g_{\sigma'} \circ f_0^{m_1} = g_\sigma$ uniformément sur un voisinage de x .

c.q.f.d.

19. Les ensembles $K(f_0, g_\sigma)$ et $J(f_0, g_\sigma)$

Dans ce paragraphe, nous définissons les ensembles qui vont apparaître comme limite de $K(f_\varepsilon)$ et $J(f_\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Considérons f_0 et une application de Lavaurs g_σ . Nous définissons d'abord les points qui *s'échappent par (f_0, g_σ)* .

Un point $\mathbf{C} - K(f_0)$ s'échappe par f_0 , on dit qu'il s'échappe par (f_0, g_σ) . Un point de $J(f_0)$ ne s'échappe pas par f_0 , et on ne peut pas lui appliquer g_σ , à lui ni à aucune de ses images itérées par f_0 : il ne s'échappe pas par (f_0, g_σ) . A un point $z \in \overset{\circ}{K}(f_0)$ on peut appliquer g_σ . Si $g_\sigma(z) \in \mathbf{C} - K(f_0)$, il s'échappe ensuite par f_0 , on dit que z s'échappe par (f_0, g_σ) . Si $g_\sigma(z) \in J(f_0)$, il reste prisonnier, donc z ne s'échappe pas par (f_0, g_σ) . Si $g_\sigma(z) \in \overset{\circ}{K}(f_0)$, on peut appliquer g_σ de nouveau, et cela donne à z

encore une chance. Remarquons qu'appliquer d'abord f_0 ne changerait rien, puisque f_0 et g_σ commutent et que $K(f_0)$ est invariant par f_0 et f_0^{-1} .

Au total, on définit les points qui s'échappent par (f_0, g_σ) comme les points z tels que $(\exists m \in \mathbf{N}) g_\sigma^m(z) \in \mathbf{C} - K(f_0)$. A prendre au sens de : il existe un $m \in \mathbf{N}$ tel que $g_\sigma^m(z)$ soit défini et appartienne à $\mathbf{C} - K(f_0)$. Ceci inclue le cas $m = 0$, donc les points extérieurs à $K(f_0)$ s'échappent. Nous notons $J(f_0, g_\sigma)$ l'ensemble des points de \mathbf{C} qui ne s'échappent pas par (f_0, g_σ) .

Nous définissons $J(f_0, g_\sigma)$ comme la fermeture de

$$\{z \mid (\exists m \in \mathbf{N}) g_\sigma^m(z) \in J(f_0)\}.$$

C'est un compact contenu dans $K(f_0)$, et contenant $J(f_0)$ puisque $m = 0$ est autorisé.

PROPOSITION 19.1. — *L'ensemble $J(f_0, g_\sigma)$ est la frontière de $K(f_0, g_\sigma)$.*

Démonstration. — Si $g_\sigma^m(z) \in J(f_0)$, le point z ne s'échappe pas, donc $z \in K(f_0, g_\sigma)$, mais arbitrairement près de z on peut trouver un z' tel que $g_\sigma^m(z') \in \mathbf{C} - K(f_0)$ puisque g_σ^m est ouverte, donc $z \in \partial K(f_0, g_\sigma)$. Par suite $J(f_0, g_\sigma) \subset \partial K(f_0, g_\sigma)$.

Réciproquement, soit $z \in \partial K(f_0, g_\sigma)$, et fixons $\delta > 0$, z' avec $|z' - z| < \delta$ et m tel que $g_\sigma^m(z') \in \mathbf{C} - K(f_0)$. Ou bien $g_\sigma^m(z)$ est défini, ou bien $(\exists m' < m) g_\sigma^{m'}(z) \in J(f_0)$. Dans le premier cas, $g_\sigma^m(z) \in K(f_0)$ et $g_\sigma^m(z') \in \mathbf{C} - K(f_0)$, donc il existe un z'' dans le segment $[z, z']$ tel que $g_\sigma^m(z'') \in J(f_0)$.

Dans les deux cas $d(z, J(f_0, g_\sigma)) < \delta$.

Comme ceci vaut pour tout $\delta > 0$, on a $z \in J(f_0, g_\sigma)$.

c.q.f.d.

Nous fixons notre intérêt temporairement sur le cas où σ est réel. Comme $g_{\sigma+1} = g_\sigma \circ f_0 - f_0 \circ g_\sigma$, les ensembles $K(f_0, g_\sigma)$ et $J(f_0, g_\sigma)$ ne dépendent que de la classe θ de σ dans $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Nous les notons $K(f_0, \theta)$ et $J(f_0, \theta)$.

Les propriétés de semi-continuité s'étendent à ce contexte : la proposition ci-dessous généralise le théorème 5.1.

PROPOSITION 19.2. — *Soit (ε_ν) une suite tendant vers θ avec $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \sigma \in \mathbf{T}$. Alors*

- (a) $\partial(K(f_{\varepsilon_\nu}), K(f_0, \theta)) \rightarrow 0$;
- (b) $\partial(J(f_0, \theta), J(f_{\varepsilon_\nu})) \rightarrow 0$.

Remarque 19.3. — Nous verrons au § 21 qu'en fait on a $K(f_0, \theta) = J(f_0, \theta)$ pour $\sigma \in \mathbf{R}$, de sorte que $K(f_{\varepsilon_\nu})$ tend vers $K(f_0, \theta)$. Nous avons énoncé la proposition 19.2 sous cette forme à titre d'étape dans la démonstration de ce fait, et aussi parce qu'elle se généralise à des valeurs non réelles de ε comme on le verra au § 22.

Démonstration de la Proposition 19.2.

(a) Si z s'échappe par (f_0, g_σ) , tout point z' suffisamment voisin de z s'échappe par (f_0, σ) , et aussi par f_{ε_ν} pour ν assez grand en vertu de la proposition 18.2. Par suite l'ensemble

$$X = \bigcup (\{\varepsilon_\nu\} \times K(f_{\varepsilon_\nu})) \cup (\{0\} \times K(f_0, g_\sigma))$$

est fermé dans $(\{\varepsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}} \cup \{0\}) \times D_4$, donc compact, et on peut appliquer la proposition 2.1.

(b) Soit $\sigma \in \mathbf{R}$ un représentant de θ , et définissons $n_\nu \in \mathbf{N}$ de façon que $\tilde{\tau}(\varepsilon_\nu) + \eta_\nu \rightarrow \sigma$.

Soit X_0 un point périodique répulsif pour f_0 . Par le théorème des fonctions implicites, on peut trouver une application analytique $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ donnant x_0 et telle que x_ε soit périodique répulsif de même période pour f_ε , au moins si ε est assez petit.

Les points z tels que $(\exists m, \ell) f_0^\ell g_\sigma^m(z) = x_0$ forment un ensemble dense dans $J(f_0, g_0)$. Pour un tel point z , on a $g_\sigma^i(z) \in K(f_0)$ pour $0 \leq i < m$, et $f_{\varepsilon_\nu}^{mn_\nu} \rightarrow g_\sigma^m$ uniformément sur un voisinage de z . On peut donc trouver une suite (z_ν) tendant vers z telle que $f_{\varepsilon_\nu}^{mn_\nu + \ell}(z_\nu) = x_{\varepsilon_\nu}$. Par suite $d(z, J(f_{\varepsilon_\nu})) \rightarrow 0$.

Par un raisonnement semblable à celui de la démonstration du Th. 5.1 (b), on montre que

$$\partial(J(f_0, \theta), J(f_{\varepsilon_\nu})) \rightarrow 0.$$

c.q.f.d.

20. Le cas où le point critique s'échappe

Soit ω le point critique de f_0 à savoir $\omega = -1/2$. Choisissons $\sigma \in \mathbf{C}$.

THÉORÈME 20.1 (P. Lavaurs). — *Si $\omega \notin K(f_0, g_0)$, l'ensemble $K(f_0, g_\sigma)$ est d'intérieur vide. En d'autres termes on a $K(f_0, g_\sigma) = J(f_0, J_\sigma)$.*

Ce résultat est assez délicat à démontrer, et nous nous contenterons d'indiquer les pas de la démonstration. Tous les résultats de ce paragraphe sont tirés de la thèse de Lavaurs.

Nous disons qu'un point z est périodique pour (f_0, g_σ) si

$$(\exists m, \ell, m + \ell > 0) \quad f_0^\ell \circ g_\sigma^m(z) = z$$

(ce qui signifie que $f_0^\ell g_\sigma^m(z)$ est défini et $= z$). Le multiplicateur ρ de z est alors $(f_0^\ell \circ g_\sigma^m)'(z)$, nous disons que z est répulsif si $|\rho| > 1$, etc. Les points périodiques de f_0 sont périodiques pour (f_0, g_σ) , car on peut prendre $m = 0$.

Un point périodique pour (f_0, g_σ) est aussi périodique pour $(f_0, g_{\sigma-1})$ car $g_\sigma^m = f_0^m g_{\sigma-1}^m$. Nous dirons que z est un *point périodique généralisé pour (f_0, g_σ)* si z est périodique pour $(f_0, g_{\sigma-k})$ pour un certain $k \in \mathbf{N}$.

Il nous faut également prendre en compte les deux *multiplicateurs virtuels* (ou *multiplicateurs renormalisés*) du point fixe α_0 de f_0 . Ils sont définis de la façon suivante :

L'application g_σ induit un isomorphisme

$$E_\sigma : X_0^- = V^-/f_0 \xrightarrow{\approx} X_0^+ = V^+/f_0.$$

D'autre part un point $\xi \in X_0^+$ qui est suffisamment voisin d'un des bouts du cylindre est représenté par des points de $V^+ \cap \overset{\circ}{K}(f_0)$ qui sont dans la même orbite, et qui définissent donc un point du quotient $\overset{\circ}{K}(f_0)/f_0$ qui est aussi X_0^- . On définit de cette façon l'application des cornes $h : X_0^+ - A \rightarrow X_0^-$, où A est un anneau compact.

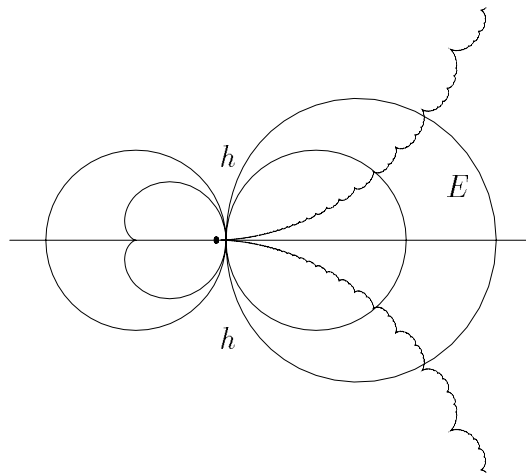


Figure 9

En composant, on obtient une application $E_\sigma \circ h : X_0^+ - A \rightarrow X_0^+$. On compactifie X_0^+ en la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, envoyant les deux bouts du cylindres sur 0 et ∞ . On obtient ainsi une application

$$L : \overline{\mathbb{C}} - A \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

ayant 0 et ∞ comme points fixes, et que nous appelons la *renormalisée* (parabolique) de (f_0, g_σ) . Les *multiplicateurs virtuels* de (f_0, g_σ) en α_0 sont par définition les multiplicateurs de L en 0 et ∞ . On dit que α_0 est virtuellement attractif d'un côté et virtuellement répulsif de l'autre si l'un de ces multiplicateurs est de module < 1 et l'autre de module > 1 , etc.

Si α_0 est virtuellement attractif, parabolique ou de Siegel d'un côté, on peut définir son bassin ou son domaine de Siegel de ce côté. Les théorèmes 4.2 et 4.3 de Sullivan et Fatou s'étendent à ce contexte :

PROPOSITION 20.2. — *Toute composante connexe U de $\overset{\circ}{K}(f_0, g_\sigma)$ est pré-périodique au sens généralisé, c'est à dire qu'il existe des entiers naturels ℓ, m, k avec $\ell + m > 0$ tels que $f_0^\ell g_\sigma^m(U)$ soit périodique pour $(f_0, g_{\sigma-k})$.*

PROPOSITION 20.3. — *Toute composante connexe périodique de $\mathring{K}(f_0, g_\sigma)$ est de l'un des types suivants :*

- (i) *le bassin attractif, le bassin parabolique ou le disque de Siegel d'un point périodique pour (f_0, g_σ) autre que le point fixe parabolique α_0 ;*
- (ii) *le bassin attractif virtuel, le bassin parabolique virtuel ou le domaine de Siegel de α_0 d'un côté.*

Pour obtenir le Théorème 20.1, il nous reste à démontrer :

PROPOSITION 20.4. — *Si ω n'est pas dans $K(f_0, g_\sigma)$, tous les points périodiques pour (f_0, g_σ) sont répulsifs, sauf le point parabolique α_0 qui, lui, est virtuellement répulsif des deux côtés.*

21. Le cas où σ est réel

PROPOSITION 21.1. — *Pour $\sigma \in \mathbf{R}$, on a*

$$K(f_0, g_\sigma) = J(f_0, g_\sigma).$$

Démonstration. — On a $\widehat{\phi}^-(\mathbf{R} \cap \mathring{K}(f_0)) = \mathbf{R}$, $T_\sigma(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et $\widehat{\psi} + (\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+^*$. Donc $g_\sigma(\omega) \in \mathbf{R}_+^* \subset \mathbf{C} - K(f_0) \subset \mathbf{C} - K(f_0, g_\sigma)$, et on peut appliquer le Th. 20.1. c.q.f.d.

COROLLAIRE 21.2. — *Soit (ε_ν) une suite tendant vers 0 dans $]0, \varepsilon_0]$ telle que $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \theta \in \mathbf{T}$. Alors $K(f_{\varepsilon_\nu})$ tend vers $K(f_0, \theta)$ pour la métrique de Hausdorff.*

Démonstration. — Ce n'est pas autre chose que la Prop. 19.2, en remarquant que l'on a $K(f_{\varepsilon_\nu}) = J(f_{\varepsilon_\nu})$ car $c_{\varepsilon_\nu} = \frac{1}{4} + \varepsilon_\nu$ est en dehors de l'ensemble de Mandelbrot, et $K(f_0, \theta) = J(f_0, \theta)$ d'après la Prop. 21.1. c.q.f.d.

Ce corollaire constitue un raffinement du Th. 11.3, qui est donc démontré (à partir des résultats admis au §20).

22. Et pour ε non réel ?

Faisons maintenant parcourir à ε le secteur $S \subset \mathbf{C}$ défini par $|\varepsilon| \leq r_0 = \frac{1}{25}$ et $|\operatorname{Arg} \varepsilon| \leq M/4$, soit $\operatorname{Re} \varepsilon \geq |\operatorname{Im} \varepsilon|$. L'application $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$ a deux points fixes $\alpha = i\sqrt{\varepsilon}$ et $\alpha' = -i\sqrt{\varepsilon}$. Entre les deux, on a encore une dynamique de batteur à œufs.

On peut définir pour tout $\varepsilon \in S^* = S - \{0\}$ des ouverts V_ε^+ et V_ε^- de façon que :

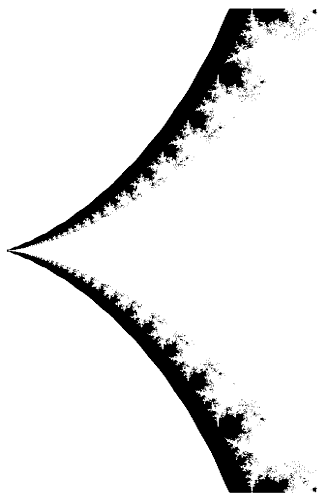


Figure 10

(1) V_ε^- tendent vers $V_0^- = V^-$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ au sens suivant : $\overline{V_\varepsilon^-} \rightarrow \overline{V_0^-}$ et $\partial V_\varepsilon^- \rightarrow \partial V_0^-$ pour la métrique de Hausdorff (ce qui entraîne que tout compact de V_0^- est contenu dans V_ε^- pour ε assez voisin de 0), de même pour V_ε^+ ;

(2) $V_\varepsilon^-/f_\varepsilon$, $V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$ et $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$ soient des cylindres topologiques, et les inclusions de $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ dans V_ε^- et V_ε^+ induisent des bijections de $(V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+)/f_\varepsilon$ sur $V_\varepsilon^-/f_\varepsilon$ et $V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$.

Cette fois nous ne cherchons pas à définir V_ε^- et V_ε^+ explicitement.

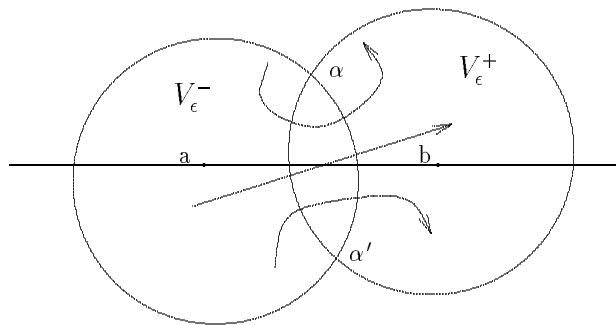


Figure 11

On a encore des coordonnées de Fatou $\phi_\varepsilon^- : V_\varepsilon^- \rightarrow \mathbf{C}$ et $\phi_\varepsilon^+ : V_\varepsilon^+ \rightarrow \mathbf{C}$. Elles sont uniques à une constante additive près et diffèrent par une constante sur $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$. Pour ε assez petit, on a $a = -1/8 \in V_\varepsilon^-$ et $b = 1/8 \in V_\varepsilon^+$, et on peut s'arranger pour que cela ait lieu pour tout $\varepsilon \in S$. On normalise ϕ_ε^- et ϕ_ε^+ par $\phi_\varepsilon^-(a) = \phi_\varepsilon^+(b) = 0$, et on définit la phase relevée $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ comme la valeur de $\phi_\varepsilon^+ - \phi_\varepsilon^-$ sur $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$.

La fonction $\tilde{\tau}$ est holomorphe, et le développement limité

$$\tilde{\tau}(\varepsilon) = -\pi/\sqrt{\varepsilon} + \eta + o(1)$$

est valable au voisinage 0 sur S . On définit la *phase complexe* $\tau(\varepsilon)$ comme la classe de $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ dans \mathbf{C}/\mathbf{Z} .

Dans ce cadre, la Proposition 19.2 est valable sans changement, avec la même démonstration. Les résultats du §20 ont été énoncés avec σ complexe, ils peuvent donc s'appliquer légitimement. Mais les résultats du §21 sont spécifiques du cas $\sigma \in \mathbf{R}$, (ε_ν) suite dans \mathbf{R}_+^* .

Prenons maintenant une suite (ε_ν) tendant vers 0 dans S^* , avec $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \theta \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$.

• Si $K(f_0, \theta) = J(f_0, \theta)$, on a $K(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow K(f_0, \theta)$ et $J(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow J(f_0, \theta) = K(f_0, \theta)$ (cf. Proposition 2.1).

• Si l'intérieur de $K(f_0, \theta)$ consiste exclusivement en bassins attractifs ou virtuellement attractifs, on peut adapter la démonstration du Corollaire 6.2 et montrer que $K(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow K(f_0, \theta)$ et $J(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow J(f_0, \theta)$.

• Dans le cas général, on peut toujours extraire de (ε_ν) une suite telle que $f(\varepsilon_\nu)$ et $J(\varepsilon_\nu)$ aient des limites K^* et J^* . On a alors

$$J(f_0) \subsetneq J(f_0, \theta) \subset J^* \subset K^* \subset K(f_0, \theta) \subsetneq K(f_0).$$

Ceci garantit en tout cas qu'on a une discontinuité pour $f \mapsto K(f)$ et $f \mapsto J(f)$ le long de la suite (ε_ν) .

23. L'éléphant limite

Dans le plan des valeurs de σ , définissons ${}^\sigma M$ par

$${}^\sigma M = \{\sigma \mid \omega \in K(f_0, g_0)\}.$$

Cet ensemble est invariant par la translation $T_1 : \sigma \mapsto \sigma + 1$

Figure 12 : ${}^\sigma M$

Considérons d'autre part l'ensemble de Mandelbrot ${}^c M = M$, qui est le lieu de connexité de la famille $(z^2 + c)_{c \in \mathbf{C}}$. Notons w_0 la composante principale de ${}^c M$ (celle qui contient 0). Soit ${}^\lambda M$ l'image inverse de ${}^c M$ par $\lambda \mapsto c = \lambda/2 - \lambda^2/4$, qui est le lieu de connexité de la famille $(\lambda z(1-2))_{\lambda \in \mathbf{C}}$. Correspondant à W^0 il y a dans ${}^\lambda M$ les

deux disques $D_{0,1}$ et $D_{2,1}$. En faisant le nouveau changement de variable $\mu = \frac{-2i\pi}{\lambda - 1}$, on obtient les deux demi plans $\{\mu \mid \text{Im } \mu > \pi\}$ et $\{\mu \mid \text{Im } \mu < -\pi\}$, correspondant aux deux disques. Il contient des “membres” attachés aux points $x_n \pm i\pi$, $x_n = \frac{\pi}{\text{tg}(\pi/n)}$, qui ressemblent à des éléphants, avec des bébés éléphants entre eux.

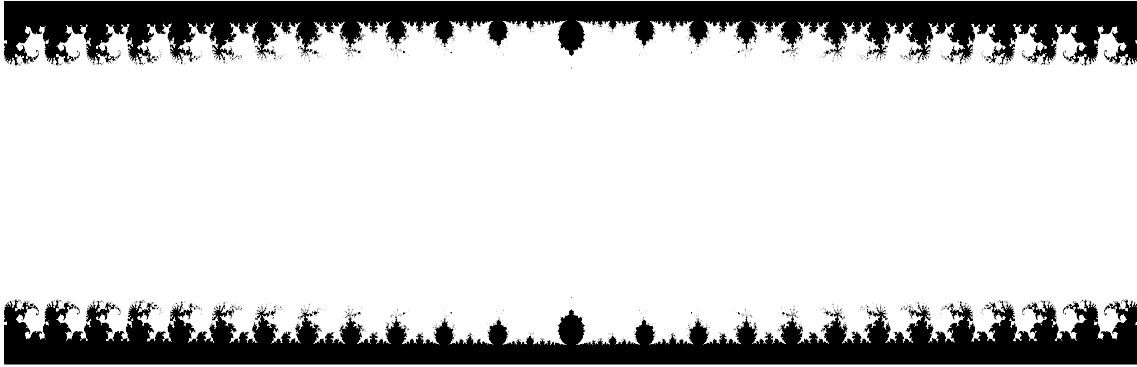


Figure 13 : ${}^\mu M$

Si on regarde l'image $\tilde{\tau} M$ de $M \cap S^*$ par $\tilde{\tau} : S^* \rightarrow \mathbf{C}$, on obtiendra essentiellement la même chose puisque $c = \frac{1}{4} + \varepsilon$ donne $\mu = \frac{-\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ et qu'on a $\tilde{\tau}(\varepsilon) = \mu + \eta + o(1)$. Les dessins d'ordinateur montrent que ${}^\mu M$ ressemble de plus en plus à ${}^\sigma M$ à mesure qu'on se déplace vers la gauche. Pour formuler un énoncé précis, il nous faut définir une topologie sur l'ensemble des fermés non nécessairement compacts de \mathbf{C} .

Pour $X \subset \mathbf{C}$ fermé et $R > 0$, posons

$$[X]_R = (X \cap D_R) \cup \partial D_R.$$

On dit qu'une suite (X_n) de fermés tend vers un fermé X_0 si $[X_n]_R$ tend vers $[X_0]_R$ pour tout R fixé au sens de la métrique de Hausdorff.

CONJECTURE 23.1. — *Le translaté $T_{\eta+n} {}^\mu M$ tend vers ${}^\sigma M$ quand $n \rightarrow \infty$.*

La moitié de cette conjecture peut se démontrer assez facilement.

THÉORÈME 23.2 (Lavaurs). — *Pour tout $R > 0$, $\partial([T_{\eta+n} {}^\mu M]_R, [{}^\sigma M]_R) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

C'est un énoncé de semi-continuité supérieure. Le point clé est encore que le fait de s'échapper est une propriété ouverte.

L'autre moitié, $\partial([{}^\sigma M]_R, [T_{\eta+n} {}^\mu M]_R) \rightarrow 0$, semble pour le moment hors d'atteinte. On peut montrer que

$$(\forall R) \quad \partial([\partial {}^\sigma M]_R, [T_{\eta+n} \partial {}^\mu M]_R) \rightarrow 0$$

(attention, dans cette formule, ∂ a deux sens différents !). Mais il reste une possibilité que l'intérieur de ${}^\sigma M$ ait des composantes farfelues qui ne soient pas limites de composantes non hyperboliques de M ; autant dire que la question est au moins du niveau de la conjecture M.L.C.

24. Autres polynômes ayant un cycle parabolique

Regardons d'abord les polynômes quadratiques, qui peuvent toujours par conjugaison affine se mettre sous la forme $P_c : z \mapsto z^2 + c$. Soit P_{c_0} un polynôme ayant un cycle parabolique d'ordre k , de multiplicateur $p = e^{2i\pi p/q}$ (avec p et q premier entre eux). Dans le plan des paramètres, c_0 est la "racine" d'une "composante hyperbolique" de \mathring{M} , composante connexe de \mathring{M} telle que P_c a un cycle attractif pour $c \in W$.

Il convient de distinguer deux cas :

Cas primitif. — $\rho = 1$, W est une composante primitive ; ∂W a un point de rebroussement aux points c_0 , le cycle attractif de P_c pour $c \in W$ est d'ordre k .

La fermeture de chaque composante connexe de $\mathring{K}(P_{c_0})$ est un "chou-fleur". Quand c parcourt un petit secteur de sommet c_0 axé sur le rebroussement, chaque chou-fleur subit une modification semblable à celle du chou-fleur standard $K(P_{1/4})$, sauf qu'il n'y a en plus des filaments qui suivent grossièrement le segment réel axe du chou-fleur et toutes ses images réciproques. Si c est sur le filament de M qui mène à c_0 , les filaments dans $k(P_c)$ maintiennent l'ensemble de Julia connexe.

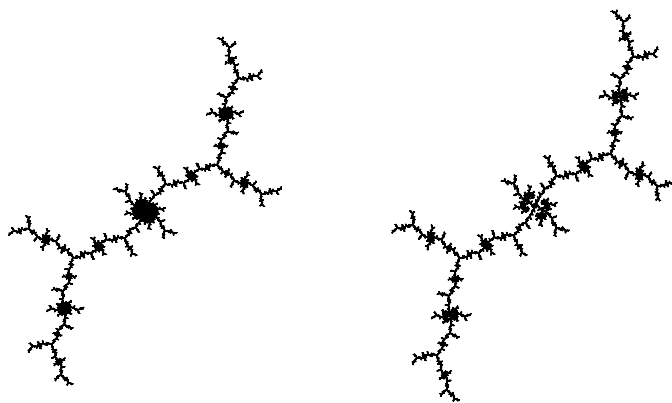


Figure 14

Cas satellite. — $\rho = e^{2i\pi p/q}$, $0 < p < q$, p et q premiers entre eux. La composante W est attachée en c_0 à une composante W_0 et c_0 a p/q comme argument interne dans W_0 . La période de f_c pour $c \in W$ (resp. W_0) est k_q (resp. k). On peut dessiner dans \mathbf{C} deux secteurs S' et S'' de sommet c_0 , centrés sur les deux demi-tangentes communes à W_0 et W .

Quand c décrit ces secteurs, il se produit pour chaque composante connexe de $\mathring{K}(P_{c_0})$ des phénomènes analogues à ceux qui concernent le chou-fleur standard.

Pour les polynômes quadratiques, le nombre Q d'axes de répulsion en un point parabolique de multiplicateur p/q est toujours égal à q . Pour un polynôme de degré supérieur, on peut seulement affirmer que Q est multiple de q . Si $Q = q$, il se produit des phénomènes analogues à ceux du cas quadratique, et qui peuvent être analysés par la même méthode. Si $Q > q$, la situation est plus compliquée, et n'a jamais été complètement étudiée jusqu'ici. Mais il y a toujours des sous-familles qui peuvent être analysées de cette façon.

En tout cas il y a toujours une discontinuité pour $f \mapsto K(f)$ et une pour $f \mapsto J(f)$, en un point f_0 qui a un cycle parabolique.

Bibliographie

- [Bbk] N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques, Topologie Générale, Ch. 1*, Hermann, Paris, 1971.
- [Bl] P. BLANCHARD, *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 85–141.
- [Bra] B. BRANNER, *The Mandelbrot set*, in *Chaos and Fractals : The Mathematics Behind the Computer Graphics*, R.L. Devaney and L. Keen (editors), Proceedings of Symposia in Applied Math. **39** (1989), 75–105.
- [Bro] H. BROLIN, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Arkiv för Mat. **6** (1965), 103–144.
- [Cr] H. CREMER, *Über der Häufigkeit der Nichtzentren*, Math. Ann. **115** (1938), 573–580.
- [D1] A. DOUADY, *Systèmes dynamiques holomorphes*, in *Seminaire Bourbaki, exposé n° 599*, Astérisque **105-106** (1983), 39–63.
- [D2] A. DOUADY, *Julia sets and Mandelbrot set*, in [PeR].
- [D3] A. DOUADY, *Disques de Siegel et anneaux de Hermann*, in *Seminaire Bourbaki, exposé n° 677*, Astérisque **152-153** (1987), 151–172.
- [D4] A. DOUADY, *Prolongements de mouvements holomorphes*, in *Seminaire Bourbaki, exposé n° 775*, Astérisque (1993).
- [DH1] A. DOUADY, J.H. HUBBARD, *Itération des polynômes quadratiques complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 123–126.
- [DH2] A. DOUADY, J.H. HUBBARD, *Etude dynamique des polynômes complexes*, Publ. Math. d’Orsay, 84–02, 1984 et 85–02, 1985.
- [DH3] A. DOUADY, J.H. HUBBARD, *on the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **18** (1975), 287–343.
- [Ec] J. ECALLE, *Théorie itérative : introduction à la théorie des invariants holomorphes*, J. Math. Pures Appl. **54** (1975), 183–258.
- [Fa1] P. FATOU, *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **143** (1906), 546–548.
- [Fa2] P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–271 et **48** (1920), 33–94 et 208–314.
- [Ju] G. JULIA, *Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles*, J. Math. Pures Appl. **4** (1918), 47–245.

- [Lav] P. LAVAURS, *Systèmes dynamiques holomorphes, explosion de points périodiques paraboliques*, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, 1989.
- [Le] L. LEAU, *Etude sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **11** (1987), 1–110.
- [Lyu] M. YU. LYUBICH, *The dynamics of rational transforms : the topological picture*, Russian Math. Surveys **41** (1986), 43–117.
- [Mi] J. MILNOR, *Dynamics in one complex variable : Introductory lectures*, Institute for Math. Sci., SUNY, Stony Brook, 1990.
- [MSS] R. MAÑE, P. SAD, D. SULLIVAN, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **16** (1983), 193–217.
- [PeR] H.-O. PEITGEN, P. RICHTER, *the Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986.
- [Sh] M. SHISHIKURA, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Annals of Math. (1993).
- [Si] C.L. SIEGEL, *Iteration of analytic functions*, Annals of Math. **43** (1942), 607–612.
- [St] N. STEINMETZ, *Rational Iteration (Complex Analytic Dynamical Systems)*, de Gruyter, Berlin, 1993.
- [Su] D. SULLIVAN, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Annals of Math. **122** (1985), 401–418.
- [Ta] TAN LEI, *Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 587–617.
- [Vo] S.M. VORONIN, *Analytic classifications of germs of conformal mappings of germs $(\mathbf{C}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ with identity linear part*, Functional Analysis Appl. **15** (1981), 1–13.
- [Yo] J.-C. YOCCOZ, *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$* , C. R. Acad. Sci. Paris **306** (1988), 55–58.

Département de Mathématiques
Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay cedex
France

Du billard convexe aux géodésiques du tore

PATRICE LE CALVEZ

La théorie des systèmes dynamiques est l'étude des propriétés qualitatives des orbites d'un flot défini par un champ de vecteurs sur une variété, ou encore de la suite des images successives d'un point par un difféomorphisme (ou d'une application de classe C^1). Les équations de la mécanique engendrent un flot conservatif (les transformations préservent une forme symplectique et préservent donc une forme volume). Sur une surface, les propriétés conservatives se traduisent par le fait de préserver l'aire. La dynamique des systèmes conservatifs est en général différente des systèmes dissipatifs. La recherche d'orbites périodiques ou d'orbites ayant des propriétés données est une des questions fondamentales.

Nous allons exposer une méthode variationnelle d'obtention d'orbites périodiques (et d'autres orbites ayant des propriétés remarquables) pour des systèmes conservatifs, introduite indépendamment par S. Aubry et J. Mather, il y a une quinzaine d'années. Le premier travaillait en physique du solide et étudiait les configurations stationnaires d'une suite infinie de particules sur une droite, liées entre elles par un potentiel harmonique et soumises à un potentiel dépendant de la position sur la droite mais périodique. Le second étudiait une classe de difféomorphismes, que l'on retrouve souvent en systèmes dynamiques, les difféomorphismes conservatifs de l'anneau déviant la verticale.

Un cas particulier d'application de ces résultats est le problème du billard convexe, problème que G.D. Birkhoff avait déjà étudié, utilisant déjà certains arguments de la méthode; nous commencerons par étudier ce cas. Le type de résultat obtenu par Aubry et Mather se retrouve également dans un ancien travail de G. Hedlund consacré à l'étude des géodésiques minimales sur le tore de dimension deux. V. Bangert a montré comment les résultats de Hedlund se déduisaient en fait de la méthode d'Aubry-Mather.

Nous allons exposer cette méthode, qui est bi-dimensionnelle, et les appliquer au cas dont nous venons de parler. Nous concluons en indiquant comment ils se généralisent en dimension supérieure : nous verrons, suivant Mather, que le problème général est l'étude des extrémales d'un lagrangien dépendant du temps t et périodique en t sur une variété compacte (les extrémales sont les courbes qui vérifient les équations d'Euler-Lagrange), dont l'action est minimale sur tout sous-segment.

1. Le billard convexe

Considérons dans le plan \mathbf{R}^2 une courbe simple convexe Γ de classe C^k ($k \geq 2$) et de longueur 1 et définissons l'application suivante :

à chaque couple formé d'un point de Γ et d'une droite passant par ce point, on associe le couple formé d'une part du second point d'intersection de la droite avec Γ , d'autre part de la droite symétrique par rapport à la normale à Γ en ce second point (voir figure 1).

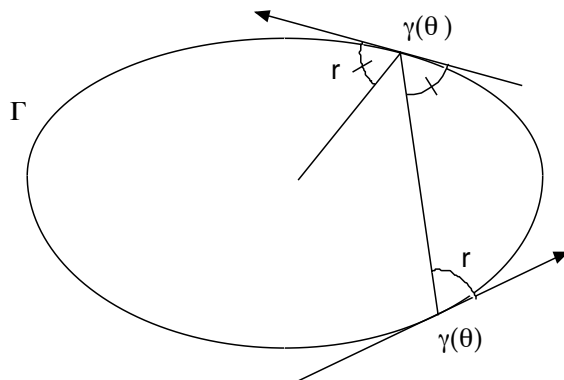


Figure 1

Notons $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le tore de dimension 1 et donnons-nous une paramétrisation $\gamma : \mathbf{T} \rightarrow \Gamma, \theta \rightarrow \gamma(\theta)$ de Γ avec $\|\gamma'(\theta)\| = 1$. On peut caractériser chaque droite passant par $\gamma(\theta)$ par l'angle r , défini modulo π , que fait $\gamma'(\theta)$ avec tout vecteur directeur de la droite. On obtient une application Φ de l'ensemble $\mathbf{T} \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ dans lui-même, qui est bijective et qui induit l'identité sur le tore $\mathbf{T} \times \{0\}$ (c'est le cas où la droite est tangente à Γ).

PROPOSITION. — *L'application Φ est un homéomorphisme et sa restriction à $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} - \{0\})$ est un difféomorphisme de classe C^{k-1} .*

Démonstration. — Si θ et θ' sont deux points de \mathbf{T} distincts, on note $R(\theta, \theta')$ l'angle entre les vecteurs $\gamma'(\theta)$ et $\gamma(\theta') - \gamma(\theta)$ et $R'(\theta, \theta')$ l'angle entre les vecteurs $\gamma(\theta') - \gamma(\theta)$ et $\gamma'(\theta')$; si θ et θ' sont égaux, on pose $R(\theta, \theta') = R'(\theta, \theta') = 0$. On obtient ainsi deux applications de classe C^{k-1} vérifiant

$$\frac{\partial R}{\partial \theta'}(\theta, \theta') = \frac{\sin R'(\theta, \theta')}{\|\gamma(\theta) - \gamma(\theta')\|} > 0$$

quand θ et θ' sont distincts.

On en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{T}^2 &\rightarrow \mathbf{T} \times (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}) \\ (\theta, \theta') &\mapsto (\theta, \mathbf{R}(\theta, \theta')) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme qui envoie $\Delta = \{(\theta, \theta), \theta \in \mathbf{T}\}$ sur $\mathbf{T} \times \{0\}$ et qui induit un difféomorphisme de classe C^{k-1} entre $\mathbf{T}^2 - \Delta$ et $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} - \{0\})$. On montre que

$$\begin{aligned} \Psi' : \mathbf{T}^2 &\rightarrow \mathbf{T} \times (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}) \\ (\theta, \theta') &\mapsto (\theta', R'(\theta, \theta')) \end{aligned}$$

vérifie les mêmes propriétés : on obtient la proposition comme conséquence de l'égalité $\Phi = \Psi' \circ \Psi^{-1}$. \square

Remarque 1. — Si $\rho(\theta)$ est la courbure en θ , la quantité $\frac{\partial R}{\partial \theta'}(\theta, \theta)$ est égale à $\rho(\theta)/2$, ainsi si la courbure ne s'annule jamais les applications Ψ , Ψ' , et Φ sont des difféomorphismes de classe C^{k-1} de la variété toute entière.

Remarque 2. — L'application

$$\begin{aligned} h : \mathbf{T}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (\theta, \theta') &\mapsto \|\gamma(\theta) - \gamma(\theta')\| \end{aligned}$$

est différentiable sur $\mathbf{T}^2 - \Delta$ et on a

$$dh = \cos R'(\theta, \theta')d\theta' - \cos R(\theta, \theta')d\theta.$$

En écrivant $ddh = 0$, on obtient que Φ préserve la forme volume $\omega = \sin r d\theta \wedge dr$. Le problème du billard, défini dynamiquement par l'application Φ est donc de type conservatif.

Remarque 3. — Plutôt que d'étudier Φ , on peut étudier le relèvement F à l'anneau $\mathbf{T} \times [0, \pi]$: c'est l'unique homéomorphisme de $\mathbf{T} \times [0, \pi]$ tel que $(\theta', r' + \pi\mathbf{Z}) = \Phi(\theta, r + \pi\mathbf{Z})$ si $F(\theta, r) = (\theta', r')$. L'application F est isotope à l'identité (dans le cas présent cela signifie que F laisse invariant chaque bord de l'anneau et préserve l'orientation), elle induit l'identité sur chaque bord de l'anneau, enfin c'est un difféomorphisme de classe C^{k-1} sur l'intérieur de l'anneau (sur l'anneau fermé dans le cas où la courbure ne s'annule pas) qui préserve une forme volume. Par le changement de variable $(\theta, s) = (\theta, \cos r)$, on obtient un homéomorphisme de $\mathbf{T} \times [-1, 1]$ qui préserve l'aire.

Voyons maintenant comment Birkhoff construit des orbites périodiques du billard (voir [Bi2]).

Parmi toutes les cordes de notre courbe Γ il y en a au moins une, joignant deux points $\gamma(\theta_1)$ et $\gamma(\theta_2)$, qui maximise la longueur. Cette corde est perpendiculaire à la tangente à Γ en chacune des extrémités, l'ensemble $\{(\theta_1, \pi/2), (\theta_2, \pi/2)\}$ est donc une orbite de période 2 de F (voir figure 2).

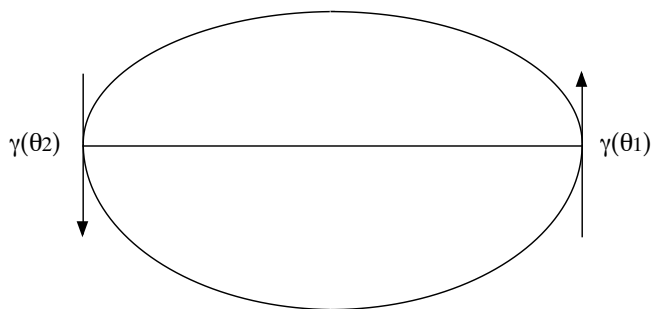


Figure 2

Parmi tous les triangles inscrits dans Γ , il y en a au moins un de périmètre maximal et celui-ci est non dégénéré (il ne se réduit évidemment ni à un point ni à un segment). Notons $\gamma(\theta_1)$, $\gamma(\theta_2)$ et $\gamma(\theta_3)$ les trois extrémités et faisons varier l'extrémité $\theta = \theta_2$. La dérivée du périmètre du triangle, fonction de θ , doit s'annuler en θ_2 . Comme cette dérivée est égale au signe près à $\cos R'(\theta_1, \theta_2) - \cos R(\theta_2, \theta_3)$, on en déduit que le segment joignant $\gamma(\theta_1)$ et $\gamma(\theta_2)$ et le segment joignant $\gamma(\theta_3)$ et $\gamma(\theta_2)$ sont symétriques par rapport à la normale en $\gamma(\theta_2)$. Comme on a une situation analogue en θ_1 et en θ_3 , on en déduit que l'ensemble

$$\{(\theta_1, R(\theta_1, \theta_2)), (\theta_2, R(\theta_2, \theta_3)), (\theta_3, R(\theta_3, \theta_1))\}$$

est une orbite de F , de période 3 (voir figure 3). Remarquons que l'ensemble $\{(\theta_1, \pi - R(\theta_1, \theta_2)), (\theta_2, \pi - R(\theta_2, \theta_3)), (\theta_3, \pi - R(\theta_3, \theta_1))\}$ est également une orbite périodique de F qui correspond à la même trajectoire du billard, parcourue dans l'autre sens.

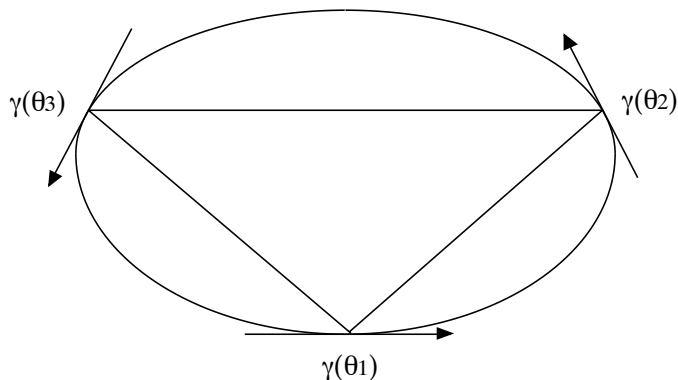


Figure 3

En considérant le quadrilatère, le pentagone, *etc*, inscrit qui maximise le périmètre, on obtient de la même façon une orbite périodique (et même deux) pour chaque période $q \geq 4$.

On peut généraliser encore ce procédé et obtenir d'autres orbites périodiques. Fixons un nombre rationnel $\rho = p/q$ strictement compris entre 0 et 1 et écrit sous

forme irréductible. Considérons la partie X de Γ^q formée des q -uplets (z_1, \dots, z_q) tels que les q arcs $z_1z_2, \dots, z_{q-1}z_q, z_qz_1$, orientés positivement, recouvrent la courbe exactement p fois. Définissons une suite $(z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de période q , à partir de notre q -uplet.

A chaque élément (z_1, \dots, z_q) de X on peut associer un polygone, réunion des segments D_i joignant z_i à z_{i+1} , $i \in \{1, \dots, q\}$. Parmi tous les polygones ainsi obtenus, il en existe au moins un de périmètre maximal. Comme dans le cas du triangle, il est clair que z_i et z_{i+1} sont toujours distincts et que les segments D_i et D_{i+1} font un même angle $r_{i+1} \in]0, \pi[$ avec la tangente à Γ en z_{i+1} . Si $z_i = \gamma(\theta_i)$, la réunion Ξ des (θ_i, r_i) , $i \in \{1, \dots, q\}$, est donc une orbite périodique de F de période q .

Rappelons qu'un relèvement de F à $\mathbf{R} \times [0, \pi]$ est un homéomorphisme f de $\mathbf{R} \times [a, b]$ tel que $(\theta' + \mathbf{Z}, r') = F(\theta + \mathbf{Z}, r)$ si $f(\theta, r) = (\theta', r')$. Les relèvements de F se déduisent d'un relèvement donné f en composant cette application par une translation du type $(\theta, r) \mapsto (\theta + k, r)$, où $k \in \mathbf{Z}$. En particulier il existe un unique relèvement f de F à $\mathbf{R} \times [0, \pi]$ égal à l'identité sur $\mathbf{R} \times \{0\}$, il coïncide alors avec la translation de vecteur $(1, 0)$ sur $\mathbf{R} \times \{\pi\}$.

Si $\tilde{\theta}_i$ est un représentant réel de $\theta_i \in \mathfrak{g}$, on a $f^q(\tilde{\theta}_i, r_i) = (\theta_i + p, r_i)$: on dit que l'orbite Ξ est une orbite périodique de nombre de rotation p/q (pour le relèvement f). Il existe donc une orbite périodique de nombre de rotation ρ pour chaque rationnel ρ compris entre 0 et 1 (si ρ est égal à 0 ou à 1 il suffit de prendre un point d'un des deux bords).

On peut préciser la structure de ces orbites, en utilisant le fait que dans un quadrilatère inscrit dans Γ , la somme des longueurs des diagonales est strictement plus grande que la somme des longueurs de deux cotés opposés. Considérons la suite $(z_i^*)_{i \in \mathbf{Z}} = (z_{i+k})_{i \in \mathbf{Z}}$, $1 \leq k < q$. Le polygone défini par le q -uplet (z_1^*, \dots, z_q^*) est égal au premier, bien que les q -uplets soient distincts (car p et q sont premiers entre eux!).

Définissons deux autres q -uplets (z_1^-, \dots, z_q^-) et (z_1^+, \dots, z_q^+) de la façon suivante : posons $z_1^- = z_1$ et $z_1^+ = z_1^*$; posons ensuite $z_i^- = z_i$ et $z_i^+ = z_i^*$ si la somme des longueurs des arcs orientés $z_1z_2, \dots, z_{i-1}z_i$ est strictement plus petite que la somme des longueurs des arcs orientés $z_1z_1^*, z_1^*z_2^*, \dots, z_{i-1}^*z_i^*$; posons $z_i^- = z_i^*$ et $z_i^+ = z_i$ si elle est strictement plus grande; posons $z_i^- = z_i^* = z_i$ si il y a égalité. Les nouveaux q -uplets appartiennent également à X , car la somme des longueurs des arcs orientés $z_1^-z_2^-, \dots, z_{i-1}^-z_i^-$ est égale à la somme des longueurs des arcs $z_1z_2, \dots, z_{i-1}z_i$ si $z_i^- = z_i$ et à $z_1z_1^*, z_1^*z_2^*, \dots, z_{i-1}^*z_i^*$ si $z_i^- = z_i^*$, et de même la somme des longueurs des arcs orientés $z_1^+z_2^+, \dots, z_{i-1}^+z_i^+$ est égale à la somme des longueurs des arcs $z_1z_2, \dots, z_{i-1}z_i$ moins la longueur de l'arc $z_1z_1^*$ si $z_i^+ = z_i$ et à $z_1^*z_2^*, \dots, z_{i-1}^*z_i^*$ si $z_i^+ = z_i^*$.

Si l'on note l_i, l_i^*, l_i^-, l_i^+ , les longueurs respectives des segments associés D_i, D_i^*, D_i^- et D_i^+ , on a l'inégalité $l_i^- + l_i^+ \geq l_i + l_i^*$ et une inégalité stricte dès que $z_i^- = z_i^* \neq z_i$ et $z_{i+1}^- = z_{i+1} \neq z_{i+1}^*$ ou alors si $z_i^- = z_i \neq z_i^*$ et $z_{i+1}^- = z_{i+1}^* \neq z_{i+1}$. Cette situation est donc impossible.

Remarquons que l'égalité $z_i^- = z_i^+ = z_i = z_i^*$ est également impossible, pour tout entier i . En effet, nous avons quatre polygones de périmètres maximaux qui

correspondent donc à une trajectoire du billard. Puisque les q -uplets (z_1, \dots, z_q) et (z_1^*, \dots, z_q^*) sont distincts, il en est de même des segments D_i et D_i^* . La propriété d'angle vérifiée par D_i et D_{i+1} d'une part, par D_i^* et D_{i+1}^* d'autre part oblige le couple (D_i^-, D_{i+1}^-) à être égal à un des couples (D_i, D_{i+1}^*) ou (D_i^*, D_{i+1}) , ce qui contredit la propriété d'angle pour ce polygone de périmètre maximal. On déduit de ce qui précède, d'une part que les q extrémités du polygone sont distinctes, d'autre part que l'application $z_i \mapsto z_{i+1}$ préserve l'ordre cyclique sur l'ensemble des sommets du polygone. Ceci n'est possible que si les z_i s'ordonnent cycliquement sur Γ comme les éléments de la suite $ip/q + \mathbf{Z}$ sur \mathbf{T} .

Sur le dessin suivant (voir figure 4), nous indiquons dans un exemple, où $p/q = 2/5$ pourquoi les z_i correspondant à un polygone de périmètre maximal doivent s'ordonner cycliquement comme les éléments de la suite $ip/q + \mathbf{Z}$ sur \mathbb{S}^1 . Le polygone de droite obtenu à partir des mêmes extrémités de celui de gauche, mais bien ordonnées cycliquement, a un périmètre supérieur à cause de la propriété des diagonales des quadrilatères.

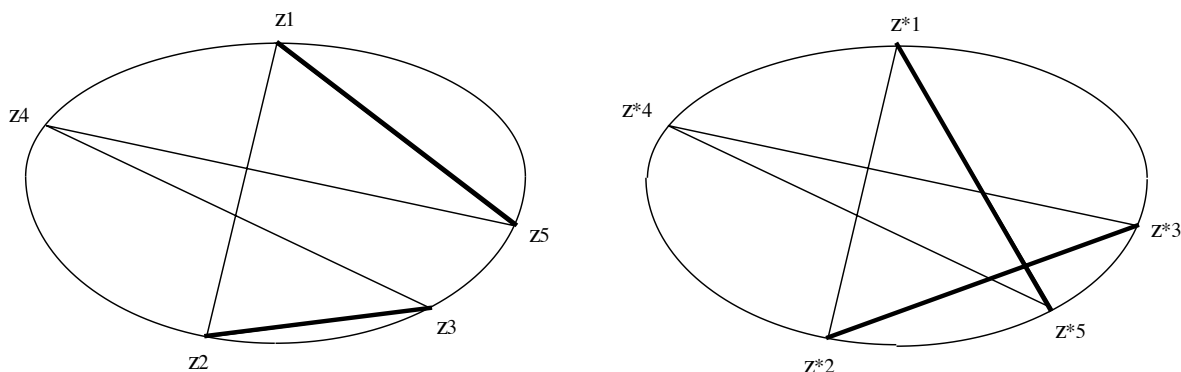


Figure 4

C'est la fonction h qui nous a permis de construire nos orbites périodiques. L'existence de cette fonction est, comme on le verra plus tard, liée à deux propriétés de F : son caractère conservatif et la propriété de *dévi*ation de la verticale décrite ci-dessous :

pour tout $\theta \in \mathbf{T}$, l'application $r \mapsto \theta'(\theta, r)$ est croissante, l'image par F de la verticale $\{\theta\} \times [0, \pi]$ est une courbe qui s'enroule dans le sens direct autour de l'anneau (voir figure 5).

2. Applications déviant la verticale

On dira qu'un difféomorphisme F de l'anneau fermé $\mathbf{T} \times [a, b]$, isotope à l'identité, *dévie la verticale à droite* (resp. *à gauche*) si, pour un relèvement donné $f : (\theta, r) \mapsto (\theta', r')$ de F au revêtement universel $\mathbf{R} \times [a, b]$ de $\mathbf{T} \times [a, b]$, la dérivée de l'application $r \mapsto \theta'(\theta, r)$ est strictement positive (négative), pour tout θ réel.

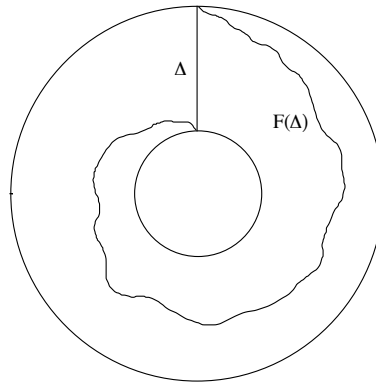


Figure 5

Le fait de dévier la verticale ne dépend pas du relèvement choisi, puisque ceux-ci se déduisent les uns des autres par des translations

On dira également qu'un difféomorphisme F de l'anneau infini $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ dévie la verticale à droite si les applications $r \mapsto \theta'(\theta, r)$, définies pour un relèvement de F , sont des difféomorphismes strictement croissants de \mathbf{R} : en d'autres termes l'image par F d'une verticale est une courbe qui s'enroule dans le sens direct autour de l'anneau en faisant à chaque extrémité un nombre infini de tours.

Cette propriété de déviation de la verticale, que Poincaré avait déjà rencontré dans l'étude du problème à n corps, apparaît très naturellement en systèmes dynamiques et va être fondamentale dans ce qui suit. Commençons par donner quelques exemples.

a. Un exemple explicite

Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^1 et de période 1. Pour tout réel $\lambda > 0$, le difféomorphisme de \mathbf{R}^2 :

$$f_\lambda : (\theta, r) \mapsto (\theta + r, \lambda r + \varphi(\theta + r))$$

relève un difféomorphisme F_λ de $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ qui dévie la verticale à droite. Remarquons que celui-ci préserve l'aire si $\lambda = 1$ et qu'il la diminue si $\lambda < 1$.

b. Au voisinage d'un point fixe elliptique

Dans les systèmes dynamiques, il est important d'étudier la structure d'un difféomorphisme au voisinage d'un point fixe ou d'une orbite périodique, et dans le cas d'un champ de vecteurs, la structure du flot au voisinage d'une singularité ou d'une orbite fermée (ce dernier cas se ramenant d'ailleurs par une section de Poincaré à l'étude d'un difféomorphisme au voisinage d'un point fixe). Un certain nombre de propriétés sont connues dès qu'on ajoute des conditions génériques sur le difféomorphisme ou le champ de vecteurs (on demande au difféomorphisme ou au champ

de vecteurs d'appartenir à un G_δ dense, quand on munit l'ensemble des difféomorphismes ou des champs de vecteurs d'une topologie naturelle), on ne précisera pas les définitions possibles de genericité.

Ainsi, par exemple, si f est un difféomorphisme générique défini au voisinage d'un point fixe z d'une variété M , les valeurs propres de $Df(z)$ sont toutes de module différent de 1 ; si f est un difféomorphisme générique préservant une forme symplectique (la genericité est alors comprise parmi les difféomorphismes conservant cette forme), les valeurs propres sont toutes différentes de 1.

Dans le cas où M est le plan \mathbf{R}^2 et où la forme symplectique est la forme $dx \wedge dy$, le fait de préserver cette forme équivaut au fait de préserver l'aire et l'orientation. Génériquement les valeurs propres de $Df(z)$ dont le produit est nécessairement égal à 1, puisque le jacobien de f est égal à 1 en tout point, sont soit de la forme λ, μ , où λ et μ sont des réels vérifiant $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$, soit de la forme $\lambda, \bar{\lambda}$, où λ est un nombre complexe de module 1 qui n'est pas racine de l'unité. Le premier cas, dit hyperbolique, est le plus simple (existence de variétés stable et instable, conjugaison topologique locale à la partie linéaire). Le second cas, dit elliptique, est beaucoup plus compliqué ; nous expliquerons la dynamique dans le paragraphe 3.

Le théorème qui suit (voir Birkhoff [Bi1]) exprime que dans un bon système de coordonnées, l'application apparaît comme un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale (forme normale de Birkhoff).

THÉORÈME. — *Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ défini au voisinage de $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$, préservant l'aire et l'orientation et tel que les valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ de $Df(0, 0)$ soient sur le cercle unité et vérifient $\lambda^n \neq 1$ pour $n \in \{1, \dots, q\}$. Il existe alors un difféomorphisme h de classe C^∞ , défini au voisinage de $(0, 0)$, laissant fixe ce point, préservant l'aire et l'orientation et tel que $h \circ f \circ h^{-1}$ s'écrit sous la forme suivante, en utilisant la coordonnée complexe z :*

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(|z|^2)} + o(|z|^{q-1}),$$

où $P(X) = a_1 X + \dots + a_m X^m$ est un polynôme réel de degré $m < (q - 1)/2$. \square

Les réels a_1, \dots, a_m ne dépendent que de la fonction f et sont génériquement non nuls. Si c'est le cas, la fonction $z \mapsto \lambda z e^{2i\pi P(|z|^2)}$ laisse invariant chaque cercle $|z| = r$ et induit sur celui-ci une rotation dépendant de façon monotone de r au voisinage de 0. En coordonnées polaires $z = r e^{2i\pi\theta}$, la fonction $g = h \circ f \circ h^{-1}$ est définie dans un voisinage de $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \{0\}$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times [0, +\infty[$ et s'écrit

$$g(\theta, r) = (\theta + \alpha + a_1 r^2 + \dots + a_m r^{2m} + \mu_1(\theta, r), r + \mu_2(\theta, r)),$$

où μ_1 et μ_2 sont des $o(|r|^{2n})$, et où $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$; elle dévie la verticale (au sens local).

c. Le pendule entretenu

Ecrivons l'équation du pendule entretenu :

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \sin 2\pi\theta = p(t),$$

où p est une application de classe C^∞ et de période $T > 0$, et où α est un réel positif ou nul suivant que le pendule soit amorti ou non.

Cette équation se ramène par le changement de variable $r = \dot{\theta}$, $\psi = t$, au champ de vecteurs sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = r, \\ \dot{r} = -\alpha r - \sin 2\pi\theta + p(\psi), \\ \dot{\psi} = 1. \end{cases}$$

Ce champ est transverse à chacune des sections $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \times \{\psi\}$ et de divergence égale à $-\alpha$.

L'application de premier retour F définie sur la section $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \times \{0\}$ peut s'écrire

$$F = F_{n-1} \circ \dots \circ F_0,$$

où F_i est l'application de passage de la section $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \times \{iT/n\}$ à la section $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \times \{(i+1)T/n\}$. On peut montrer que les applications F_i dévient la verticale à droite dès que n est assez grand, et que F est donc la composée d'applications déviant la verticale à droite, diminuant l'aire dans le cas amorti, conservant celle-ci dans le cas contraire.

L'équation d'où provient la propriété de déviation de la verticale est l'égalité naturelle $\dot{\theta} = r$, on retrouvera donc cette propriété dans d'autres équations différentielles du second ordre à coefficients périodiques en t .

Nous ne nous intéresserons dans la suite qu'aux difféomorphismes conservatifs ; on retrouve cependant certains des résultats dans les cas dissipatifs. Rappelons d'abord des propriétés des homéomorphismes du cercle, propriétés qui seront fondamentales pour la suite.

3. Dynamique des homéomorphismes du cercle

Commençons par définir le *nombre de rotation* de Poincaré.

THÉORÈME 3.1. — *Soit g un homéomorphisme strictement croissant de \mathbf{R} vérifiant $g(\theta + 1) = g(\theta) + 1$, pour tout réel θ . Il existe alors un réel ρ tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on ait :*

$$-1 < g^k(\theta) - \theta - k\rho < 1;$$

en particulier,

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{g^k(\theta)}{k} = \rho.$$

Démonstration. — Pour tout entier k , l'application g^k est un homéomorphisme strictement croissant vérifiant $g^k(\theta + 1) = g^k(\theta) + 1$ et l'application $g^k - \text{Id}$ qui est périodique atteint sa borne inférieure m_k en un point θ_k^- et sa borne supérieure M_k en un point θ_k^+ . On peut toujours supposer que $\theta_k^- \leq \theta_k^+ < \theta_k^- + 1$; on en déduit, appliquant g^k , que $M_k + \theta_k^+ < m_k + \theta_k^- + 1$, puis que $m_k \leq M_k < m_k + 1$. Si k et k' sont des entiers strictement positifs, on déduit la relation $km_{k'} \leq m_{kk'} \leq kM_{k'}$ de l'égalité

$$g^{kk'}(\theta) - \theta = \sum_{i=0}^{k-1} g^{k'}(g^{ik'}(\theta)) - g^{ik'}(\theta),$$

puis, par symétrie de k et k' , l'inégalité $m_{k'}/k' \leq M_k/k$. On obtient que $\rho = \sup\{m_k/k, k > 0\} = \inf\{M_k/k, k > 0\}$ et que $M_k - 1 < k\rho < m_k + 1$. Ainsi, pour tout θ réel et pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$-1 < g^k(\theta) - \theta - k\rho < 1$$

et de même

$$-1 < g^k(g^{-k}(\theta)) - g^{-k}(\theta) - k\rho = \theta - g^{-k}(\theta) - k\rho < 1. \quad \square$$

Le nombre réel $\rho = \rho(g)$, défini pour tout homéomorphisme réel commutant avec la translation $x \mapsto x + 1$, s'appelle le *nombre de rotation* de g . Les propriétés suivantes sont alors simples à démontrer :

- (1) pour tous entiers p et q , on a $\rho(g^q + p) = q\rho(g) + p$;
- (2) si $g \leq g'$, alors $\rho(g) \leq \rho(g')$;
- (3) si la suite (g_n) tend uniformément vers g , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n) = \rho(g)$.

S'il existe deux entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$ et un réel θ tel que $g^q(\theta) = \theta + p$, alors $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{kq}(\theta)/kq = \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta + kp)/kq = p/q$; réciproquement si $\rho = p/q$ est rationnel, écrit sous forme irréductible, on sait que $m_q \leq p \leq M_q$ et donc qu'il existe un réel θ tel que $g^q(\theta) = \theta + p$, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $g^q - \text{Id} - p$.

Les applications pour lesquelles on a défini le nombre de rotation ne sont rien d'autre que les relèvements à \mathbf{R} des homéomorphismes de \mathbf{T} homotopes à l'identité (ou de façon équivalente préservant l'orientation). Si G est un tel homéomorphisme, les relèvements se déduisent les uns des autres en composant par une translation entière. L'élément $\rho(g) + \mathbf{Z}$ de \mathbf{T} est donc indépendant du relèvement g choisi; on l'appelle le *nombre de rotation* de G . D'après ce qui précède, ce nombre est rationnel si et seulement si G possède une orbite périodique. On peut préciser la dynamique des homéomorphismes du cercle.

Si $\rho(g) = p/q$ est rationnel et écrit sous forme irréductible et si $\theta \in \mathbf{R}$ vérifie $g^q(\theta) = \theta + p$, l'orbite de ce point définit par projection dans \mathbf{T} une orbite de G

de période q . Si θ est un point quelconque de \mathbf{T} , l'ensemble ω -limite (i.e. l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(G^n(\theta))_{n \geq 0}$) est une orbite périodique du type précédent, qui peut dépendre de θ . Il en est de même de l'ensemble α -limite de θ , c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(G^{-n}(\theta))_{n \geq 0}$.

Si ρ est irrationnel, les ensembles α -limite et ω -limite d'un point θ sont égaux et indépendants de θ . La partie Ξ obtenue est soit \mathbf{T} , soit un ensemble de Cantor; toute orbite contenue dans Ξ est dense dans Ξ .

Remarquons que si F est un homéomorphisme isotope à l'identité de l'anneau ouvert ou fermé qui laisse invariant le graphe d'une application continue $\psi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$, la restriction de F au graphe est conjuguée à un homéomorphisme de \mathbf{T} préservant l'orientation par la projection sur \mathbf{T} . Plus précisément, si f est un relèvement de F , il existe un réel ρ tel que pour tout z dans le relèvement du graphe et pour tout entier k , on a $-1 < p_1(f^k(z)) - p_1(z) - k\rho < 1$, où p_1 est la première projection définie sur le revêtement universel de l'anneau. L'élément $\rho + \mathbf{Z}$ est indépendant du relèvement f de F .

4. Orbites périodiques des applications déviant la verticale

Enonçons le théorème, dû à Aubry [AL] et à Mather [Ma1] qui généralise la situation du billard, où l'on note p_1 la première projection définie sur l'anneau ou sur son revêtement universel et où l'on note π le revêtement $(\theta, r) \mapsto (\theta + \mathbf{Z}, r)$.

THÉORÈME 4.1. — *Soit F un difféomorphisme de $\mathbf{T} \times [a, b]$ déviant la verticale à droite et préservant l'aire, et f un relèvement de F à $\mathbf{R} \times [a, b]$ dont les nombres de rotation induits sur $\mathbf{R} \times \{0\}$ et $\mathbf{R} \times \{1\}$ sont notés respectivement ρ^- et ρ^+ . Pour tout réel $\rho \in [\rho^-, \rho^+]$, il existe un ensemble Ξ tel que :*

- (i) *la restriction de p_1 à Ξ est injective,*
- (ii) *pour tous $z, z' \in \pi^{-1}(\Xi)$, $p_1(z) < p_1(z') \Rightarrow p_1(f(z)) < p_1(f(z'))$,*
- (iii) *pour tout $z \in \pi^{-1}(\Xi)$ et pour tout entier k , on a $-1 < p_1(f^k(z)) - p_1(z) - k\rho < 1$.*

De plus, si $\rho = p/q$ est rationnel, écrit sous sa forme irréductible, l'ensemble Ξ est une orbite périodique de période q et on a $p_1(f^q(z)) = p_1(z) + p$ pour tout $z \in \pi^{-1}(\Xi)$; si ρ est irrationnel, c'est soit un ensemble de Cantor, soit le graphe d'une application continue de \mathbf{T} dans $[a, b]$. \square

Remarque 1. — La propriété (ii) signifie que l'ordre cyclique défini par p_1 sur Ξ est conservé par F et que l'on peut donc prolonger l'homéomorphisme défini par conjugaison sur $p_1(\Xi)$ en un homéomorphisme préservant l'orientation de \mathbf{T} . La propriété (iii) signifie que le nombre de rotation de n'importe quel prolongement est ρ .

Remarque 2. — Si F est un difféomorphisme de l'anneau infini $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ déviant la verticale à droite et préservant l'aire, on aura un résultat analogue pour tout réel ρ si on suppose une condition supplémentaire sur F que l'on va donner tout de suite. L'aire algébrique délimitée par une courbe simple Γ de classe C^1 homotope à $\theta \mapsto (\theta, 0)$ et son image par F est indépendante de la courbe, on mesure celle-ci en intégrant sur Γ la forme différentielle $F^*(rd\theta) - rd\theta$ qui est fermée puisque F préserve l'aire. Dire que l'aire est nulle signifie que cette forme est exacte, on dira alors que F est *exact-symplectique*. Si $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une application de classe C^1 , le difféomorphisme relevé par $(\theta, r) \rightarrow (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ vérifiera cette condition si et seulement si $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$. Remarquons que si l'application φ est constante égale à 1, il n'existe aucun ensemble du type Ξ . Remarquons que si F est un difféomorphisme de l'anneau fermé, la forme $F^*(rd\theta) - rd\theta$ est toujours exacte.

Remarque 3. — Les ensembles définis par les seules conditions du théorème, s'appellent des *ensembles d'Aubry-Mather* et ne sont pas uniquement définis même quand ρ est irrationnel. On peut d'ailleurs montrer que si ρ est rationnel, il existe au moins deux orbites périodiques dont la réunion vérifie les conditions (i), (ii), (iii). Cependant nous construirons nos ensembles par une propriété de minimisation, cette propriété supplémentaire imposera alors l'unicité dans le cas irrationnel et généralement l'unicité dans le cas rationnel.

Remarque 4. — Si on applique le théorème dans le cas du billard, (le fait que l'application ne soit pas différentiable au bord n'a pas d'importance) on obtient en plus des orbites périodiques déjà construites, des orbites qui s'ordonnent sur la courbe Γ dans le même ordre que la rotation $\theta \mapsto \theta + \rho$, pour chaque $\rho \in \mathbf{T} - \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Indiquons une propriété, conséquence du fait que l'angle que fait l'image d'une verticale avec toute autre verticale est minoré par un nombre strictement positif sur toute partie bornée de l'anneau, et dans le cas infini que cette image s'enroule un nombre infini de fois autour de l'anneau :

PROPOSITION. — *Chaque ensemble Ξ est borné, et l'inverse de la restriction de p_1 à Ξ , définie sur $p_1(\Xi)$, est lipschitzienne ; si le nombre ρ associé (le nombre de rotation) varie dans un ensemble borné, le rapport de Lipschitz est uniforme. \square*

On retrouve également cette propriété pour les graphes invariants (voir Birkhoff [Bi3]) : toute application continue de \mathbf{T} dans \mathbf{R} , dont le graphe est invariant est lipschitzienne ; là encore, si le nombre de rotation varie dans un ensemble borné, le rapport de lipschitz est uniforme. Donnons quelques autres propriétés des graphes invariants, conséquences de la déviation de la verticale à droite et éventuellement du caractère conservatif de l'application (voir Herman [Hn1]).

Du théorème d'Ascoli et de la propriété de continuité (3) du nombre de rotation énoncée au paragraphe 3, on déduit que l'ensemble des applications continues dont le

graphe est invariant, de nombre de rotation à valeur dans un compact, est compact pour la topologie uniforme.

Deux graphes invariants qui se rencontrent ont évidemment le même nombre de rotation.

Si deux graphes invariants sont disjoints, le nombre de rotation de celui qui est au-dessus est strictement plus grand que l'autre ; de plus il existe au plus un graphe invariant de nombre de rotation irrationnel donné. Enfin un ensemble Ξ donné par la proposition situé au-dessus (resp. en dessous) d'un graphe invariant a un nombre de rotation supérieur (resp. inférieur) à celui-ci.

La présence de graphes invariants peut être obtenue grâce au théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser. Illustrons la situation dans différents exemples.

(i) Si F est l'application donnée dans l'exemple **b** du paragraphe 2, la forme normale, qui dévie la verticale, admet une courbe invariante $r = \psi(\theta)$ pour chaque nombre de rotation dans un intervalle $[\alpha, \alpha']$ si elle la dévie à droite, dans un intervalle $[\alpha', \alpha]$ si elle la dévie à gauche. Le difféomorphisme aura au voisinage du point fixe un ensemble fermé formé de graphes invariants indexés et ordonnés par leur nombre de rotation. Cet ensemble est non vide car il contient toutes les courbes données par le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser, c'est-à-dire un ensemble de mesure non nulle, ayant le point fixe comme point de densité, et formé de graphes invariants, où F est différentiablement conjuguée à une rotation de nombre de rotation diophantien, mais il contient beaucoup d'autres courbes obtenues comme limites de celles-ci.

On peut montrer que l'ensemble des nombres de rotation des graphes invariants est génériquement formé uniquement de nombres irrationnels et qu'il est donc totalement discontinu ([Bi1], [Hn1]).

Ainsi, il existe des régions annulaires délimitées par deux graphes invariants et ne contenant aucun autre graphe invariant, que l'on appelle des régions annulaires d'instabilité. A un nombre de rotation rationnel compris entre les deux nombres de rotations des bords de la région d'instabilité correspond une orbite périodique, à un nombre de rotation irrationnel un ensemble de Cantor.

Les ensembles Ξ donnés par le théorème apparaissent donc comme le souvenir des courbes invariantes de la forme normale qui ont disparu. Remarquons que dans ce cas l'orbite d'un point assez proche de $(0, 0)$ reste dans un voisinage proche de ce point.

(ii) Si Γ est une courbe convexe de classe C^5 et si la courbure ne s'annule jamais, il existe également des courbes invariantes de F proches des bords $\mathbf{T} \times \{0\}$ et $\mathbf{T} \times \{1\}$ (voir Douady [D], Lazutkin [L]), en particulier, la trajectoire d'un point dont l'angle est proche de 0 reste proche du bord. Au contraire si la courbure de Γ s'annule en au moins un point, on peut montrer qu'il n'y a aucune courbe invariante par F autre que les bords de l'anneau : l'anneau entier est une région d'instabilité ([Ma2]).

La dynamique dans une région d'instabilité est toujours compliquée (on peut dire qu'elle est chaotique), ainsi génériquement il existe toujours ce qu'on appelle des intersections homoclines (des orbites périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables s'intersectent transversalement, condition qui implique une dynamique compliquée). Par exemple il existe toujours une orbite dont l'ensemble α -limite est un bord de la région et l'ensemble ω -limite l'autre bord.

Dans le cas du billard ceci signifie l'existence d'une trajectoire s'accumulant sur la courbe Γ dans deux sens différents (on peut même trouver une trajectoire issue perpendiculairement de la courbe et s'accumulant sur Γ).

Le cas opposé au cas où la courbure s'annule en un point est le cas où Γ est une ellipse, il existe une courbe invariante pour chaque nombre de rotation, et chaque courbe correspond à une caustique définie par une ellipse homofocale. Remarquons qu'on ne sait pas s'il existe d'autres courbes que l'ellipse telle qu'à chaque nombre de rotation corresponde une courbe invariante.

(iii) Dans l'exemple **a** du paragraphe 2, si φ est une application de classe C^3 , non nulle, telle que $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ et si F_ε est l'application relevée par $f_\varepsilon : (\theta, r) \mapsto (\theta + r, r + \varepsilon\varphi(\theta + r))$, alors F_ε aura des courbes invariantes pour ε assez petit et n'en aura plus pour ε assez grand ([Hn1]).

5. Etude des configurations minimales

On va poser dans ce paragraphe, en nous inspirant de Bangert [Ba1], le cadre où s'inscrit la démonstration du théorème 4.1. Une *configuration* est une suite bi-infinie de réels. On munit alors l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}} = \{\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid \theta_i \in \mathbf{R}\}$ des configurations de la topologie produit. On a la propriété suivante, qui sera souvent utilisée : si $(a_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une suite de réels positifs, l'ensemble $\{\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid |\theta_i| \leq a_i \forall i \in \mathbf{Z}\}$ est compact.

DÉFINITION. — Soit $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Nous dirons que le segment $(\theta_j, \dots, \theta_k)$, $j < k$, de $\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est minimal si $h(\theta_j, \dots, \theta_k) \leq h(\theta'_j, \dots, \theta'_k)$, pour tout autre segment tel que $\theta'_j = \theta_j$ et $\theta'_k = \theta_k$; où on pose :

$$h(\theta_j, \dots, \theta_k) = \sum_{i=j}^{k-1} h(\theta_i, \theta_i + 1).$$

Nous dirons qu'une configuration Θ est minimale si tout segment de Θ est minimal.

Remarque. — Si h est de classe C^1 et si $(\theta_j, \dots, \theta_k)$ est minimal, alors pour tout $i \in \{j+1, \dots, k-1\}$, on a

$$\frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta_{i-1}, \theta_i) + \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta_i, \theta_{i+1}) = 0.$$

Nous nous intéresserons aux configurations minimales des applications continues h vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $h(\theta + 1, \theta' + 1) = h(\theta, \theta')$, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$;
- (ii) $\lim_{\theta' \rightarrow \pm\infty} h(\theta, \theta + \theta') = +\infty$ uniformément en θ ;
- (iii) $h(\theta, \theta') + h(\theta^*, \theta'^*) < h(\theta, \theta'^*) + h(\theta^*, \theta')$, si $\theta < \theta^*$ et $\theta' < \theta'^*$;
- (iv) si $(\theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1})$ et $(\theta_{i-1}^*, \theta_i^*, \theta_{i+1}^*)$ sont deux segments minimaux distincts et si $\theta_i = \theta_i^*$, alors $(\theta_{i-1} - \theta_{i-1}^*)(\theta_{i+1} - \theta_{i+1}^*) < 0$.

La condition (iv) est la moins claire, car elle se définit par rapport à la notion de segment minimal. Cette condition est nécessairement vérifiée si h est de classe C^1 et si les applications

$$\theta \mapsto \frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta, \theta') \text{ et } \theta' \mapsto \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, \theta')$$

sont toutes deux strictement croissantes ou toute deux strictement décroissantes, puisque :

$$\frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta_{i-1}, \theta_i) + \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta_{i-1}^*, \theta_i) + \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta_i, \theta_{i+1}^*) = 0.$$

Elle est vérifiée si h est de classe C^2 et si $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \theta'}(\theta, \theta')$ garde un signe constant non nul; si ce signe est < 0 , la condition (iii) est également vérifiée (il suffit pour cela d'intégrer cette dernière fonction sur le quadrilatère $[\theta, \theta^*] \times [\theta', \theta'^*]$).

Si $\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une configuration minimale, il en est de même de $\varphi(\Theta) = (\theta_{i+1})_{i \in \mathbf{Z}}$ et de même de $\tau(\Theta) = (\theta_i + 1)_{i \in \mathbf{Z}}$ (d'après la propriété (i)). Remarquons que les bijections φ et τ de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ commutent. D'autre part, puisque h est continue, l'ensemble des configurations minimales est fermé. Nous allons étudier d'autres propriétés, liées à l'ordre.

DÉFINITION. — *Considérons sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ la relation suivante :*

$$\Theta < \Theta' \text{ si et seulement si } \theta_i < \theta'_i \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}.$$

Nous dirons qu'une partie X de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ est bien ordonnée si elle est fermée, remplie (c'est-à-dire invariante par φ et τ), totalement ordonnée (deux éléments distincts de X peuvent toujours être comparés par la relation $<$) et si elle vérifie la propriété suivante : l'ensemble $X' = \{\Theta \in X \mid \theta_0 \in [0, 1]\}$ est compact (autrement dit la projection de X dans l'espace quotient $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}/\tau$ est compact).

Remarque. — Une condition suffisante pour avoir la dernière propriété est l'existence d'une constante C telle que $\theta_{i+1} - \theta_i \leq C$, pour tout $\Theta \in X$ et pour tout $i \in \mathbf{Z}$, d'après la propriété de compacité énoncée au début du paragraphe.

Si X est une partie bien ordonnée, la projection $\Theta \mapsto \theta_0$ définit une bijection de X dans une partie Y de \mathbf{R} invariante par la translation $T : \theta \mapsto \theta + 1$. La dernière condition imposée à X nous dit que Y est fermée et que cette projection induit un homéomorphisme entre X et Y . L'application conjuguée à φ par la projection est strictement croissante et commute avec T , elle se prolonge par interpolation linéaire sur chaque intervalle du complémentaire en un homéomorphisme f de \mathbf{R} vérifiant les mêmes hypothèses. La dynamique sur X de l'application φ est donc conjuguée à l'application f restreinte à $Y = \pi^{-1}(Y^*)$, où Y^* est une partie fermée de \mathbf{T} , invariante par l'homéomorphisme F de \mathbf{T} relevé par f .

Appliquons maintenant les résultats du paragraphe 3.

Il existe un réel ρ tel que pour tout $\Theta \in X$ et tous entiers i et k , on a $-1 < \theta_{i+k} - \theta_i - k\rho < 1$ et donc $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \theta_k/k = \rho$: c'est le *nombre de rotation* de X .

Si ce nombre est rationnel et s'écrit $\rho = p/q$ sous forme irréductible, trois cas sont possibles pour $\Theta \in X$:

- $\varphi^q \circ \tau^{-p}(\Theta) = \Theta$;
- $\varphi^q \circ \tau^{-p}(\Theta) < \Theta$ et les suites $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n>0}$ et $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n<0}$ convergent chacune vers un point fixe de $\varphi^q \circ \tau^{-p}$;
- $\varphi^q \circ \tau^{-p}(\Theta) > \Theta$ et les suites $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n \geq 0}$ et $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n \leq 0}$ convergent chacune vers un point fixe de $\varphi^q \circ \tau^{-p}$.

Si ce nombre est irrationnel, l'ensemble $\alpha(\Theta)$ des configurations Θ' , valeurs d'adhérence d'une suite de la forme $(\varphi^n \circ \tau^{pn})_{n \leq 0}$, et l'ensemble $\omega(\Theta)$ des configurations Θ' , valeurs d'adhérence d'une suite de la forme $(\varphi^n \circ \tau^{pn})_{n \geq 0}$, sont égaux et indépendants de Θ , c'est exactement l'ensemble des configurations récurrentes de X (c'est-à-dire des éléments Θ tels que $\Theta \in \omega(\Theta)$).

DÉFINITION. — *Nous dirons que deux configurations Θ et Θ^* se croisent en $i \in \mathbf{Z}$ si $\theta_i = \theta_i^*$ et $(\theta_{i-1} - \theta_{i-1}^*)(\theta_{i+1} - \theta_{i+1}^*) < 0$; nous dirons qu'elles se croisent entre i et $i + 1$ si $(\theta_i - \theta_i^*)(\theta_{i+1} - \theta_{i+1}^*) < 0$.*

Remarque. — Si deux configurations Θ et Θ^* se croisent et si $\tilde{\Theta}$ et $\tilde{\Theta}^*$ sont proches respectivement de Θ et Θ^* , il en est de même de $\tilde{\Theta}$ et $\tilde{\Theta}^*$. Deux configurations comparables ne se croisent pas ; deux configurations minimales qui ne se croisent pas sont comparables (d'après la propriété **(iv)**).

Nous dirons qu'une configuration Θ est bien ordonnée s'il en est ainsi de l'adhérence O_Θ de $\{\varphi^q \circ \tau^p(\Theta) \mid (p, q) \in \mathbf{Z}^2\}$; nous appellerons alors nombre de rotation de Θ le nombre de rotation de cet ensemble. Si Θ est bien ordonnée, l'ensemble $\{\varphi^q \circ \tau^p(\Theta) \mid (p, q) \in \mathbf{Z}^2\}$ est totalement ordonné. Réciproquement, si $\{\varphi^q \circ \tau^p(\Theta) \mid (p, q) \in \mathbf{Z}^2\}$ est totalement ordonné, les quantités $\theta_{i+1} - \theta_i$ sont alors uniformément bornée

(pour des raisons analogues au cas des homéomorphismes du cercle, on a $|(\theta_{i+1} - \theta_i) - (\theta_1 - \theta_0)| < 1$) et O_Θ vérifie la quatrième condition des ensembles bien ordonnés. Cet ensemble n'est cependant pas nécessairement totalement ordonné (on peut trouver deux suites (Θ_n) et (Θ'_n) convergeant respectivement vers Θ et Θ' , vérifiant $\Theta_n < \Theta_n^*$ et tel que l'on ait $\theta_{i-1} < \theta_{i-1}^*$, $\theta_i = \theta_i^*$, $\theta_{i+1} < \theta_{i+1}^*$). Si par contre Θ est minimale cette situation est impossible (toujours par la propriété **(iv)**) : une configuration minimale est bien ordonnée si et seulement si l'ensemble $\{\varphi^q \circ \tau^p(\Theta) \mid (p, q) \in \mathbf{Z}^2\}$ est totalement ordonné.

On déduit de cette propriété et de la remarque faite plus haut que l'ensemble des configurations minimales bien ordonnées est fermé, le nombre de rotation dépend alors continûment de la configuration (pour montrer la continuité, il suffit d'utiliser la double-inegalité). De plus l'ensemble des configurations minimales bien ordonnées telles que $\theta_0 \in [0, 1]$ et telles que le nombre de rotation appartient à un compact donné, est compact (il est fermé et contenu dans un ensemble de la forme $\{\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid |\theta_i| \leq a_i, \forall i \in \mathbf{Z}\}$). En conséquence l'ensemble des réels qui sont nombres de rotation d'une configuration minimale bien ordonnée est fermé.

Construisons maintenant des configurations minimales. Intéressons nous d'abord à celles qui sont "périodiques", plus précisément aux configurations telles que $\varphi^q(\Theta) = \tau^p(\Theta)$, où $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$ sont des entiers (nous dirons alors que Θ est de type (p, q)). Notons $X_{p,q}$ l'ensemble des configurations de type (p, q) et posons $h_{p,q}(\Theta) = h(\theta_i, \dots, \theta_{i+q})$, quantité indépendante de $i \in \mathbf{Z}$.

THÉORÈME 5.1. — *Soient $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$ deux entiers. L'application $h_{p,q}$ atteint son minimum sur $X_{p,q}$ et l'ensemble $M_{p,q}$ des points où est atteint celui-ci est un ensemble bien ordonné de nombre de rotation p/q . Cet ensemble est contenu dans $X_{p',q'}$ et coïncide donc avec $M_{p',q'}$, où p'/q' est la représentation irréductible de p/q . L'ensemble $M_{p,q}$ est exactement l'ensemble des configurations minimales de type (p, q) .*

Démonstration. — Le fait que $h_{p,q}$ atteigne son minimum est une conséquence immédiate des conditions **(i)** et **(ii)** vérifiées par h ; de plus l'ensemble $M_{p,q}$ des points où ce minimum est atteint est fermé, rempli, et vérifie la quatrième condition des ensembles bien ordonnés. Si $q = 1$ deux points distincts quelconques de $M_{p,q}$ sont clairement comparables; montrons ce résultat si $q \geq 2$. Considérons deux points distincts $\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ et $\Theta^* = (\theta_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$ de $M_{p,q}$ et définissons deux éléments $\Theta^- = (\theta_i^-)_{i \in \mathbf{Z}}$ et $\Theta^+ = (\theta_i^+)_{i \in \mathbf{Z}}$ de $X_{p,q}$ par les relations :

$$\theta_i^- = \min\{\theta_i, \theta_i^*\} \text{ et } \theta_i^+ = \max\{\theta_i, \theta_i^*\}.$$

La condition **(iii)** vérifiée par h nous donne la relation :

$$h_{p,q}(\Theta^-) + h_{p,q}(\Theta^+) < h_{p,q}(\Theta) + h_{p,q}(\Theta^*),$$

ou l'inégalité est stricte si et seulement si les configurations se croisent entre deux éléments i et $i + 1$. On en déduit d'une part que Θ et Θ^* ne se croisent jamais

entre deux indices, d'autre part que Θ^- et Θ^+ appartiennent à $M_{p,q}$. Si Θ et Θ^* se croisent en i , les segments $(\theta_{i-1}^-, \theta_i^-, \theta_{i+1}^-)$ et $(\theta_{i-1}^+, \theta_i^+, \theta_{i+1}^+)$ sont minimaux car Θ^- et Θ^+ appartiennent à $M_{p,q}$ et $q \geq 2$. Comme ils vérifient

$$\theta_i^- = \theta_i^+ \text{ et } (\theta_{i-1}^+ - \theta_{i-1}^-)(\theta_{i+1}^+ - \theta_{i+1}^-) > 0,$$

on a une contradiction avec la condition (iv). Ainsi, $M_{p,q}$ est bien ordonné.

Si $\Theta \in M_{p,q}$, les inégalités $\varphi^{q'} \circ \tau^{-p'}(\Theta) < \Theta$ et $\Theta < \varphi^{q'} \circ \tau^{-p'}(\Theta)$ sont impossibles et les configurations $\varphi^{q'} \circ \tau^{-p'}(\Theta)$ et Θ sont égales. On en déduit que $M_{p,q}$ est contenu dans $X_{p',q'}$ et par conséquent que $M_{p,q} = M_{p',q'}$.

Puisque $\Theta \in M_{p',q'}$ minimise les fonctions $h_{np',nq'}$, pour n aussi grand que l'on veut, on en déduit que Θ est une configuration minimale. Réciproquement si $\Theta^* \in X_{p,q}$ n'appartient pas à $M_{p,q}$, alors

$$h(\theta_0^*, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{nq+1}, \theta_{nq+2}^*) < h(\theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_{nq+1}^*, \theta_{nq+2}^*)$$

si n est assez grand, ainsi Θ^* n'est pas minimale. \square

COROLLAIRE. — *Pout tout réel ρ , il existe une configuration minimale bien ordonnée de nombre de rotation ρ .* \square

Appliquons ces résultats aux difféomorphismes de l'anneau. Considérons un difféomorphisme F de l'anneau $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ déviant la verticale à droite et exact-symplectique et un relèvement $f : (\theta, r) \mapsto (\theta', r')$ de F . L'application $(\theta, r) \mapsto (\theta, \theta')$ est alors un difféomorphisme de \mathbf{R}^2 envoyant $(\theta + 1, r)$ sur $(\theta + 1, \theta' + 1)$. La forme différentielle $r'(\theta, \theta')d\theta' - r(\theta, \theta')d\theta$ définie sur la variété simplement connexe \mathbf{R}^2 est fermée et donc exacte : il existe une application $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 , telle que

$$r'(\theta, \theta') = \frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta, \theta') \text{ et } r(\theta, \theta') = -\frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, \theta').$$

Le caractère exact de la forme $F^*(rd\theta) - r d\theta$ définie sur l'anneau se traduit par le fait que h définit une fonction de l'anneau, c'est-à-dire par la condition de périodicité (i). La condition de périodicité sur la fonction r' implique que $\lim_{\theta' \rightarrow \pm\infty} r'(\theta, \theta') = \pm\infty$ uniformément en θ : on en déduit, en utilisant (i), que h vérifie (ii). Puisque $\frac{\partial r}{\partial \theta'}(\theta, \theta') = -\frac{\partial r'}{\partial \theta}(\theta, \theta') > 0$, on sait que $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \theta'}(\theta, \theta') < 0$ et que h vérifie également les conditions (iii) et (iv).

Dans le cas où $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ et où φ est de classe C^1 , de période 1 et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, on a $h(\theta, \theta') = 1/2(\theta' - \theta)^2 + \Phi(\theta')$, où Φ est une primitive de φ .

Si Θ est une configuration minimale, alors $r'(\theta_{i-1}, \theta_i) = r(\theta_i, \theta_{i+1})$. On en déduit que la suite $((\theta_i, r(\theta_i, \theta_{i+1})))_{i \in \mathbf{Z}}$ est une orbite de f et la suite $((\theta_i + \mathbf{Z}, r(\theta_i, \theta_{i+1})))_{i \in \mathbf{Z}}$ une orbite de F . Si Θ est une orbite minimale de type (p, q) , l'image de O_Θ par l'application $\Theta \mapsto (\theta_0 + \mathbf{Z}, r(\theta_0, \theta_1))$ est une orbite périodique de F vérifiant les

conditions **(i)**, **(ii)** et **(iii)** du théorème 4.1. Si Θ est une orbite minimale récurrente de nombre de rotation irrationnel ρ , l'image de O_Θ par la même application est une partie invariante Ξ vérifiant les conditions **(i)**, **(ii)** et **(iii)** du même théorème, c'est soit un ensemble de Cantor, soit le graphe d'une application continue, et toute orbite contenue dans Ξ est dense dans Ξ . Remarquons qu'à toute orbite $((\theta_i, r_i))_{i \in \mathbf{Z}}$ de f est associée une configuration $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ stationnaire, c'est-à-dire qui vérifie

$$\frac{\partial h}{\partial \theta'}(\theta_{i-1}, \theta_i) + \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta_i, \theta_{i+1}) = 0.$$

Remarque. — La démonstration du théorème 5.1 n'est rien d'autre que la démonstration faite au paragraphe 1 dans le cas du billard, où $h(\theta, \theta') = -\|\gamma(\theta) - \gamma(\theta')\|$ et la condition **(iii)** est la propriété remarquée sur les diagonales d'un quadrilatère. Il y a cependant deux différences. L'ensemble des configurations où la fonction est définie est restreint, conséquence du caractère borné de l'anneau de définition. On peut montrer le théorème 4.1 dans le cas d'un anneau borné par une méthode analogue (en restreignant l'ensemble des configurations), on peut également prolonger le difféomorphisme en un difféomorphisme de l'anneau infini déviant la verticale à droite et préservant l'aire (il sera exact-symplectique), puis montrer que les orbites obtenues sont nécessairement dans l'anneau fermé si le nombre de rotation est compris entre les nombres de rotation des deux bords (dans le cas du billard le prolongement naturel est le relèvement de Φ à l'anneau infini). L'autre différence réside dans le fait que F n'est pas tout à fait un difféomorphisme. En fait, on peut démontrer le théorème 5.1 pour les homéomorphismes déviant la verticale à droite ($r \mapsto \theta'$ est un homéomorphisme strictement croissant) : la fonction h que l'on construit de façon analogue est seulement de classe C^1 mais vérifie également les conditions **(i)**, **(ii)**, **(iii)** et **(iv)**.

Enonçons, sans les démontrer, d'autres propriétés des orbites minimales dans le cas d'une application continue vérifiant nos quatre conditions. En utilisant les segments $(\theta_j^-, \dots, \theta_k^-)$ et $(\theta_j^+, \dots, \theta_k^+)$, définis par $\theta_i^- = \min\{\theta_i, \theta_i^*\}$ et $\theta_i^+ = \max\{\theta_i, \theta_i^*\}$ pour deux configurations minimales Θ et Θ^* , on montre exactement comme dans le théorème 5.1 :

PROPOSITION. — *Deux configurations minimales ont au plus un croisement.*
□

En particulier deux configurations minimales de nombre de rotation distincts se croisent exactement une fois. En affinant alors ce type de raisonnement on peut montrer la proposition fondamentale suivante.

THÉORÈME 5.2. — *Si Θ est une configuration minimale et p, q deux entiers, alors Θ et $\varphi^q \circ \tau^p(\Theta)$ n'ont pas de croisement : toute configuration minimale est donc bien ordonnée.* □

Toute configuration minimale a donc un nombre de rotation, celles dont le nombre de rotation est un rationnel $\rho = p/q$ écrit sous forme irréductible se divisent en trois groupes :

- les éléments de $M_{p,q}$;
- des configurations telles que $\varphi^q \circ \tau^{-p}(\Theta) < \Theta$ et telles que $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n>0}$ et $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n<0}$ convergent chacune vers un point de $M_{p,q}$;
- des configurations telles que $\varphi^q \circ \tau^{-p}(\Theta) > \Theta$ et telles que $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n>0}$ et $(\varphi^{nq} \circ \tau^{-np}(\Theta))_{n<0}$ convergent chacune vers un point de $M_{p,q}$.

En considérant des limites de configurations minimales de nombre de rotation $\rho_n < p/q$ (resp. $\rho_n > p/q$), on peut montrer qu'il existe des configurations Θ de second et de troisième type. Plus précisément il en existe au moins une de chaque type vérifiant $\Theta^* < \Theta < \Theta^{**}$, si Θ^* et Θ^{**} sont deux éléments de $M_{p,q}$ tels que $\Theta^* < \Theta^{**}$ et tels qu'aucun élément $\tilde{\Theta}$ de $M_{p,q}$ ne vérifie $\Theta^* < \tilde{\Theta} < \Theta^{**}$. Dans le cas des difféomorphismes génériques déviant la verticale et exact-symplectiques, il n'y a qu'une orbite correspondant à l'ensemble $M_{p,q}$, elle est hyperbolique et la propriété précédente permet de montrer que les variétés stables et instables se rencontrent.

Deux configurations minimales de même nombre de rotation rationnel peuvent se croiser, ce n'est pas le cas si ce nombre est irrationnel.

THÉORÈME 5.3. — *L'ensemble des orbites minimales de nombre de rotation donné $\rho \notin \mathbf{Q}$ est bien ordonné. En particulier, les ensembles $\alpha(\Theta)$ et $\omega(\Theta)$ sont égaux et indépendants de la configuration minimale θ de nombre de rotation ρ . \square*

La notion de configuration minimale, ainsi que les résultats précédents, sont dus originellement à Aubry et Le Daeron [AL], qui étudiaient le modèle de Frenkel-Kontorova en physique des solides. Le problème étant d'étudier une famille de particules sur la droite réelle, indexées par $i \in \mathbf{Z}$ et décrites par leurs positions θ_i . Les particules i et $i+1$ sont couplées par un potentiel $\frac{1}{2}C(\theta_i - \theta_{i+1})^2$, de plus chaque particule i est soumise à une force $-V'(\theta_i)$ décrite par un potentiel périodique V . Pour obtenir des configurations stationnaires sous l'effet de ces forces, il suffit de chercher les configurations minimales définies pour la fonction

$$h : (\theta, \theta') \mapsto \frac{1}{2}C(\theta' - \theta)^2 + V(\theta').$$

Dans le cas où V est nul, les configurations stationnaires sont toutes de la forme $\theta_i = \theta_0 + i\rho$, où ρ est un réel (la distance entre deux particules consécutives est constante); elles sont toutes minimales. Remarquons que le problème variationnel est le même que le problème associé à l'application $f : (\theta, r) \mapsto (\theta + rC, r)$: toute courbe $r = \rho$ est invariante par le difféomorphisme relevé, si ρ est irrationnel, c'est l'ensemble Ξ associé à ρ .

La démonstration de ces résultats dans le cas des difféomorphismes de l'anneau borné déviant la verticale (c'est-à-dire le théorème 4.1) est due à J. Mather [Ma1].

Le problème variationnel initial considéré par Mather était cependant différent, il obtint d'abord les orbites de nombre de rotation irrationnel. Voir également Douady [D], Katok [K] pour des méthodes topologiques directes d'obtention des ensembles Ξ de nombre de rotation irrationnel à partir des orbites périodiques bien ordonnées, ainsi que Chenciner [C] pour une autre présentation des résultats de ce paragraphe.

Nous verrons dans le prochain paragraphe une application plus surprenante à l'étude des géodésiques minimales du tore de dimension 2. L'étude des géodésiques minimales du tore remonte à Hedlund [Hd], la plupart des résultats que l'on exposera sont d'ailleurs dus à Hedlund ou à Morse [Mor]. La présentation que l'on va en faire, et en particulier le lien précis qui les rattache à l'étude des configurations minimales, est due à Bangert [Ba1].

6. Géodésiques minimales du tore de dimension 2

Commençons par rappeler la définition et quelques propriétés des géodésiques. Considérons une variété riemannienne M de classe C^∞ et notons $\|v\|_x$ la norme d'un vecteur v appartenant à l'espace tangent $T_x M$ de M en x . La longueur $\ell(\gamma)$ d'un arc $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de classe C^1 est donnée par $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt$ et son énergie $e(\gamma)$ par $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}^2 dt$ (la longueur est indépendante de la paramétrisation de l'arc, ce n'est pas le cas de l'énergie).

Un *segment géodésique* est une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de classe C^1 qui est un point critique de la fonction énergie sur l'ensemble des arcs de classe C^1 définis sur $[a, b]$, ayant mêmes extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ que γ ; c'est-à-dire une courbe vérifiant les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonction $L : v \in T_x M \mapsto \|v\|_x^2$.

Une *géodésique* est un arc $\gamma : I \rightarrow M$ de classe C^1 , défini sur un intervalle I , tel que sous segment (i.e. toute restriction à un intervalle compact) est un segment géodésique et qui est maximal pour cette propriété (on ne peut prolonger γ en conservant cette propriété).

Une propriété fondamentale des géodésiques est la suivante : pour $x \in M$ et tout $v \in T_x M$, il existe une unique géodésique telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Plus précisément, les géodésiques sont les orbites d'un champ de vecteurs défini sur l'espace tangent $T(M)$ de M . Une autre propriété fondamentale est le fait que la fonction $v \in T_x M \mapsto \|v\|_x$ est une intégrale du flot associé (i.e. elle est constante le long des orbites).

On peut montrer que les segments géodésiques sont les points critiques de la fonction longueur sur l'ensemble des arcs de classe C^1 ayant mêmes extrémités que γ , qui sont parcourus à vitesse constante (i.e. $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$ est constant). Une des raisons pour lesquelles on préfère définir les géodésiques par rapport à l'énergie plutôt qu'à la longueur est la propriété d'unicité qu'on vient d'écrire (due au fait que l'équation d'Euler-Lagrange se ramène à une équation différentielle sur l'espace tangent). Le flot restreint au fibré unitaire tangent $T^1(M)$ formé des vecteurs de

norme 1, s'appelle le *flot géodésique*. Les orbites sont les géodésiques parcourues à vitesse constante égale à 1 et donc paramétrisées par la longueur; on obtient les autres géodésiques par reparamétrisation linéaire de celles-ci. Si M est compacte, il en est de même de $T^1(M)$, et le flot géodésique est complet (i.e. toute géodésique est définie sur \mathbf{R}); on a la même propriété si M est un revêtement d'une variété riemannienne compacte.

On peut définir plus généralement la longueur d'un arc $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, C^1 par morceaux, et même absolument continu. Rappelons qu'une application f de $[a, b]$ dans l'espace euclidien \mathbf{R}^n est *absolument continue*, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tels que si $(]a_i, b_i])_{1 \leq i \leq p}$ est une famille finie d'intervalles disjoints deux à deux de $[a, b]$ tels que $\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) \leq \eta$, alors $\sum_{i=1}^p \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon$. Si $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est de classe C^1 et γ absolument continue, il en est de même de $\phi \circ \gamma$, on peut donc définir, en utilisant des cartes, la notion d'application absolument continue à valeurs dans M , la fonction γ' est alors définie presque partout, mesurable et $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt < +\infty$.

Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une géodésique et $a \in I$. Si $b \in I$ est assez proche de a , la restriction de γ à $[a, b]$ est en fait un minimum strict de la fonction longueur sur l'ensemble des arcs absolument continus joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. Plus précisément, si $a \in M$ et si b est assez proche de a , il existe un unique élément (à reparamétrisation près) qui minimise la longueur parmi les arcs absolument continus joignant a à b , c'est un segment géodésique.

On peut définir une distance sur M en posant $d(x, y) = \inf \{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}\}$ où \mathcal{C} est l'ensemble des arcs absolument continus d'extrémités x et y . Si le flot géodésique est complet, on sait (par le théorème de Hopf-Rinow), que cette borne inférieure est toujours atteinte, et tout arc où ce minimum est atteint est un segment géodésique et donc de classe C^1 (à reparamétrisation près). Il n'y a pas nécessairement unicité comme le montre l'exemple de la sphère plongée dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 et munie de la structure riemannienne induite. Un tel segment géodésique sera dit *minimal*, une géodésique dont tout segment est minimal sera dite *minimale*. En d'autres termes, une géodésique $\gamma : I \rightarrow M$ est minimale si et seulement si, pour tout $(a, b) \in I^2$, $d(\gamma(a), \gamma(b)) = |b - a|$. Remarquons que tout segment géodésique minimal est injectif.

Si M est compact, il n'existe aucune géodésique minimale, puisque M est bornée pour la distance d et puisque les géodésiques sont définies sur \mathbf{R} . On peut s'intéresser cependant dans ce cas aux géodésiques qui se relèvent au revêtement universel en des géodésiques minimales, c'est-à-dire aux géodésiques dont tout segment minimise la longueur parmi les arcs absolument continus, ayant mêmes extrémités et homotopes au segment.

On montre sans difficulté que sur une variété riemannienne M , l'ensemble des points $v \in T^1(M)$ tels que la géodésique issue de v soit minimale, est fermé. Enonçons d'autres propriétés des géodésiques minimales (on identifiera, par abus de langage un segment géodésique ou une géodésique, qui est une application, et son image, qui est un ensemble).

PROPOSITION. — *Si deux segments géodésiques minimaux ont au moins deux points d'intersection, soit ils s'intersectent exactement aux deux extrémités, soit ils s'intersectent sur un segment et la réunion est un segment géodésique.*

Démonstration. — Si la première conclusion du théorème est fausse, quitte à restreindre nos segments γ et γ^* , nous pouvons supposer qu'ils ont une extrémité x en commun et que la seconde extrémité y de γ appartient à l'image de γ^* et est distincte de la seconde extrémité y^* de cet arc. Le segment γ et le sous-segment de γ^* joignant x à y ont même longueur car ils sont minimaux. L'arc obtenu en ajoutant le sous-segment de γ^* joignant y^* à y au segment γ a donc même longueur que le segment γ^* , il minimise la longueur et c'est donc un segment géodésique. En particulier il est de classe C^1 et les dérivées de γ et γ^* coïncident au point y . On en déduit que γ et γ^* s'intersectent sur un sous-segment commun et que leur réunion est un segment géodésique. \square

Utilisant le fait que toute géodésique est définie sur un intervalle ouvert, comme orbite d'un champ de vecteurs, on en déduit le résultat suivant similaire à une proposition du paragraphe précédent.

COROLLAIRE. — *Deux géodésiques minimales d'une variété riemannienne M ont au plus un point d'intersection.* \square

Nous allons nous intéresser aux géodésiques minimales du plan muni d'une structure riemannienne invariante par les translations de vecteur dans \mathbf{Z}^2 . Une telle structure définit naturellement une structure riemannienne sur $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et les géodésiques minimales sont exactement les relèvements des géodésiques du tore qui ont la propriété suivante : tout segment minimise la longueur parmi les arcs absolument continus, ayant mêmes extrémités et homotopes au segment.

Le cas le plus simple est le cas de la métrique euclidienne usuelle. Dans ce cas les géodésiques qui sont des droites sont toute minimales. Si la droite est dirigée par un élément de \mathbf{Z}^2 (i.e. si la pente est rationnelle ou infinie), la géodésique du tore relevée est une orbite périodique, sinon (si la pente est irrationnelle), l'adhérence de la géodésique relevée est le tore tout entier.

Nous allons construire des géodésiques minimales par une méthode analogue à celle employée dans la démonstration du théorème 5.1. Remarquons que $d(x, y) = d(x + (p, q), y + (p, q))$, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, et que l'image par la translation de vecteur (p, q) d'une géodésique (resp. d'une géodésique minimale)

est une géodésique (resp. une géodésique minimale). Supposons $(p, q) \neq (0, 0)$, nous dirons qu'un arc continu $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est de type (p, q) s'il existe $t^* > 0$ tel que $\gamma(t + t^*) = \gamma(t) + (p, q)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Le couple (p, q) et le réel t^* sont alors uniques. Nous appellerons longueur de l'arc, la longueur (indépendante de t) du segment restreint à $[t, t + t^*]$, si celui-ci est absolument continu. Remarquons que ce segment se projette dans le tore en une courbe fermée qui définit l'élément (p, q) du groupe fondamental \mathbf{Z}^2 de \mathbf{T}^2 .

THÉORÈME. — *La fonction longueur, définie sur l'ensemble des arcs absolument continus de type (p, q) , atteint son minimum et l'ensemble $M_{p,q}$ où celui-ci est atteint est formé de géodésiques. Ces géodésiques sont toutes de type (p', q') , où p' et q' sont premiers entre eux et où $(p, q) = m(p', q')$, $m > 0$; elles se projettent dans le tore en une famille de courbes fermées simples disjointes deux à deux dont la réunion est fermée. Enfin, les éléments de $M_{p,q}$ sont exactement les géodésiques minimales de type (p, q) .*

Démonstration. — Le fait que la fonction longueur sur l'ensemble des arcs absolument continus de type (p, q) atteigne son minimum et que celui-ci ne soit atteint que sur des géodésiques se montre comme la propriété analogue pour les arcs joignant deux points. Deux telles géodésiques ne peuvent s'intersecter : en effet, elles devraient s'intersecter en au moins deux points, à cause de la "périodicité", et par un argument similaire à celui de la proposition précédente, on obtiendrait une contradiction.

Un élément de $M_{p,q}$ rencontre nécessairement son image par la translation de vecteur (p', q') et doit donc être égale à celle-ci : on en déduit que la géodésique est de type (p', q') et que $M_{p,q} = M_{p',q'}$. La propriété d'intersection nous dit de plus que chaque élément de $M_{p,q}$ se projette dans le tore en une courbe fermée simple et que toutes ces courbes sont disjointes deux à deux. Le caractère fermé de la réunion provient du fait que l'ensemble des vecteurs $v \in T^1(\mathbf{R}^2)$ telle que la géodésique issue de ce point appartient à $M_{p,q}$, est fermé et invariant par les translations à valeurs dans \mathbf{Z}^2 .

Le fait qu'un élément γ de $M_{p,q}$ minimise la longueur parmi toutes les courbes de type (np, nq) , $n > 0$, oblige la géodésique à être minimale. Réciproquement, soit $\gamma^* \notin M_{p,q}$ un arc de type (p, q) , choisissons un point x sur γ et un point x^* sur γ^* . L'arc formé du segment euclidien joignant x^* à x , du segment de γ joignant x à $x + (np, nq)$ et du segment euclidien joignant $x + (np, nq)$ à $x^* + (np, nq)$ aura une longueur plus petite que celle du segment de γ^* joignant x^* à $x^* + (np, nq)$, si n est assez grand : la courbe γ^* n'est pas minimale. \square

Nous remarquons dans ce théorème l'analogie entre nos géodésiques et les configurations minimales du paragraphe précédent. Comme nous allons voir, c'est plus qu'une analogie.

Considérons (voir figure 6). une géodésique minimale Γ_0 de type $(0, 1)$ et ses translatées Γ_i par les vecteurs $(i, 0)$, $i \in \mathbf{Z}$, qui sont disjointes deux à deux, puis définissons l'application continue

$$h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, (\theta, \theta') \mapsto d(\Gamma_0(\theta), \Gamma_1(\theta')).$$

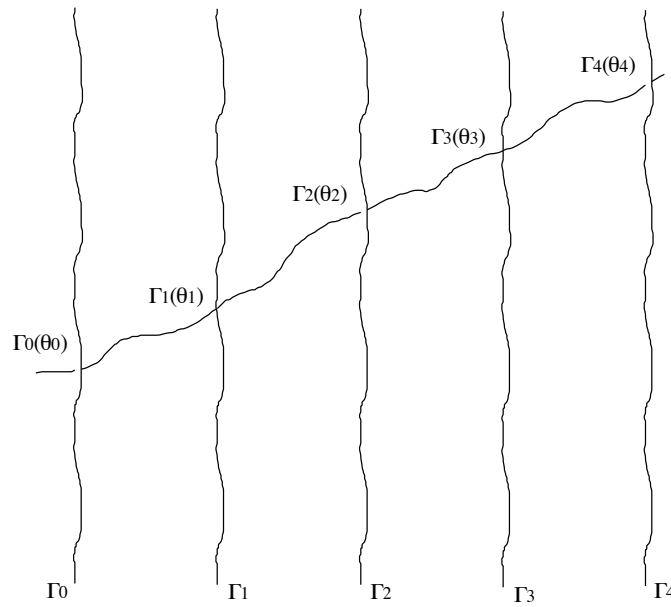


Figure 6

Il existe alors au moins un segment géodésique minimal qui joint $\Gamma_0(\theta_0)$ à $\Gamma_1(\theta'_1)$; un tel segment est contenu, sauf en ses deux extrémités, dans la bande ouverte comprise entre les courbes Γ_0 et Γ_1 , d'après la propriété d'intersection énoncée plus haut. Si $(\theta_j, \dots, \theta_k)$ est un segment minimal et si $(\gamma_i)_{j \leq i < k}$, est une famille de segments géodésiques minimaux joignant $\Gamma_i(\theta_i)$ à $\Gamma_{i+1}(\theta_{i+1})$, la réunion de ces arcs définit une courbe qui minimise la longueur parmi les arcs absolument continus joignant $\Gamma_j(\theta_j)$ à $\Gamma_k(\theta_k)$, puisque tout segment géodésique minimal joignant $\Gamma_j(\theta_j)$ à $\Gamma_k(\theta_k)$ rencontre chaque courbe Γ_i en exactement un point. C'est donc un segment géodésique, c'est même l'unique segment géodésique minimal qui joint $\Gamma_j(\theta_j)$ à $\Gamma_k(\theta_k)$ et qui passe par tous les $\Gamma_i(\theta_i)$ si $k - j \geq 2$.

Si $\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une configuration minimale, il existe une géodésique minimale (et une seule) qui passe par chaque $\Gamma_i(\theta_i)$. Plus précisément, il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des configurations minimales et l'ensemble des géodésiques minimales qui rencontrent chaque courbe Γ_i . Si une géodésique minimale γ ne vérifie pas cette propriété (on dira que γ est exceptionnelle), l'un des ensembles $\gamma([M, +\infty[)$ ou $\gamma(]-\infty, -M])$ doit être contenu dans une bande délimitée par deux courbes Γ_i et Γ_{i+1} pour M assez grand. Comme elle n'a pas de point d'accumulation, elle a une direction asymptotique dans l'axe des Oy . Une courbe ayant au plus deux directions asymptotiques (en $\pm\infty$), on peut choisir p et q premiers entre eux, puis

définir nos courbes Γ_i , de type (p, q) , de telle façon que notre géodésique cesse d'être exceptionnelle. C'est uniquement le choix arbitraire de la famille $(\Gamma_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ (ou plus exactement du type des éléments de cette famille) qui lui confère ce caractère exceptionnel.

Pour appliquer les résultats du paragraphe précédent à l'étude des géodésiques minimales, il faut encore montrer que l'application h vérifie les conditions **(i)**, **(ii)**, **(iii)** et **(iv)**.

(i) L'application vérifie la condition de périodicité puisque

$$d(\Gamma_0(\theta + 1), \Gamma_1(\theta' + 1)) = d(\Gamma_0(\theta) + (1, 0), \Gamma_1(\theta') + (1, 0)) = d(\Gamma_0(\theta), \Gamma_1(\theta')).$$

(ii) Elle vérifie également la condition **(ii)** puisque

$$d(\Gamma_0(\theta), \Gamma_1(\theta + \theta')) \geq d(\Gamma_1(\theta), \Gamma_1(\theta + \theta')) - d(\Gamma_0(\theta), \Gamma_1(\theta)) = |\theta'| - h(\theta, \theta).$$

(iii) Supposons que $\theta < \theta^*$ et $\theta' < \theta'^*$, et considérons un segment géodésique minimal γ (resp. γ^*) joignant $\Gamma_0(\theta)$ à $\Gamma_1(\theta'^*)$ (resp. $\Gamma_0(\theta^*)$ à $\Gamma_1(\theta')$). Ces deux courbes doivent s'intersecter en exactement un point, et permettent de construire deux arcs C^1 par morceaux $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}^*$, mais pas de classe C^1 , le premier joignant $\Gamma_0(\theta)$ à $\Gamma_1(\theta')$, le second joignant $\Gamma_0(\theta^*)$ à $\Gamma_1(\theta'^*)$, tels que $\ell(\tilde{\gamma}) + \ell(\tilde{\gamma}^*) = \ell(\gamma) + \ell(\gamma^*)$. Comme ce ne sont pas des segments géodésiques (ils ne sont pas de classe C^1) on en déduit l'inégalité voulue

(iv) Supposons que $(\theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1})$ et $(\theta_{i-1}^*, \theta_i, \theta_{i+1}^*)$ soient deux segments minimaux distincts. On considère un segment géodésique minimal γ joignant $\Gamma_{i-1}(\theta_{i-1})$ à $\Gamma_{i+1}(\theta_{i+1})$ en passant par $\Gamma_i(\theta_i)$ et un segment géodésique minimal γ^* joignant $\Gamma_{i-1}(\theta_{i-1}^*)$ à $\Gamma_{i+1}(\theta_{i+1}^*)$ en passant par $\Gamma_i(\theta_i)$. Ces deux segments sont distincts et se rencontrent donc uniquement au point $\Gamma_i(\theta_i)$, ainsi

$$(\theta_{i-1} - \theta_{i-1}^*)(\theta_{i+1} - \theta_{i+1}^*) \neq 0.$$

Comme les dérivées au point d'intersection sont distinctes, on a

$$(\theta_{i-1} - \theta_{i-1}^*)(\theta_{i+1} - \theta_{i+1}^*) < 0.$$

Des résultats du paragraphe précédent, on déduit par exemple que, pour toute géodésique minimale non exceptionnelle, la pente de la droite joignant $\gamma(t)$ à $\gamma(t')$ tend vers ρ quand $|t - t'|$ tend vers $+\infty$, où ρ est le nombre de rotation de la configuration associée. Parmi les géodésiques minimales à pente rationnelle $\rho = p/q$, il y en a de type (p, q) ; il y en a de type $(-p, -q)$ (celles parcourues dans le sens contraire), les autres sont comprises entre deux géodésiques de type (p, q) (ou $(-p, -q)$) et sont asymptotes à ces deux courbes. Si la bande délimitée par deux géodésiques γ et γ^* minimales de type (p, q) ne contient aucune autre géodésique minimale de type (p, q) , il existe toujours une géodésique minimale asymptote

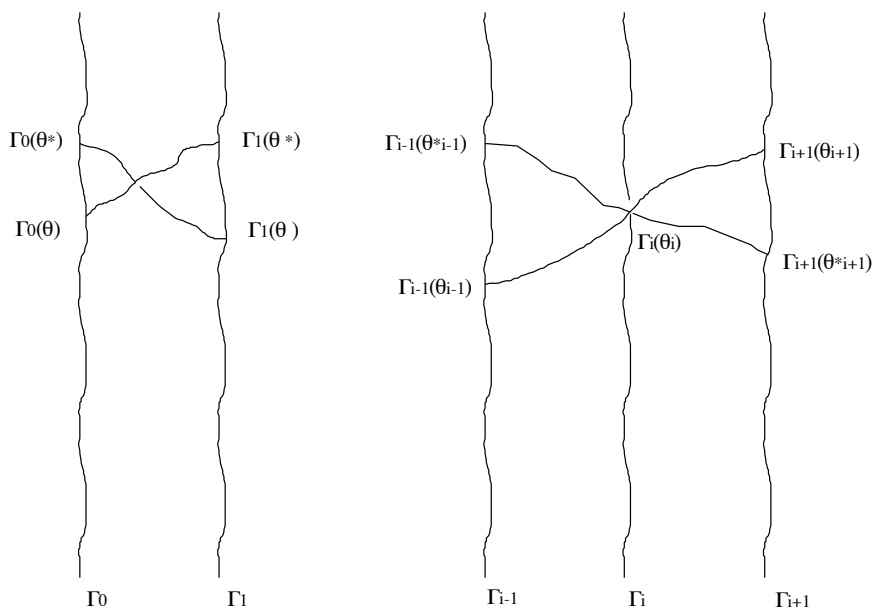


Figure 7

en $+\infty$ à γ et asymptote en $-\infty$ à γ^* . Les géodésiques exceptionnelles ont cette propriété, elles sont comprises entre deux courbes Γ_i et Γ_{i+1} et asymptotes à ces deux courbes.

Remarquons également qu'une géodésique minimale γ est égale à $\gamma + (p, q)$ ou disjointe de cette courbe si $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, elle se projette dans le tore en une courbe fermée dans le premier cas, dans une courbe simple sinon. Remarquons également que deux géodésiques minimales distinctes de pente irrationnelle ne se coupent jamais. Si l'on regarde attentivement les résultats du paragraphe précédent, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME. — *L'ensemble \mathcal{M} des éléments $v \in T^1(\mathbf{T}^2)$ tels que la géodésique issue de v se relève en une géodésique minimale γ_v est fermé. Il existe alors dans l'ensemble S^1 des vecteurs de norme euclidienne 1 un élément $w(v)$ tel que*

$$\lim_{|t-t'| \rightarrow +\infty} \gamma_v(t-t') / \|\gamma_v(t-t')\| = w(v).$$

L'application $v \mapsto w(v)$ est continue et surjective et l'image inverse \mathcal{M}_w de tout élément $w \in S^1$ est fermée.

Si w est colinéaire à un élément de \mathbf{Q}^2 , l'ensemble des éléments $v \in \mathcal{M}_w$ tels que la géodésique issue de v soit périodique est une partie fermée qui se projette injectivement sur le tore en un ensemble de courbes fermées simples. Si la géodésique issue de v n'est pas fermée, elle est contenue dans un anneau délimité par deux de ces courbes et s'accumule sur l'une d'entre-elles quand $t \rightarrow +\infty$ et sur l'autre quand $t \rightarrow -\infty$. De telles courbes existent dans chaque anneau.

Si w n'est colinéaire à aucun élément de \mathbf{Q}^2 , l'ensemble \mathcal{M}_w se projette injectivement sur le tore \mathbf{T}^2 et les ensembles α -limite et ω -limite de $v \in \mathcal{M}_w$ pour le

flot géodésique, sont indépendants de v . Toute orbite contenue dans l'ensemble \mathcal{M}_w^ obtenu est dense dans \mathcal{M}_w^* ; sa projection sur le tore est soit le tore tout entier (on obtient par projection un flot sur le tore défini par un champ de vecteurs), soit sur un ensemble dont l'intersection avec toute géodésique fermée minimale est un ensemble de Cantor (on obtient par projection une lamination géodésique). \square*

Dans le cas où la métrique est la métrique euclidienne, tous les ensembles \mathcal{M}_w se projettent bijectivement sur le tore et le flot défini sur ce tore est engendré par le champ de vecteurs constant w , on a alors l'égalité $\mathcal{M}_w^* = \mathcal{M}_w$, quand n'est colinéaire à aucun élément de \mathbf{Q}^2 .

Étudions un autre cas intégrable mais où les géodésiques ne sont pas toutes minimales. Considérons dans l'espace \mathbf{R}^3 une courbe convexe C située dans le demi-plan d'équation $x = 0, y > 0$, et considérons le tore obtenu par rotation de cette courbe autour de l'axe Oz , muni de la structure riemannienne induite par la structure euclidienne usuelle de l'espace. Notons $(1, 0)$ l'élément du groupe fondamental défini par la courbe convexe et $(0, 1)$ l'élément défini par la rotation autour de l'axe Oz . Les géodésiques minimales de type $(0, 1)$ sont les relèvements de la courbe définie sur le tore par rotation du point de C le plus proche de O . En particulier il existe des géodésiques qui sont asymptotes en $\pm\infty$ à cette courbe. La courbe obtenue par rotation du point le plus éloigné est également une géodésique mais elle ne se relève pas en une géodésique minimale. Les géodésiques minimales de type $(0, -1)$ sont les mêmes géodésiques, mais parcourues dans l'autre sens. On peut montrer que tous les ensembles $\mathcal{M}_w, w \neq (0, 1)$, se projettent bijectivement sur le tore, sont formés de géodésiques périodiques si w est colinéaire à un élément de \mathbf{Q}^2 , coïncident avec \mathcal{M}_w^* sinon. En fait la symétrie du problème fait de ce flot géodésique un système intégrable. La dynamique est comparable à la dynamique du billard elliptique, ou encore à celle du pendule non entretenu.

Donnons maintenant un exemple où aucun ensemble \mathcal{M}_w ne se projette sur un tore (et où il y aura donc des laminations géodésiques). Supposons qu'il existe deux petits disques D et D' du tore, avec $D' \subset D$ tel que la longueur du bord de D (pour la métrique riemannienne) soit strictement plus petite que $\delta = \inf d(x, x')_{x \in D, x' \in D'}$. Aucune géodésique dont les relèvements sont minimaux ne pourra passer dans le disque D' , ainsi la projection des \mathcal{M}_w sera toujours disjointe de ce disque. On construit facilement un tel exemple en partant d'un tore plongé dans \mathbf{R}^3 et en ajoutant une bulle ayant un goulot très étroit.

7. Ce qui se passe en dimension supérieure

Nous allons voir, en guise de conclusion, ce qui se généralise en dimension supérieure. Si la formulation en dimension supérieure des résultats du paragraphe 4, n'est pas évidente, tel n'est pas le cas des résultats du paragraphe 6. Si \mathbf{R}^m est muni d'une

structure riemannienne invariante par les translations à valeurs dans \mathbf{Z}^m , on peut se poser les deux questions suivantes :

- existe-t'il, pour tout vecteur $w \in \mathbf{R}^m$ de norme euclidienne 1, une géodésique minimale γ telle que $\lim_{t' \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{\|\gamma(t') - \gamma(t)\|} = w$?
- toute géodésique minimale a-t-elle une direction w ?

La réponse est clairement positive si la métrique est la métrique euclidienne usuelle, la situation est similaire au cas de la dimension deux. Par contre elle sera fautive en règle générale : on peut construire, dès que $m \geq 3$, des métriques pour lesquelles, on ne peut trouver de géodésiques minimales associées à certaines directions w . Cependant, il existe toujours des directions pour lesquelles de telles géodésiques existent.

Indiquons tout de suite la différence entre la dimension deux et la dimension supérieure. L'existence de géodésiques minimales en dimension deux est une conséquence du théorème 6.2. Voyons si un tel théorème a son analogue en dimension supérieure. Pour tout élément $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbf{Z}^m$, on peut définir la notion d'arc de type \mathbf{p} . On montre de façon analogue, que la fonction longueur atteint son minimum sur l'ensemble des arcs absolument continus de type \mathbf{p} et que l'ensemble $M_{\mathbf{p}}$ où celui-ci est atteint est formé de géodésiques. Si $\mathbf{p}' \in \mathbf{Z}^m$ est le représentant de la direction de \mathbf{p} qui est formé de m entiers premiers entre eux, on ne peut pas montrer que les éléments de $M_{\mathbf{p}}$ sont en fait de type \mathbf{p}' ; en effet, contrairement au cas de la dimension deux, une telle géodésique n'intersecte pas nécessairement son image par la translation de vecteur \mathbf{p}' , la dimension de l'espace est trop grande. On ne peut donc pas affirmer que notre géodésique appartient à $M_{n\mathbf{p}}$, pour tout entier $n > 0$, puis conclure qu'elle est minimale. C'est cette propriété d'intersection qui fait la différence essentielle entre la dimension deux et la dimension supérieure. Hedlund [Hd] a d'ailleurs construit explicitement une métrique avec un élément de $M_{\mathbf{p}}$ qui n'appartient pas à $M_{n\mathbf{p}}$, dès que n est assez grand.

On peut cependant obtenir des géodésiques minimales de la façon suivante : si la géodésique issue de $v_n \in T^1(\mathbf{T}^n)$, $n > 0$, se relève en un élément de $\mathcal{M}_{n\mathbf{p}}$, la géodésique issue de toute valeur d'adhérence de la suite (v_n) se relève en une géodésique minimale. Malheureusement, on ne connaît pas grand chose a priori de cette géodésique. Nous expliquerons ce qui se passe en utilisant le formalisme de Mather [Ma5], basé sur l'étude des mesures invariantes minimales, qui généralise les résultats sur les géodésiques montrés par Bangert [Ba2], et qui englobe également le cas des applications déviant la verticale, nous verrons ainsi l'unité de cette théorie. Rappelons pour mémoire que le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser, que nous avons illustré en dimension deux, est un résultat d'existence de tores invariants qui s'énonce également sur l'anneau $\mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m$, par une condition de non-dégénérescence généralisant la condition de déviation de la verticale. Pour une construction

d'orbites périodiques sur cet anneau $\mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m$, mais sous des conditions restreintes, voir Bernstein, Katok [BK]; pour des propriétés lipschitziennes des tores invariants, mais sous une condition de convexité plus forte (mais nécessaire) que la condition de non-dégénérescence, voir Herman [Hn2].

La théorie de Mather est valable sur n'importe quelle variété compacte, nous nous limiterons au cas du tore. Considérons une application

$$L : T(\mathbf{T}^m) \times \mathbf{R} = \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

de classe C^2 , périodique de période 1, c'est-à-dire vérifiant l'équation :

$$L(x, v, t + 1) = L(x, v, t) \quad \text{pour tout } (x, v, t) \in \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}.$$

Supposons de plus que la restriction de L à tout espace vectoriel de la forme

$$T_x(\mathbf{T}^m) \times \{t\} = \{x\} \times \mathbf{R}^m \times \{t\}$$

est *super-linéaire*, c'est-à-dire telle que $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} L(x, v, t)/\|v\| = +\infty$ (où $\|v\|$ désigne la norme euclidienne de v) et vérifie la condition de convexité suivante : la matrice hessienne $\left(\frac{\partial L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v, t) \right)_{i,j}$ est définie positive.

Un *segment extrémal* est un arc $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{T}^m$ de classe C^1 qui est un point critique de l'action $a(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt$ définie sur l'ensemble des arcs de classe C^1 de $[a, b]$ dans \mathbf{T}^m , ayant mêmes extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ que γ ; c'est-à-dire une courbe vérifiant les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = 0$, associées au lagrangien L . Une *extrémale* est un arc $\gamma : I \rightarrow M$ de classe C^1 , défini sur un intervalle I , tel que sous segment est extrémal et maximal pour cette propriété. Là encore, grâce au fait que la matrice hessienne $\left(\frac{\partial L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v, t) \right)_{i,j}$ est non dégénérée, on sait que les extrémales sont les orbites d'un champ de vecteurs, dépendant de façon périodique du temps, défini sur l'espace tangent $T(\mathbf{T}^m)$, ou de façon équivalente, d'un champ de vecteurs indépendant du temps défini sur $T(\mathbf{T}^m) \times \mathbf{T}$. Dans le cas où la fonction L ne dépend pas de t et où la restriction de L à chaque espace tangent est une forme quadratique définie positive, les extrémales ne sont rien d'autre que les géodésiques.

On va s'intéresser comme au paragraphe 6 aux relèvements de ces extrémales, c'est-à-dire aux extrémales du lagrangien $L : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ relevé que l'on notera du même nom. La fonction L étant nécessairement minorée par convexité, on peut définir également l'action d'un arc absolument continu (éventuellement égale à $+\infty$). On sait alors (par le théorème de Tonelli), que si x et y sont des éléments

de \mathbf{R}^m , la fonction action atteint son minimum sur l'ensemble des arcs absolument continus définis sur $[a, b]$ tels que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$, et, si le flot est complet, n'atteint ce minimum que sur des arcs des classe C^1 et donc sur des segments extrémaux (vérifiant les équations d'Euler-Lagrange). Ces segments seront dits *minimaux* et une extrémale telle que tout segment est minimal sera dite *minimale*. On supposera dorénavant que le flot d'Euler-Lagrange est complet, c'est-à-dire que toutes les extrémales sont définies sur \mathbf{R} .

Nous devons faire une petite remarque. Dans le paragraphe précédent nous avons défini les géodésiques minimales par rapport à la longueur, or nous les définissons maintenant par rapport à l'énergie. Remarquons que les définitions coïncident. Si γ est une géodésique minimisant la longueur, on sait que pour tout $t \in [a, b]$, on a $(b-a)\|\gamma'(t)\| = \ell(\gamma)$ et donc que $\epsilon(\gamma) = \ell(\gamma)^2/(b-a)$. Soit $\gamma^* : [a, b] \rightarrow$ un arc absolument continu ayant même extrémités que γ , on a :

$$(b-a)^{1/2}\epsilon(\gamma^*)^{1/2} \geq \ell(\gamma^*) \geq \ell(\gamma) = (b-a)^{1/2}\epsilon(\gamma)^{1/2}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi γ minimise l'énergie. Comme tout arc qui minimise l'énergie est une géodésique, elle minimise aussi la longueur.

Ce formalisme généralise aussi l'étude des difféomorphismes de l'anneau. En effet J. Moser [Mos1] a montré que si F est un difféomorphisme de l'anneau $\mathbf{T} \times [a, b]$ déviant la verticale à droite et préservant l'aire, il existe une application $L : \mathbf{T} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vérifiant nos hypothèses telle que l'image au temps 1 par le flot d'Euler-Lagrange de $(\theta, r, 0) \in \mathbf{T} \times [a, b] \times \mathbf{R}$ est $(\theta', r', 1)$, où $(\theta', r') = F(\theta, r)$. Il y a donc une bijection naturelle entre les orbites de F et les extrémales de L .

Rappelons qu'à toute orbite de F est associée une configuration stationnaire de \mathbf{R}^Z , celles qui sont associées aux configurations minimales sont également associées aux extrémales minimales de L . Une telle construction est encore possible si F est la composée de difféomorphismes déviant la verticale à droite.

Remarquons par exemple que le problème du pendule libre entretenu, défini au paragraphe 2 est de ce type, si la fonction p est d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ (ce qui correspond au fait que F est exact-symplectique). Si P est une primitive de p , il suffit de prendre

$$L(\theta, r, t) = 1/2r^2 + rP(t) - 1/2\pi \cos(2\pi\theta).$$

Comme en dimension deux, on peut construire un difféomorphisme du tore en considérant l'image au temps 1 par le flot d'Euler-Lagrange de $(\theta, r, 0) \in \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ notée $(\theta', r', 1)$, et en posant $(\theta', r') = F(\theta, r)$ et un relèvement naturel f défini de la même façon sur \mathbf{R}^m . On dira qu'une extrémale est de type (\mathbf{p}, q) , $\mathbf{p} \in \mathbf{Z}^m$, $q \in \mathbf{N} - \{0\}$ si elle vérifie $\gamma(t+q) = \gamma(t) + \mathbf{p}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Les extrémales de types (\mathbf{p}, q) sont associées aux points (θ, r) tel que $f^q(\theta, r) = (\theta, r) + \mathbf{p}$. On peut montrer l'existence d'extrémales de type (\mathbf{p}, q) pour tout \mathbf{p} et q , comme on l'a fait

pour les géodésiques, en minimisant l'action (entre t et $t + q$) sur l'ensemble des arcs absolument continus de type (\mathbf{p}, q) .

Introduisons maintenant la notion de mesure invariante. On rappelle que l'ensemble \mathcal{B} des mesures boréliennes de probabilité d'un ensemble topologique compact X est une partie convexe, compacte pour la topologie vague, de l'ensemble des mesures complexes sur X (rappelons que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ si et seulement si $(\int_X \phi d\mu_n)$ converge vers $\int_X \phi d\mu$ pour toute fonction continue ϕ).

Si $F : X \rightarrow X$ est une application continue, l'application qui envoie $\mu \in \mathcal{B}$ sur la mesure $F^*(\mu)$ définie par la relation $F^*(\mu)(Y) = \mu(F^{-1}(Y))$ pour tout borélien Y , est une application linéaire continue (pour la topologie vague) sur l'ensemble des mesures complexes, et qui envoie \mathcal{B} dans \mathcal{B} . Par le théorème de Markov-Kakutani cette application admet un point fixe dans \mathcal{B} . Ainsi toute application continue de X dans X a au moins une mesure de probabilité invariante : c'est le théorème de Krylov-Bogolioubov.

Pour les mêmes raisons, si $(F_t)_{t \in \mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de X (i.e. un flot), l'ensemble des mesures invariantes par chaque F_t est non vide. Il est facile de voir que cet ensemble est une partie compacte et convexe de \mathcal{B} .

On dit qu'une mesure invariante μ est *ergodique*, si elle est indécomposable au sens suivant : tout borélien invariant par chaque F_t est de mesure 0 ou 1. On peut caractériser les mesures ergodiques par la propriété suivante : la mesure μ est ergodique si et seulement si c'est un point extrémal de l'ensemble des mesures invariantes.

Rappelons qu'un point extrémal a d'une partie compacte convexe A d'un espace topologique est un point de cet ensemble, tel que tout segment contenant a et contenu dans A admet a comme extrémité ; rappelons que A est l'adhérence de l'ensemble des barycentres de ses points extrémaux et en particulier que ceux-ci existent toujours.

On caractérise également les mesures ergodiques par une propriété dynamique, qui exprime que la moyenne spatiale est la mesure temporelle le long de presque toute orbite :

$$\text{si } \phi \in L^1(\mu), \text{ alors pour } \mu\text{-presque tout } x \in X \text{ on a}$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} 1/t \int_0^t \phi(F^t(x)) dt = \int_X \phi d\mu.$$

On peut définir de même les mesure ergodiques invariantes d'une application $F : X \rightarrow X$, ce sont celles qui vérifient $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \phi(F^i(x)) = \int_X \phi d\mu$ pour μ -presque tout $x \in X$ et pour tout $\phi \in L^1(\mu)$.

Remarquons qu'à une orbite périodique d'un flot (ou d'un homéomorphisme) est associée naturellement une mesure invariante, uniformément distribuée, et que celle-ci est ergodique. Ainsi, par exemple, pour un homéomorphisme de \mathbf{T} de nombre de

rotation rationnel, les mesure invariante ergodiques sont exactement les mesures portées uniformément sur les orbites périodiques ; pour les homéomorphismes de nombre de rotation irrationnel, il n'y a qu'une mesure invariante (elle est nécessairement ergodique) et son support est exactement l'ensemble Ξ des orbites récurrentes.

On peut compactifier notre ensemble $\mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}$ en ajoutant un point ∞ et en posant $(x_n, v_n, t_n) \rightarrow \infty$ si et seulement si $\|v_n\| \rightarrow \infty$. Le flot d'Euler-Lagrange se prolonge donc en un flot sur le compactifié X qui fixe ∞ , il en est de même de l'application L si on pose $L(\infty) = +\infty$. On définit alors sur l'ensemble \mathcal{B} des mesures de probabilité, la fonction action définie par l'égalité $a(\mu) = \int L d\mu$, à valeurs dans $\mathbf{R} \cup +\infty$ (cette fonction est bien définie car L est bornée inférieurement). Remarquons que chaque application $\mu \mapsto \int \min(L, k) d\mu$ est continue, pour chaque entier $k > 0$, et que la fonction action, qui est la borne supérieure de ces fonctions est semi-continue inférieurement. En particulier, l'ensemble des mesures μ telles que $a(\mu) \leq M$ est fermé, pour tout réel M .

Si γ est une extrémale de type (\mathbf{p}, q) , sa projection dans $\mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}$ est une orbite périodique du flot d'Euler-Lagrange. L'action de la mesure de probabilité invariante n'est rien d'autre que la valeur de l'action sur γ (entre $\gamma(t)$ et $\gamma(t+q)$) divisée par q . Le fait qu'il existe une mesure invariante d'action finie, la compacité de l'ensemble \mathcal{M} des mesures de probabilité invariantes et la semi-continuité de la fonction action, nous dit que cette fonction atteint son minimum sur \mathcal{M} , on note $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ l'ensemble où ce minimum est atteint. Notons que \mathcal{M}_0 est une partie compacte convexe et que ses points extrémaux sont extrémaux dans \mathcal{M} : il existe donc des mesures ergodiques dans \mathcal{M}_0 . Un des résultats de Mather est le fait que le support Ξ_0 de \mathcal{M}_0 (l'adhérence de la réunion des supports des mesures dans \mathcal{M}_0) se projette injectivement sur \mathbf{T}^m et est compact (cette projection est même bi-lipschitzienne). En particulier deux extrémales distinctes issues de deux points de Ξ_0 ne se coupent jamais. Un autre résultat est le fait que toute orbite du flot d'Euler-Lagrange issue d'un point de Ξ_0 se relève en une extrémale minimale.

On peut obtenir d'autres extrémales minimales de la façon suivante. Toute forme différentielle w de degré 1 sur \mathbf{T}^m définit naturellement une fonction sur $\mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}$ envoyant (x, v, t) sur la valeur que prend w sur $v \in T_x(\mathbf{T}^m)$. On la notera également w . Si la forme est fermée, l'intégrale de la forme w sur un arc de classe C^1 reste inchangée pour un arc proche ayant mêmes extrémités : ainsi les équations d'Euler-Lagrange de la fonction L et de la fonction $L - w$ sont les mêmes, et les mesures invariantes également. Comme la fonction $L - w$ vérifie les hypothèses demandées à L , on peut considérer l'ensemble \mathcal{M}_w des éléments de \mathcal{M} où le minimum de l'action de $L - w$ est atteint, qui a les mêmes propriétés que l'ensemble \mathcal{M}_0 . On notera alors $-\alpha(w)$ la valeur de ce minimum. Rien n'indique a priori que les ensembles \mathcal{M}_w sont les mêmes, nous verrons que ce n'est généralement pas le cas. On peut montrer que si $w = dh$ est exacte, alors $\int w d\mu = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}$. Ainsi les applications

$w \mapsto \mathcal{M}_w$ et $w \mapsto \alpha(w)$ définissent en fait des applications $c \mapsto \mathcal{M}_c$ et $c \mapsto \alpha(c)$ sur le premier groupe de cohomologie de De Rham $H^1(\mathbf{T}^m) = \mathbf{R}^m$ de \mathbf{T}^m .

Définissons maintenant le nombre de rotation d'une mesure invariante μ d'action finie. Toute forme différentielle w , vue comme fonction sur X , est μ -intégrable, si L est μ -intégrable, c'est-à-dire si $a(\mu) < +\infty$, car L est super-linéaire. De plus comme, on l'a dit plus haut, cette intégrale est nulle si w est exacte. On en déduit que l'application $w \mapsto \int_X w d\mu$ définit naturellement une forme linéaire sur $H^1(\mathbf{T}^m)$, et par conséquent un élément $\rho(\mu)$ du dual de $H^1(\mathbf{T}^m)$ qui n'est rien d'autre que le premier groupe d'homologie $H_1(\mathbf{T}^m)$ de \mathbf{T}^m . Cet élément est appelé le nombre de rotation de μ . Si μ est la mesure définie par une extrémale périodique se relevant en une courbe de type (\mathbf{p}, q) , cet élément n'est rien d'autre que $\mathbf{p}/q \in \mathbf{Q}^m$. Il existe donc des mesures invariantes d'action finie, pour tout nombre de rotation $\mathbf{p}/q \in \mathbf{Q}^m$. En fait, on peut montrer que si la suite \mathbf{p}_n/q_n tend vers $\rho \in \mathbf{R}^m$, les actions définies sur les mesures invariantes correspondant aux orbites périodiques de type (\mathbf{p}_n/q_n) que l'on a construit par minimisation, sont uniformément bornées. La fonction $\mu \mapsto \rho(\mu)$ étant continue sur l'ensemble compact des mesures invariantes d'action majorée par une constante C (toujours par la super-linéarité), on en déduit qu'il existe des mesures invariantes d'action finie et de nombre de rotation ρ , pour tout $\rho \in \mathbf{R}^m$. L'ensemble des mesures d'action majorée par une constante C (assez grande) et de nombre de rotation ρ étant compact, la fonction action atteint donc son minimum sur cet ensemble. On note \mathcal{M}^ρ l'ensemble des mesures où est atteint ce minimum et $\beta(\rho)$ la valeur de celui-ci (ces objets sont indépendantes de C). L'ensemble \mathcal{M}^ρ est convexe et compact mais rien d'indique que ses points extrémaux sont extrémaux dans \mathcal{M} . Cet ensemble ne contient pas nécessairement de mesures ergodiques. Nous allons voir cependant qu'il existe un nombre infini de valeurs de ρ pour lesquelles ce résultat est vrai.

Il est facile de voir que les applications $\rho \mapsto \beta(\rho)$ et $c \mapsto \alpha(c)$ sont convexes. En fait par définition même de ces applications, on peut montrer qu'elles sont conjuguées deux à deux par transformation de Legendre, c'est-à-dire :

$$-\alpha(c) = \min_{\rho} \beta(\rho) - \langle \rho, c \rangle \quad \text{et} \quad -\beta(\rho) = \min_c \alpha(c) - \langle \rho, c \rangle,$$

où $\langle \rho, c \rangle$ désigne le crochet de dualité. Plus précisément, on a la relation

$$\beta(\rho) + \alpha(c) \geq \langle \rho, c \rangle$$

avec une égalité si et seulement s'il existe un hyperplan de direction c passant par $(\rho, \beta(\rho))$ et situé au dessous du graphe de β (voir figure 8). Tout élément de \mathcal{M}^ρ appartient alors à \mathcal{M}_c . La réunion des ensembles \mathcal{M}_c et la réunion des ensembles \mathcal{M}^ρ sont identiques, toute mesure dans cet ensemble sera appelée *mesure minimale*.

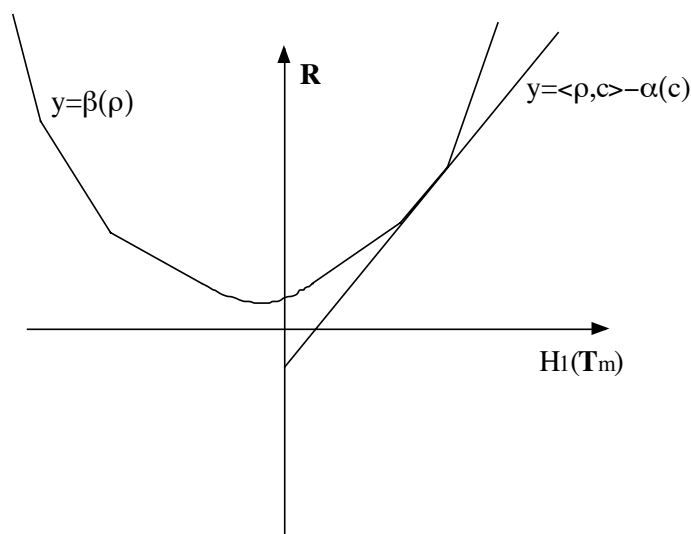


Figure 8

Le fait que les applications α et β soient conjuguées deux à deux et à valeurs finies oblige celles-ci à être super-linéaires. L'épigraphe de β (l'ensemble des points qui est au-dessus du graphe), qui est convexe, a alors un nombre infini de points extrémaux. Si $(\rho, \beta(\rho))$ est un point extrémal, il existe $c \in H^1(\mathbf{T}^m)$ tel que $\mathcal{M}^\rho = \mathcal{M}_c$: on en déduit qu'il existe une mesure invariante ergodique de nombre de rotation ρ . Pour obtenir de tels nombres de rotation, il suffit de considérer, pour $c \in H^1(\mathbf{T}^m)$, les points extrémaux de l'ensemble compact convexe non vide formés des éléments ρ de $H_1(\mathbf{T}^m)$ tels que $\beta(\rho) + \alpha(c) = \langle \rho, c \rangle$.

Le lien entre les mesures minimales ergodiques et l'allure des extrémales est donné par la proposition suivante (conséquence de l'ergodicité) : si $\mu \in \mathcal{M}^\rho$ est ergodique, il existe une extrémale minimale γ telle que

$$\lim_{t'-t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{\|\gamma(t') - \gamma(t)\|} = \|\rho\|,$$

et telle que

$$\lim_{t'-t \rightarrow +\infty} \frac{a(\gamma|_{[t,t']})}{t' - t} = \beta(\rho).$$

Dans le cas où $m = 1$, les nombres de rotations des éléments de \mathcal{M}_c sont tous égaux, puisque le support se projette injectivement sur $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ et que les orbites ne s'intersectent pas. Les applications α et β sont donc strictement convexes : il existe une mesure ergodique invariante de nombre de rotation ρ pour tout réel.

Dans le cas où le lagrangien provient d'une application déviant la verticale, les mesures minimales ergodiques de nombre de rotation rationnel sont les mesures portées par les orbites correspondants aux configurations minimales périodiques ; si ρ est irrationnel, il n'y a qu'une mesure invariante minimale de nombre de rotation ρ , son support est l'ensemble d'Aubry-Mather Ξ formé des orbites récurrentes.

Dans le cas du flot géodésique, on a $L(x, v, t) = \|v\|_x^2$. Chacun des ensembles $E_\lambda = \{(x, v, t) \mid \|v\| = \lambda\}$ est invariant par le flot et toute mesure ergodique est à support dans un E_λ . L'action d'une telle mesure est alors égale à λ^2 . L'application $h_\lambda : (x, v, t) \mapsto (x, \lambda v, t)$ laisse invariant le flot d'Euler-Lagrange et pour toute mesure invariante μ d'action bornée, on a $a(h_\lambda^*(\mu)) = \lambda^2 a(\mu)$ et $\rho(h_\lambda^*(\mu)) = \lambda \rho(\mu)$. On en déduit que l'application β est homogène de degré deux. Les résultats précédents s'expriment alors ainsi ([Ba2]).

THÉORÈME. — *Il existe une norme $\rho \mapsto \|\rho\|_0$ définie sur $H_1(\mathbf{T}^m) = \mathbf{R}^m$, ayant la propriété suivante :*

- *pour tout point extrémal de la boule unité $B = \{\rho \in H_1(\mathbf{T}^m) \mid \|\rho\|_0 = 1\}$, il existe une géodésique minimale telle que $\lim_{t' \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{\|\gamma(t') - \gamma(t)\|_0} = \rho$;*

- *si γ est une géodésique minimale, alors l'ensemble des points d'accumulation de $\frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{\|\gamma(t') - \gamma(t)\|_0}$, quand $t' - t \rightarrow +\infty$ est contenu dans $H \cap B$, où H est un hyperplan support de B .*

Remarquons que la boule B a au moins $2m$ points extrémaux (B est symétrique par rapport à l'origine), il existe donc au moins m directions possibles associées aux géodésiques. Dans l'exemple de Hedlund, dont nous avons parlé plus haut (où $m \geq 3$), il y a exactement m directions possibles pour les géodésiques, la norme $\rho \rightarrow \|\rho\|$ est de la forme $|\rho|_1 + \dots + |\rho|_m = 1$. Si $m = 2$ la boule est toujours strictement convexe.

La norme $\rho \mapsto \|\rho\|_0$ est appelée la *norme stable de la métrique*, sa valeur sur un élément $\rho = \mathbf{p} \in \mathbf{Z}^m$ est le réel

$$\|\rho\| = \inf_n \{\ell(\gamma)/n \mid \gamma \text{ est un arc continu de type } n\mathbf{p}\}.$$

Bibliographie

- [AL] S. AUBRY, P. Y. LE DAERON, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its generalizations*, *Physica* **8D** (1983), 381–422.
- [Ba1] V. BANGERT, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, in *Dynamics reported, Vol I*, John Wiley and Sons (1988).
- [Ba2] V. BANGERT, *Minimal geodesics*, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **10** (1989), 263–286.
- [BK] D. BERNSTEIN, A. KATOK, *Birkhoff periodic orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonians*, *Invent. Math.* **88** (1987), 225–241.
- [Bi1] G. D. BIRKHOFF, *Surface transformations and their dynamical applications*, *Acta Math.* **43** (1920), 1–119.
- [Bi2] G. D. BIRKHOFF, *On the periodic motions of dynamical systems*, *Acta Math.* **50** (1927), 359–379.
- [Bi3] G. D. BIRKHOFF, *Sur quelques courbes fermées remarquables*, *Bull. Soc. Math. France* **80** (1932), 1–26.
- [C] A. CHENCINER, *La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, in *Séminaire Bourbaki, exposé 622*, Astérisque, Soc. Math. France. (1985), 165–173.
- [D] R. DOUADY, *Application du théorème des tores invariants*, Thèse de troisième cycle, Univ. Paris VII, 1982.
- [Hd] G. A. HEDLUND, *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*, *Ann. of Math.* **33** (1932), 719–739.
- [Hn1] M. R. HERMAN, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérisque, Soc. Math. France **103-104** (1983).
- [Hn2] M. R. HERMAN, *Inégalités a priori pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques*, *Publ. Math. I.H.E.S.* **70** (1989), 47–101.
- [K] A. KATOK, *Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorem*, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **2** (1982), 185–194.
- [L] V. F. LAZUTKIN, *Concerning a theorem of Moser on invariant curves*, *Probl. Dyn. Theory Propag. Seism. Waves* **14** (1974), 109–120.
- [Ma1] J. MATHER, *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, *Topology* **21** (1982), 457–467.

- [Ma2] J. MATHER, *Glancing Billiards*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **2** (1982), 597–403.
- [Ma3] J. MATHER, *A criterion for the non-existence of invariant circles*, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 153–204.
- [Ma4] J. MATHER, *Minimal measures*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 375–394.
- [Ma5] J. MATHER, *Minimal action measures for positive definite Lagrangian systems*, à paraître dans Proc. IXth Int. Conf. Math. Phys..
- [Mor] M. MORSE, *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one*, Trans. Am. Math. Soc. **26** (1924), 25–60.
- [Mos1] J. MOSER, *Monotone twist mappings and the calculus of variation*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **6** (1986), 01–413.
- [Mos2] J. MOSER, *Recent developments in the theory of Hamiltonian systems*, SIAM Review **8** (1986), 459–485.

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
U.R.A. C.N.R.S. 742
Institut Galilée
Université Paris Nord
93430 Villetaneuse France

Adresse électronique : lecalvez@math.univ-paris13.fr