Quelques problèmes de dynamique classique et quantique

Mémoire présenté par

Gabriel RIVIÈRE

en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches de l'université Lille 1.

Soutenance le 23 octobre 2017 devant le jury composé de

Mme Viviane BALADI	Directrice de recherche	CNRS, Jussieu
M. Nicolas BURQ	Professeur	Orsay
M. Stephan DE BIÈVRE	Professeur	Lille
M. Stéphane NONNENMACHER	Professeur	Orsay
M. San VŨ NGỌC	Professeur	Rennes
M. Maciej ZWORSKI	Professeur	Berkeley

Après lecture des rapports de
MM. San VŨ NGỌC, Steve ZELDITCH et Maciej ZWORSKI

Remerciements

Tout d'abord, merci à Stephan De Bièvre de m'avoir encouragé à candidater à Lille il y a un peu plus de sept ans maintenant et de m'avoir si bien accueilli. J'ai trouvé ici un cadre agréable pour mener à bien le début de ma carrière d'enseignant-chercheur et il en aura été sans aucun doute l'un des acteurs clefs. Je suis donc heureux qu'il ait accepté de se porter garant de cette habilitation. Merci aussi à San Vũ Ngọc, Steve Zelditch et Maciej Zworski pour avoir accepté de rapporter ce mémoire et pour les encouragements qu'ils m'ont adressés ces dernières années. J'ai beaucoup d'admiration pour la variété de leurs travaux et c'est un grand honneur qu'ils aient accepté de sacrifier une partie de leur temps à ce mémoire. Merci aussi à Stéphane Nonnenmacher pour tout le temps qu'il m'a consacré depuis la fin de ma thèse et pour son amitié. J'ai énormément appris à son contact et j'ai sûrement encore beaucoup à apprendre. Merci à Viviane Baladi et à Nicolas Burq d'avoir accepté de faire partie de ce jury. J'essaie de continuer à m'intéresser à la théorie des systèmes dynamiques et à celle des équations aux dérivées partielles et c'est une grande joie pour moi que des experts de chacun de ces deux mondes s'intéressent à mon travail.

Merci aussi à Nalini Anantharaman. Ça a été pour moi une immense chance de découvrir la recherche à ses côtés et je suis très content de savoir qu'elle continue à s'intéresser à mes travaux. Ce mémoire n'existerait pas sans mes co-auteurs que je remercie pour leur énergie, leur amitié et leur patience. J'ai beaucoup appris au contact de chacun d'entre eux et je suis très heureux des travaux que nous avons effectués ensemble. La recherche est définitivement plus agréable quand elle se fait à plusieurs et merci à eux d'avoir ouvert mes horizons. Un remerciement spécial à Nguyen Viet Dang pour les deux années qui viennent de s'écouler. Je profite aussi de ces quelques lignes pour remercier Yannick Bonthonneau, Frédéric Faure, Colin Guillarmou, Luc Hillairet, Maxime Ingremeau, Matthieu Léautaud, Frédéric Naud et Tobias Weich de leur amitié et de tout ce qu'ils m'ont eux aussi apporté ces dernières années.

Du côté de Lille, je souhaiterais remercier tout particulièrement Livio Flaminio, Sahbi Keraani et Patrick Popescu Pampu pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux et pour le temps qu'ils ont passé à me faire découvrir les systèmes dynamiques, les équations aux dérivées partielles et la géométrie. Les orientations prises par mes recherches depuis mon arrivée à Lille ne sont pas étrangères aux nombreuses discussions que j'ai eues avec eux. Merci à Benoît Merlet pour son amitié et pour nos innombrables discussions. J'apprends aussi beaucoup sur les mathématiques à ses côtés. Mes excuses aux nombreux collègues que j'oublie et qui participent eux aussi à l'atmosphère stimulante de ce laboratoire. Merci à la remarquable équipe administrative du laboratoire et de l'UFR de mathématiques ainsi qu'aux non moins remarquables bibliothécaires de la B2RM. Sans eux, les activités de recherche et d'enseignement seraient bien difficiles.

Je n'en serai probablement pas là si je n'avais pas eu la chance d'avoir d'excellents enseignants tout au long de ma scolarité. Ces quelques mots sont pour les remercier et pour

leur dire que je mesure tout ce que je leur dois. Maintenant, c'est moi qui me retrouve dans la peau de l'enseignant et j'essaie de faire de mon mieux pour transmettre à mon tour (et finalement apprendre encore). Merci aux étudiants et aux collègues avec qui j'ai eu la chance de travailler ces dernières années.

Toujours à Lille mais en dehors des murs de l'université, mes travaux ont beaucoup bénéficié des moments de repos salvateurs apportés par ma passion des salles obscures. Merci donc au Majestic et au Métropole pour leur excellente programmation cinéma ainsi qu'à mes divers accompagnateurs.

Un immense merci à Marie-Geneviève Lavanant ainsi qu'à mes parents pour leur aide et leur disponibilité lors des nombreux déplacements qu'occasionnent la vie de chercheur. Mes parents et ma sœur ont toujours été à mes côtés et m'ont toujours soutenu dans les projets que j'ai entrepris. Je ne pourrai jamais assez les remercier pour cela et pour le reste. Enfin, merci à Gaëlle, Étienne et Maxime pour le bonheur qu'ils m'apportent chaque jour. Sans eux, ce qui suit ne serait pas là.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est un survol des travaux de recherche que j'ai effectués depuis mon arrivée à Lille en 2010. À l'exception de [63] qui est de nature plus probabiliste, le point commun de ceux-ci est d'étudier les propriétés d'une équation aux dérivées partielles en exploitant les propriétés dynamiques fines d'un flot hamiltonien qui lui est naturellement associé et qui agit sur un espace de dimension finie. Typiquement, je me suis intéressé à des équations de type Schrödinger,

$$i\partial_t u = \widehat{H}u, \tag{1}$$

où $\widehat{H}$ est un certain opérateur différentiel auquel on peut associer un champ de vecteurs hamiltonien X_H qui est, lui, défini sur un espace des phases de dimension finie. Mes travaux comportent souvent deux volets faisant intervenir des outils de nature un peu différente. Le premier d'entre eux utilise les outils d'analyse microlocale (ou semi-classique) et de théorie spectrale pour transformer l'étude de notre problème d'équations aux dérivées partielles en un problème de systèmes dynamiques en dimension finie. L'objectif recherché pour (1) est différent dans chacune des situations : décroissance de l'énergie, contrôle, estimation de certaines normes de Sobolev, vitesse de convergence vers l'équilibre, dynamique pour des temps longs, etc. Toutefois, dans chaque cas, c'est bien le même genre d'outils qui nous permet dans un premier temps de ramener de manière plus ou moins délicate le problème considéré à une question sur la dynamique du flot hamiltonien engendré par X_H. Une fois que cette première réduction est faite, le second volet consiste à traiter ce problème de systèmes dynamiques. Même si on a ramené le problème à une question en dimension finie, cette seconde tâche peut s'avérer aussi délicate que la première, si ce n'est parfois plus. On doit notamment étudier les propriétés dynamiques fines de ce flot hamiltonien : mesures invariantes, attracteurs, propriétés de mélange, etc.

Ce mémoire ne prétend en rien être exhaustif sur les interactions entre l'analyse semi-classique et la théorie des systèmes dynamiques. Il est d'ailleurs loin de l'être et les résultats présentés ici sont essentiellement le fruit de rencontres et de discussions ayant eu lieu à Lille ou ailleurs. Malgré tout, j'ai essayé, pour chacun des problèmes présentés, de faire un travail bibliographique détaillé afin de mettre en perspective mes travaux avec la littérature mathématique existante. Il y a forcément des oublis et je m'en excuse auprès des personnes concernées. Afin que ce mémoire ne soit pas non plus qu'une liste de résultats, j'ai voulu dans chaque chapitre mettre en avant les idées et les éléments des preuves qui me semblaient importants. Enfin, tout au long de ce manuscrit, je mentionne quelques pistes pour la suite.

Pour terminer cette introduction, décrivons maintenant un peu plus précisément le contenu de chacun des chapitres de ce mémoire [1] :

1. Les articles mentionnés ci-dessous sont disponibles au format “prépublication” sur ma page web ou sur les serveurs d'archives Hal et arXiv.

— Le **chapitre 1** s'inscrit dans la continuité des travaux effectués durant mon doctorat. J'y décris les propriétés de (non-)concentration des fonctions propres du laplacien sur une variété riemannienne compacte et sans bords. Les résultats obtenus concernent le comportement de ces modes propres le long de sous-ensembles invariants du flot géodésique vérifiant des propriétés d'hyperbolicité. L'essentiel de ce chapitre a fait l'objet des articles [188, 190] et, comparé à ces références, j'ai essayé de mettre en avant les conséquences de ces résultats pour le contrôle de l'équation de Schrödinger.

— Même s'ils concernent des systèmes dynamiques diamétralement opposés, les **chapitres 2 et 3** trouvent leur point de départ dans une question commune. On cherche à comprendre la dynamique pour des temps longs de l'équation de Schrödinger semi-classique et l'influence d'une perturbation de l'hamiltonien sur cette dynamique asymptotique. Le **chapitre 2** se focalise sur le cas où l'hamiltonien génère une dynamique chaotique et les résultats obtenus dans [83, 191] montrent l'équidistribution du flot hamiltonien classique et du flot de Schrödinger sous l'effet d'une perturbation. Je discute aussi brièvement le lien entre ces résultats et un problème récent de physique mathématique, l'écho de Loschmidt quantique. Dans le **chapitre 3**, c'est la situation contraire qui est étudiée, à savoir celle où le flot hamiltonien est périodique. Dans ce cas, les perturbations de l'hamiltonien régularisent aussi d'une certaine manière les solutions de l'équation de Schrödinger mais pour des échelles de temps beaucoup plus longues. Il s'agit de résultats qui ont été obtenus dans [159, 160]. À la fin de ce chapitre et toujours dans ce contexte périodique, je reviens aussi sur le lien entre cette problématique et la distribution des fonctions propres ainsi que la théorie du contrôle de l'équation de Schrödinger.

— Le **chapitre 4** est consacré au théorème d'ergodicité quantique. Je commence par y énoncer une version générale de ce résultat quand on ne fait pas d'hypothèse particulière sur la dynamique du flot géodésique. Cette version du théorème a été démontrée dans [189]. Je décris ensuite des versions quantitatives de ce théorème et plus particulièrement une forme d'ergodicité quantique à petite échelle obtenue dans [119, 120]. Ce chapitre se conclut sur une application de ces résultats à des questions d'analyse harmonique sur les variétés, à savoir qu'on peut déduire de ces résultats de nouvelles bornes sur les normes L^p des fonctions propres du laplacien [119].

— Le **chapitre 5** adopte un point de vue légèrement différent des autres chapitres en se focalisant sur des questions de nature probabiliste. Je commence par rappeler comment construire des sous-variétés aléatoires sur une variété riemannienne compacte en considérant des superpositions gaussiennes de fonctions propres du laplacien. À ces objets aléatoires, on peut associer des sous-variétés lagrangiennes de l'espace cotangent qui sont naturelles du point de vue de la géométrie intégrale. J'expose alors les résultats de [63] qui décrivent le comportement asymptotique des courants d'intégration associées à ces sous-variétés aléatoires.

— Le **chapitre 6** est consacré à l'étude du spectre de Pollicott-Ruelle des flots de gradient en utilisant des techniques d'analyse microlocale. En suivant la démarche de l'article [64], j'explique comment déterminer complètement ce spectre de corrélation, à savoir à la fois les valeurs propres et les vecteurs propres. Ceci permet en conclusion de ce mémoire de donner une nouvelle interprétation spectrale du complexe cohomologique de Morse et d'en déduire des résultats classiques de topologie différentielle. Ces résultats peuvent en fait être étendus à des systèmes dynamiques plus généraux de type Morse–Smale [65, 66, 67] que, par souci de simplicité, je ne décrirai pas en détail dans ce mémoire.

Chapitre 1

Quelques résultats liés à la théorie du contrôle

L'objet de ce chapitre est de décrire quelques résultats obtenus sur la localisation des solutions stationnaires de certaines équations de Schrödinger semi-classiques auto-adjointes et non auto-adjointes. Ce premier chapitre s'inscrit dans la continuité des travaux effectués pendant ma thèse [186, 185, 187, 10] et les questions traitées sont initialement motivées par des problématiques de chaos quantique (ergodicité quantique notamment). Ces résultats entretiennent toutefois des liens étroits avec le contrôle de l'équation de Schrödinger et l'étude de l'équation des ondes amorties comme cela a été notamment mis en évidence par Burq et Zworski dans [44]. Dans ce premier chapitre, j'insisterai plutôt sur les aspects de contrôle en général moins mis en avant dans la littérature sur le sujet [10] et je reviendrai sur les problématiques de chaos quantique dans les chapitres suivants. L'essentiel des résultats présentés ici a fait l'objet des articles [188, 190].

1.1 Contrôle de l'équation de Schrödinger

Considérons (M, g) une variété riemannienne, compacte, orientée, lisse ($\mathcal{C}^\infty$), connexe, sans bords et de dimension $n \geq 1$. À cette donnée, on peut associer un opérateur de Laplace-Beltrami [1] Δ_g. Cet opérateur est auto-adjoint et on peut démontrer qu'il existe une base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de $L^2(M)$ et une suite

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \ldots \to +\infty$$

telle que, pour tout $k \geq 0$,

$$-\Delta_g e_k = \lambda_k^2 e_k.$$

Cet opérateur apparaît naturellement dans différentes équations aux dérivées partielles comme l'équation de la chaleur, l'équation des ondes ou encore l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t u = -\frac{\Delta_g u}{2}, \qquad u\rceil_{t=0} = \psi, \tag{1.1}$$

où ψ est une donnée initiale appartenant à un espace de Hilbert approprié (par exemple $L^2(M)$). Cette équation intervient naturellement en mécanique quantique où elle décrit l'évolution

1. Par la suite, nous omettrons souvent la dépendance en g.

d'un état quantique au cours du temps. L'un des objets de ce mémoire sera de comprendre la dynamique en temps longs (ou les solutions stationnaires) de cette équation. Plus précisément, nous nous intéresserons à la limite de la mécanique quantique pour laquelle la constante de Planck $\hbar > 0$ peut être considérée comme négligeable devant les autres actions physiques mises en jeu dans le système. L'un des points importants de cette limite est qu'elle permet de relier les propriétés de l'équation (1.1) aux propriétés du flot

$$\varphi^t : T^*M \to T^*M,$$

induit par l'hamiltonien classique $H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$. On parle alors de limite semi-classique de la mécanique quantique. Il s'agit de questions classiques de physique mathématique sur lesquelles nous reviendrons plus en détails dans la suite de ce mémoire. En guise de motivation supplémentaire, nous voudrions aussi rappeler comment ce type de questions apparaît dans certains problèmes de contrôle des équations aux dérivées partielles suivant par exemple les travaux de Lebeau [142], Burq-Zworski [44], Dehman-Gérard-Lebeau [70].

Étant donné un système dynamique (par exemple une équation aux dérivées partielles), la théorie du contrôle analyse la possibilité d'agir sur le système afin de l'amener d'un état ψ_1 à un état ψ_2 en un certain temps $T > 0$. La façon dont on agit sur le système peut être soumise à certaines contraintes : on peut, par exemple, imposer que notre contrôle n'agisse que sur une certaine partie ω de l'espace des configurations M. Considérons à titre d'exemple l'équation de Schrödinger (1.1) introduite plus haut. Fixons une fonction a dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, un paramètre de régularité $s \geq 0$ et un temps $T > 0$. La question du contrôle de l'équation peut alors se poser en ces termes. Étant donnés ψ_0 et ψ_1 dans $H^s(M)$, peut-on trouver $\theta(t,x)$ appartenant à $L^2([0,T]\times M)$ telle que la solution $u(t,x)$ de

$$i\partial_t u + \frac{\Delta_g u}{2} = a\theta, \qquad u\rceil_{t=0} = \psi_0, \tag{1.2}$$

vérifie $u\rceil_{t=T} = \psi_1$? Si ceci est possible, on dit que l'équation de Schrödinger est *contrôlable* en temps T pour des données $H^s(M)$. Cette question est liée au problème de l'*observabilité* que l'on peut formuler ainsi : on dit que l'équation est observable en temps T s'il existe $C_{T,a,s} > 0$ telle que, pour tout ψ dans $L^2(M)$,

$$\|\psi\|_{H^{-s}(M)}^2 \leq C_{T,a,s} \int_0^T \left\| a e^{\frac{it\Delta}{2}} \psi \right\|_{L^2(M)}^2 dt. \tag{1.3}$$

Le fait que (1.3) implique (1.2) découle de la méthode d'unicité de Hilbert – voir par exemple [44, Par. 6.1]. Ceci permet de transformer le problème du contrôle de l'équation de Schrödinger en un problème de distribution des solutions de l'équation de Schrödinger libre (1.1). En effet, notons que l'inégalité d'observabilité fait naturellement apparaître les mesures de Radon suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \nu(t) : b \in \mathcal{C}^0(M,\mathbb{C}) \mapsto \int_M b(x) \left| \left(e^{\frac{it\Delta}{2}} \psi \right)(x) \right|^2 d\mathrm{vol}_g(x) \in \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

où vol_g est la mesure de Lebesgue induite par la métrique riemannienne g sur M. Du point de vue de la mécanique quantique, $\nu(t,x)$ correspond à la probabilité de trouver une particule quantique dans l'état $e^{\frac{it\Delta}{2}}\psi$ en x.

1.1.1 Des quasi-modes semi-classiques à l'observabilité

Burq et Zworski ont démontré dans [44] que l'on pouvait obtenir une inégalité du type (1.3) à partir d'une estimation de résolvante. Plus précisément, on a le résultat suivant [44, Th.7]

Théorème 1.1.1 (Burq-Zworski). *Soit $s \geq 0$ et soit a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ non identiquement nulle. Supposons qu'il existe $C_0 > 0$ telle que, pour tout Λ dans $\mathbb{R}$ et pour tout ψ dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, on a*

$$C_0 \|\psi\|_{L^2(M)} \leq \frac{1}{\ln 2\langle\Lambda\rangle} \|(\Delta - \Lambda)\psi\|_{L^2(M)} + \langle\Lambda\rangle^{2s} \|a\psi\|_{L^2(M)}, \tag{1.5}$$

où $\langle\Lambda\rangle = (1 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}$.

Alors, pour tout $T > 0$, il existe $C_{T,a,s} > 0$ telle que, pour tout ψ dans $L^2(M)$,

$$\|\psi\|^2_{H^{-s}(M)} \leq C_{T,a,s} \int_0^T \left\| a e^{\frac{it\Delta}{2}} \psi \right\|^2_{L^2(M)} dt.$$

Le résultat de Burq et Zworski est en fait beaucoup plus général et nous ne le citons que sous une forme qui nous sera utile pour la suite sans forcément se soucier de l'optimalité des paramètres. Comme nous allons maintenant l'expliquer, une des conséquences principales de ce résultat est que l'on va pouvoir se ramener à l'étude de la distribution de solutions quasi-stationnaires (ou quasi-modes) de l'équation de Schrödinger semi-classique afin de démontrer la propriété d'observabilité. En d'autres termes, tout revient à démontrer (1.5). Pour cela, procédons par contradiction et supposons que l'inégalité (1.5) n'est jamais vérifiée. Ceci signifie que, pour tout $n \geq 1$, il existe ψ_n dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ normalisée dans $L^2(M)$ et Λ_n dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\frac{1}{\ln 2\langle\Lambda_n\rangle} \|(\Delta_g - \Lambda_n)\psi_n\|_{L^2(M)} + \langle\Lambda_n\rangle^{2s} \|a\psi_n\|_{L^2(M)} \leq \frac{1}{n}.$$

Supposons tout d'abord que la suite $(\Lambda_n)_{n\geq1}$ est bornée. Sans perte de généralité, on peut alors supposer que $\Lambda_n \to \Lambda_\infty$. Si Λ_∞ n'est pas dans le spectre de Δ_g, on contredit facilement le fait que ψ_n est de norme 1 pour tout $n \geq 1$. Par un argument similaire, on peut conclure que Λ_n ne peut pas tendre vers $+\infty$. Ainsi, Λ_∞ est nécessairement dans le spectre de Δ_g. De la même manière, on trouve que $\psi_n = \sum_{j:\lambda_j^2=-\Lambda_\infty} \langle\psi_n, e_j\rangle e_j + o(1)$. Quitte à extraire une nouvelle fois, on trouve finalement une fonction ψ_∞ normalisée dans L^2 telle que $\Delta_g\psi_\infty = \Lambda_\infty\psi_\infty$. Par ailleurs, par construction, on vérifie que $\int_M |a|^2|\psi_\infty|^2 = 0$. Or, a n'étant pas identiquement nulle, on contredit le principe de continuation unique pour les opérateurs elliptiques [140]. Il ne reste donc plus qu'à écarter le cas où $\Lambda_n \to -\infty$ afin de vérifier l'hypothèse (1.5) du théorème de Burq et Zworski. Si on introduit un paramètre semi-classique $\hbar_n = (-\Lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \to 0^+$, tout revient donc à comprendre la distribution de solutions quasi-stationnaires $(\psi_\hbar)_{\hbar\to0^+}$ de l'opérateur de Schrödinger semi-classique, i.e.

$$(-\hbar^2\Delta_g - 1)\psi_\hbar = o(\hbar^2|\log\hbar|), \quad \|\psi_\hbar\|_{L^2(M)} = 1. \tag{1.6}$$

En conclusion, si nous sommes capables de déterminer des conditions sur a, $s \geq 0$ et sur (M, g) pour que la quantité $\hbar^{-s}\int_M |a|^2|\psi_\hbar|^2$ ne tende jamais vers 0 lorsque l'on considère une suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to0^+}$ vérifiant (1.6), alors nous aurons vérifié l'hypothèse (1.5) du théorème 1.1.1. Nous pourrons alors déduire une certaine propriété de contrôle de l'équation de Schrödinger. Nous allons maintenant décrire des résultats allant en ce sens.

1.1.2 Mesures semi-classiques de quasi-modes

Dans le paragraphe, nous avons vu apparaître naturellement les familles de mesures de probabilité suivantes :

$$\nu_\hbar : b \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{C}) \mapsto \int_M b(x)|\psi_\hbar(x)|^2 d\mathrm{vol}_g(x) \in \mathbb{C}, \tag{1.7}$$

où $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ est une suite *normalisée* dans $L^2(M)$ vérifiant certaines propriétés de localisation spectrale. Rappelons en effet que, dans le cas du problème de contrôle que nous avons décrit, c'est la quantité $\nu_\hbar(|a|^2)$ qui intervient dans les hypothèses du théorème 1.1.1. Afin d'étudier ces mesures de probabilité, il est naturel d'introduire leur relevé microlocal, à savoir la distribution de Wigner

$$w_\hbar : b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M, \mathbb{C}) \mapsto \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar(b)\psi_\hbar\rangle_{L^2(M)}, \tag{1.8}$$

où $\mathrm{Op}_\hbar(b)$ est un opérateur pseudo-différentiel [247]. Cette quantité décrit la distribution de l'état quantique $\psi_\hbar$ dans l'espace des phases T^*M et pas seulement dans l'espace des configurations comme c'était le cas de la mesure $\nu_\hbar$. Cette notion est naturelle en mécanique quantique et remonte aux travaux de Wigner dans les années 1930 [232]. Dans la littérature mathématique, elle apparaît de manière un peu implicite dans les résultats d'ergodicité quantique de Šnirel'man [211], Zelditch [236] et Colin de Verdière [58]. Son étude systématique d'un point de vue mathématique pour des problèmes d'équations aux dérivées partielles est due à Tartar [220] et à Gérard [100] d'un point de vue microlocal. Le point de vue semi-classique apparaît quant à lui dans les travaux de Gérard [99] et de Lions-Paul [150].

Dressons maintenant quelques-unes des propriétés de ces distributions de Wigner qui permettent de bien mettre en évidence le lien entre l'hamiltonien classique (ici $H(x,\xi) = \|\xi\|^2/2$) et sa quantification

$$\hat{H}_\hbar := -\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}.$$

Tout d'abord, notons que le théorème de Calderón-Vaillancourt et l'inégalité de Gårding permettent de démontrer que tout point d'accumulation de la suite $(w_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ (pour la topologie faible dans $\mathcal{D}'(T^*M)$) est une mesure de Radon positive dont la masse totale est inférieure ou égale à 1. On appelle un tel point d'accumulation une mesure semi-classique de la suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ et on note $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ l'ensemble de ces points d'accumulation (lorsque $\hbar$ tend vers 0). Cette première propriété ne dépend pas des propriétés spectrales de la suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ et repose seulement sur le fait que les éléments de la suite sont normalisés dans $L^2(M)$. On peut toutefois en dire plus sur ces mesures si l'on fait des hypothèses sur la localisation spectrale de la suite considérée. Plus précisément, on a les résultats suivants [2] :

1. Si on suppose que

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{\hbar\to 0^+} \left\| \mathbf{1}_{[R,+\infty)}\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}\right)\psi_\hbar\right\|_{L^2} = 0,$$

alors, pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$, on a

$$\mu(T^*M) = 1.$$

2. La démonstration de ces résultats est basée sur les propriétés de base du calcul pseudo-différentiel [247, Ch. 5].

Par ailleurs, tout point d'accumulation de la suite de mesures de probabilité $(\nu_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ est le poussé en avant d'un élément de $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$.

2. S'il existe $0 \leq E_1 < E_2$ tels que

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \left\| \mathbf{1}_{[E_1,E_2]}\left(\hat{H}_\hbar\right)\psi_\hbar \right\|_{L^2} = 1,$$

alors le support de tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ est inclus dans

$$T^*_{[E_1,E_2]}M := \{(x,\xi) \in T^*M : H(x,\xi) \in [E_1,E_2]\}\,.$$

En particulier, si $\hat{H}_\hbar\psi_\hbar = \frac{1}{2}\psi_\hbar + o(1)$, alors le support de tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ est inclus dans

$$S^*M := \left\{(x,\xi) \in T^*M : H(x,\xi) = \frac{1}{2}\right\}. \tag{1.9}$$

3. Si $\hat{H}_\hbar\psi_\hbar = \frac{1}{2}\psi_\hbar + o(\hbar)$, alors pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ et pour tout b dans $\mathcal{C}^0(S^*M)$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mu(b) = \mu(b \circ \varphi^t). \tag{1.10}$$

Considérons maintenant une suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ dans $L^2(M)$ vérifiant

$$(-\hbar^2\Delta_g - 1)\psi_\hbar = o(\hbar), \quad \|\psi_\hbar\|_{L^2(M)} = 1.$$

De ce qui précède, on déduit que, pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ et pour tout b dans $\mathcal{C}^0(S^*M,\mathbb{R})$,

$$\mu(b) \in [B_-, B_+], \tag{1.11}$$

où

$$B_- := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\min_{\rho\in S^*M}\int_0^T b\circ\varphi^t(\rho)dt \text{ et } B_+ := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\max_{\rho\in S^*M}\int_0^T b\circ\varphi^t(\rho)dt.$$

En combinant cette observation aux arguments du paragraphe précédent, on retrouve le résultat classique de Lebeau sur le contrôle de l'équation de Schrödinger [142] :

Théorème 1.1.2 (Lebeau)**.** *Soit a dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que*

$$K_a := \bigcap_{t\in\mathbb{R}}\left\{\rho \in S^*M : a\circ\varphi^t(\rho) = 0\right\} = \emptyset. \tag{1.12}$$

Alors, pour tout $T > 0$, l'équation de Schrödinger (1.2) *est contrôlable en temps T pour des données dans $L^2(M)$.*

La condition (1.12) est connue comme la condition de contrôle géométrique et elle est en un certain sens optimale si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire (par exemple sur la géométrie de la variété). Pour illustrer cette remarque, nous reviendrons sur cette question au chapitre 3 dans le cas des variétés dites de Zoll. Par contre, si l'on considère le tore plat, l'équation de Schrödinger est contrôlable en tout temps $T > 0$ quelle que soit la fonction a non identiquement nulle que l'on a choisie sur M [131, 44, 165, 158, 7, 45, 32]. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à un autre type de géométrie induisant des comportements chaotiques du flot géodésique φ^t plutôt qu'intégrables. Nous verrons quel type de propriétés supplémentaires est alors vérifiée par les quasi-modes (1.6) et quelles sont les propriétés de contrôle qui en découlent.

1.2 Propriétés de délocalisation des quasi-modes

Nous allons maintenant nous concentrer sur les propriétés de délocalisation de solutions quasi-stationnaires $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ de l'équation de Schrödinger semi-classique au sens suivant :

$$(-\hbar^2\Delta_g - 1)\psi_\hbar = o(\hbar|\log\hbar|^{-k}), \quad \|\psi_\hbar\|_{L^2(M)} = 1, \tag{1.13}$$

avec $k = 1$ ou 2 selon les situations géométriques. Les résultats principaux obtenus dans [188, 190] montrent que ce type de quasi-modes ne peut pas se concentrer sur des ensembles trop petits pourvu que la dynamique sous-jacente soit *chaotique*.

1.2.1 Quelques éléments de la théorie des systèmes dynamiques

Avant d'énoncer nos résultats, nous allons préciser ce que nous entendons par "chaotique". Fixons $(\mathbb{M}, G)$ une variété riemannienne, compacte, lisse, sans bords, connexe, orientée et de dimension N et un flot lisse $\phi^t : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ sans point singulier. L'exemple que nous avons en tête pour l'instant est le flot géodésique φ^t agissant sur le fibré unitaire tangent S^*M d'une variété (M, g) que l'on munit de la métrique de Sasaki g_S induite par g sur S^*M [198]. Considérons un ensemble compact $\Lambda \subset \mathbb{M}$ invariant par le flot ϕ^t. On dit que Λ est *hyperbolique* [1] pour le flot ϕ^t s'il existe $C > 0$, $\chi > 0$ et une famille d'espaces $E_u(\rho), E_s(\rho) \subset T_\rho\mathbb{M}$ (pour tout ρ dans Λ) vérifiant les propriétés suivantes, pour tout ρ dans Λ et tout $t \geq 0$,

1. $T_\rho\mathbb{M} = \mathbb{R}X(\rho) \oplus E_u(\rho) \oplus E_s(\rho)$ avec $X(\rho) = \frac{d}{d}(\phi^t(\rho))\rceil_{t=0}$,
2. $d_\rho\phi^t E_{u/s}(\rho) = E_{u/s}(\phi^t(\rho))$,
3. pour tout v dans $E_u(\rho)$, $\|d_\rho\phi^{-t}v\| \leq Ce^{-\chi t}\|v\|$,
4. pour tout v dans $E_s(\rho)$, $\|d_\rho\phi^{t}v\| \leq Ce^{-\chi t}\|v\|$.

De manière assez vague, on peut noter que ces hypothèses nous disent que deux points qui sont sur des trajectoires proches vont avoir tendance à s'éloigner l'un de l'autre de manière exponentielle. Le système dynamique $\phi^t\rceil_\Lambda$ est donc en ce sens très sensible aux perturbations et fournit un bon modèle de comportement chaotique. Ce type de systèmes vérifient de nombreuses propriétés (ergodicité, mélange, etc.) sur lesquelles nous reviendrons plus loin dans ce mémoire au fur et à mesure que nous serons amenés à les utiliser. Notons que l'exemple le plus simple est donné par une orbite fermée du flot ϕ^t dont le linéarisé d'une application de Poincaré est une matrice hyperbolique (au sens où ses valeurs propres ne sont pas de module 1). Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{M}$, on parle d'un flot Anosov. L'exemple principal où $\Lambda = \mathbb{M}$ est donné par le flot géodésique sur une variété à courbures sectionnelles strictement négatives [11].

En faisant appel à la notion de pression topologique, nous pouvons maintenant essayer de caractériser la taille d'un ensemble hyperbolique Λ. Pour cela, définissons le Jacobien instable en un point ρ de Λ de la manière suivante [3] :

$$J^u(\rho) := \left|\det\left(d_{\phi^1(\rho)}\phi^{-1}\rceil_{E^u(\phi^1(\rho))}\right)\right|,$$

où l'on a muni les espaces instables $E^u(\rho)$ et $E^u(\phi^1(\rho))$ des métriques riemanniennes induites par G. Ceci définit une fonction hölderienne sur Λ [136]. Afin de mesurer la taille de Λ en tenant compte des propriétés dynamiques du flot, nous introduisons, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $T \geq 0$, la boule de Bowen centrée en $\rho \in \mathbb{M}$:

$$B_d(\rho, \epsilon, T) := \left\{\rho' \in \mathbb{M} : \ \forall 0 \leq t \leq T, \ d(\phi^t(\rho), \phi^t(\rho')) < \epsilon\right\},$$

3. Notons que le choix du temps $t = 1$ est arbitraire et ne change pas les définitions qui vont suivre.

où d est la distance induite par la métrique riemannienne G. Cette boule représente l'ensemble des points dont la trajectoire reste proche de celle de ρ jusqu'au temps T. On dit qu'un sous-ensemble fini $F \subset \Lambda$ est (ϵ, T)-séparé si, pour tout ρ et ρ' dans F, $\rho' \in B_d(\rho, \epsilon, T)$ implique $\rho = \rho'$. Pour tout $0 \leq s \leq 1$, on peut alors définir la pression topologique de l'ensemble Λ de la manière suivante [228] :

$$P_{\text{top}}(\Lambda, s) := \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \log \sup_{F} \left\{ \sum_{\rho \in F} \exp\left(s \int_0^T \log J^u \circ \phi^t(\rho) dt \right) \right\},$$

où le supremum est pris parmi tous les ensembles F qui sont (ϵ, T)-séparés. On peut remarquer qu'à des constantes près, la quantité $\exp\left(s \int_0^T \log J^u \circ \phi^t(\rho) dt \right)$ mesure le volume riemannien (élevé à la puissance s) de la boule de Bowen centrée au point ρ. Cette définition ressemble donc un peu à ce que l'on est amené à définir lorsqu'on calcule la dimension de Hausdorff d'un ensemble [179] à la différence que l'on considère des boules dynamiques plutôt que des boules classiques.

On peut démontrer que l'application $s \mapsto P_{\text{top}}(\Lambda, s)$ est continue et convexe [195]. Dans le cas $s = 0$, la quantité ainsi définie s'appelle l'entropie topologique de Λ que l'on note $h_{top}(\Lambda)$. On peut vérifier que $h_{top}(\Lambda)$ est supérieure ou égale à 0. L'inégalité de Ruelle combinée avec le principe variationnel permet aussi de démontrer que $P(\Lambda, 1) \leq 0$ [197]. Il est en fait possible de démontrer que l'équation de Bowen

$$P_{\text{top}}(\Lambda, s) = 0$$

admet une unique solution $s_\Lambda \in [0, 1]$ qui mesure donc en un certain sens une “dimension” dynamique le long de la variété instable. Notons pour la suite que, dans le cas du flot géodésique en dimension 2, la condition $P_{\text{top}}(\Lambda, s) < 0$ est satisfaite dès que la dimension de Hausdorff de l'ensemble Λ est strictement plus petite que $1 + 2s$ [16]. La réciproque est vraie si l'on suppose en plus que l'ensemble Λ est localement maximal [178].

1.2.2 Le cas Anosov

Dans le cas de variétés M dont le flot géodésique est de type Anosov, nous obtenons alors le résultat suivant [188] :

Théorème 1.2.1 (R. 2012)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $0 \leq c(\delta) < 1$ telle que, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{\hbar \to 0^+}$ vérifiant* (1.13) *avec $k = 1$ et pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar \to 0^+})$, on a*

$$P_{\text{top}}\left(\Lambda, \frac{1}{2}\right) < -\delta \Longrightarrow \mu(\Lambda) \leq c(\delta) < 1.$$

Ce résultat nous dit donc qu'une suite de quasi-modes (logarithmiques) ne peut pas se concentrer entièrement sur un ensemble trop petit, où la petitesse de l'ensemble est mesurée en termes dynamiques à travers la condition $P_{\text{top}}(\Lambda, 1/2) < 0$. Cette condition implique notamment que $s_\Lambda < \frac{1}{2}$ et, en dimension 2, elle est vérifiée par tout ensemble Λ invariant de dimension de Hausdorff < 2. Ce type d'hypothèse dynamique a été mis en évidence par Anantharaman et Nonnenmacher pour des problèmes identiques [3, 8, 9] et par Nonnenmacher et Zworski pour démontrer l'existence de trous spectraux dans certains problèmes de diffusion chaotique [174]. Ces résultats antérieurs d'Anantharaman et Nonnenmacher étaient obtenus sous certaines hypothèses faisant intervenir l'entropie topologique de Λ [3] ou une condition sur $P_{\text{top}}(\Lambda, 1)$ [9]. En courbure variable, l'hypothèse dynamique du théorème précédent est légèrement plus générale que celles de ces références et elle permet de retrouver la condition mise en évidence par Nonnenmacher et Zworski pour les problèmes de diffusion chaotique. Anantharaman et Nonnenmacher ont en fait formulé qu'une propriété légèrement plus forte devait avoir lieu pour de telles suites de quasi-modes. Plus précisément, ils conjecturent dans [9] que, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant (1.13) et pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$,

$$h_{KS}(\mu) \geq -\frac{1}{2}\int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho), \tag{1.14}$$

où $h_{KS}(\mu)$ est l'entropie de Kolmogorov-Sinai de la mesure φ^s-invariante μ [228]. Rappelons que l'inégalité de Ruelle [195] implique que, pour toute mesure φ^s-invariante μ,

$$h_{KS}(\mu) \leq -\int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho). \tag{1.15}$$

Ledrappier et Young ont par ailleurs démontré que l'on a égalité si et seulement si μ est la mesure de Liouville [145]. Anantharaman et Nonnenmacher ont démontré (1.14) dans le cas de variétés à courbure constante $K = -1$ et j'avais démontré cette inégalité en dimension 2 dans ma thèse [186, 185]. Le théorème précédent (valable en toute dimension) ne permet toutefois pas de démontrer l'inégalité (1.14) mais on peut en déduire une version affaiblie en suivant les arguments d'Anantharaman dans [3]. Pour cela, rappelons que le théorème de Birkhoff [228] nous assure que, pour μ presque tout ρ dans S^*M, la limite

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_{\varphi^t(\rho)} dt = \mu_\rho$$

existe et on peut alors écrire la décomposition ergodique de la mesure invariante μ [81] :

$$\mu = \int_{S^*M} \mu_\rho d\mu(\rho).$$

On peut démontrer que $h_{KS}(\mu) = \int_{S^*M} h_{KS}(\mu_\rho) d\mu(\rho)$ et on a alors le résultat suivant [188] qui est légèrement moins fort que l'inégalité (1.14) :

Théorème 1.2.2 (R. 2012)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $c(\delta) > 0$ telle que, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant* (1.13) *avec $k = 1$ et pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$, on a*

$$\mu\left(\left\{\rho \in S^*M : h_{KS}(\mu_\rho) \geq -\frac{1}{2}\int_{S^*M} \log J^u d\mu_\rho - \delta\right\}\right) \geq c(\delta) > 0.$$

Même s'ils sont naturellement reliés aux problèmes de contrôle décrits plus haut dans ce chapitre, ces résultats sur l'entropie des mesures semi-classiques sont initialement motivés par la conjecture d'unique ergodicité quantique de Rudnick et Sarnak [193]. Cette conjecture affirme que si l'on considère une suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant

$$(-\hbar^2\Delta_g - 1)\psi_\hbar = 0, \quad \|\psi_\hbar\|_{L^2(M)} = 1$$

sur une variété à courbures sectionnelles strictement négatives, alors l'ensemble $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ est nécessairement réduit à la mesure de Liouville. Cette conjecture est notamment motivée par le théorème d'ergodicité quantique de Šnirel'man [211], Zelditch [236] et Colin de Verdière [58] sur lequel nous reviendrons plus loin dans ce mémoire. Le fait que l'on ait bien besoin de se restreindre à la courbure négative a été démontré récemment par Hassell et Hillairet [114]. Dans le cas d'une *surface arithmétique*, cette conjecture d'unique ergodicité quantique a été démontrée par Lindenstrauss en supposant que la suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ est en plus une suite de fonctions propres des opérateurs [4] de Hecke [149]. Sa démonstration consiste à prouver un théorème de classification des mesures invariantes, récurrentes pour les opérateurs de Hecke et à entropie positive. Afin d'appliquer son résultat de classification aux mesures semi-classiques, il faut encore assurer la propriété de récurrence de Hecke et celle d'entropie positive. Pour la propriété de récurrence, il impose de considérer une suite de fonctions propres de Hecke. Quant à la propriété d'entropie positive, elle découle d'un résultat antérieur qu'il avait obtenu avec Bourgain [33] et qui assure que, pour μ presque tout ρ dans S^*M, $h_{KS}(\mu_\rho) > 0$.

Les résultats entropiques d'Anantharaman et Nonnenmacher ou ceux qui sont présentés ici sont plus faibles que ceux de Bourgain et Lindenstrauss. Ils sont par contre valables en toute généralité dès que l'on suppose que le flot géodésique est de type Anosov. Notons que, grâce au théorème de Ledrappier et Young, démontrer la conjecture de Rudnick et Sarnak dans ce cadre géométrique général reviendrait à démontrer la conjecture d'Anantharaman et Nonnenmacher en remplaçant le 1/2 par un 1. Exprimé en termes de pression topologique, il faudrait démontrer que

$$P_{\text{top}}(\Lambda, 1) < 0 \Longrightarrow \mu(\Lambda) = 0.$$

Il convient de mentionner que le paramètre 1/2 semble toutefois optimal si on ne suppose rien de plus que l'hyperbolicité du flot géodésique sur S^*M. En effet, on peut considérer des versions simplifiées de ces problèmes en quantifiant certains symplectomorphismes linéaires hyperboliques du tore [86, 137, 8] et démontrer que l'inégalité entropique est en fait optimale. Les résultats de Brooks [37], Eswarathasan-Nonnenmacher [82] et Eswarathasan-Silberman [84] mettent en évidence que la précision $o(\hbar|\log\hbar|^{-1})$ dans (1.13) semble optimale pour éviter les phénomènes de concentration des quasi-modes dans la limite semi-classique. Finalement, mentionnons que Dyatlov et Jin ont très récemment démontré par des méthodes différentes que, pour *toute surface hyperbolique* compacte et pour toute suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant (1.13) avec $k = 1$, on a, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ non vide de S^*M,

$$\mu(\mathcal{U}) > 0,$$

quelle que soit la mesure μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ [77].

Revenons maintenant aux questions de contrôle de l'équation de Schrödinger discutées plus haut. Avec Nalini Anantharaman, nous avions observé dans [10] que les méthodes "entropiques" ci-dessus s'appliquaient directement à ces problèmes de contrôle. Précisément, on peut déduire de ce qui précède le résultat suivant :

Corollaire 1.2.3. *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. On fixe a dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que*

$$P_{top}\left(K_a, \frac{1}{2}\right) < 0.$$

4. Par la suite, ce résultat a été amélioré par Brooks et Lindenstrauss qui démontrent que l'on a seulement besoin d'un seul opérateur de Hecke et que l'on peut considérer des quasi-modes d'ordre $o(\hbar)$ [39].

Alors, pour tout $T > 0$, l'équation (1.2) *est contrôlable en temps T pour des données dans $L^2(M)$.*

Ce résultat améliore donc le théorème de contrôle de Lebeau dans le cas d'un flot Anosov (par exemple en courbure négative) puisque l'on n'a pas besoin de supposer que l'ensemble K_a est vide pour contrôler l'équation de Schrödinger. La preuve de ce corollaire découle directement du théorème 1.1.1 de Burq et Zworski et de la discussion qui en suit combinés avec le théorème 1.2.1 et les propriétés d'invariance des mesures semi-classiques. Notons que, dans le cas des surfaces hyperboliques compactes, le résultat de Dyatlov et Jin assure que l'on peut contrôler l'équation de Schrödinger pour tout choix de a non identiquement nulle. On peut aussi observer que le résultat de Burq et Zworski ne nécessite de considérer que des quasi-modes de précision $o(\hbar^2)$ alors que notre théorème et celui de Dyatlov-Jin sont valables pour des quasi-modes de taille $o(\hbar|\log\hbar|^{-1})$. Il serait intéressant de comprendre si ce gain de précision n'a pas d'autres applications en théorie du contrôle.

1.2.3 Le cas général

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait une hypothèse globable sur la variété (propriété d'Anosov) afin de déduire un résultat sur la délocalisation des solutions quasi-stationnaires (1.13) de l'équation de Schrödinger semi-classique. On peut en fait retirer cette hypothèse globale au prix d'une petite perte dans la conclusion du théorème. Pour cela, étant donnés un ensemble compact invariant Λ et une constante $\delta > 0$, on dit que la fonction $\Theta_{\Lambda,\delta} : S^*M \to [0,1]$ est (Λ,δ)-*localisée* si

— $\Theta_{\Lambda,\delta}(\rho) = 1$ pour $d_{S^*M}(\rho,\Lambda) \leq \delta$,

— $\Theta_{\Lambda,\delta}(\rho) = 0$ pour $d_{S^*M}(\rho,\Lambda) \geq 2\delta$,

— les dérivées d'ordre α de $\Theta_{\Lambda,\delta}$ sont contrôlées par $\delta^{-|\alpha|}$.

Nous ferons par la suite un léger abus de notation en identifiant $\Theta_{\Lambda,\delta}$ à une fonction à support compact de T^*M qui est 0-homogène dans un voisinage de S^*M. On peut alors déduire de la preuve donnée dans [190, Appendice] le résultat suivant :

Théorème 1.2.4 (Nonnenmacher-R. 2012)**.** *Soit $\Lambda \subset S^*M$ un ensemble hyperbolique de φ^t vérifiant l'hypothèse :*

$$P_{\text{top}}\left(\Lambda, \frac{1}{2}\right) < 0.$$

*Alors, il existe $\delta_0 > 0$ telle que, pour toute fonction $\Theta_{\Lambda,\delta_0} : S^*M \to [0,1]$ qui est (Λ,δ_0)-*localisée*, on peut trouver $c_0 > 0$ telle que, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant* (1.13) *avec $k = 2$, on a*

$$\liminf_{\hbar\to 0^+} \left(|\log\hbar| \langle w_\hbar, 1 - \Theta_{\Lambda,\delta_0}\rangle\right) \geq c_0 > 0,$$

où $w_\hbar$ est la distribution de Wigner associée à $\psi_\hbar$.

De manière équivalente, même s'il n'interdit pas que des quasi-modes se concentrent sur un ensemble Λ de petite taille, ce résultat nous dit qu'il restera toujours une fraction $|\log\hbar|^{-1}$ de la masse des solutions de (1.13) à une distance suffisamment grande de Λ. Dans le cas du théorème 1.2.1, l'hypothèse globale nous permettait de dire plus, à savoir qu'une fraction *uniformément positive* de la masse des $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ était contenue en dehors d'un voisinage de Λ. Notons aussi que l'hypothèse sur les quasi-modes est légèrement plus restrictive que dans le théorème 1.2.1 mais tout de même largement suffisante pour les applications à la théorie du contrôle. Dans le théorème précédent, on est en fait obligé de concéder une petite perte logarithmique en l'absence d'hypothèse géométrique supplémentaire. Colin de Verdière et Parisse ont en effet exhibé des solutions stationnaires pour lesquels la conclusion du théorème est optimale [59]. Notons que, dans le cas où Λ est une orbite périodique hyperbolique, le théorème 1.2.4 avait déjà été démontré par Colin de Verdière-Parisse [59], Toth-Zelditch [223], Burq-Zworski [44] et Christianson [53, 54] sous la condition plus générale $k = 1$. Toth et Zelditch ont en fait démontré une propriété légèrement plus forte sur laquelle nous reviendrons dans le cas des problèmes non auto-adjoints : ils démontrent que les solutions de (1.13) ne peuvent pas se concentrer dans des voisinages de taille $\hbar^\nu$ (avec $0 < \nu < 1/2$) d'une orbite hyperbolique. Par ailleurs, Christianson a étendu le résultat à des orbites partiellement hyperboliques [55], i.e. dont certains exposants de Lyapunov sont nuls. Il serait à ce propos intéressant de comprendre si l'hypothèse d'hyperbolicité du théorème 1.2.4 ne peut pas être un peu relâchée.

Enfin, notons que le théorème 1.2.4 induit la propriété de contrôle suivante :

Corollaire 1.2.5. *On fixe a dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que K_a est un sous-ensemble hyperbolique pour φ^t vérifiant*

$$P_{top}\left(K_a, \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Alors, pour tout $T > 0$ et tout $s > 0$, l'équation (1.2) *est contrôlable en temps T pour des données dans $H^s(M)$.*

Comparé au corollaire 1.2.3, on n'impose plus d'hypothèse globale sur le flot et on réussit tout de même à déduire un résultat de contrôle sans forcément imposer l'hypothèse de contrôle géométrique $K_a = \emptyset$. Par souci de complétude, donnons brièvement l'argument pour prouver ce corollaire. D'après le théorème 1.1.1, il suffit de vérifier que (1.5) est satisfaite pour tout $s > 0$. Pour cela, on procède par contradiction et comme nous l'avons déjà expliqué à la suite du théorème 1.1.1, il suffit de supposer qu'on a une suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ de quasi-modes vérifiant (1.6) et tels que $\hbar^{-s}\int_M a^2|\psi_\hbar|^2 d\mathrm{vol}_g \to 0$. Ici, on cherche à appliquer le théorème précédent. Toutefois, le passage à la limite $\hbar \to 0^+$ et l'utilisation des propriétés des mesures semi-classiques ne suffit plus pour conclure. Au lieu de travailler sur les mesures semi-classiques, on travaille directement avec les distributions de Wigner et on utilise le théorème d'Egorov [247, Th. 11.1] pour écrire que

$$\int_M a^2|\psi_\hbar|^2 d\mathrm{vol}_g = \langle w_\hbar, a^2\rangle = \left\langle w_\hbar, \frac{1}{T}\int_0^T a^2\circ\varphi^t dt\right\rangle + \mathcal{O}_T(\hbar).$$

Par définition de K_a, on sait que pour $T > 0$ assez grand, la fonction $\frac{1}{T}\int_0^T a^2\circ\varphi^t dt$ est plus grande que la fonction $(1 - \Theta_{K_a,\delta_0})$. En appliquant l'inégalité de Gårding [247, Th. 4.32], on en déduit finalement

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \hbar^{-s}\langle w_\hbar, 1 - \Theta_{K_a,\delta_0}\rangle = 0,$$

ce qui contredit le théorème 1.2.4 et conclut la preuve du corollaire.

1.2.4 Quelques éléments de la preuve

La preuve du théorème 1.2.4 étant plus simple à exposer, nous nous contenterons de donner les grandes lignes de la démonstration dans ce cas (sans pour autant rentrer dans les détails techniques) et nous renvoyons à [190] pour les détails et à [188] pour le cas où l'on ajoute une hypothèse globale sur la dynamique du flot géodésique. Fixons $(V_a)_{a\in W}$ un recouvrement de Λ par des ouverts de T^*M adaptés à la dynamique. Afin d'éviter les complications techniques, nous resterons volontairement vagues sur cet aspect et nous renvoyons à [190, Par. 2.2] pour les détails. Nous nous contenterons de dire qu'ils sont construits en considérant des analogues discrets des (ϵ, T)-boules de Bowen et que l'on a l'estimation dynamique suivante

$$\sum_{a\in W}\sup_{\rho\in V_a}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\log J^u\circ\varphi^t(\rho)dt\right)\leq e^{T_0(P_{\mathrm{top}}(\Lambda,1/2)+\epsilon_0)}, \tag{1.16}$$

où $\epsilon_0>0$ est un paramètre assez petit fixé au préalable et $T_0>0$ est assez grand. Nous complétons ce recouvrement en considérant un ouvert V_∞ de T^*M n'intersectant pas Λ (ni ses dilatations dans un voisinage de S^*M). Dans la suite, on notera $\overline{W}=W\cup\{\infty\}$. Nous allons chercher à démontrer qu'une proportion $|\log\hbar|^{-1}$ de la distribution de Wigner associée à la suite $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ est contenue dans V_∞. Pour cela, on commence par introduire une partition de l'unité $(P_a)_{a\in\overline{W}}$ subordonnée au recouvrement ouvert $(V_a)_{a\in\overline{W}}$, i.e.

$$\forall a\in\overline{W},\ P_a\in\mathcal{C}_c^\infty(V_a,[0,1])\text{ et }\sum_{a\in\overline{W}}P_a(\rho)=1,$$

pour ρ dans un petit voisinage de S^*M. On peut quantifier cette partition en une famille d'opérateurs pseudo-différentiels $(\pi_a)_{a\in\overline{W}}$ de telle sorte que $\pi_a^*=\pi_a$, que le symbole principal de π_a est égal à P_a et que

$$\sum_{a\in\overline{W}}\pi_a=\mathrm{Id}_{L^2(M)},$$

pour des données microlocalisées près de S^*M, par exemple pour la suite $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$. On a ainsi construit une partition quantique de l'identité. On va maintenant définir une sorte d'analogue au niveau semi-classique des boules de Bowen. Pour cela, introduisons l'équation de Schrödinger semi-classique

$$i\hbar\partial_t u_\hbar=-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}u_\hbar,\ u_\hbar\rceil_{t=0}=v_\hbar. \tag{1.17}$$

On a alors $u_\hbar(t)=\mathcal{U}_\hbar(t)v_\hbar$ avec

$$\mathcal{U}_\hbar(t)=e^{\frac{it\hbar\Delta_g}{2}}. \tag{1.18}$$

Si on définit $\pi_a(t)=\mathcal{U}_\hbar(-t)\pi_a\mathcal{U}_\hbar(t)$, on a toujours la relation

$$\sum_{a\in\overline{W}}\pi_a(t)=\mathrm{Id}_{L^2(M)},$$

pour des données microlocalisées près de S^*M. Ainsi, pour tout $N\geq 0$, on peut écrire

$$\sum_{\alpha\in\overline{W}^N}\left\langle\psi_\hbar,\pi_{\alpha_{N-1}}((N-1)T_0)\dots\pi_{\alpha_1}(T_0)\pi_{\alpha_0}\psi_\hbar\right\rangle=1. \tag{1.19}$$

Chacun des opérateurs peut être pensé comme un analogue semi-classique des boules de Bowen. En effet, à n fixé, le symbole principal de cet opérateur est $P_{\alpha_{N-1}}\circ\varphi^{(N-1)T_0}\times\dots\times P_{\alpha_1}\circ\varphi^{T_0}\times P_{\alpha_0}$. Les points qui sont dans le support de ce symbole sont exactement les points

ρ qui au temps 0 sont dans V_{α_0}, au temps T_0 dans V_{α_1}, etc. Notons que, grâce au théorème d'Egorov en temps longs [247, Th. 11.12], cette observation reste vraie pour N d'ordre $\kappa|\log\hbar|$ avec $\kappa > 0$ assez petit. Nous utiliserons cette remarque à plusieurs reprises dans la suite.

Le premier point-clef est d'utiliser une estimation de dispersion hyperbolique due à Nonnenmacher et Zworski [174] pour estimer les termes correspondant à des mots α dans W^n. Précisément, ils démontrent que, pour tout $\mathcal{K} > 0$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ et $\hbar_{\mathcal{K}} > 0$ tels que, pour tout $0 < \hbar \leq \hbar_{\mathcal{K}}$, pour tout $N \leq \mathcal{K}|\log\hbar|$ et pour tout α dans W^n,

$$\left\|\pi_{\alpha_{N-1}}((n-1)T_0)\dots\pi_{\alpha_1}(T_0)\pi_{\alpha_0}\right\|_{L^2\to L^2} \leq C_{\mathcal{K}}\hbar^{-\frac{n}{2}}(1+\mathcal{O}(\epsilon))^{NT_0}\prod_{k=0}^{N-1}\sup_{\rho\in V_{\alpha_k}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\log J^u\circ\varphi^t(\rho)dt\right). \tag{1.20}$$

où $\epsilon > 0$ est le diamètre des ouverts $(V_\alpha)_{\alpha\in W}$. Si on implémente cette inégalité ainsi que l'estimation (1.16) dans (1.19), on en déduit que

$$\sum_{\alpha\in\overline{W}^N-W^N}\left\langle\psi_\hbar,\pi_{\alpha_{N-1}}((N-1)T_0)\dots\pi_{\alpha_1}(T_0)\pi_{\alpha_0}\psi_\hbar\right\rangle = 1+\mathcal{O}(\hbar^{-\frac{n}{2}}e^{NT_0(P_{\text{top}}(\Lambda,1/2)+\epsilon_0)}). \tag{1.21}$$

Ainsi, si on utilise l'hypothèse $P_{\text{top}}(\Lambda,1/2) < 0$ et si on choisit $N = [\mathcal{K}|\log\hbar|]$ avec $\mathcal{K} > 0$ assez grand, on trouve que

$$\sum_{\alpha\in\overline{W}^N-W^N}\left\langle\psi_\hbar,\pi_{\alpha_{N-1}}((N-1)T_0)\dots\pi_{\alpha_1}(T_0)\pi_{\alpha_0}\psi_\hbar\right\rangle = 1+o(1). \tag{1.22}$$

Remarque 1.2.6. L'estimée de dispersion hyperbolique (1.20) avait été obtenue par Anantharaman et Nonnenmacher dans le cas où le flot géodésique est de type Anosov [3, 9]. Dans ce contexte, l'estimation (1.20) est valable sans aucune restriction sur le choix des α et c'est cette information plus précise qu'il faut utiliser si on veut démontrer le théorème 1.2.1.

Notons maintenant que (1.22) se récrit

$$\sum_{\alpha\in\overline{W}^N-W^N}\left\langle\mathcal{U}_\hbar(T_0(N-1))\psi_\hbar,\pi_{\alpha_{N-1}}\mathcal{U}_\hbar(T_0)\dots\pi_{\alpha_1}\mathcal{U}_\hbar(T_0)\pi_{\alpha_0}\psi_\hbar\right\rangle = 1+o(1), \tag{1.23}$$

ou encore, par Cauchy-Schwwarz,

$$\left\|\sum_{\alpha\in\overline{W}^N-W^N}\pi_{\alpha_{N-1}}((N-1)T_0)\dots\pi_{\alpha_1}(T_0)\pi_{\alpha_0}\psi_\hbar\right\| \geq 1+o(1). \tag{1.24}$$

Pour conclure, il faut maintenant effectuer un petit travail combinatoire et fixer en premier un petit paramètre $\kappa > 0$. On écrit alors $N = kN_1$ avec $N_1 \simeq [\kappa|\log\hbar|]$ de sorte que les règles du calcul pseudo-différentiel semi-classique (e.g. le théorème d'Egorov) s'appliquent sur ces échelles de temps. Obervons que k est borné en fonction de $\mathcal{K}$ et κ. En utilisant le théorème d'Egorov en temps longs [247, Th. 11.12], le théorème de composition et le théorème de Calderón-Vaillancourt pour les opérateurs pseudo-différentiels, on peut vérifier qu'on a

$$\left\|\sum_{\gamma\in W^{N_1}}\pi_{\gamma_{N_1-1}}((N_1-1)T_0)\dots\pi_{\gamma_1}(T_0)\pi_{\gamma_0}\right\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}(1).$$

Observons maintenant que

$$\overline{W}^N - W^N = \bigsqcup_{p=1}^{k} \left\{\alpha = (\overline{\gamma}, \gamma, \tilde{\gamma}) : \overline{\gamma} \in \overline{W}^{N_1(p-1)},\ \gamma \in \overline{W}^{N_1} - W^{N_1},\ \tilde{\gamma} \in W^{N_1(k-p)}\right\}.$$

Ceci permet de récrire (1.24) sous la forme

$$1 + o(1) \leq \mathcal{O}(1) \sum_{p=1}^{k} \left\| \sum_{\gamma \in \overline{W}^{N_1} - W^{N_1}} \pi_{\gamma_{N_1-1}} \mathcal{U}_\hbar(T_0) \dots \pi_{\gamma_1} \mathcal{U}_\hbar(T_0) \pi_{\gamma_0} \mathcal{U}_\hbar(T_0 N_1 p) \psi_\hbar \right\|, \qquad (1.25)$$

ou encore, en utilisant le fait que $\mathcal{U}_\hbar(t)$ est unitaire et une nouvelle fois que les $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ sont solutions de (1.13),

$$1 + o(1) \leq \mathcal{O}(1) \left\| \sum_{\gamma \in \overline{W}^{N_1} - W^{N_1}} \pi_{\gamma_{N_1-1}}((N_1-1)T_0) \dots \pi_{\gamma_1}(T_0) \pi_{\gamma_0} \psi_\hbar \right\|. \qquad (1.26)$$

En élevant cette inégalité au carré, on trouve qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C \leq \left\| \sum_{\gamma \in \overline{W}^{N_1} - W^{N_1}} \pi_{\gamma_{N_1-1}}((N_1-1)T_0) \dots \pi_{\gamma_1}(T_0) \pi_{\gamma_0} \psi_\hbar \right\|^2. \qquad (1.27)$$

En utilisant le théorème d'Egorov pour les temps longs (rappelons que $N_1 \simeq [\kappa|\log \hbar|]$ avec $\kappa > 0$ assez petit) et le théorème de composition pour les opérateurs pseudo-différentiels, on peut vérifier que cette inégalité se récrit :

$$C \leq \left\langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar \left(\left(\sum_{\gamma \in \overline{W}^{N_1} - W^{N_1}} P_{\gamma_{N_1-1}} \circ \varphi^{(N_1-1)T_0} \times \dots \times P_{\gamma_1} \circ \varphi^{T_0} \times P_{\gamma_0} \right)^2 \right) \psi_\hbar \right\rangle + o(1). \qquad (1.28)$$

On utilise maintenant l'inégalité de Gårding et le fait que le symbole est ≤ 1 pour déduire l'inégalité suivante :

$$C \leq \left\langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar \left(\sum_{\gamma \in \overline{W}^{N_1} - W^{N_1}} P_{\gamma_{N_1-1}} \circ \varphi^{(N_1-1)T_0} \times \dots \times P_{\gamma_1} \circ \varphi^{T_0} \times P_{\gamma_0} \right) \psi_\hbar \right\rangle + o(1). \qquad (1.29)$$

On recommence alors un dernier travail combinatoire similaire au précédent, i.e. on écrit

$$\overline{W}^{N_1} - W^{N_1} = \bigsqcup_{p=1}^{N_1-1} \left\{\alpha = (\overline{\gamma}, \infty, \tilde{\gamma}) : \overline{\gamma} \in \overline{W}^{p-1},\ \tilde{\gamma} \in W^{N_1-p}\right\}.$$

On se sert alors du fait qu'on a une partition de l'unité au voisinage de S^*M et de l'inégalité de Gårding pour récrire (1.30) comme suit

$$C \leq \sum_{p=1}^{N_1-1} \left\langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar \left(P_\infty \circ \varphi^{pT_0}\right) \psi_\hbar \right\rangle + o(1). \qquad (1.30)$$

En utilisant le théorème d'Egorov pour les temps longs et une dernière fois le fait que les $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifient (1.13) avec $k=2$, on peut conclure que

$$C \leq N_1 \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar(P_\infty)\psi_\hbar\rangle + o(N_1^2|\log\hbar|^{-2}).$$

Rappelons enfin que N_1 est d'ordre $|\log\hbar|$, ce qui permet de conclure la preuve du théorème 1.2.4.

Remarque 1.2.7. Jusqu'à ce point de la preuve, on pouvait se contenter d'utiliser (1.13) avec $k=1$, mais, pour cette dernière étape, on doit vraiment utiliser cette hypothèse de localisation avec $k=2$. Au regard des résultats dans le cas où Λ est une orbite hyperbolique [53, 54], il est plausible que l'hypothèse $k=2$ ne soit pas indispensable mais l'argument proposé ici ne permet de conclure que sous cette hypothèse légèrement plus restrictive.

1.3 Ondes amorties

Les méthodes développées au paragraphe 1.2 peuvent s'appliquer pour étudier le spectre de certains opérateurs non auto-adjoints comme ceux qui sont dérivés de l'équation des ondes amorties. Dans le cas où le flot géodésique vérifie la propriété d'Anosov, cette approche a notamment été développée par Schenck [201] et nous allons maintenant expliquer brièvement ce qui peut être dit sans hypothèse globale sur le flot. Avant cela, expliquons précisément le problème considéré, à savoir l'analyse haute fréquence de l'équation des ondes amorties,

$$\left(\partial_t^2 - \Delta_g + 2a(x)\partial_t\right)u(t,x) = 0, \tag{1.31}$$

avec la fonction d'amortissement $a \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Le cas physique de l'amortissement correspond au cas où $a \geq 0$ mais, comme la plupart de nos résultats sont valables dans le cas où a est seulement supposée à valeurs réelles, nous supposerons seulement $a \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

1.3.1 Solutions “stationnaires”

Comme dans le cas de l'équation de Schrödinger, nous allons nous intéresser à des solutions “stationnaires” de cette équation. Une nouvelle fois, la compréhension de la structure de ces solutions sera utile pour l'étude des propriétés de l'équation aux dérivées partielles associées. Posons donc

$$u(t,x) = e^{-it\tau}\psi_\tau(x),$$

où τ appartient à $\mathbb{C}$ et où $\psi_\tau(x)$ est un élément non trivial de $L^2(M)$. Une telle fonction est solution de (1.31) si elle vérifie

$$(-\Delta_g - \tau^2 - 2i\tau a)\psi_\tau = 0. \tag{1.32}$$

En effectuant l'analyse spectrale de (1.31), on peut démontrer qu'il existe un nombre dénombrable de (τ_n) résolvant ce problème de valeurs propres non auto-adjoint. Par ailleurs, ces valeurs propres (τ_n) sont contenues dans une bande horizontale bornée parallèle à l'axe réel et elles vérifient $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Re}\,\tau_n = \pm\infty$. Notons aussi que (τ,ψ_τ) résout le problème aux valeurs propres (1.32) si et seulement si $(-\overline{\tau},\overline{\psi_\tau})$ le résout. Plusieurs questions naturelles se posent alors concernant ce spectre : distribution asymptotique des parties réelles, des parties imaginaires, propriétés asymptotiques des modes propres associés, etc. Dans ce contexte, Markus-Matsaev et Sjöstrand ont démontré que les parties réelles (comptées avec leurs multiplicités algébriques) vérifient asymptotiquement une loi de Weyl [207]. Dans un cadre toujours très général, Sjöstrand a aussi décrit la distribution asymptotique des parties imaginaires [207]. Ces résultats sur la distribution des parties imaginaires ont ensuite été précisés par différents auteurs en tenant compte des propriétés géométriques de la variété : variétés de Zoll [121], systèmes intégrables [123, 124], variétés dont le flot géodésique est Anosov [4].

Essayons maintenant de comprendre quelques propriétés asymptotiques simples de ce spectre en nous servant de la notion de mesure semi-classique introduite plus haut. De manière précise, nous voulons nous intéresser aux solutions $(\tau_n, \psi_n)_n$ de (1.32) vérifiant

$$\text{Re}\ \tau_n \to +\infty \text{ et } \text{Im}\ \tau_n \to \beta,$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$. Commençons par reformuler le problème en introduisant comme précédemment un paramètre semi-classique $\hbar \to 0^+$, i.e.

$$\tau = \frac{\sqrt{2z}}{\hbar}, \text{ avec } z(\hbar) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\hbar).$$

Pour simplifier, nous omettrons la dépendance de $z(\hbar) = z$ en $\hbar$. Grâce à ce changement de paramètres asymptotiques, étudier les solutions à haute fréquence de (1.32) revient à considérer les suites $(z(\hbar) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\hbar))_{0<\hbar\ll 1}$ et $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\ll 1}$ dans $L^2(M)$ vérifiant

$$(\mathcal{P}(\hbar, z) - z(\hbar))\psi_\hbar = 0,\ \|\psi_\hbar\|_{L^2} = 1,\ \text{avec } \mathcal{P}(\hbar, z) := -\frac{\hbar^2\Delta}{2} - i\hbar\sqrt{2z(\hbar)}a(x). \tag{1.33}$$

Traduit dans ce contexte semi-classique, on s'intéresse alors à des suites de solutions de $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant (1.33) avec

$$z(\hbar) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\hbar) \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{Im}\ z(\hbar)}{\hbar} = \beta + o(1).$$

Notons que l'on a *a priori* l'encadrement $\beta \in [-\max a, -\min a]$. On peut maintenant considérer les distributions de Wigner à ces familles de solutions stationnaires et étudier l'ensemble $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ de leurs points d'accumulation. Les propriétés de support comme (1.9) sont bien entendu toujours vérifiées. En revanche, la propriété d'invariance (1.10) n'est pas *a priori* satisfaite et on a la relation suivante, pour tout μ dans $\mathcal{M}((\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+})$ et tout b dans $\mathcal{C}^0(S^*M, \mathbb{C})$,

$$\mu(b) = \mu\left(b \circ \varphi^t e^{-2\beta t - 2\int_0^t a\circ\varphi^s ds}\right). \tag{1.34}$$

En posant $b \equiv 1$ dans la relation précédente et en définissant de nouveau

$$A_+ = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sup_{\rho\in S^*M} \int_0^T a \circ \varphi^s(\rho) ds,$$

et

$$A_- = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \inf_{\rho\in S^*M} \int_0^T a \circ \varphi^s(\rho) ds.$$

on vérifie que

$$\beta \in [-A_+, -A_-],$$

qui est l'analogue de la relation (1.11) dans le contexte de l'équation des ondes amorties. Ainsi, grâce aux mesures semi-classiques, on réussit à dire mieux que l'estimation *a priori* $\beta \in$

$[-\max a, -\min a]$ sur le taux d'amortissement des solutions stationnaires. Lorsque $a \geq 0$ et $A_- > 0$, on dit qu'on a un trou spectral pour l'opérateur semi-classique. Sous cette forme, cette propriété d'encadrement de β est due à Sjöstrand [207] mais elle avait déjà été observée sous des formes légèrement moins générales par Rauch-Taylor [184] et par Lebeau [143]. Lebeau se sert notamment d'une variante de ce résultat pour démontrer la décroissance de l'énergie des ondes amorties sous la condition de contrôle géométrique $K_a = \emptyset$. Nous y reviendrons au paragraphe 1.3.3.

1.3.2 Non concentration près d'un petit sous-ensemble hyperbolique

La structure asymptotique des solutions de (1.33) a été finalement assez peu étudiée dans la littérature [12]. L'une des raisons principales est probablement que la relation d'invariance asymptotique (1.34) est relativement délicate à manipuler d'un point de vue dynamique. Notons tout de même que, pour de telles solutions, on peut obtenir certaines informations par des arguments relativement simples. Par exemple, si Λ est une orbite périodique pour laquelle la moyenne de Birkhoff de a,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s(\rho)ds,\ \ \rho\in\{\gamma\},$$

n'est pas égale à $-\beta$, alors on a $\mu(\Lambda) = 0$. Par contre, si celle-ci est bien égale à $-\beta$, ce n'est plus le cas et la suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ peut *a priori* se concentrer sur Λ. Dans [190], j'ai voulu comprendre plus précisément la structure des solutions de (1.33) et obtenir des informations sur ces phénomènes de concentration autour de sous-ensembles hyperboliques Λ. J'ai par exemple démontré le résultat suivant [190, Corollaire 1.2] :

Théorème 1.3.1 (R. 2012)**.** *Soit a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Soit $\Lambda \subset S^*M$ un ensemble hyperbolique de φ^t tel que*

$$P_{\text{top}}\left(\Lambda, \frac{1}{2}\right) < 0,$$

et tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$\forall T > 0,\ \forall\rho\in\Lambda, \qquad -C+\beta T \leq -\int_0^T a\circ\varphi^s(\rho)ds \leq \beta T + C.$$

*Alors, pour tout $0 < \overline{\nu} < \frac{1}{2}$ et pour toute fonction $\Theta_{\Lambda,\hbar^\nu} : S^*M \to [0,1]$ qui est $(\Lambda,\hbar^\nu)$-*localisée*, il existe $c_{\Lambda,\nu} < 1$ telle que, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifiant* (1.33) *, on a*

$$\limsup_{\hbar\to 0^+} \langle w_\hbar, 1-\Theta_{\Lambda,\hbar^\nu}\rangle \leq c_{\Lambda,\nu} < 1,$$

où $w_\hbar$ est la distribution de Wigner associée à $\psi_\hbar$.

De manière équivalente, ce résultat nous dit que les solutions de (1.33) ne peuvent pas être complètement concentrées dans un voisinage trop petit de Λ qui vérifie certaines propriétés dynamiques. Nous soulignons que ce théorème est valable pour toute fonction a dont les valeurs sont réelles et pas forcément positives. Il s'applique notamment au cas auto-adjoint $a \equiv 0$ où un résultat similaire avait été démontré par Toth et Zelditch lorsque Λ est une géodésique fermée [223]. Il serait bien entendu intéressant de comprendre ce que l'on peut dire en plus lorsqu'on ajoute une hypothèse globale sur la dynamique du flot géodésique (e.g. propriété d'Anosov). Il s'agit toutefois d'un problème délicat car la relation (1.34) rend malaisées les techniques usuelles de théorie ergodique comme celles mises en œuvre pour démontrer le théorème 1.2.1. On renvoie par exemple à [188] pour des résultats dans ce sens.

1.3.3 Retour sur l'équation des ondes amorties

Comme cela a été notamment mis en évidence par Lebeau [143], l'étude des solutions de (1.33) (ou plutôt des solutions approchées) dans le cas $a \geq 0$ permet de déduire des propriétés de décroissance de l'énergie des ondes amorties

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \int_M \left(|\partial_t u|^2 + \|d_x u\|^2 \right) d\mathrm{vol}_g.$$

Par exemple, si on sait démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|(-\Delta - 2ia\tau - \tau^2)^{-1}\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re}\tau}, \quad \text{uniformément pour } \tau \in \left\{ \operatorname{Re}\tau \geq C,\ |\operatorname{Im}\tau| \leq C^{-1} \right\}, \tag{1.35}$$

alors Lebeau démontre qu'il existe un paramètre $\gamma > 0$ et une constante $C_0 > 0$ tels que, pour tout choix de condition initiale, on a

$$\forall t \geq 0,\ E(u(t)) \leq C_0 e^{-\gamma_0 t} E(u(0)).$$

En procédant par contradiction et en utilisant le formalisme des mesures semi-classiques (précisément le fait que $\beta \in [-A_+, -A_-]$), on vérifie que l'estimée de résolvante (1.35) est satisfaite dès que la condition de contrôle géométrique $K_a = \emptyset$ est satisfaite. Il est de nouveau naturel de se poser la question du taux de décroissance de l'énergie lorsque cette condition géométrique n'est plus vérifiée par le système. Lebeau démontre que, si K_a est non vide, on peut de fait toujours construire des solutions dont l'énergie décroît arbitrairement lentement. Il prouve tout de même que, pour des données initiales assez régulières (i.e. $(u(0), \partial_t u(0)) \in H^{s+1} \times H^s$) avec $s > 0$), la décroissance est de forme logarithmique si on ne fait aucune hypothèse sur l'ensemble de géodésiques non amorties K_a [143]. Par la suite, différents auteurs ont étudié la question du taux (optimal) de décroissance de l'énergie des ondes amorties pour des données initiales suffisamment régulières. Par exemple, ont été étudiés les cas où K_a est : une géodésique elliptique [122], une géodésique hyperbolique [53], un sous-ensemble invariant vérifiant une certaine hypothèse de pression topologique [201, 202], un sous-ensemble du tore [6, 141, 43]. Avec Stéphane Nonnenmacher, nous démontrons le résultat suivant [190, Appendice] :

Théorème 1.3.2 (Nonnenmacher-R. 2012)**.** *On fixe a dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ telle que $K_a \neq \emptyset$ est un sous-ensemble hyperbolique pour φ^t vérifiant*

$$P_{top}\left(K_a, \frac{1}{2} \right) < 0.$$

Alors, il existe $C > 0$ telle que l'on a l'estimation de résolvante suivante :

$$\|(-\Delta - 2ia\tau - \tau^2)^{-1}\| \leq \frac{C(\log(\operatorname{Re}\tau))^2}{\operatorname{Re}\tau}, \quad \textit{uniformément pour } \tau \in \left\{ \operatorname{Re}\tau \geq C,\ |\operatorname{Im}\tau| \leq \frac{C^{-1}}{\log(\operatorname{Re}\tau)} \right\}.$$

Cette estimation de résolvante est légèrement moins bonne que (1.35) mais, comme nous allons le voir dans un instant, elle est suffisante pour faire mieux que la décroissance logarithmique obtenue par Lebeau sans condition sur K_a. La preuve de ce théorème suit essentiellement les mêmes lignes que celles que nous avons décrites pour démontrer le théorème 1.2.4. C'est d'ailleurs plutôt le résultat non auto-adjoint que nous démontrons dans [190] et le théorème 1.2.4 n'est en fait qu'un corollaire de notre preuve. En particulier, nous analysons précisément les propriétés de concentration des solutions approchées de (1.33) autour de petits sous-ensembles hyperboliques. Un résultat similaire sur la résolvante des ondes amorties a été obtenu par Christianson, Schenck, Vasy et Wunsch [56] par une méthode différente qui fait tout de même appel aux résultats de Nonnenmacher et Zworski dans [174] mais sans utiliser directement les estimations de dispersion hyperbolique (1.20). Par ailleurs, le "trou spectral logarithmique" qu'implique ce théorème est optimal grâce à une construction de Burq et Christianson [41] qui étend dans un contexte non auto-adjoint la construction de Colin de Verdière et Parisse [59]. Si on revient au problème des ondes amorties, le théorème précédent implique la propriété qui suit :

Corollaire 1.3.3. *On fixe a dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ telle que $K_a \neq \emptyset$ est un sous-ensemble hyperbolique pour φ^t vérifiant*

$$P_{top}\left(K_a, \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Alors, pour tout $s > 0$, il existe $C_s, \gamma_s > 0$, telles que, pour toute condition initiale $(u(0), \partial_t u(0)) \in H^{s+1}(M) \times H^s(M)$, l'énergie de l'onde $u(t)$ résolvant (1.31) *avec ces conditions initiales vérifie*

$$\forall t \geq 0, \qquad E(u(t)) \leq C_s \, e^{-\gamma_s t^{1/2}} \left(\|u(0)\|^2_{H^{s+1}} + \|\partial_t u(0)\|^2_{H^s} \right).$$

On renvoie par exemple à [56] pour les détails du passage entre le théorème 1.3.2 et ce résultat de décroissance de l'énergie des ondes amorties. Pour conclure ce paragraphe sur les ondes amorties, mentionnons que, si l'on ajoute l'hypothèse que le flot géodésique vérifie la propriété d'Anosov, Stéphane Nonnenmacher conjecture que sous l'hypothèse $P_{\text{top}}\left(K_a, \frac{1}{2}\right) < 0$, l'énergie des ondes amorties devrait décroître exponentiellement vite pour des données initiales suffisamment régulières [173]. Nous renvoyons le lecteur aux références [202, 173] pour des résultats partiels dans cette direction.

Chapitre 2

Perturbation de l'équation de Schrödinger : le cas chaotique

Au chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la dynamique de l'équation de Schrödinger et nous avons vu qu'une partie du problème consistait à analyser les phénomènes hautes fréquences de l'équation. De manière équivalente, nous avons été amenés à considérer l'équation de Schrödinger semi-classique

$$i\hbar\partial_t u_\hbar = -\frac{\hbar^2\Delta_g u_\hbar}{2},\ u_\hbar\rceil_{t=0} = \psi_\hbar, \tag{2.1}$$

où $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ est une suite de données initiales normalisées dans $L^2(M)$ vérifiant certaines hypothèses de localisation spectrale. C'est par exemple en utilisant la dynamique de l'équation de Schrödinger semi-classique qu'on peut démontrer la propriété d'invariance (1.10) qui permet de donner l'argument final dans la preuve du théorème de contrôle de Lebeau. Dans cet argument, on fait évoluer la donnée initiale jusqu'à un temps $T > 0$ assez grand pour pouvoir utiliser la condition de contrôle géométrique. Dans la preuve du théorème 1.2.4, on faisait évoluer le flot de Schrödinger semi-classique jusqu'à des temps d'ordre $|\log\hbar|$ pour pouvoir utiliser de manière cruciale des propriétés de dispersion hyperbolique de l'équation de Schrödinger semi-classique. L'objet de ce chapitre et du suivant sera de décrire plus spécifiquement la dynamique en temps longs de cette équation semi-classique. Les résultats discutés dans ce chapitre se concentrent sur le cas où la dynamique classique sous-jacente est chaotique et a fait l'objet des publications [83, 191]. Le chapitre suivant sera, lui, dédié au cas des systèmes intégrables.

2.1 Quelques motivations

L'équation (2.1) fait intervenir l'hamiltonien quantique $\hat{H}_\hbar := -\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}$ qui quantifie l'hamiltonien classique $H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ défini sur le fibré cotangent T^*M. Le principe de correspondance en mécanique quantique affirme alors que les propriétés de (2.1) dans la limite semi-classique sont reliées aux propriétés de H. L'une des manières les plus simples d'observer cette correspondance est peut-être de considérer la distribution de Wigner $w_\hbar(t)$ de la solution au temps t de l'équation (2.1), i.e.

$$w_\hbar(t) : b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M,\mathbb{C}) \mapsto \langle w_\hbar(t), b\rangle := \langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar(b)u_\hbar(t)\rangle_{L^2(M)}. \tag{2.2}$$

Le principe de correspondance semi-classique se manifeste alors simplement sous la forme suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M, \mathbb{C}),\quad \langle w_\hbar(t), b\rangle = \langle w_\hbar(0), b \circ \varphi^t\rangle + \mathcal{O}_{t,b}(\hbar), \tag{2.3}$$

où $\varphi^t : T^*M \to T^*M$ est le flot hamiltonien associé à H (à savoir le flot géodésique). En termes concrets, la relation (2.3) nous dit que l'évolution quantique au temps t est bien approchée par l'évolution classique au temps t dans la limite où $\hbar$ tend vers 0. D'un point de vue mathématique, la propriété (2.3) se démontre en utilisant le théorème d'Egorov [247, Th.11.1]. Il est important de remarquer que cette propriété est vraie à un temps t fixé et qu'elle reste encore vraie (quitte à avoir un reste plus important) si l'on suppose $|t| \leq \kappa |\log \hbar|$ où $\kappa > 0$ est une constante géométrique qui dépend de (M, g) et du support de b [15, 34, 9, 75, 247]. Ce type de temps logarithmique en $\hbar$ est qualifié de temps d'Ehrenfest et marque la limite de validité de cette correspondance semi-classique. Ce temps critique est déjà apparu dans la preuve du théorème 1.2.4 et il reviendra à plusieurs reprises par la suite lorsque nous aurons affaire à des dynamiques classiques de nature chaotique. Même si (2.3) n'est plus valide, il est aussi naturel de se demander ce qui se passe au-delà de cette échelle de temps logarithmique et de comprendre ce que devient $w_\hbar(t)$ après ce seuil critique et comment les propriétés de H vont continuer (ou non) à jouer un rôle. Ces différentes questions ont été largement étudiées dans la littérature de physique mathématique et il est difficile d'être exhaustif. Nous nous contenterons donc de mettre en avant certains phénomènes que l'on peut observer pour des systèmes hamiltoniens de nature chaotique (ergodique, mélangeant, etc.) dans la perspective de faire le parallèle avec les résultats qui suivront dans ce chapitre.

Pour commencer à comprendre la dynamique en temps long de l'équation de Schrödinger, on peut restreindre les familles de conditions initiales auxquelles on s'intéresse. Le premier exemple que l'on peut avoir en tête est celui des états cohérents que l'on peut définir de la manière suivante sur une variété M. On fixe $\rho = (x_0, \xi_0)$ dans T^*M et un système de coordonnées locales (f, U) centré en x_0 (i.e. $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f(x_0) = 0$). On fixe χ à support compact dans U et on définit dans le système de coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ induit par f l'état cohérent centré en (x_0, ξ_0) :

$$\psi_\hbar^{x_0,\xi_0}(x, \xi) := C\hbar^{-\frac{n}{4}} \chi\left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}}\right) e^{-\frac{\|x\|^2}{2\hbar} + \frac{i}{\hbar}\frac{x.\tilde{\xi}_0}{\hbar}},$$

où $C > 0$ est une constante de normalisation [1] indépendante de $\hbar$ et où $\tilde{\xi}_0$ est le poussé en avant de ξ_0 par f. On peut alors vérifier [247, Chap. 5] que, si l'on note $w_\hbar^{x_0,\xi_0}(t)$ la distribution de Wigner de la solution de (2.1) avec $\psi_\hbar = \psi_\hbar^{x_0,\xi_0}$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M, \mathbb{C}),\quad \langle w_\hbar^{x_0,\xi_0}(t), b\rangle = b \circ \varphi^t(x_0, \xi_0) + \mathcal{O}_{t,b}(\hbar). \tag{2.4}$$

Comme précédemment, cette relation reste vraie avec un reste uniformément petit en temps pourvu que $|t| \leq \kappa_{x_0,\xi_0}|\log \hbar|$ où $\kappa_{x_0,\xi_0} > 0$ est une constante géométrique qui dépend de (M, g) et du point considéré [60, 29]. En particulier, si on fixe $(\tau_\hbar)_{\hbar \to 0^+}$ une suite de temps telle que $\tau_\hbar \to +\infty$ et $0 \leq \tau_\hbar \leq \kappa_{x_0,\xi_0}|\log \hbar|$, alors on peut vérifier que, pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$\forall b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M, \mathbb{C}),\quad \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \langle w_\hbar^{x_0,\xi_0}(t\tau_\hbar), b\rangle dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)\tau_\hbar}\int_{t_1\tau_\hbar}^{t_2\tau_\hbar} b \circ \varphi^t(x_0, \xi_0) dt + o_b(1). \tag{2.5}$$

1. On impose $\|\psi_\hbar^{x_0,\xi_0}\|_{L^2} = 1$.

Cette expression permet de bien mettre en évidence que, pour des échelles de temps semi-classiques assez courtes, la distribution asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger va être intimement liée aux propriétés ergodiques du flot géodésique. Par exemple, si on suppose que la mesure de Liouville L est ergodique pour le flot géodésique [2], i.e. pour L presque tout ρ dans le fibré unitaire cotangent S^*M,

$$\forall b \in \mathcal{C}^0(S^*M, \mathbb{C}), \ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T b\circ\varphi^t(\rho)dt = \int_{S^*M} bdL, \tag{2.6}$$

alors, pour un choix générique (par rapport à L) d'état cohérent, on aura

$$\forall b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M, \mathbb{C}), \quad \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \langle w_\hbar^{x_0,\xi_0}(t\tau_\hbar), b\rangle dt = \int_{H^{-1}(\|\xi_0\|^2/2)} bdL_{\|\xi_0\|} + o_b(1), \tag{2.7}$$

où $L_{\|\xi_0\|}$ est la désintégration de la mesure de Liouville sur la couche d'énergie $H^{-1}(\|\xi_0\|^2/2)$. Pour résumer, si le flot hamiltonien est chaotique (ici ergodique), alors les solutions de l'équation de Schrödinger vont avoir tendance à s'équidistribuer au moins tant que l'échelle de temps considérée est assez courte. En plus de n'être valable que sur des temps semi-classiques relativement courts, cette propriété ne vaut *a priori* que pour des familles d'états cohérents et elle ne dit rien sur des familles de conditions initiales $(\psi_\hbar)_{\hbar\to0^+}$ plus générales. Si on fait des hypothèses légèrement plus fortes (propriété d'Anosov) sur le caractère chaotique du flot géodésique, Schubert a démontré que le même type de phénomènes d'équidistribution a lieu si l'on choisit des familles génériques d'états lagrangiens [204]. Il montre en fait quelque chose de légèrement plus fort que pour les états cohérents puisque, dans ce cas et à la différence de (2.7), on n'a pas besoin de moyenner en temps pour que les solutions s'équidistribuent dans l'espace des phases. De nouveau, ce phénomène d'équidistribution est valable pour un choix générique d'états lagrangiens et pour des échelles de temps semi-classiques en dessous du temps d'Ehrenfest. Dans le même esprit mais pour des échelles de temps $\tau_\hbar \to +\infty$ arbitraires, nous avons démontré avec Nalini Anantharaman que, pour un choix typique de données initiales parmi une famille orthonormée de données initiales, les solutions de l'équation de Schrödinger étaient en moyenne équidistribuées dans l'espace des phases [10]. Ces différents résultats peuvent être en quelque sorte pensés comme des versions non stationnaires du théorème d'ergodicité quantique de Šnirel'man [211], Zelditch [236] et Colin de Verdière [58] sur lequel nous reviendrons au chapitre 4. Nous pouvons retenir plusieurs choses de cette discussion. La première, c'est que la nature chaotique du système classique associé à (2.1) semble induire des phénomènes d'équidistribution pour les solutions de (2.1) dans la limite semi-classique $\hbar \to 0^+$. La seconde, c'est que ces propriétés ne valent que pour certains types de données initiales. En effet, on ne peut en général rien dire sur les propriétés d'équidistribution d'une suite de données initiales quelconques $(\psi_\hbar)_{\hbar\to0^+}$ même sur des échelles de temps courts.

Dans son article [177], Peres propose une approche un peu alternative des questions qui précèdent et qui a motivé les résultats de ce chapitre. Il observe notamment que l'une des difficultés principales à observer le caractère "irréversible" d'un système quantique est que, contrairement à un système classique, celui-ci n'est pas sensible aux perturbations des données initiales. En effet, même si l'on fait une petite erreur dans la préparation de l'état quantique initial, le caractère unitaire de l'évolution par (2.1) implique que cette erreur restera petite. Ce n'est bien entendu pas le cas pour un système physique classique que l'on qualifierait

2. C'est par exemple le cas si la variété est à courbures sectionnelles strictement négatives [11].

de chaotique. Peres suggère alors un mécanisme susceptible d'observer l'irréversibilité d'un système à la fois au niveau classique et au niveau quantique. Précisément, il fait la proposition suivante : *Instead of assuming that our preparations are marred by limited accuracy, we may assume that they are perfect but, on the other hand, the Hamiltonian H is not exactly known, because we cannot perfectly insulate the physical system from its environment.* De manière plus précise, il introduit

$$i\hbar\partial_t u_{\hbar,\epsilon} = \left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2} + \epsilon_0 V_0 + \epsilon_1 V_1 + \epsilon_2 V_2 + \ldots + \epsilon_J V_J\right) u_{\hbar,\epsilon},\ u_{\hbar,\epsilon}\rceil_{t=0} = \psi_\hbar, \tag{2.8}$$

où $J \geq 0$ est un entier fixé et où les V_j sont des fonctions lisses sur M à valeurs réelles. Pour une suite de données initiales fixées $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$, il propose alors de comprendre l'évolution de l'état quantique pour un choix générique de paramètres $\epsilon = (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_J)$. D'après Peres, ce point de vue devrait en particulier permettre de distinguer les systèmes réguliers des chaotiques à la fois au niveau classique et au niveau quantique. Il développe alors son argumentation de manière un peu plus quantitative en introduisant la notion de fidélité quantique sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 2.4 afin de comparer nos méthodes à celles qui sont plus communément utilisées dans la littérature physique. Notons que ce point de vue mène à l'introduction de nouveaux petits paramètres donnés par les ϵ_j et que l'on sera donc amené à distinguer différents régimes en fonction des tailles relatives de $\hbar$, ϵ et de l'échelle de temps considérée $\tau_\hbar$. Ce chapitre et le suivant seront consacrés à ce type de questions : le présent chapitre sera consacré au cas "chaotique" (plus dans l'esprit de l'article original de Peres) alors que le suivant sera lui dédié au cas intégrable. Pour le cas des systèmes chaotiques, nous nous limiterons en fait au cas du flot géodésique sur une surface à courbure sectionnelle constante égale à -1. Dans ce cas, nous avons déjà dit que le flot vérifie la propriété d'Anosov, ce qui implique notamment l'ergodicité et le mélange de la mesure de Liouville [11].

Pour conclure ce paragraphe introductif, observons que le point de vue de Peres soulève la difficulté de comprendre l'influence d'une perturbation de l'hamiltonien non seulement au niveau quantique mais aussi au niveau classique. Les résultats de ce chapitre comporteront donc deux questions :

— Comment de petites perturbations de l'hamiltonien H altèrent le mouvement d'une particule classique fixée (paragraphe 2.2) ?

— Comment les phénomènes observés au niveau classique se traduisent-ils au niveau quantique (paragraphe 2.3) ?

Même si la première question est naturelle d'un point de vue dynamique, elle n'a en fait pas été vraiment étudiée dans la littérature et une partie du travail effectué dans les travaux [83, 191] a consisté dans un premier temps à comprendre cette question de systèmes dynamiques.

2.2 Perturbations du flot géodésique en courbure négative

Dans tout ce chapitre, (M, g) désignera une surface riemannienne, compacte, connexe, orientée et sans bords. On supposera aussi que la courbure sectionnelle est constante égale à -1. En particulier, le flot géodésique agissant sur S^*M vérifie la propriété d'Anosov [11].

2.2.1 Propriétés d'équidistribution du flot classique perturbé

On fixe $J \geq 0$ et une famille de potentiels $(V_j)_{j=0,\ldots,J}$ dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. On introduit alors l'hamiltonien

$$H_\epsilon(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2} + \sum_{j=0}^{J} \epsilon_j V_j(x),$$

où les ϵ_j sont des petits paramètres appartenant à l'ensemble $(-b_0, b_0)^{J+1}$ (avec $b_0 > 0$). Pour alléger les notations, on n'indique pas la dépendance de H_ϵ en J. Pour b_0 assez petit, le flot hamiltonien φ_ϵ^t induit par H_ϵ n'a pas de singularité dans un petit voisinage de S^*M. Le but de ce premier paragraphe est de décrire certaines propriétés qualitatives des orbites d'un point (x_0,ξ_0) par le flot φ_ϵ^t. Pour cela, on introduit, pour W dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, la fonction suivante sur S^*M

$$\mathcal{L}(W)(x_0,\xi_0) := \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g_{x(t)}^*\left(d_{x(t)}W, \xi^\perp(t)\right) e^{-t} dt, \tag{2.9}$$

où $(x(t),\xi(t)) := \varphi^t(x_0,\xi_0)$ et où $\xi^\perp$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à ξ. Ceci permet de définir la transformée

$$\mathcal{L} : W \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{L}(W) \in \mathcal{C}^0(S^*M,\mathbb{R}),$$

qui va jouer un rôle important dans les énoncés qui vont suivre. Notre premier résultat sur ces perturbations du flot géodésique dit que la trajectoire d'un point (x_0,ξ_0) par une perturbation typique du flot va s'équidistribuer par rapport à la mesure de Liouville L sur S^*M. Plus précisément, avec Suresh Eswarathasan, nous démontrons le théorème suivant [83] :

Théorème 2.2.1 (Eswarathasan-R. 2014)**.** *Soit $J \geq 0$. Supposons que (M,g) est une surface à courbure négative constante et égale à -1 et que*

$$\forall\ (x_0,\xi_0) \in S^*M,\ \exists 0 \leq j \leq J,\ \mathcal{L}(V_j)(x_0,\xi_0) \neq 0. \tag{2.10}$$

Alors, pour tout $1 < c_1 \leq c_2 < \frac{3}{2}$, il existe $\delta_0 > 0$ telle que, pour toute fonction 0-homogène a dans $\mathcal{C}^\infty(T^*M - 0, \mathbb{C})$, on a

$$\frac{1}{(2b_0)^{J+1}} \int_{(-b_0,b_0)^{J+1}} a \circ \varphi_\epsilon^{t|\log(b_0)|}(x_0,\xi_0) d\epsilon \longrightarrow \int_{S^*M} a dL,\ \ \textit{quand } b_0 \to 0,$$

uniformément pour (x_0,ξ_0) vérifiant $H_0(x_0,\xi_0) \in [(1-\delta_0)/2, (1+\delta_0)/2]$ et pour t dans $[c_1,c_2]$.

Ce théorème montre donc que, pour une échelle de temps légèrement plus longue que $|\log(b_0)|$, les points de l'espace des phases sont en moyenne équidistribués. Notons que l'on ne fait pas ici de moyenne en temps mais une moyenne sur les perturbations de l'hamiltonien. Ce théorème est à comparer avec la propriété d'ergodicité (2.6). Dans ce dernier cas, on a équidistribution pour presque tout point de l'espace des phases et pour un flot fixé. Ici, la trajectoire de *tout* point s'équidistribue pour une famille de perturbations du flot.

Pour des échelles de temps légèrement plus courtes que $|\log(b_0)|$ (disons $T_0 < (1-\delta_1)|\log(b_0)|$), la preuve que nous donnons permet aussi de vérifier que $a \circ G_\epsilon^{T_0}(x_0,\xi_0)$ est égale à $a \circ G_0^{T_0}(x_0,\xi_0)$ (à une petite erreur près) uniformément pour $\epsilon \in (-b_0,b_0)^{J+1}$. En d'autres termes, $|\log(b_0)|$ est vraiment l'échelle de temps critique pour laquelle la perturbation commence à jouer un rôle dans ce problème. Les propriétés d'équidistribution ont lieu modulo une certaine condition d'admissibilité sur les potentiels. Cette hypothèse peut être vérifiée pourvu que l'on choisisse J assez grand. Il n'est en revanche pas si clair que la condition est satisfaite pour des J petits. Enfin, les propriétés d'équidistribution du théorème précédent ne sont valables que jusqu'à des temps $T_0 < (1+1/2-\delta_1)|\log(b_0)|$, et il serait bien entendu intéressant de comprendre ce qui se passe pour des échelles de temps plus longues que $3|\log(b_0)|/2$. Dépasser cette échelle de temps semble délicat d'un point de vue dynamique mais cela est peut-être dû à la manière dont nous démontrons ce résultat. Nous dresserons les grandes lignes de la preuve dans les paragraphes suivants mais mentionnons déjà qu'elle se fonde sur deux ingrédients principaux : le théorème de stabilité structurelle [11, 68] et l'unique ergodicité du flot horocyclique [93, 161]. En particulier, l'exposant 1/2 qui intervient dans la borne supérieure sur T_0 est relié à la régularité hölderienne de l'homéomorphisme de conjugaison dans le théorème de stabilité structurelle.

Avant d'expliquer comment démontrer un tel résultat, nous citons un second théorème dynamique dans le même esprit que le théorème précédent obtenu ultérieurement [191] et par des méthodes similaires :

Théorème 2.2.2 (R. 2014). *Supposons que $J=0$ et que (M,g) est une surface à courbure négative constante et égale à -1. On suppose aussi que*

$$\mathcal{C}_{V_0} := \left\{\rho \in S^*M : \ \forall\, j \geq 0,\ X_0^j.f_{V_0}(\rho) = 0\right\} = \emptyset,$$

où $f_{V_0}(x,\xi) := g_x^*(d_xV_0,\xi^\perp)$ et X_0 est le champ de vecteur hamiltonien de H_0.
Alors, pour tout $1 < c_1 \leq c_2 < \frac{3}{2}$, il existe $\delta_0,\nu_1,\nu_2 > 0$ telles que, pour toute fonction 0-homogène a dans $\mathcal{C}^\infty(T^*M-0,\mathbb{C})$, on a

$$\frac{1}{b_0^{\nu_2}}\int_0^{b_0^{\nu_2}} a\circ\varphi_\epsilon^{t|\log\epsilon_0|}\circ\varphi_0^s(x_0,\xi_0)ds \longrightarrow \int_{S^*M} adL,\ \text{quand } b_0\to 0,$$

uniformément pour (x_0,ξ_0) vérifiant $H_0(x_0,\xi_0)\in[(1-\delta_0)/2,(1+\delta_0)/2]$, pour t dans $[c_1,c_2]$ et pour ϵ dans $[b_0^{1+\nu_1},b_0]$.

Ce second résultat est valable sous une hypothèse qui est d'une certaine manière plus simple à vérifier et qui ne fait intervenir qu'un seul potentiel. On peut démontrer en utilisant le théorème de Sard–Smale [209] que la condition $\mathcal{C}_{V_0}=\emptyset$ est satisfaite pour un ouvert dense de potentiels dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ – voir [191, Appendice C]. Cette fois-ci, on ne fait plus de moyenne sur les perturbations et on démontre tout de même qu'on a équidistribution en un certain sens pourvu que la perturbation soit assez importante. Ici, ce sont les points d'un petit bout de l'orbite issue de (x_0,ξ_0) qui s'équirépartissent sur la variété S^*M. De nouveau, la preuve de ce résultat fait appel au théorème de stabilité structurelle mais le recours aux propriétés du flot horocyclique est plus subtil. L'argument dynamique que nous utilisons ressemble d'une certaine manière à celui qui est utilisé par Marcus pour démontrer le mélange du flot horocyclique [162].

2.2.2 Éléments de preuve

Nous allons maintenant expliquer (en omettant certains détails techniques) le schéma de la preuve du théorème 2.2.1 qui est plus simple à exposer. Pour simplifier, supposons que (x_0,ξ_0) est un élément de S^*M. Rappelons que l'on veut calculer l'intégrale suivante :

$$I_{x_0,\xi_0}(a,b_0,T) := \frac{1}{(2b_0)^{J+1}}\int_{(-b_0,b_0)^{J+1}} a\circ\varphi_\epsilon^T(x_0,\xi_0)d\epsilon.$$

La première idée consiste à utiliser le théorème de stabilité structurelle [11] pour nous ramener au flot géodésique φ_0^t. On sait ainsi qu'il existe un homéomorphisme [3] $h^\epsilon_{x_0,\xi_0} : S^*M \to S^*M$ et une application continue $\tau^\epsilon_{x_0,\xi_0} : S^*M \to \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi_\epsilon^t(x_0,\xi_0) = h^\epsilon_{x_0,\xi_0} \circ \varphi_0^{\tau_1(t,x_0,\xi_0)} \circ (h^\epsilon_{x_0,\xi_0})^{-1}(x_0,\xi_0),$$

où

$$\tau_1(t,x_0,\xi_0) := \int_0^t \frac{ds}{\tau^\epsilon_{x_0,\xi_0} \circ (h^\epsilon_{x_0,\xi_0})^{-1} \circ \varphi_\epsilon^s(x_0,\xi_0)}.$$

Ce résultat utilise de manière cruciale la structure hyperbolique du flot qui permet de démontrer que toute petite perturbation du flot est (à reparamétrisation près) conjuguée au flot initial. Cette propriété remarquable a été démontrée par Anosov. Par la suite, de la Llave, Marco et Moriyon ont donné une preuve alternative de ce théorème [68] en utilisant des arguments analytiques dus à Moser [168] et à Mather [210, Appendice] pour les difféomorphismes hyperboliques. Plus précisément, leur preuve se fonde sur le théorème des fonctions implicites en dimension infinie. Modulo le fait que l'on est amené à travailler sur des variétés de dimension infinie, l'avantage de leurs arguments est d'assurer que l'application $\epsilon \mapsto (h^\epsilon_{x_0,\xi_0}, \tau^\epsilon_{x_0,\xi_0})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ϵ même si les applications en jeu sont *a priori* très peu régulières. Ceci permet de récrire l'intégrale que l'on veut calculer comme suit :

$$I_{x_0,\xi_0}(a,b_0,T) = \frac{1}{(2b_0)^{J+1}} \int_{(-b_0,b_0)^{J+1}} a \circ \varphi_0^T \circ (h^\epsilon_{x_0,\xi_0})^{-1}(x_0,\xi_0) d\epsilon + \mathcal{O}(b_0 T). \tag{2.11}$$

Il est alors tentant de penser que l'application $\epsilon \mapsto (h^\epsilon_{x_0,\xi_0})^{-1}$ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais ce n'est malheureusement pas le cas a priori. Ceci est essentiellement dû au fait que l'application $h \mapsto h^{-1}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble des fonctions continues. Pour remédier à ce problème, on cherche alors une expression approchée de cet homéomorphisme. Pour cela, il faut reprendre la preuve de de la Llave, Marco et Moriyon afin d'obtenir en premier lieu une expression approchée de $h^\epsilon_{x_0,\xi_0}$. Cette analyse nous permet de démontrer qu'à une erreur d'ordre $\mathcal{O}(|\epsilon|^2)$ près, on a

$$h^\epsilon_{x_0,\xi_0} \simeq \exp\left(\sum_{j=0}^J \epsilon_j(\beta_j^s X^s + \beta_j^u X^u)\right),$$

où X^u est le champ de vecteurs générant la direction instable du flot (voir chapitre 1), X_s celui générant la direction stable,

$$\beta_j^s(x,\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} g^*_{x(-t)}\left(d_{x(-t)}V_j, \xi^\perp(-t)\right) e^{-t} dt,$$

et

$$\beta_j^u(x,\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} g^*_{x(t)}\left(d_{x(t)}V_j, \xi^\perp(t)\right) e^{-t} dt.$$

On reconnaît les fonctions qui apparaissent dans les conditions d'admissibilité du théorème 2.2.1. On peut vérifier que ces fonctions sont γ-hölderiennes pour tout $\gamma < 1/2$ et ceci permet alors

3. L'homéomorphisme dépend de (x_0,ξ_0) car on doit tout ramener sur S^*M – voir [83, Section 5] pour les détails.

de démontrer qu'à une erreur d'ordre $\mathcal{O}(|\epsilon|^{1+\gamma})$ près, on a

$$(h^{\epsilon}_{x_0,\xi_0})^{-1} \simeq \exp\left(-\sum_{j=0}^{J}\epsilon_j(\beta_j^s X^s + \beta_j^u X^u)\right).$$

En implémentant alors cette expression dans (2.11) et en utilisant le fait que les vecteurs stables sont contractés sous l'action du flot géodésique et que l'exposant de Lyapunov du flot est constant et égal à 1, on démontre alors que

$$I_{x_0,\xi_0}(a,b_0,T) = \frac{1}{(2b_0)^{J+1}}\int_{(-b_0,b_0)^{J+1}} a\circ\varphi_0^T\circ\exp\left(-\sum_{j=0}^{J}\epsilon_j\beta_j^u X^u\right)(x_0,\xi_0)d\epsilon + \mathcal{O}(b_0^{1+\gamma}e^T) + \mathcal{O}(b_0T). \tag{2.12}$$

On reconnaît alors le flot horocyclique, i.e. le flot généré par le champ de vecteurs X_u. On note ce flot H_u dont l'une des propriétés remarquables est son unique ergodicité [93, 161]. En d'autres termes, les variétés instables s'équidistribuent dans S^*M. C'est cette propriété que nous allons utiliser pour conclure. On récrit (2.12) sous la forme suivante :

$$I_{x_0,\xi_0}(a,b_0,T) = \frac{1}{(2b_0)^{J+1}}\int_{(-b_0,b_0)^{J+1}} a\circ\varphi_0^T\circ H_u^{-\sum_{j=0}^{J}\epsilon_j\beta_j^u(x_0,\xi_0)}(x_0,\xi_0)d\epsilon + \mathcal{O}(b_0^{1+\gamma}e^T) + \mathcal{O}(b_0T). \tag{2.13}$$

On utilise alors l'hypothèse (2.10) et on suppose par exemple que $\beta_0^u(x_0,\xi_0) = \mathcal{L}(V_0)(x_0,\xi_0) \neq 0$. Afin d'utiliser l'unique ergodicité du flot horocyclique, rappelons que, pour tous t et s dans $\mathbb{R}$, $\varphi_0^t\circ H_u^s = H_u^{se^t}\circ\varphi_0^t$ [162]. Ceci permet d'obtenir

$$I_{x_0,\xi_0}(a,b_0,T) = \frac{1}{(2b_0)^{J+1}}\int_{(-b_0,b_0)^{J+1}} a\circ H_u^{e^T\epsilon_0\beta_0^u(x_0,\xi_0)}(x_J(\epsilon',T),\xi_J(\epsilon',T))d\epsilon_0 d\epsilon' + \mathcal{O}(b_0^{1+\gamma}e^T) + \mathcal{O}(b_0T), \tag{2.14}$$

avec $(x_J(\epsilon',T),\xi_J(\epsilon',T)) := \varphi_0^T\circ H_u^{-\sum_{j=1}^{J}\epsilon_j\beta_j^u(x_0,\xi_0)}(x_0,\xi_0)$. On fait alors le changement de variable $t = e^T\epsilon_0\beta_0^u(x_0,\xi_0)$ et on trouve

$$I_{x_0,\xi_0}(a,b_0,T) = \frac{1}{(2b_0)^{J}}\int_{(-b_0,b_0)^{J}}\left(\frac{1}{2b_0e^T\beta_0^u(x_0,\xi_0)}\int_{-b_0e^T\beta_0^u(x_0,\xi_0)}^{b_0e^T\beta_0^u(x_0,\xi_0)} a\circ H_u^t(x_J(\epsilon',T),\xi_J(\epsilon',T))dt\right)d\epsilon'$$
$$+\mathcal{O}(b_0^{1+\gamma}e^T) + \mathcal{O}(b_0T).$$

Si $b_0e^T \to +\infty$, l'unique ergodicité du flot horocyclique permet de conclure que la moyenne de Birkhoff apparaissant dans l'intégrale converge vers $\int_{S^*M} adL$ uniformément. Si on suppose par ailleurs que $b_0^{1+\gamma}e^T \to 0$, on trouve finalement que le reste dans la dernière équation est petit. Ceci permet de conclure la preuve du théorème puisque $\gamma < 1/2$ est arbitraire.

2.3 Application à l'équation de Schrödinger semi-classique

Maintenant que nous avons décrit certaines propriétés du système classique sous-jacent à (2.8), essayons de comprendre comment ces résultats se traduisent au niveau semi-classique. Pour cela, nous considèrerons des données initiales qui se concentrent sur le fibré unitaire cotangent S^*M, i.e. spectralement localisée près de l'énergie $E = \frac{1}{2}$. Plus précisément, nous allons être amenés à considérer des conditions initiales $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ normalisées dans $L^2(M)$ qui vérifient l'hypothèse de localisation spectrale suivante :

$$\forall\delta_0>0,\quad \lim_{\hbar\to 0^+}\left\|\mathbf{1}_{[(1-\delta_0)/2,(1+\delta_0)/2]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}\right)\psi_\hbar-\psi_\hbar\right\|_{L^2(M)}=0 \text{ et } \forall 0<\hbar\leq 1,\ \|\psi_\hbar\|_{L^2}=1, \tag{2.15}$$

ou encore la condition de localisation plus forte :

$$\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\hbar\to 0^+}\left\|\mathbf{1}_{[(1-R\hbar)/2,(1+R\hbar)/2]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}\right)\psi_\hbar-\psi_\hbar\right\|_{L^2(M)}=0 \text{ et } \forall 0<\hbar\leq 1,\ \|\psi_\hbar\|_{L^2}=1. \tag{2.16}$$

Ces hypothèses ne sont pas complètement optimales mais, par souci de simplicité, nous nous limiterons à celles-ci dans la suite de ce chapitre. Nous renvoyons aux articles [83, 191] pour des énoncés plus généraux. Dans les deux cas et en utilisant les arguments du chapitre 1, l'hypothèse de localisation spectrale garantit que la distribution de Wigner de la condition initiale converge (à extraction près) vers une mesure de probabilité portée par S^*M. Ces conditions ne disent a priori rien d'autre sur la condition initiale et nous allons maintenant détailler quelques-unes des propriétés des solutions de (2.8) pour ce type de données initiales. Dans la suite de ce chapitre, étant donnée une suite de données initiales $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifiant l'une de ces hypothèses de localisation, on notera $u_{\hbar,\epsilon}(t)$ la solution de l'équation (2.8) au temps t et $w_{\hbar,\epsilon}(t)$ la distribution de Wigner correspondante.

2.3.1 Données initiales faiblement localisées près de S^*M

Pour commencer, on peut démontrer le résultat suivant en appliquant le théorème d'Egorov en temps longs sur les variétés à courbure strictement ngative [9, 75], l'inégalité de Gårding [247, Ch. 4] et le théorème 2.2.1 :

Théorème 2.3.1 (Eswarathasan-R. 2014)**.** *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites. Soit $(\epsilon_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ une suite vérifiant, pour $\hbar>0$ assez petit,*

$$\epsilon_\hbar\longrightarrow 0,\ \text{ et } \exists\ 0<\nu<\frac{1}{2} \text{ telle que } \epsilon_\hbar\geq\hbar^\nu.$$

Alors, pour tout $1<c_1<c_2<\min\{3/2,1/(2\nu)\}$, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifiant (2.15) et pour tout a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$, on a, uniformément pour $t\in[c_1,c_2]$,

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{(2\epsilon_\hbar)^{J+1}}\int_{(-\epsilon_\hbar,\epsilon_\hbar)^{J+1}}\langle w_{\hbar,\epsilon}(t|\log(\epsilon_\hbar)|),a\rangle\, d\epsilon=\int_{S^*M}a dL,$$

où $w_{\hbar,\epsilon}(t')$ est la distribution de Wigner au temps t' de la solution de (2.8) avec condition initiale $\psi_\hbar$.

Ce théorème nous dit que, pour des données initiales relativement générales, les solutions de l'équation de Schrödinger vont être en moyenne équidistribuées dans l'espace des phases. Ici, la moyenne est prise par rapport aux paramètres de perturbation et ce résultat est l'analogue au niveau quantique du théorème 2.2.1. D'une certaine manière, il illustre l'idée de Peres que considérer des perturbations de l'hamiltonien permet d'observer le même type d'irréversibilité aux niveaux classique et quantique. Tout comme dans le cas classique, notre démonstration permet en fait de démontrer que $|\log\epsilon_\hbar|$ est bien l'échelle critique pour notre problème car $\langle w_{\hbar,\epsilon}(t|\log(\epsilon_\hbar)|), a\rangle$ est égale (à $o(1)$ près) à $\langle w_{\hbar,0}(t|\log(\epsilon_\hbar)|), a\rangle$ tant que $t < 1$. Notons que la restriction $\epsilon_\hbar \gg \sqrt{\hbar}$ est une conséquence du fait qu'on va chercher à appliquer l'approximation semi-classique et que celle-ci n'est valable *a priori* que jusqu'au temps d'Ehrenfest qui est égal dans ce contexte géométrique à $\frac{1}{2}|\log\hbar|$ [9, 75]. D'un point de vue semi-classique, on est donc dans un régime de grosse perturbation puisque l'écart typique entre les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger est d'ordre $\hbar^2$ même s'il s'agit d'une petite perturbation pour l'hamiltonien classique.

Comparé aux phénomènes décrits dans le paragraphe 2.1, le résultat précédent est valable *pour toute condition initiale et non pas pour un choix générique parmi une famille particulière de solutions*. Le prix à payer est que l'équidistribution n'a lieu qu'en moyenne par rapport à la perturbation au lieu d'avoir une équation fixée comme (2.1). Si nous autorisons les moyennes par rapport au paramètre de temps comme dans l'exemple des états cohérents, nous réussissons en fait à démontrer la propriété suivante [83] qui ne fait pas intervenir de moyenne sur la perturbation :

Théorème 2.3.2 (Eswarathasan-R. 2014)**.** *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites. Soit $(\epsilon_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ une suite vérifiant, pour $\hbar > 0$ assez petit,*

$$\epsilon_\hbar \longrightarrow 0, \ \textit{et} \ \exists\ 0 < \nu < \frac{1}{2} \ \textit{telle que} \ \epsilon_\hbar \geq \hbar^\nu.$$

Alors, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifiant (2.15), on peut trouver $J(\hbar) \subset (-\epsilon_\hbar, \epsilon_\hbar)^{J+1}$ vérifiant

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{\mathrm{Leb}(J(\hbar))}{(2\epsilon_\hbar)^{J+1}} = 1,$$

et tel que, pour tout $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \min\{3/2, 1/(2\nu)\}$ et pour tout $a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$,

$$\lim_{\hbar\to 0, \epsilon\in J(\hbar)} \int_{c_1}^{c_2} \langle w_{\hbar,\epsilon}(t|\log(\epsilon_\hbar)|), a\rangle \, dt = (c_2 - c_1) \int_{S^*M} a dL,$$

où $w_{\hbar,\epsilon}(t')$ est la distribution de Wigner au temps t' de la solution de (2.8) avec condition initiale $\psi_\hbar$.

Ainsi, pour toute suite fixée de données initiales microlocalisées près de la couche d'énergie $H = 1/2$, les solutions de (2.8) se répartissent uniformément sur la couche d'énergie pour un choix générique de perturbations. Le choix de perturbations dépend bien entendu de la condition initiale. La preuve de ce résultat s'inspire de la démonstration du théorème d'ergodicité quantique [211, 236, 58] et plus précisément de celle qui est donnée dans [10] pour traiter le cas des solutions non stationnaires de l'équation de Schrödinger. L'un des points-clefs du théorème d'ergodicité quantique est la loi de Weyl locale [247, Ch. 15] et, afin de mettre en place le même type d'arguments, on peut en fait penser au théorème 2.3.1 comme un équivalent de la loi de Weyl locale dans notre contexte.

2.3.2 Données initiales fortement localisées près de S^*M

Dans le paragraphe précédent, les solutions de l'équation (2.8) s'équidistribuaient pourvu que l'on moyenne sur la perturbation ou sur les échelles de temps, ceci indépendamment du choix des conditions initiales. En utilisant le théorème 2.2.2, on peut faire mieux quitte à se restreindre à des données initiales plus localisées près de S^*M. Précisément, on a [191] :

Théorème 2.3.3 (R. 2014). *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites. Soit* $(\epsilon_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ *une suite vérifiant, pour* $\hbar > 0$ *assez petit,*

$$\epsilon_\hbar \longrightarrow 0, \text{ et } \exists\ 0 < \nu < \frac{1}{2} \text{ telle que } \epsilon_\hbar \geq \hbar^\nu.$$

Alors, pour tout $1 < c_1 < c_2 < \min\{3/2, 1/(2\nu)\}$*, pour toute suite* $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ *vérifiant* (2.16) *et pour tout* a *dans* $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$*, on a, uniformément pour* $t \in [c_1, c_2]$*,*

$$\lim_{\hbar\to 0} \langle w_{\hbar,\epsilon_\hbar}(t|\log(\epsilon_\hbar)|), a\rangle = \int_{S^*M} a dL,$$

où $w_{\hbar,\epsilon_\hbar}(t')$ *est la distribution de Wigner au temps* t' *de la solution de* (2.8) *avec condition initiale* $\psi_\hbar$*.*

Ainsi, on a de nouveau un phénomène d'équidistribution mais cette fois sans moyenne par rapport au temps ou à la perturbation au prix d'une localisation spectrale plus forte que dans les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2. Dans [191], nous donnons des versions plus quantitatives de cet énoncé et, par souci de simplicité, nous nous limitons à ce théorème.

2.3.3 En guise de conclusion (provisoire)

Ces différents résultats mettent en évidence que, pour des données initiales fixées, les solutions de l'équation de Schrödinger ont en moyenne (par rapport à la perturbation) tendance à se "diffuser" sur l'ensemble de la couche d'énergie. La conjecture d'unique ergodicité quantique mentionnée au premier chapitre laisserait penser que les solutions s'équidistribuent pour une équation de Schrödinger fixée [193]. D'une certaine manière, ces théorèmes montrent que c'est vrai en moyenne sur des petites perturbations de l'équation et sur des échelles de temps assez courtes. Il est naturel de se demander si cela reste vrai pour des échelles plus longues que le temps d'Ehrenfest mais cela demandera probablement des outils différents. Enfin, nous nous sommes pour le moment seulement intéressés au cas des surfaces à courbure constante et il serait bien entendu intéressant de comprendre ce qui se passe dans des situations géométriques plus générales que ce soit au niveau classique ou au niveau quantique.

2.4 Application à l'écho de Loschmidt quantique

Les phénomènes décrits dans les paragraphes précédents illustrent d'une certaine manière la sensibilité des systèmes classiques et quantiques aux perturbations de l'hamiltonien. Ils ne correspondent toutefois pas aux quantités considérées habituellement dans la littérature physique pour estimer cette sensibilité aux perturbations. Pour cela, il semble plus naturel de se servir de la notion de fidélité quantique qui est déjà présente dans l'article de Peres [177] mentionné plus haut et qui a connu un regain d'intérêt en physique ces quinze dernières années sous le nom d'écho de Loschmidt quantique. Rappelons qu'étant donnée une suite de données initiales $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ normalisées dans $L^2(M)$, la fidélité quantique est définie comme suit :

$$\mathbf{F}_{\hbar,\epsilon}(\psi_\hbar, t) := |\langle u_{\hbar,0}(t), u_{\hbar,\epsilon}(t)\rangle|^2, \tag{2.17}$$

où $u_{\hbar,0}(t)$ est la solution (au temps t) de l'équation de Schrödinger semi-classique non perturbée 2.1 et $u_{\hbar,\epsilon}(t)$ celle de sa perturbation (2.8). Dans les deux cas, on considère la même condition initiale et $\mathbf{F}_{\hbar,\epsilon}(\psi_\hbar, t)$ mesure le chevauchement entre les deux solutions au temps t.

Remarque 2.4.1. Rappelons que cette quantité est naturelle du point de vue de la mécanique quantique puisque l'espace des états est donné par le projectif de $L^2(M)$, i.e. $L^2(M)/\mathbb{C}^*$. Ainsi, étant donnés deux états quantiques ψ_1 et ψ_2 dans $L^2(M)$, on peut déjà choisir des représentants normalisés dans $L^2(M)$. Pour mesurer leur distance, il est alors naturel de considérer la quantité

$$d(\psi_1, \psi_2) := \inf \left\{ \|\psi_1 - e^{i\theta}\psi_2\|_{L^2(M)} : \theta \in \mathbb{R} \right\} = (2 - 2|\langle\psi_1, \psi_2\rangle|)^{\frac{1}{2}} ,$$

qui est parfois appelée métrique de Bures [40]. Ainsi, mesurer l'écart entre deux états quantiques de ce point de vue est équivalent à mesurer la fidélité quantique qui est ici donnée par $|\langle\psi_1, \psi_2\rangle|^2$.

2.4.1 Quelques résultats de la littérature physique

Dans [177], Peres prédit que la décroissance de $\mathbf{F}_{\hbar,\epsilon}(\psi_\hbar, t)$ doit être plus importante pour les systèmes chaotiques que pour les systèmes réguliers. Notons que, comme précédemment, l'une des difficultés que l'on rencontre dans cette étude est que l'on cherche à comprendre la limite de cet écho quantique quand $t \to +\infty$ mais aussi $\hbar \to 0$ et $\epsilon \to 0$. Il est important de noter que ce taux de décroissance va aussi dépendre de manière subtile de la forme de la perturbation et du choix des conditions initiales comme c'était le cas dans les questions décrites au paragraphe 2.3. Commençons par décrire l'un des calculs de Peres sur cette quantité pour mettre en avant les difficultés qui se posent. Dans son analyse, il cherche dans un premier temps à comprendre ce qui se passe pour t petit. Dans ce cas, le comportement doit être relativement indépendant de la nature du système (chaotique ou non). Plus précisément, si on suppose que $J = 0$, on peut écrire le développement en puissance de t pour t petit :

$$\mathbf{F}_{\hbar,\epsilon}(\psi_\hbar, t) \simeq 1 - \frac{\epsilon_0^2 t^2}{\hbar^2} \left(\langle\psi_\hbar, V^2\psi_\hbar\rangle - \langle\psi_\hbar, V\psi_\hbar\rangle^2 \right) + \dots .$$

De cette manière et indépendamment de la nature du système classique sous-jacent, Peres démontre ainsi l'existence d'un premier régime pendant lequel la fidélité quantique décroît de manière parabolique. On voit déjà sur cette expression que la nature de la décroissance va dépendre des tailles relatives de $\hbar$, ϵ_0 et t mais aussi de V et de la condition initiale. Le principe général qui est ensuite mis en évidence dans la littérature physique, c'est qu'une fois dépassé ce régime transitoire, la fidélité va se mettre à décroître d'une manière qui va dépendre des propriétés chaotiques du système jusqu'à atteindre un régime de saturation où elle sera constante (en fonction de $\hbar$). L'idée mise en avant par Peres est que cette décroissance sera d'autant plus rapide que le système classique sous-jacent est chaotique. Quelques années plus tard, motivés par des expériences en résonance magnétique nucléaire [226], Jalabert et Pastawski ont repris l'étude théorique de cette quantité [4] dans le cas de systèmes chaotiques [134]. Dans cette référence, ils calculent explicitement la fidélité quantique pour un état cohérent et pour une famille de potentiels aléatoires gaussiens $(V_j)_{j=0,\dots,J}$. Ils montrent alors que, pour des perturbations de taille assez importante (i.e. plus grande que les écarts spectraux de l'Hamiltonien non perturbé) et pour des échelles de temps plus petites que le temps d'Ehrenfest, l'écho de Loschmidt doit décroître à une vitesse exponentielle dont le taux est donné par l'exposant de Lyapunov moyen du système classique non perturbé. On parle de régime de Lyapunov. Les résultats que nous décrirons par la suite se trouvent exactement dans ce

4. Il semblerait d'ailleurs que la terminologie "écho de Loschmidt quantique" apparaisse dans cet article.

type de régimes même si nous ne réussissons pas à retrouver cette décroissance exponentielle avec nos méthodes. À peu près au même moment, Jacquod, Silvestrov et Beenakker se sont intéressés aux petites perturbations [130] où la situation est plus délicate encore à analyser et pour lesquelles on observe d'autres types de décroissance, par exemple gaussienne ou exponentielle avec un taux qui dépend de ϵ (régime de la règle d'or de Fermi). Depuis ces travaux, de nombreux progrès ont été faits dans la compréhension de cet écho quantique d'un point de vue physique. Nous nous limiterons dans ce mémoire à ces articles originaux qui mettent déjà en évidence certaines propriétés importantes. Pour des articles de revue récents sur ces questions, nous renvoyons le lecteur à [105, 129, 107].

2.4.2 Un résultat en courbure négative

Malgré la profusion d'articles sur le sujet en physique, cette question a été relativement peu étudiée dans la littérature mathématique. Dans le cas d'états cohérents sur $\mathbb{R}^n$, des descriptions relativement précises de l'écho de Loschmidt quantique ont été obtenues par Bolte-Schwaibold [27] et Combescure-Robert [61] pour des échelles de temps inférieures au temps d'Ehrenfest. Ces développements asymptotiques de $\mathbf{F}_{\hbar,\epsilon}(\psi_\hbar, t)$ font intervenir l'écart entre la trajectoire classique non perturbée et celle perturbée. Ainsi, ces deux références mettent en lumière (d'un point de vue mathématique) la nécessité de bien comprendre le problème classique pour analyser l'écho de Loschmidt quantique. Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 sont en ce sens une manière de comprendre les trajectoires classiques perturbées dans le cas des variétés à courbure négative. Enfin, même s'ils n'ont pas étudié l'écho de Loschmidt quantique directement, Eswarathasan et Toth se sont intéressés à des questions qui s'inscrivent aussi dans la même optique. Plus précisément, ils ont étudié la propagation de solutions stationnaires de (2.1) par des perturbations magnétiques de l'équation [85] – voir aussi [48] pour des perturbations métriques. Ils démontrent que les solutions perturbées sont en moyenne bornées sur des échelles de temps finis.

Les méthodes que nous avons développées permettent en fait de décrire l'écho de Loschmidt quantique [191]. Pour énoncer ces résultats, nous nous limiterons au cas où $J = 0$ dans (2.8) et où les données initiales sont fortement localisées près de la couche d'énergie $S^*M = H^{-1}(\{1/2\})$ au sens [5] de (2.16). Comme nous allons le voir, nous sommes assez loin des résultats obtenus en physique mais nous donnons tout de même l'indication que l'écho de Loschmidt décroît sur des échelles de temps relativement courtes (toutefois beaucoup plus longues que celles du régime transitoire de Peres). Pour des échelles de temps courts, nous démontrons donc [191] :

Théorème 2.4.2 (R. 2014)**.** *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites. Soit $(\epsilon_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ une suite vérifiant, pour $\hbar > 0$ assez petit,*

$$\epsilon_\hbar \longrightarrow 0, \ \text{et } \exists\, 0 < \nu < \frac{1}{2} \text{ telle que } \epsilon_\hbar \geq \hbar^\nu.$$

Alors, pour tout $1 < c_1 < c_2 < \min\{3/2, 1/(2\nu)\}$, il existe $0 \leq \gamma_0 < 1$ telle que, pour toute suite $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifiant (2.16) et pour toute suite $(\tau_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifiant pour $\hbar > 0$ assez petit,

$$c_1|\log \epsilon_\hbar| \leq \tau_\hbar \leq c_2|\log \epsilon_\hbar|,$$

5. Une nouvelle fois, on pourrait traiter un cas un peu plus général, mais cette simplification permet d'alléger un peu les énoncés.

on a

$$0 \leq \limsup_{\hbar \to 0} \mathbf{F}_{\hbar,\epsilon_\hbar}(\psi_\hbar, \tau_\hbar) \leq \gamma_0 < 1.$$

Ainsi, pour des perturbations assez grosses $\epsilon_\hbar \gg \sqrt{\hbar}$ (correspondant au régime de Lyapunov de Jalabert et Pastawski), l'écho de Loschmidt va asymptotiquement être strictement plus petit que 1 pourvu que le potentiel de la perturbation vérifie la condition générique $\mathcal{C}_{V_0} = \emptyset$ et pourvu que l'on dépasse l'échelle de temps critique pour le problème classique, i.e. $|\log \epsilon|$. On ne retrouve pas la décroissance exponentielle mais ce théorème est valable pour des conditions relativement générales même si elles n'incluent pas *a priori* les états cohérents standards mais plutôt des états cohérents très localisés en énergie. Cette propriété de l'écho de Loschmidt quantique est valable pour des temps d'une certaine manière assez courts. Pour des temps plus longs, l'écho de Loschmidt quantique est *en moyenne* strictement plus petit que 1 [191] :

Théorème 2.4.3 (R. 2014)**.** *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites. Soit* $(\epsilon_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ *une suite vérifiant, pour* $\hbar > 0$ *assez petit,*

$$\epsilon_\hbar \longrightarrow 0, \ \text{ et } \exists\, 0 < \nu < \frac{1}{2} \text{ telle que } \epsilon_\hbar \geq \hbar^\nu.$$

Alors, il existe $0 \leq \gamma_0 < 1$ *telle que, pour toute suite* $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ *vérifiant* (2.16) *et pour toute suite* $(\tau_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ *vérifiant*

$$\lim_{\hbar \to 0^+} \frac{\tau_\hbar}{|\log \epsilon_\hbar|} = +\infty,$$

on a

$$0 \leq \limsup_{\hbar \to 0} \int_0^1 \mathbf{F}_{\hbar,\epsilon_\hbar}(\psi_\hbar, t\tau_\hbar) dt \leq \gamma_0 < 1.$$

Rappelons que, pour des temps très longs, $\mathbf{F}_{\hbar,\epsilon_\hbar}(\psi_\hbar, \tau_\hbar)$ est censé atteindre un régime de saturation qui tend vers 0 avec $\hbar$. On ne retrouve donc pas exactement ce régime de saturation mais on sait qu'en moyenne, l'écho quantique ne peut pas être d'ordre 1 (du moins dans notre contexte géométrique). Concluons en disant un mot sur la preuve de ces deux résultats. Tout repose sur l'estimation de la norme de l'opérateur suivant :

$$\mathbf{1}_{[(1-\hbar\epsilon_\hbar^{-\nu_0})/2,(1+\hbar\epsilon_\hbar^{-\nu_0})/2]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}\right) e^{-\frac{i\tau_\hbar}{\hbar}(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}+\epsilon_\hbar V_0)} \mathbf{1}_{[(1-\hbar\epsilon_\hbar^{-\nu_0})/2,(1+\hbar\epsilon_\hbar^{-\nu_0})/2]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2}\right),$$

pour $\nu_0 > 0$ assez petit et $\tau_\hbar$ qui vérifie les hypothèses du théorème 2.4.2. On va donc évaluer la norme du propagateur de Schrödinger perturbé en restriction aux espaces propres de l'opérateur non perturbé. En tant qu'opérateur de $L^2(M)$ dans $L^2(M)$, nous montrons que sa norme est strictement plus petite que 1 et nous réussissons à en déduire les deux théorèmes précédents. Afin de faire le parallèle avec les arguments de théorie du contrôle du premier chapitre, mentionnons que l'estimation de la norme de l'opérateur se fait par un argument par l'absurde qui nous fournit une suite de données initiales auxquelles on va chercher à appliquer les théorèmes 2.2.2 et 2.3.3 pour aboutir à la contradiction en développant des raisonnements similaires à ceux qui sont utilisés pour vérifier l'estimation de résolvante du théorème 1.1.1.

Chapitre 3

Perturbation de l'équation de Schrödinger : le cas périodique

Dans ce chapitre, nous poursuivons notre description des propriétés en temps longs des perturbations de l'équation de Schrödinger semi-classique, i.e.

$$i\hbar\partial_t u_\hbar = \left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2} + \epsilon_\hbar V\right) u_\hbar, \quad u_\hbar(t=0) = \psi_\hbar \in L^2(M), \tag{3.1}$$

où V appartient à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ et $(\epsilon_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \epsilon_\hbar = 0, \text{ et } \epsilon_\hbar \geq \hbar^2.$$

En d'autres termes, on a affaire à une petite perturbation dans la limite semi-classique de l'hamiltonien classique même s'il faut garder en tête qu'en dimension $n \geq 2$, $\epsilon_\hbar$ est plus grande que l'écart typique entre les valeurs propres de l'hamiltonien quantique non perturbé. Notons que, dans le cas $\epsilon_\hbar = \hbar^2$, on peut effectuer un reparamétrage $t \mapsto t/\hbar$ et on retombe sur l'équation non semi-classique

$$i\partial_t u = \left(-\frac{\Delta_g}{2} + \ V\right) u, \quad u(t=0) = \psi_\hbar \in L^2(M). \tag{3.2}$$

En comparaison des chapitres précédents, nous allons décrire des situations diamétralement opposées du point de vue dynamique, à savoir que nous nous intéresserons à des situations où le flot géodésique φ^t est périodique. Nous présenterons ici des résultats obtenus avec Fabricio Macià dans [159, 160]. Tout comme dans les chapitres précédents, nous supposons que (M,g) est une variété riemannienne, lisse, compacte, sans bords, connexe et de dimension $n \geq 2$.

3.1 Mesures semi-classiques dépendant du temps

Dans ce chapitre, nous allons adopter un point de vue légèrement différent sur les distributions de Wigner des solutions de (3.1) en nous intéressant à leur comportement moyen en temps plutôt qu'en essayant de décrire leurs propriétés pour des temps fixés. Si l'on repense au problème du contrôle de l'équation de Schrödinger, c'est d'ailleurs ce type d'informations qui intervenait dans la définition (1.3) de l'observabilité. D'une certaine manière, c'est aussi ce que l'on avait été amené à faire dans le théorème 2.3.2 pour obtenir notre résultat d'équidistribution. Pour étudier ce comportement moyen en temps, nous allons être amenés à introduire une notion de mesure semi-classique dépendant du temps. Une étude systématique de ces versions généralisées des mesures semi-classiques du premier chapitre a été faite par Macià dans [157]. Nous commençons par rappeler brièvement quelques-uns de ses résultats qui seront utilisés dans la suite.

Comme précédemment, on introduit, pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ et pour toute suite de données initiales $(\psi_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ normalisées dans $L^2(M)$, la distribution de Wigner de la solution de (3.1) au temps t :

$$w_\hbar(t) : b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M) \mapsto \langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar(b) u_\hbar(t)\rangle.$$

Fixons maintenant une échelle de temps $(\tau_\hbar)_{0<\hbar\leq 1}$ sans faire pour le moment d'hypothèse sur la limite de $\tau_\hbar$ lorsque $\hbar$ tend vers 0. On note $\mathcal{M}(T^*M)$ l'ensemble des mesures de Radon finie. En utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt [247, Ch.4-5], on peut démontrer qu'il existe une suite $\hbar_n \to 0^+$ et une application $t \mapsto \mu(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{M}(T^*M))$ telle que, pour tout b dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \langle w_{\hbar_n}(t\tau_{\hbar_n}), b\rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \langle \mu(t), b\rangle dt.$$

L'inégalité de Gårding permet en fait de démontrer que, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, $\mu(t)$ est une mesure positive. Par ailleurs, le fait que les données initiales soient normalisées dans $L^2(M)$ implique que, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, $\mu(t)(T^*M) \leq 1$. Notons que rien n'interdit *a priori* que cette inégalité soit stricte. Toutefois, si on fait l'hypothèse supplémentaire suivante sur la suite de données initiales :

$$\limsup_{\hbar\to 0} \left\| \mathbf{1}_{[R,\infty)} \left(-\hbar^2 \Delta_g\right) \psi_\hbar \right\|_{L^2(M)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } R \longrightarrow +\infty, \tag{3.3}$$

alors on peut démontrer que $\mu(t)(T^*M) = 1$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. De la même manière, si on a

$$\limsup_{\hbar\to 0} \left\| \mathbf{1}_{[0,\delta]} \left(-\hbar^2 \Delta_g\right) \psi_\hbar \right\|_{L^2(M)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \delta \longrightarrow 0^+, \tag{3.4}$$

alors on peut vérifier que $\mu(t)(M \times \{0_{T^*M}\}) = 0$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. Dans la suite de ce chapitre, on se restreindra à des conditions initiales vérifiant à la fois (3.3) et (3.4) qui, on peut le noter, sont beaucoup plus générales que les hypothèses de localisation spectrale faites au chapitre précédent. On notera aussi $\mathcal{M}(\tau, \epsilon)$ l'ensemble des points d'accumulation des suites $(t, x, \xi) \mapsto w_\hbar(t\tau_\hbar, x, \xi)$ où les conditions initiales vérifient les propriétés (3.3) et (3.4). L'objectif de ce chapitre sera de décrire certaines propriétés de cet ensemble en fonction des valeurs relatives de $\tau_\hbar$ et de $\epsilon_\hbar$ lorsque le flot géodésique est périodique.

Avant cela, nous continuons à décrire quelques propriétés valables en toute généralité. Rappelons qu'en fonction des échelles de temps, les éléments de $\mathcal{M}(\tau, \epsilon)$ sont liés ou non au flot géodésique $\varphi^t : T^*M \to T^*M$:

Proposition 3.1.1. *Soit μ appartenant à $\mathcal{M}(\tau, \epsilon)$ et soit μ_0 la mesure semi-classique de la suite de données initiales utilisées pour générer μ. Alors, on a :*

i) Si $\tau_\hbar \to 0^+$, alors μ est continue par rapport à t et, pour tout $b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(t)(b) = \mu_0(b).$$

ii) Si $\tau_\hbar = 1$, alors μ est continue par rapport à t et, pour tout $b \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(t)(b) = \mu_0(b \circ \varphi^t).$$

iii) Si $\tau_\hbar \to +\infty$, alors, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$ et pour tout s dans $\mathbb{R}$,

$$(\varphi^s)_*\mu(t) = \mu(t).$$

Ce résultat est une conséquence directe du théorème d'Egorov déjà mentionné aux chapitres précédents. Notre but sera maintenant de nous intéresser au cas $\tau_\hbar \to +\infty$ pour lequel on sait seulement que les éléments de $\mathcal{M}(\tau, \epsilon)$ sont invariants par le flot géodésique. Par exemple, $\mu(t)$ peut être la mesure de Lebesgue normalisée le long d'une orbite fermée du flot géodésique mais aussi la mesure de Liouville sur une certaine couche d'énergie de l'hamiltonien $H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$. Pour conclure cette description des propriétés générales, on introduit la suite suivante :

$$\nu_\hbar : (t, x) \longmapsto |u_\hbar(t, x)|^2.$$

De nouveau, il existe une suite $\hbar_n \to 0^+$ et une application $t \mapsto \nu(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{M}(M))$ telle que, pour tout b dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ et pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \theta(t)\langle \nu_{\hbar_n}(t\tau_{\hbar_n}), b\rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \theta(t)\langle \nu(t), b\rangle dt.$$

Observons que $\nu(t)$ est nécessairement une mesure de probabilité sur M. On note $\mathcal{N}(\tau, \epsilon)$ les points d'accumulation de ces suites pour des conditions initiales vérifiant les propriétés (3.3) et (3.4). On a alors :

$$\mathcal{N}(\tau, \epsilon) = \left\{ \int_{T_x^*M} \mu(t, x, d\xi) : \mu \in \mathcal{M}(\tau, \epsilon) \right\}.$$

Ainsi, décrire $\mathcal{M}(\tau, \epsilon)$ nous permet implicitement de comprendre l'ensemble $\mathcal{N}(\tau, \epsilon)$.

Remarque 3.1.2. Notons que, jusqu'à présent, l'hypothèse (3.4) n'est pas utile pour démontrer ces différents résultats mais elle le sera par la suite. Nous utiliserons la convention

$$\mathring{T}^*M := \{(x, \xi) \in T^*M : \xi \neq 0\}.$$

3.2 L'équation de Schrödinger sur les variétés de Zoll

Nous allons maintenant décrire le comportement en temps longs de la dynamique de (3.1) sur des variétés de Zoll. Rappelons qu'une variété de Zoll est une variété riemannienne (M, g) lisse, compacte, connexe, sans bords dont toutes les géodésiques sont fermées. Ceci signifie que, pour tout x dans M, toutes les géodésiques issues de x reviennent en x. Un théorème de Wadsley (voir [20] – section 7.B) affirme alors que le flot géodésique φ^s agissant sur le fibré unitaire cotangent S^*M d'une telle variété est périodique. Précisément, toutes les trajectoires φ^t ont une période minimale commune[1] $l > 0$. Le flot géodésique a donc sur ces variétés un comportement diamétralement opposé à celui des flots rencontrés jusqu'à maintenant dont les

1. Notons que cela ne signifie pas que toutes les géodésiques ont la même longueur égale à l.

trajectoires étaient très instables. Nous allons maintenant essayer de décrire quelles différences cela induit sur le comportement de l'équation de Schrödinger semi-classique.

Nous utiliserons dans la suite les terminologies de [20] – chapitre 7. Par exemple, nous dirons que g est une métrique P_l ou que (M, g) est une variété P_l. De la même manière, si toutes les géodésiques ont la même longueur l, on dit que g est une métrique C_l ou encore que (M, g) est une variété C_l. Les exemples principaux de variétés C_l sont les espaces symétriques compacts de rang 1 (parfois abrégé par CROSS), i.e. $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ et $\mathrm{Ca}P^2$ munis de leurs métriques canoniques. Dans le cas de $\mathbb{S}^2$, Zoll a démontré que certaines métriques de révolution vérifient la propriété C_l [246, 20] : nous y reviendrons un peu plus loin dans ce chapitre. Cette construction a été généralisée par Weinstein sur $\mathbb{S}^n$ pour $n \geq 3$ [20, Ch. 4]. Enfin, Guillemin a complètement caractérisé l'ensemble des métriques C_l sur $\mathbb{S}^2$ au voisinage de la métrique canonique [109]. Il démontre en particulier que c'est un espace de dimension infini contenant beaucoup de métriques qui ne sont pas de révolution.

Nous supposons dans la suite de ce chapitre que (M, g) est une variété P_l.

3.2.1 Transformée de Radon

Afin d'énoncer nos résultats, nous avons besoin d'introduire une transformation qui sera importante par la suite. Pour b dans $\mathcal{C}^\infty(\mathring{T}^*M)$, nous définissons

$$\mathcal{I}_g(b)(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x}{l} \int_0^{\frac{l}{\|\xi\|_x}} b \circ \varphi^\tau(x,\xi) d\tau, \quad (x,\xi) \in \mathring{T}^*M. \tag{3.5}$$

Si on note $\pi : T^*M \to M$ la projection canonique sur M, l'application

$$\mathcal{R}_g : V \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto \mathcal{I}_g(V \circ \pi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathring{T}^*M)$$

s'appelle la transformée de Radon.

Remarque 3.2.1. Si on note $G(M)$ l'espace des géodésiques de (M, g), cette transformation peut aussi être vue comme une application de $\mathcal{C}^\infty(M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(G(M))$. Rappelons que si g est une métrique C_l, alors $G(M)$ est une variété lisse qui peut être munie d'une structure symplectique induite par la forme symplectique sur T^*M [20]. Par exemple dans le cas $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique canonique, $G(\mathbb{S}^2)$ peut être identifiée à $\mathbb{S}^2$ munie de sa structure symplectique canonique. On peut le vérifier facilement comme suit. Fixons une géodésique fermée et orientée γ. Elle appartient à l'unique 2-plan de $\mathbb{R}^3$ que l'on peut orienter grâce à l'orientation de la géodésique et γ peut alors être identifiée avec le vecteur unitaire de $\mathbb{S}^2$ qui est directement orthogonal à ce 2-plan. Avec cette identification en tête, Guillemin démontre que

$$\mathcal{R}_g : \mathcal{C}^\infty_{\text{paire}}(\mathbb{S}^2) \to \mathcal{C}^\infty_{\text{paire}}(\mathbb{S}^2)$$

est un isomorphisme [109].

Dans la suite, si q est un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathring{T}^*M)$ à valeurs réelles, nous noterons φ_q^t le flot hamiltonien de $\mathcal{I}_g(q)$ et nous ferons le léger abus de notation de considérer $V \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ comme une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathring{T}^*M)$. Afin de comparer les quantités qui vont intervenir dans la suite avec celles du chapitre précédent, nous pouvons observer à titre d'exemple sur $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique canonique le fait suivant. Le champ de vecteurs X_V de φ_V^t ne s'annule pas en $(x_0, \xi_0) \in \mathring{T}^*\mathbb{S}^2$ si et seulement si

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*_{x(s)}(d_{x(s)}V, \xi^\perp(s)) \cos(s) ds \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*_{x(s)}(d_{x(s)}V, \xi^\perp(s)) \sin(s) ds \neq 0,$$

où nous utilisons les mêmes conventions qu'en (2.9). Ces formules sont analogues (dans le cadre périodique) aux conditions qui intervenaient dans les énoncés des théorèmes 2.2.1, 2.3.1 et 2.3.2 au chapitre précédent. Comme nous le verrons dans un instant, ce champ de vecteurs jouera un rôle important dans l'énoncé de nos résultats sur la description de $\mathcal{M}(\tau,\epsilon)$. En particulier, nos résultats seront vides si X_V s'annule identiquement sur T^*M tout comme les résultats du chapitre précédent l'étaient lorsque la condition (2.10) n'était pas satisfaite.

3.2.2 Propriétés dynamiques en temps longs

Maintenant que nous avons fixé nos conventions, nous pouvons énoncer deux résultats obtenus avec Fabricio Macià dans [159]. Le premier décrit ce qui se passe lorsque $\epsilon_\hbar \gg \hbar^2$.

Théorème 3.2.2 (Macià-R. 2015)**.** *Supposons que (M,g) est une variété de type P_l et que*

$$\lim_{\hbar\to 0^+}\tau_\hbar = \lim_{\hbar\to 0^+}\hbar^2\epsilon_\hbar^{-1} = +\infty.$$

Soit μ appartenant à $\mathcal{M}(\tau,\epsilon)$ et soit μ_0 la mesure semi-classique de la suite de données initiales utilisées pour générer μ. Alors :

i) Si $\tau_\hbar\epsilon_\hbar\to 0^+$, alors μ est continue par rapport à t et, pour tout $b\in\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\mu(t)(b)=\mu_0(\mathcal{I}_g(b)). \tag{3.6}$$

ii) Si $\tau_\hbar\epsilon_\hbar=1$, alors μ est continue par rapport à t et, pour tout $b\in\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\mu(t)(b)=\mu_0(\mathcal{I}_g(b)\circ\varphi_V^t). \tag{3.7}$$

iii) Si $\tau_\hbar\epsilon_\hbar\to+\infty$, alors μ vérifie une invariance supplémentaire : pour presque tout $t\in\mathbb{R}$ et pour tout $s\in\mathbb{R}$,

$$(\varphi_V^s)_*\mu(t)=\mu(t). \tag{3.8}$$

Dans le cas (non semi-classique) où $\epsilon_\hbar=\hbar^2$, on a un résultat un peu différent qui fait intervenir une fonction intrinsèque à la métrique :

Théorème 3.2.3 (Macià-R. 2015)**.** *Supposons que (M,g) est une variété de type P_l,*

$$\lim_{\hbar\to 0^+}\tau_\hbar=+\infty \quad \text{et} \quad \epsilon_\hbar=\hbar^2.$$

Alors, il existe une fonction φ^s-invariante et 0-homogène q_0 appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathring{T}^*M)$, ne dépendant que de (M,g) et telle que, pour tout μ appartenant à $\mathcal{M}(\tau,\epsilon)$ associée à une suite de données initiales générant la mesure semi-classique μ_0 :

i) Si $\tau_\hbar\hbar^2\to 0^+$, alors μ est continue par rapport à t et, pour tout $b\in\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\mu(t)(b)=\mu_0(\mathcal{I}_g(b)). \tag{3.9}$$

ii) Si $\tau_\hbar=\hbar^{-2}$, alors μ est continue par rapport à t et, pour tout $b\in\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\mu(t)(b)=\mu_0(\mathcal{I}_g(b)\circ\varphi_{q_0+V}^t). \tag{3.10}$$

iii) Si $\tau_\hbar \hbar^2 \to +\infty$, alors μ vérifie une invariance supplémentaire : pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi^s_{q_0+V})_* \mu(t) = \mu(t). \tag{3.11}$$

De plus, $q_0 = 0$ si (M, g) est un espace symétrique compact de rang 1.

Ces résultats prolongent les résultats de la proposition 3.1.1 dans le cas où $\tau_\hbar \to +\infty$ et où (M, g) est une variété de Zoll. Ils démontrent que, sous ces hypothèses géométriques, on peut dire beaucoup plus sur le comportement en temps longs des solutions de l'équation de Schrödinger. Le cas (i) de ces deux théorèmes avait déjà été démontré par Macià dans [156] et la nouveauté de ces deux théorèmes se situent vraiment dans la description du comportement en temps très longs des solutions. On voit en effet apparaître de nouvelles propriétés de transport et d'invariance dès que $\tau_\hbar \geq \epsilon_\hbar^{-1}$. Notons à ce propos que la situation est très différente du cas chaotique décrit au chapitre précédent. L'influence de la perturbation ne se fait ici sentir que pour des échelles de temps d'ordre $\epsilon_\hbar^{-1}$ alors qu'elle entrait en compte dès les temps d'ordre $|\log \epsilon_\hbar|$ dans le cas chaotique. Concernant la taille des perturbations, nos résultats sont valables pour $\epsilon_\hbar \geq \hbar^2$ alors que, dans le cas chaotique, on avait besoin de supposer que $\epsilon_\hbar \gg \hbar^{\frac{1}{2}}$. Nous traitons en fait le cas général dans l'article [159] mais, par souci de simplicité, nous nous limitons ici à ce régime qui permet de revenir à l'équation de Schrödinger non semi-classique (3.2). Dans ce cas critique, on voit apparaître une fonction q_0 liée à la métrique g sur M. Cette fonction provient du terme sous-principal dans la mise sous forme normale du laplacien de Zoll effectuée par Colin de Verdière dans [57]. Cette fonction est difficile à expliciter et elle fait intervenir de nombreux termes. À ma connaissance, la seule description explicite de cette fonction est due à Zelditch dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^2$ munie d'une métrique C_l [239, 241]. Nous y reviendrons un peu plus loin dans ce chapitre. Si on continue de se limiter au cas critique $\epsilon_\hbar = \hbar^2$ et si on suppose en plus que l'on considère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique canonique, alors on peut aussi remarquer que le résultat d'invariance est vide dès que V est une fonction impaire [2]. On peut toutefois obtenir de nouvelles relations d'invariance mais l'échelle de temps critique devient $\tau_\hbar = \hbar^{-4}$ et il faut remplacer φ^t_V par le flot hamiltonien de la fonction

$$\mathcal{I}(V^2) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \{V \circ \varphi^t, V \circ \varphi^s\} ds dt.$$

Nous ne discuterons pas plus ce cas ici et nous renvoyons à [160] pour plus de précisions dans cette direction.

Nos résultats sur le comportement en temps longs de (3.2) partagent aussi un certain nombre de similarités avec les résultats obtenus par Anantharaman et Macià [158, 7] pour la dynamique de l'équation de Schrödinger non semi-classsique sur le tore plat $\mathbb{T}^n$. Dans ces références, on voit aussi apparaître des relations d'invariance supplémentaire par des flots de Schrödinger (cette fois pour des échelles de temps $\tau_\hbar = \hbar^{-1} \ll \hbar^{-2} = \epsilon_\hbar^{-1}$) pour des mesures semi-classiques renormalisées le long de certaines variables de l'espace des phases. Dans un travail en cours avec Fabricio Macià, nous montrons sur le tore plat $\mathbb{T}^2$ des propriétés d'invariance similaires à celles obtenues dans le cas Zoll pour des perturbations de taille $\epsilon_\hbar \gg \hbar^2$.

Enfin, on peut aussi se poser la question de la description de l'écho quantique dans ce contexte. Notre approche permet d'obtenir une description relativement précise de cette quantité pour le régime transitoire $\tau_\hbar = \hbar/\epsilon_\hbar$ et tant que $\epsilon_\hbar \gg \hbar^3$ [159].

2. Dans ce cas, $\mathcal{I}(V)$ est une fonction constante et donc $\varphi^t_V = \mathrm{Id}$.

3.2.3 Éléments de la preuve dans le cas de la sphère canonique

Nous voudrions maintenant donner une idée de la preuve du point (iii) du théorème 3.2.3 lorsque (M, g) est la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique canonique. Afin de mettre en avant le point principal de la preuve, nous ne traiterons que le cas où la suite de données initiales vérifie

$$\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2} + \hbar^2 V\right)\psi_\hbar = \psi_\hbar, \quad \|\psi_\hbar\|_{L^2(\mathbb{S}^n)} = 1.$$

Dans ce cas, les mesures semi-classiques correspondantes sont indépendantes du temps et nous avons vu au chapitre 1 que leur support était contenu dans S^*M. Rappelons aussi qu'elles sont invariantes par le flot géodésique φ^t. En particulier, pour démontrer notre résultat, il suffit de démontrer que, pour tout b dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathring{T}^*\mathbb{S}^n)$ et pour toute mesure semi-classique μ associée à la suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$, on a

$$\mu\left(\{\mathcal{I}_g(b), \mathcal{I}_g(V)\}\right) = 0. \tag{3.12}$$

Essayons donc de démontrer ce résultat. Pour cela, on va se servir de la forme normale du laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^n$ et d'une méthode de moyennisation (quantique) due à Weinstein [230].

Remarque 3.2.4. Dans le cas plus général, il faudrait utiliser les résultats de Duistermaat-Guillemin [74] et de Colin de Verdière [57] qui permettent de mettre le laplacien sous forme normale – voir [159] pour les détails.

Rappelons tout d'abord que les valeurs propres de $-\Delta_g$ sur la sphère canonique sont de la forme

$$\lambda_k^2 = \left(k + \frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4},$$

où k parcourt l'ensemble des entiers positifs. En particulier, on peut écrire

$$-\Delta_g = A^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, \tag{3.13}$$

où A est opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1, de symbole principal $\|\xi\|_x$ et vérifiant

$$e^{2i\pi A} = e^{i\pi(n-1)}\mathrm{Id}. \tag{3.14}$$

Étant donné b dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{S}^n - \{0\})$, on pose alors, par analogie avec la transformée de Radon de b,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(b)) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-isA}\,\mathrm{Op}_\hbar(b)e^{isA}ds.$$

Une observation importante qui semble due à Weinstein [230] est la propriété de commutation :

$$[\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(a)), A] = 0.$$

En particulier, nous pouvons déduire de (3.13) que

$$[\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(b)), \Delta] = 0. \tag{3.15}$$

Enfin, le théorème d'Egorov permet de relier l'opérateur $\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(b))$ à la transformée de Radon classique de la manière suivante :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(b)) = \mathrm{Op}_\hbar(\mathcal{I}(b)) + \hbar R, \tag{3.16}$$

où R est un opérateur pseudo-différentiel dans $\Psi^{-\infty}(\mathbb{S}^d)$. Écrivons maintenant que $\psi_\hbar$ est un vecteur propre, i.e.

$$\left\langle \psi_\hbar, \left[-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2} + \hbar^2 V, \mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(b)) \right] \psi_\hbar \right\rangle = 0. \tag{3.17}$$

Grâce à (3.15), on trouve alors

$$\langle \psi_\hbar, [V, \mathcal{I}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Op}_\hbar(b))] \, \psi_\hbar \rangle = 0.$$

En combinant (3.16) aux règles de commutation pour les opérateurs pseudo-différentiels et au théorème de Calderón-Vaillancourt [247], on obtient finalement la relation suivante :

$$\frac{\hbar}{i} \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar \left(\{V, \mathcal{I}_g(b)\} \right) \psi_\hbar \rangle = \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Ainsi, en faisant tendre $\hbar$ vers 0, on a

$$\mu(\{V, \mathcal{I}_g(b)\}) = 0.$$

En utilisant l'invariance de μ par le flot géodésique, on arrive finalement à la relation voulue :

$$\mu(\{\mathcal{I}_g(V), \mathcal{I}_g(b)\}) = 0. \tag{3.18}$$

3.2.4 Mesures bi-invariantes en dimension 2

Pour conclure cette section, dressons quelques conséquences des théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 sur la régularité des mesures semi-classiques lorsque $\tau_\hbar \gg \epsilon_\hbar^{-1}$. Dans ce cas, rappelons que les mesures sont à la fois invariantes par le flot géodésique et par le flot hamiltonien $\varphi^t_{V+q_0}$ (ou φ^t_V). On supposera dans ce paragraphe que M est de dimension 2 mais pas forcément que (M, g) est de Zoll dans un premier temps. On introduit le flot hamiltonien φ^t_L où L est une fonction lisse sur $\mathring{T}^*M$ vérifiant les propriétés suivantes :

— L est 0-homogène en la variable ξ,
— la 1-forme dL n'est pas identiquement nulle,
— $\{L, p_0\} = 0$.

On peut alors donner une description très simple des mesures invariantes par ces deux flots qui commutent. Pour cela, introduisons l'ensemble $\mathrm{Crit}(L)$ des points critiques de L dans $\mathring{T}^*M$:

$$\mathrm{Crit}(L) := \left\{ \rho \in \mathring{T}^*M : d_\rho L = 0 \right\}.$$

Ce sous-ensemble de $\mathring{T}^*M$ est exactement composé par toutes les orbites du flot géodésique qui sont invariantes par le flot φ^t_L. Les mesures bi-invariantes restreintes à cet ensemble sont donc exactement les mesures invariantes par le flot géodésique dont le support est contenu dans $\mathrm{Crit}(L)$. Ce ne sera en revanche plus le cas sur le complémentaire de cet ensemble, i.e.

$$\mathcal{R}(L) := \mathring{T}^*M \setminus \mathrm{Crit}(L),$$

qui est ouvert dans $\mathring{T}^*M$ et invariant par φ^t et par φ^t_L. Nous allons maintenant décrire les mesures bi-invariantes restreintes à ce sous-ensemble où la dynamique de φ^t_L n'est pas triviale. Pour cela, observons que le couple $H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$, $L(x, \xi)$ forme un système complètement intégrable sur $\mathcal{R}(L)$ dont l'application moment sera notée

$$\Phi : \mathcal{R}(L) \ni (x, \xi) \longmapsto (H(x, \xi), L(x, \xi)) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout ρ_0 dans $\mathcal{R}(L)$, on définit aussi

$$\phi_{\rho_0} : \mathbb{R}^2 \ni (s,t) \longmapsto \varphi^s \circ \varphi_L^t(\rho_0) \in \mathcal{R}(L),$$

et on note G_{ρ_0} le sous-groupe (discret) des (s,t) qui fixent ρ_0.

Remarque 3.2.5. Lorsque le flot géodésique est périodique, tout point ρ_0 de $\mathcal{R}(L)$ a au moins un élément de la forme $(q,0)$ (avec $q \neq 0$) dans son stabilisateur.

On peut alors considérer le difféomorphisme induit $\phi_{\rho_0} : \mathbb{R}^2/G_{\rho_0} \to \Lambda_{\rho_0}$, où Λ_ρ est la composante connexe de $\Phi^{-1}(\{\Phi(\rho_0)\})$ contenant ρ_0. Si Λ_{ρ_0} est compact, c'est en fait un tore lagrangien plongé dans T^*M que l'on notera $\mathbb{T}^2_{\rho_0} := \mathbb{R}^2/G_{\rho_0}$. Nous utiliserons aussi la convention $\mathcal{R}_c(L)$ pour les points $\rho \in \mathcal{R}(L)$ tels que Λ_ρ soit compact. Maintenant que nous avons fixé ces différentes conventions, nous pouvons clarifier la structure des mesures qui sont à la fois invariantes par φ^t et φ_L^t et par conséquent comprendre le sens de la condition d'invariance supplémentaire qui intervient dans les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 :

Proposition 3.2.6. *Supposons que $n = 2$. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{R}(L)$ qui est invariante par φ^s et φ_L^τ. Posons*

$$\overline{\mu} := \Phi_* \mu.$$

Alors, pour tout $b \in \mathcal{C}_c(\mathcal{R}(L))$, on a

$$\int_{\mathcal{R}(L)} b(x,\xi)\mu(dx,d\xi) = \int_{\Phi(\mathcal{R}(L))} \int_{\Phi^{-1}(\{(E,J)\})} b(x,\xi)\lambda_{E,J}(dx,d\xi)\overline{\mu}(dE,dJ),$$

où, pour $(E,J) \in \Phi(\mathcal{R}(L))$, la mesure $\lambda_{E,J}$ est une combinaison convexe des mesures de Haar (normalisées) portées par les tores Λ_ρ avec $\rho \in \Phi^{-1}(\{(E,J)\}) \cap \mathcal{R}_c(L)$.

Si on revient à notre résultat sur les propriétés d'invariance des éléments de $\mathcal{M}(\tau,\epsilon)$ lorsque $\tau_\hbar \geq \epsilon_\hbar^{-1}$, on trouve que, pour presque tout t, $\mu(t)$ pourra être décomposée en la somme d'une mesure invariante portée par $\mathrm{Crit}(q_0 + \mathcal{I}_g(V))$ (ou $\mathrm{Crit}(\mathcal{I}_g(V))$ lorsque $\epsilon_\hbar \gg \hbar^2$) et d'une autre mesure qui sera une combinaison de mesures de Haar portées par des tores lagrangiens. Dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique canonique, le résultat de Guillemin mentionné à la remarque 3.2.1 permet de vérifier que, pour un choix générique de V, $\mathrm{Crit}(\mathcal{I}_g(V))$ (vue comme sous-ensemble de $G(\mathbb{S}^2)$) sera une union finie de géodésiques fermées. Ainsi, dans ce cas, les mesures semi-classiques ne pourront pas se concentrer sur des sous-ensembles invariants trop petits à l'exception de ce nombre fini de géodésiques critiques.

Pour compléter ce résultat, nous voudrions décrire la projection de telles mesures sur la base M. Rappelons en effet que

$$\mathcal{N}(\tau,\epsilon) = \left\{ \int_{T_x^*M} \mu(t,x,d\xi) : \mu \in \mathcal{M}(\tau,\epsilon) \right\}.$$

Un premier résultat dans cette direction est donné par le théorème suivant qui est par exemple démontré dans [159] :

Théorème 3.2.7. *Supposons que (M,g) est une surface orientée de type P_l. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{R}(L)$ qui est invariante par φ^s et φ_L^τ. Alors, la projection*

$$\nu := \int_{T_x*M} \mu(x,d\xi)$$

est une mesure de probabilité sur M qui est absolument continue par rapport au volume riemannien.

Dans le cas général, notons $\mathcal{N}(L)$ pour la fermeture de l'enveloppe convexe des mesures $\int_{T_x^*M} \delta_\Gamma(x, d\xi)$ où $\Gamma \subset \mathring{T}^*M$ parcourt l'ensemble des orbites du flot géodésique qui sont contenues dans $\mathrm{Crit}(L)$. On peut alors déduire le corollaire suivant qui décrit complètement la projection sur M des mesures bi-invariantes :

Corollaire 3.2.8. *Supposons que (M, g) est une surface orientée de type P_l. La projection*

$$\nu := \int_{T_x * M} \mu(x, d\xi)$$

d'une mesure de probabilité μ sur $\mathring{T}^*M$ qui est invariante par φ^s et φ_L^τ s'écrit

$$\nu = f \operatorname{vol}_g + \alpha \nu_{\mathrm{sing}}$$

où $f \in L^1(M)$, $\alpha \in [0, 1]$ et $\nu_{\mathrm{sing}} \in \mathcal{N}(L)$.

Ce résultat montre que les mesures dans $\mathcal{N}(\tau, \epsilon)$ ont une composante absolument continue et une composante singulière dont le support est contenu dans l'ensemble des géodésiques critiques pour la fonction $q_0 + \mathcal{I}_g(V)$ (ou $\mathcal{I}_g(V)$ selon les régimes considérés). Si on revient une nouvelle fois au cas de la sphère canonique $\mathbb{S}^2$, le résultat de Guillemin nous dit que, pour un choix générique de V dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$, on a seulement un nombre fini de géodésiques critiques. En d'autres termes, pour un V générique, les éléments de $\mathcal{N}(\tau, \epsilon)$ sont de la forme suivante, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\nu(t) = f(t) \operatorname{vol}_g + \sum_{j=1}^{r} c_j(t) \delta_{\gamma_j},$$

où $c_j(t) \geq 0$ pour $j = 1, ..., r$, $\sum_{j=1}^r c_j \leq 1$, $f(t) \in L^1(M)$. Les mesures δ_{γ_j} sont les mesures de Lebesgue normalisées le long d'un nombre fini de géodésiques périodiques qui correspondent aux points critiques de V. Il serait bien entendu intéressant de comprendre si ces composantes singulières peuvent effectivement apparaître dans la décomposition pour certains choix de conditions initiales ou si cela dépend de la nature de la géodésique critique (i.e. de son indice de Morse). Dans le cas du tore $\mathbb{T}^d$ muni de sa métrique plate, les résultats d'Anantharaman et Macià [7] montrent que, si $\epsilon_\hbar = \hbar^2$, alors les éléments de $\mathcal{N}(\tau, \epsilon)$ n'ont pas de composantes singulières. Toutefois, pour des perturbations d'ordre $\epsilon_\hbar \gg \hbar^2$, Wunsch a mis en évidence que l'on peut avoir des phénomènes de concentration singulière pour certaines données initiales [5].

3.3 Modes propres et observabilité

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences des résultats précédents lorsque $\epsilon_\hbar = \hbar^2$ dans (3.1) et lorsqu'on s'intéresse spécifiquement à des solutions stationnaires. En d'autres termes, la condition initiale dans (3.1) vérifie

$$\left(-\frac{\hbar^2 \Delta_g}{2} + \hbar^2 V\right) \psi_\hbar = \psi_\hbar, \; \|\psi_\hbar\|_{L^2(M)} = 1. \tag{3.19}$$

De manière équivalente, on considère des modes propres de l'opérateur $-\frac{\Delta_g}{2} + V$ sur $L^2(M)$. Dans ce cas, les éléments de $\mathcal{N}(\tau, \epsilon)$ correspondants sont indépendants du temps et on notera

$\mathcal{N}(\infty)$ l'ensemble des mesures de probabilité générées par des suites de solutions stationnaires (3.19). Comme nous l'avons déjà mentionné au premier chapitre, la caractérisation de cet ensemble de mesures a été à l'origine de nombreux travaux notamment autour de la conjecture d'unique ergodicité quantique [193]. Par exemple, lorsque les courbures sectionnelles de la variété sont partout strictement négatives, les travaux d'Anantharaman montrent que l'ensemble $\mathcal{N}(\infty)$ ne contient aucun élément de la forme $\sum_{j=1}^N c_j\delta_{\gamma_j}$ où les γ_j sont des géodésiques fermées. Ces résultats n'excluent toutefois pas la possibilité d'avoir une composante de cette forme dans la décomposition de la mesure. Toujours en courbure strictement négative, le résultat principal de ma thèse [186] combiné aux théorèmes de Ledrappier et Lindenstrauss sur les projections de mesures invariantes [144] montre qu'en dimension 2, le support de tout élément ν dans $\mathcal{N}(\infty)$ est de dimension de Hausdorff 2. Cependant, les constructions de [127] montrent aussi que de telles mesures pourraient être singulières par rapport au volume riemannien. Dans le cas du tore plat, Jakobson a démontré par des méthodes arithmétiques que tout élément de $\mathcal{N}(\infty)$ est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dès lors que $V \equiv 0$ [132]. Ce résultat a par la suite été étendu au cas où V est non nul par des méthodes de nature plus semi-classique dans [158, 7]. De manière un peu paradoxale, le cas des variétés de Zoll a été lui très peu étudié [133, 156, 244] même si la dynamique classique sous-jacente est beaucoup plus simple que sur le tore ou sur les variétés à courbures sectionnelles strictement négatives. Nous allons dans ce dernier paragraphe décrire brièvement quelques corollaires sur la structure de $\mathcal{N}(\infty)$ à partir de nos résultats sur la dynamique de (3.1) sur les variétés de Zoll.

3.3.1 Le cas particulier des solutions stationnaires

Pour une variété (M, g) de type P_l, $\mathcal{N}(\infty)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{N}_g$ où, par définition, $\mathcal{N}_g$ est la fermeture convexe (par rapport à la topologie faible-$\star$) de l'ensemble des mesures de probabilité δ_γ. Rappelons que

$$\int_M a(x)\delta_\gamma(dx) = \frac{1}{l}\int_0^l a(\gamma(s))ds,$$

où l est la longueur de γ (à un multiple entier près) et où la paramétrisation $\gamma(s)$ est normalisée. Dans le cas de $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique canonique et sous l'hypothèse $V \equiv 0$, Jakobson et Zelditch ont en fait démontré [133] que

$$\mathcal{N}(\infty) = \mathcal{N}_g,$$

qui est d'une certaine manière la propriété opposée à celle de l'unique ergodicité quantique où $\mathcal{N}(\infty)$ serait réduit à un élément. Ce résultat a été généralisé par Macià à des espaces symétriques compacts de rang 1 plus généraux [156] mais toujours sous l'hypothèse $V \equiv 0$. Toutefois, en combinant le théorème 3.2.3 avec le corollaire 3.2.8, on peut montrer que ces propriétés ne sont plus vraies lorsque (M, g) est une variété P_l générale ou lorsque V ne s'annule pas forcément.

Afin d'énoncer nos corollaires sur la structure de $\mathcal{N}(\infty)$, considérons la projection sur M des points critiques de la transformée de Radon de V :

$$\mathcal{C}(V) = \{x \in M : d_{(x,\xi)}\mathcal{I}_g(V) = 0 \text{ pour un certain } \xi \in T_x^*M \setminus \{0\}\}.$$

On a alors

Corollaire 3.3.1. *Supposons que (M, g) est un espace symétrique compact de rang 1 et que $\mathcal{C}(V) \neq M$. Alors, il existe une infinité de géodésiques γ de (M, g) telles que $\nu(\gamma) = 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{N}(\infty)$. En particulier, $\delta_\gamma \notin \mathcal{N}(\infty)$, et*

$$\mathcal{N}(\infty) \neq \mathcal{N}_g.$$

Dans le cas de la sphère munie de sa métrique canonique, on peut être un peu plus précis grâce au corollaire 3.2.8 :

Corollaire 3.3.2. *Supposons que $(M, g) = (\mathbb{S}^2, \mathrm{can})$. Alors, tout $\nu \in \mathcal{N}(\infty)$ peut se décomposer comme*

$$\nu = f \operatorname{vol}_g + \nu_{\text{sing}},$$

où $f \in L^1(\mathbb{S}^2)$ et où ν_{sing} est une mesure positive portée par $\mathcal{C}(V)$. Lorsque $\mathcal{C}(V)$ est une union finie de géodésiques fermées $\gamma_1, \ldots \gamma_n$, alors on a

$$\nu = f \operatorname{vol}_g + \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{\gamma_j},$$

pour une famille de $c_j \geq 0$.

Notons que les conditions apparaissant dans ces deux corollaires ne sont pas vides dès que la fonction $\mathcal{I}_g(V)$ n'est pas constante. Il est bien entendu naturel de se demander si de tels résultats restent vrais si $V \equiv 0$ pour des métriques P_l non canoniques. Pour cela, on peut considérer des métriques $C_{2\pi}$ de révolution sur $\mathbb{S}^2$. D'après [20, Ch. 4], de telles métriques sont exactement données en coordonnées sphériques par la formule suivante :

$$g_\sigma = (1 + \sigma(\cos\theta))^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

où σ est une fonction lisse impaire sur $[-1, 1]$ vérifiant $\sigma(1) = 0$. Dans ce cas, le fait que $\mathcal{N}_g$ soit différent de $\mathcal{N}(\infty)$ découle simplement du fait que l'on soit capable de montrer que la fonction q_0 dans le théorème 3.2.3 n'est pas constante. Or Zelditch a calculé explicitement la valeur de q_0 pour une métrique P_l sur $\mathbb{S}^2$ dans les références [239, 241]. Ceci nous permet alors d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.3. *Soit g_σ une métrique $C_{2\pi}$ sur $\mathbb{S}^2$ telle que $\sigma'(0) \neq 0$. Supposons que $V \equiv 0$. Alors, il existe une infinité de géodésiques fermées γ de $(\mathbb{S}^2, g_\sigma)$ telles que $\nu(\gamma) = 0$ pour tout ν in $\mathcal{N}(\infty)$. En particulier, $\delta_\gamma \notin \mathcal{N}(\infty)$, et*

$$\mathcal{N}(\infty) \neq \mathcal{N}_{g_\sigma}.$$

Ce résultat donne le premier exemple de variétés de Zoll pour lesquelles $\mathcal{N}(\infty) \neq \mathcal{N}_g$. À ma connaissance, c'est seulement sur la sphère que l'on sait construire des métriques de Zoll non canoniques, notamment via les métriques g_σ. Au voisinage de la métrique canonique sur $\mathbb{S}^2$, Guillemin a complètement caractérisé les métriques de Zoll [109] et ceci démontre en particulier l'existence d'une infinité de telles métriques qui ne sont pas de révolution. Il serait à ce propos intéressant de montrer que, pour un choix générique de telles métriques, la fonction q_0 n'a qu'un nombre fini de géodésiques critiques. Ceci permettrait de vérifier que c'est en fait la conclusion du corollaire 3.3.2 qui a lieu génériquement pour les métriques de Zoll au voisinage de la métrique canonique sur $\mathbb{S}^2$.

3.3.2 Retour sur l'observabilité

Revenons maintenant sur la question de l'observabilité de l'équation de Schrödinger non semi-classique :

$$i\partial_t u = -\frac{\Delta_g u}{2} + Vu, \quad u\rceil_{t=0} = \psi_0. \tag{3.20}$$

Cette question a déjà été évoquée au paragraphe 1.1. Si on fixe un ouvert ω, les arguments du chapitre 1 montrent que l'on peut contrôler l'équation de Schrödinger en temps T sur ω en prenant $a = \mathbf{1}_\omega$ dans (1.2) si on sait démontrer l'existence d'une constante $C_{T,\omega} > 0$ telle que, pour tout ψ dans $L^2(M)$:

$$\|\psi\|^2_{L^2(M)} \leq C_{T,\omega} \int_0^T \left\| e^{it\left(\frac{\Delta}{2} - V\right)} \psi \right\|^2_{L^2(\omega)} dt. \tag{3.21}$$

En d'autres termes, on dit que (3.20) est observable en temps T sur l'ouvert ω. Dans le cas des variétés de Zoll, le théorème de Lebeau (1.1.2) dit que (3.21) est vraie dès que la propriété de contrôle géométrique

$$K_\omega := \{\gamma \text{ géodesique fermée de } M : \gamma \cap \omega = \emptyset\} = \emptyset$$

est satisfaite. Réciproquement, le point (i) du théorème 3.2.3 permet de vérifier que (3.21) est fausse dès que $K_{\overline{\omega}} \neq \emptyset$ sur une variété de Zoll. En effet, il suffit pour cela de choisir une suite de conditions initiales pour lesquelles $\mu_0 = \delta_{x_0,\xi_0}$ avec (x_0, ξ_0) qui génère une géodésique ne rencontrant pas $\overline{\omega}$. Ceci montre que la condition de contrôle géométrique de Lebeau est essentiellement optimale.

Remarquons que, si on se limite au cas des solutions stationnaires de (3.19), alors l'inégalité d'observabilité (3.21) devient

$$C_\omega \leq \|\psi_\hbar\|_{L^2(\omega)}, \tag{3.22}$$

où $C_\omega > 0$ est une constante strictement positive indépendante du choix de la solution $\psi_\hbar$ de (3.19). Il est clair que cette inégalité d'observabilité est satisfaite dès que K_ω est vide et il est naturel de se demander si elle est mise en défaut lorsque $K_{\overline{\omega}}$ n'est pas vide. Pour simplifier la discussion, limitons-nous au cas de la sphère munie de sa métrique canonique [160] :

Corollaire 3.3.4. *Soit ω un ouvert de $\mathbb{S}^d$. Supposons que*

$$K_{\omega,V} := \left\{\gamma \in G(\mathbb{S}^d) : \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^t_V(\gamma) \cap \omega = \emptyset\right\} = \emptyset.$$

Alors, il existe $C_{\omega,V} > 0$ telle que, pour tout ψ solution de (3.19)*, on a*

$$C_{\omega,V} \leq \|\psi\|^2_{L^2(\omega)}. \tag{3.23}$$

Ce corollaire est une conséquence immédiate du point (iii) du théorème 3.2.3 et du principe de continuation unique pour les opérateurs elliptiques [140]. Notons que $K_{\omega,V} \subset K_\omega$ et qu'il peut arriver que $K_{\omega,V} = \emptyset$ avec $K_{\overline{\omega}}$ qui contient un ensemble non vide de géodésiques. Ceci montre que l'observabilité peut avoir lieu pour le problème stationnaire alors qu'elle est fausse pour le problème d'évolution.

Pour conclure ce chapitre, expliquons maintenant comment choisir ω et V sur $\mathbb{S}^2$ de telle sorte que $K_{\omega,V} = \emptyset$ alors que $K_{\overline{\omega}} \neq \emptyset$. Pour cela, rappelons que l'espace des géodésiques de

$\mathbb{S}^2$ peut être identifié avec $\mathbb{S}^2$ – voir la remarque 3.2.1. Les travaux de Guillemin dans [109] permettent par ailleurs de montrer que

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Can}} : V \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{paire}}(\mathbb{S}^2) \mapsto \mathcal{I}(V) \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{paire}}(\mathbb{S}^2)$$

est un isomorphisme. Ceci va nous permettre de construire ω et V. On écrit

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

On choisit l'ouvert ω de telle sorte qu'il contienne le pôle Nord $(0,0,1)$ et qu'il n'intersecte pas un voisinage assez petit de l'équateur $\Gamma = \{(x,y,0) : x^2+y^2=1\}$. Par exemple, on peut prendre

$$\omega := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1 \text{ et } z > \epsilon\right\}$$

avec $\epsilon > 0$ assez petit. En particulier, la condition $K_{\overline{\omega}} = \emptyset$ n'est pas satisfaite. Dans l'espace des géodésiques $G(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{S}^2$, les géodésiques de $K_{\overline{\omega}}$ correspondent à un petit voisinage des 2 pôles $(0,0,-1)$ et $(0,0,1)$ de $\mathbb{S}^2$. Ainsi, si on choisit V pour que $\mathcal{I}_{\mathrm{Can}}(V)$ n'ait pas de points critiques dans un voisinage légèrement plus grand [3], alors on aura $K_{\omega,V} = \emptyset$.

3. C'est possible grâce au théorème de Guillemin.

Chapitre 4

Ergodicité quantique : variantes et applications

Dans les chapitres précédents, nous avons décrit des résultats concernant la distribution asymptotique de solutions de l'équation de Schrödinger semi-classique. Les résultats étaient valables pour *toute* suite de données initiales vérifiant certaines hypothèses de localisation spectrale. Dans ce nouveau chapitre, nous allons décrire des propriétés valables pour des suites *génériques* de solutions de l'équation

$$-\Delta_g e_\lambda = \lambda^2 e_\lambda. \tag{4.1}$$

Les propriétés ci-dessous pourraient être généralisées au cas non-stationnaire (et avec potentiel) en utilisant les méthodes de [10] mais, par souci de simplicité, nous nous contenterons d'exposer les théorèmes pour les solutions de (4.1). Dans un premier temps, nous discuterons le comportement des solutions à travers leurs distributions de Wigner puis nous ferons le lien avec d'autres quantités comme leurs normes L^p. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications [189, 119, 120].

4.1 Théorème(s) d'ergodicité quantique

Dans tout ce chapitre, $(e_k)_{k\geq 0}$ désigne une base orthonormée de $L^2(M)$ pour laquelle on peut trouver une suite

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \ldots \to +\infty$$

telle que, pour tout $k \geq 0$,

$$-\Delta_g e_k = \lambda_k^2 e_k.$$

En d'autres termes, on dit que $(e_k)_{k\geq 0}$ est une *base orthonormée de fonctions propres du laplacien.*

4.1.1 Lois de Weyl

Avant d'énoncer les résultats d'ergodicité quantique qui seront au coeur de ce chapitre, commençons par rappeler la loi d'Hörmander-Weyl sur la distribution des valeurs propres de

$-\Delta_g$ [125] :

$$N(\Lambda) := |\{k : \lambda_k \leq \Lambda\}| = \frac{\mathrm{Vol}_g(M)}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \Lambda^n + \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}),$$

ou de manière un peu plus précise :

$$\forall x \in M, \sum_{k:\lambda_k \leq \Lambda} |e_k(x)|^2 = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \Lambda^n + \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}), \tag{4.2}$$

où la constante dans le reste est uniforme pour x dans M.

Remarque 4.1.1. Notons d'ores et déjà que (4.2) permet de démontrer que

$$\forall x \in M, \sum_{k:\Lambda-1 \leq \lambda_k \leq \Lambda} |e_k(x)|^2 = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(\Lambda^n - (\Lambda-1)^n\right) + \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}) = \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}).$$

Ainsi, il existe $C_{M,g} > 0$ telle que, pour tout e_λ vérifiant

$$-\Delta_g e_\lambda = \lambda^2 e_\lambda,$$

avec $\lambda > 0$, on a

$$\|e_\lambda\|_{L^\infty(M)} \leq C_{M,g} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}. \tag{4.3}$$

Si on fixe une fonction a dans $\mathcal{C}^0(M)$, ce résultat permet aussi de vérifier que

$$\frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k \leq \Lambda} \int_M a(x)|e_k(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(M)} \int_M a(x) d\mathrm{Vol}_g(x) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}). \tag{4.4}$$

Autrement dit, si on considère les mesures de probabilité $\nu_k = |e_k(x)|^2 \mathrm{Vol}_g$, elles convergent en moyenne de Cesàro vers la mesure volume normalisée. Au paragraphe 1.1.2, on avait introduit la distribution de Wigner d'un état quantique ainsi que certaines de ses propriétés asymptotiques. Dans notre contexte, on peut poser, pour $k \neq 0$,

$$\forall a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M), \ \langle w_k, a \rangle := \langle e_k, \mathrm{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a) e_k \rangle,$$

et, pour $k = 0$, $\langle w_0, a \rangle := \langle e_0, \mathrm{Op}_1(a) e_0 \rangle$. Rappelons que tout point d'accumulation (pour $k \to +\infty$) de la suite $(w_k)_{k \geq 1}$ est une mesure de probabilité sur S^*M qui est invariante par le flot géodésique φ^t. On peut alors écrire une loi de Weyl microlocale pour ces distributions [247] :

$$\frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k \leq \Lambda} \langle w_k, a \rangle = \int_{S^*M} a dL + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}), \tag{4.5}$$

où L est la désintégration de la mesure de Liouville sur S^*M. Rappelons que L est une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique. Ce résultat nous dit donc que les distributions de Wigner convergent en moyenne de Cesàro vers la mesure de Liouville et il est bien entendu naturel de se demander si la convergence a lieu en un sens plus précis.

4.1.2 Le résultat de Šnirel'man-Zelditch-Colin de Verdière

La loi de Weyl microlocale (4.5) assure la convergence au sens de Cesàro des distributions de Wigner de toute base orthonormée de fonctions propres du laplacien. Pour montrer une convergence en un sens un peu plus fort, on peut imposer une condition supplémentaire sur la variété. On peut par exemple supposer que la mesure de Liouville L est ergodique pour φ^s, i.e. pour L-presque tout ρ dans S^*M,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \delta_{\varphi^s(\rho)} ds \rightharpoonup L, \text{ quand } T \to +\infty,$$

où la convergence est à comprendre au sens faible pour la topologie sur le dual de $\mathcal{C}^0(S^*M, \mathbb{C})$. De manière équivalente, la mesure L est ergodique si, pour L-presque tout ρ dans S^*M et pour tout a dans $\mathcal{C}^0(S^*M, \mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a\left(\varphi^s(\rho)\right) ds = \int_{S^*M} adL. \tag{4.6}$$

L'exemple principal de variétés riemanniennes pour lesquelles cette propriété est vérifiée est donnée par les variétés à courbures sectionnelles strictement négatives [11]. On peut alors énoncer le théorème d'ergodicité quantique [211, 236, 58] :

Théorème 4.1.2 (Šnirel'man-Zelditch-Colin de Verdière)**.** *Supposons que L est ergodique pour le flot géodésique φ^s. Alors, pour toute base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g, il existe $S \subset \mathbb{N}$ tel que*

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \frac{|\{k \in S : \lambda_k \leq \Lambda\}|}{N(\Lambda)} = 1$$

et tel que, pour tout a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$,

$$\lim_{k\to+\infty, k\in S} \langle e_k, \mathrm{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a) e_k\rangle = \int_{S^*M} adL.$$

Ainsi, sous une hypothèse d'ergodicité du flot géodésique, ce théorème montre que la plupart des distributions de Wigner convergent vers la mesure de Liouville. Ce résultat admet de nombreuses généralisations à des systèmes quantiques dont la dynamique classique sous-jacente est ergodique. Il est aussi à l'origine de la conjecture d'unique ergodicité quantique de Rudnick et Sarnak [193] qui affirme que, dans le cas des variétés à courbures sectionnelles strictement négatives, on peut en fait prendre $S = \mathbb{N}$. Nous renvoyons au paragraphe 1.2 pour une description des résultats récents concernant cette conjecture.

La preuve de ce théorème est intuitivement claire si l'on repense un peu la définition d'ergodicité. Pour cela, rappelons que les mesures de probabilité φ^s-invariantes sur S^*M forment un sous-ensemble non vide, convexe et compact (pour la topologie faible-$\star$) de l'ensemble des mesures de probabilité. Une mesure est alors ergodique si c'est un point extrémal de cet ensemble convexe compact. La loi de Weyl microlocale (4.5) dit alors que les distributions w_k convergent en moyenne vers un point extrémal. Si les w_k étaient des mesures de probabilité φ^s-invariantes, on pourrait tout de suite conclure qu'une suite de densité 1 des $(w_k)_{k\geq 0}$ converge vers L. Ce n'est pas exactement le cas mais le fait que les w_k sont asymptotiquement invariantes et positives permet de conclure de cette manière. Cet argument un peu fonctionnel est dû à Gérard-Leichtnam [101] et à Zelditch [240]. La preuve originale ne fait pas directement appel à ces arguments d'analyse fonctionnelle et consiste plutôt à montrer que la variance :

$$V_2(a,\Lambda) := \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k\leq\Lambda} \left|\langle w_k, a\rangle - \int_{S^*M} adL\right|^2$$

tend vers 0 lorsque $\Lambda \to +\infty$. Décrivons brièvement les grandes lignes de cette preuve en omettant volontairement certains aspects techniques. En appliquant le théorème d'Egorov [247], on peut vérifier que, pour tout $T > 0$,

$$V_2(a,\Lambda) = \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k\leq\Lambda} \left|\left\langle w_k, \left(\frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s ds - \int_{S^*M} adL\right)\right\rangle\right|^2 + \mathcal{O}_{a,T}(\Lambda^{-1}).$$

On peut même expliciter le reste qui est en fait d'ordre $\mathcal{O}(\Lambda^{-1}\|a\|_{\mathcal{C}^N}e^{\chi T})$ avec $N,\chi > 0$. On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$V_2(a,\Lambda) \leq \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k\leq\Lambda} \left\|\mathrm{Op}_{\lambda_k^{-1}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s ds - \int_{S^*M} adL\right)e_k\right\|_{L^2}^2 + \mathcal{O}_{a,T}(\Lambda^{-1})$$

et enfin la règle de composition pour les opérateurs pseudo-différentiels pour déduire la borne suivante :

$$V_2(a,\Lambda) \leq \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k\leq\Lambda} \left\langle w_k, \left(\frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s ds - \int_{S^*M} adL\right)^2\right\rangle + \mathcal{O}_{a,T}(\Lambda^{-1}).$$

On peut alors appliquer la loi de Weyl microlocale (4.5) pour conclure que

$$V_2(a,\Lambda) \leq \int_{S^*M}\left(\frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s ds - \int_{S^*M} adL\right)^2 dL + \mathcal{O}_{a,T}(\Lambda^{-1}). \tag{4.7}$$

Notons que le reste est toujours d'ordre $\mathcal{O}(\Lambda^{-1}\|a\|_{\mathcal{C}^N}e^{\chi T})$ avec $N,\chi > 0$. On peut alors faire tendre Λ vers $+\infty$ et on trouve que, pour tout $T > 0$,

$$\limsup_{\Lambda\to+\infty} V_2(a,\Lambda) \leq \int_{S^*M}\left(\frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s ds - \int_{S^*M} adL\right)^2 dL.$$

On utilise finalement l'hypothèse d'ergodicité (4.6) pour conclure que $\lim_{\Lambda\to+\infty} V_2(a,\Lambda) = 0$.

4.1.3 Sans hypothèse d'ergodicité ?

Afin de comprendre la situation sans hypothèse d'ergodicité, rappelons que le théorème de Birkhoff [228] nous assure que, pour L-presque tout ρ dans S^*M, il existe une mesure de probabilité φ^s-invariante L_ρ telle que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \delta_{\varphi^s(\rho)} ds \rightharpoonup L_\rho, \text{ quand } T \to +\infty. \tag{4.8}$$

Dans le cas ergodique, on a en fait $L = L_\rho$ pour L-presque tout ρ dans S^*M, mais dans le cas général, L_ρ peut dépendre du choix du point [1]. Le théorème de Birkhoff affirme en plus que

$$L = \int_{S^*M} L_\rho dL(\rho).$$

On parle alors de décomposition ergodique de la mesure L. Dans [139, Appendice], Šnirel'man pose alors la question suivante : *If φ^s is not ergodic on S^*M, is it true that "almost all" eigenfunctions are asymptotically uniformly distributed on "almost all" of the ergodic components ? What conditions are necessary or sufficient for such uniform distribution ?* D'une certaine manière, cette question est un analogue mathématique de la conjecture de Berry-Percival en physique sur la distribution des solutions stationnaires d'hamiltonien semi-classique [19, 176]. La réponse à la première question de Šnirel'man est négative sans condition supplémentaire. En effet, Zelditch [237] et Van der Kam [227] montrent que des bases aléatoires de fonctions propres du laplacien sur $(\mathbb{S}^d, \text{Can})$ vérifient la propriété d'unique ergodicité quantique. De la même manière, les résultats récents de Brooks-Le Masson-Lindenstrauss permettent de construire des bases de fonctions propres sur $(\mathbb{S}^2, \text{Can})$ vérifiant certaines invariances supplémentaires et s'équidistribuant sur $\mathbb{S}^2$ [38]. Plus généralement, le théorème 3.2.3 montre qu'un tel résultat est faux sur une variété de Zoll pour laquelle q_0 n'est pas constante, ceci quelle que soit la base orthonormée choisie. Dans la direction opposée, on peut mentionner les résultats de Marklof-O'Keefe pour certaines applications quantiques du tore [163] et le théorème récent de Gomes qui démontre d'une certaine manière que la réponse est positive pour un choix générique de billards en forme de champignon [104] – rappelons que la mesure de Liouville n'est pas ergodique dans ce cas.

Ces différents résultats montrent bien que la question de Šnirel'man est délicate et qu'il sera probablement difficile d'y donner une réponse systématique. Il est tout de même possible de formuler un résultat assez général lorsqu'on ne fait plus d'hypothèse d'ergodicité [189] :

Théorème 4.1.3 (R. 2013). *Soit K un ensemble invariant* [2] *tel que $L(K) = 1$ et tel que* (4.8) *a lieu pour tout ρ dans K.*
Alors, pour toute base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g, il existe $S_K \subset \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \frac{|\{k \in S_K : \lambda_k \leq \Lambda\}|}{N(\Lambda)} = 1$$

et tel que tout point d'accumulation (avec $k \to +\infty$) de la suite $(w_k)_{k\in S_K}$ appartient à la fermeture de l'ensemble convexe engendré par

$$\{L_\rho : \rho \in K\}.$$

De nouveau, ce résultat est intuitivement clair si on repense à la loi de Weyl microlocale (4.5) comme une décomposition convexe de la mesure de Liouville en mesures de probabilité presque invariantes. Il étend donc le théorème 4.1.2 au cas où l'on retire l'hypothèse d'ergodicité. Notons que des résultats similaires ont aussi été obtenus dans différents contextes géométriques où l'hypothèse d'ergodicité n'est pas satisfaite : espace de phases divisé [3] [203, 94], billards polygonaux [164], systèmes intégrables [221]. Ici, on ne fait pas

1. On peut par exemple penser au cas des variétés de Zoll ou au tore muni de sa métrique canonique.
2. L'existence d'un tel ensemble est assuré par le théorème de Birkhoff.
3. C'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe un ouvert invariant U (suffisamment régulier) tel que $L_{|U}$ est ergodique.

d'hypothèses dynamiques particulières sur le système considéré et nous renvoyons à [189] pour des exemples d'applications de ce résultat : variétés à courbure négative ou nulle, tore plat, etc. Par ailleurs, à la différence des références précédentes et de la preuve présentée plus haut, l'argument utilisé pour démontrer ce théorème ne passe pas par une estimation de la variance. Notre preuve s'inspire plutôt des arguments de la théorie du contrôle comme celui qui est utilisé pour démontrer (1.11) au premier chapitre. Plus précisément, notre argument est très proche de celui qu'utilise Sjöstrand dans [207] pour décrire la distribution typique des taux d'amortissement de l'équation des ondes amorties. Le théorème précédent est en fait un corollaire du résultat suivant qui permet de faire le lien avec ces résultats de théorie du contrôle [189] :

Théorème 4.1.4 (R. 2013). *Pour toute base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g, il existe $S \subset \mathbb{N}$ tel que*

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \frac{|\{k \in S : \lambda_k \leq \Lambda\}|}{N(\Lambda)} = 1$$

et tel que, pour tout a appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M, \mathbb{R})$,

$$\text{infess}\langle L_\rho, a\rangle \leq \liminf_{k\to+\infty, k\in S} \langle e_k, \text{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a)e_k\rangle \leq \limsup_{k\to+\infty, k\in S} \langle e_k, \text{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a)e_k\rangle \leq \text{supess}\langle L_\rho, a\rangle.$$

La fonction $\rho \mapsto \langle L_\rho, a\rangle$ est dans $L^\infty(S^*M, dL)$. En particulier, le supremum (resp. l'infimum) essentiel est fini. Rappelons que la propriété (1.11) du chapitre 1 nous disait que

$$A_- \leq \liminf_{k\to+\infty} \langle e_k, \text{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a)e_k\rangle \leq \limsup_{k\to+\infty} \langle e_k, \text{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a)e_k\rangle \leq A_+,$$

où A_- et A_+ ont été définis au chapitre 1 et vérifient

$$A_- \leq \text{infess}\langle L_\rho, a\rangle \leq \text{supess}\langle L_\rho, a\rangle \leq A_+,$$

avec des inégalités qui peuvent *a priori* être strictes. Ainsi, pour une suite *typique* de fonctions propres, on obtient de meilleurs encadrements que ceux qui sont donnés par les estimations (1.11) qui sont seulement basées sur le théorème d'Egorov alors que les inégalités du théorème reposent aussi de manière cruciale sur la loi de Weyl microlocale (4.5).

4.2 Equidistribution locale

Une autre direction dans laquelle on peut chercher à améliorer le théorème d'ergodicité quantique consiste à essayer d'obtenir des versions plus quantitatives du théorème 4.1.2.

4.2.1 Le cas de la courbure négative

Commençons par rappeler que, jusqu'au point (4.7), l'argument ne suppose rien sur la géométrie de la variété. Ainsi, pour une fonction a fixée dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ et pour tout $0 \leq T \leq \kappa_0|\log\Lambda|$ (avec $\kappa_0 > 0$ assez petit), la preuve donnée précédemment montre que

$$V_2(a,\Lambda) \leq \int_{S^*M} \left| \frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi^s ds - \int_{S^*M} a dL \right|^2 dL + \mathcal{O}_a(\Lambda^{-1/2}). \tag{4.9}$$

En d'autres termes, pour donner une version quantitative du théorème d'ergodicité quantique, nous nous sommes ramenés à la question de déterminer la vitesse de convergence vers 0 de la variance classique :

$$\forall p \geq 1,\ V_p^{\mathrm{cl}}(a,T) := \int_{S^*M} \left| \frac{1}{T} \int_0^T a \circ \varphi^s ds - \int_{S^*M} adL \right|^p dL. \tag{4.10}$$

Dans [238], Zelditch montre en s'appuyant sur un argument de Ratner [182] que cette quantité est d'ordre $\mathcal{O}_a(T^{-p/2})$ dans le cas du flot géodésique d'une variété à courbures sectionnelles strictement négatives [4]. De ceci, il déduit le théorème suivant [238] :

Théorème 4.2.1 (Zelditch)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov [5]. Alors, pour toute base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g, pour tout $p \geq 1$ et pour tout a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$,*

$$V_p(a,\Lambda) := \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{k:\lambda_k \leq \Lambda} \left| \langle e_k, \mathrm{Op}_{\lambda_k^{-1}}(a) e_k \rangle - \int_{S^*M} adL \right|^p = \mathcal{O}_a(|\log \Lambda|^{-p/2}).$$

En utilisant le théorème de Bienaymé-Tchebychev, on peut alors déduire que l'ensemble S de densité 1 dans le théorème 4.1.2 est de taille $\mathcal{O}(\log \Lambda|^{-\infty})$ – voir aussi [10] pour des résultats dans cette direction. Dans le cas $p = 2$ et pour des opérateurs de Schrödinger plus généraux, Schubert a aussi donné une preuve alternative de ce résultat [205]. Ce résultat est lié à une conjecture de Feingold et Peres en physique qui prédit que la variance d'ordre 2 doit être d'ordre $\Lambda^{-n/2}$ avec un préfacteur lié à la variance classique de a [90]. Le résultat de Zelditch est donc assez éloigné de cette prédiction et ceci est une nouvelle fois lié au fait que la validité de l'approximation semi-classique est limitée à des échelles de temps logarithmiques du paramètre semi-classique $\hbar = \Lambda^{-1}$. Notons tout de même que, si on se place sur la surface modulaire (qui n'est pas compacte), Luo et Sarnak [155] démontrent, en utilisant la structure arithmétique de la variété, que $V_2(a,\Lambda)$ est d'ordre $\Lambda^{-1+o(1)}$ pour des bases de fonctions propres de Hecke. Dans le même esprit mais par des méthodes complètement différentes, Brooks, Le Masson et Lindenstrauss ont récemment prouvé des versions quantitatives du théorème d'ergodicité quantique pour certaines bases de fonctions propres sur $\mathbb{S}^2$ qui vérifient des propriétés d'invariance par rotations [38].

Remarque 4.2.2. Dans le cas du tore rationnel $\mathbb{T}^n/\mathbb{Z}^n$ muni de sa métrique canonique, on peut démontrer que $V_p(a,\Lambda)$ tend vers 0 si *a ne dépend que de la variable x* [164]. Ceci peut par exemple se déduire du théorème 4.1.4. Il est alors naturel de se demander à quelle vitesse $V_p(a,\Lambda)$ tend vers 0. Dans le cas $p = 2$ et en utilisant des arguments semi-classiques et dynamiques, nous avons démontré avec Hamid Hezari que la convergence est d'ordre $\mathcal{O}_a(\Lambda^{-2/3})$ en toute dimension [120]. Même en dimension 2, c'est légèrement moins bon que l'estimation de [90] mais nous pensons que notre démonstration peut être améliorée pour donner une borne d'ordre Λ^{-1} en toute dimension, ce qui correspondrait exactement à la borne de Feingold et Peres en dimension 2. Pour $p = 1$, Lester et Rudnick ont par la suite montré, en se basant sur des arguments de nature plus arithmétique, une borne d'ordre $\mathcal{O}_a(\Lambda^{-1})$ [147].

Motivés par des questions sur les normes L^p des fonctions propres du laplacien sur lesquelles je reviendrai au paragraphe 4.3, nous avons cherché avec Hamid Hezari à améliorer

4. Rappelons que, dans ce cas, la mesure de Liouville est ergodique [11].
5. Rappelons que c'est le cas si le flot géodésique est à courbures sectionnelles strictement négatives [11].

le théorème d'ergodicité quantique de Šnirel'man-Zelditch-Colin de Verdière dans une direction légèrement différente. Plus précisément, on peut remarquer qu'on peut déduire du théorème 4.1.2 que, pour tout x_0 dans M et pour tout $r > 0$, on a

$$\lim_{k\to+\infty, k\in S} \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} |e_k(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x) = 1. \tag{4.11}$$

En d'autres termes, le long d'une sous-suite de densité 1, les fonctions propres $(e_k)_{k\in S}$ sont normalisées dans toutes les petites boules de rayon r de la variété et il est naturel de se demander si cette propriété reste vraie lorsque r dépend du paramètre spectral λ_k. Nous démontrons alors [119] :

Théorème 4.2.3 (Hezari-R. 2014)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. Alors, pour toute base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g, pour tout x_0 dans M et pour tout $0 < \gamma < 1/(2n)$, il existe $S_{x_0,\gamma} \subset \mathbb{N}$ tel que*

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \frac{|\{k \in S_{x_0,\gamma} : \lambda_k \leq \Lambda\}|}{N(\Lambda)} = 1$$

et tel que

$$\lim_{k\to+\infty, k\in S_{x_0,\gamma}} \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B(x_0,|\log\lambda_k|^{-\gamma}))} \int_{B(x_0,|\log\lambda_k|^{-\gamma})} |e_k(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}_g(x) = 1.$$

Ce résultat est valable pour un x_0 fixé dans M et nous démontrons de manière uniforme en $x_0 \in M$ [119] :

Théorème 4.2.4 (Hezari-R. 2014)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. Alors, pour toute base orthonormée $(e_k)_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g et pour tout $0 < \gamma < 1/(2n)$, il existe $0 < c_1 < c_2$ (ne dépendant que de (M,g)) et $S_\gamma \subset \mathbb{N}$ tels que*

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \frac{|\{k \in S_\gamma : \lambda_k \leq \Lambda\}|}{N(\Lambda)} = 1$$

et tels que

$$\forall x_0 \in M,\ \forall k \in S_\gamma, \quad c_1 \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B(x_0,|\log\lambda_k|^{-\gamma}))} \int_{B(x_0,|\log\lambda_k|^{-\gamma})} |e_k(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}_g(x) \leq c_2.$$

Ces résultats se généralisent à des fonctions de $a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$ qui dépendraient du paramètre spectral λ_k et ils ont été obtenus indépendamment [6] par Han [110]. Le théorème 4.2.4 peut sembler moins bon que le premier mais il permet d'avoir une estimation uniforme en x_0 qui est suffisante pour les applications que nous avons en tête – voir paragraphe 4.3. Il semblerait que la question de la distribution des fonctions propres dans de petites boules géodésiques avait seulement été considérée par Luo–Sarnak pour les fonctions propres de Hecke sur la surface modulaire [155] et par Young en supposant que la conjecture de Lindelöf en arithmétique est vraie [235]. La preuve de Luo et Sarnak permet de démontrer que, pour des fonctions propres de Hecke, les théorèmes 4.2.3 et 4.2.4 sont valables pour un rayon d'ordre $\lambda_k^{-\nu}$ où $\nu > 0$ est une petite constante strictement positive. De nouveau, les

6. Pour le théorème 4.2.4, la preuve de Han ne donne toutefois que l'exposant $0 < \gamma < 1/(3n)$.

théorèmes d'ergodicité quantique de Brooks, Le Masson et Lindenstrauss sur $\mathbb{S}^2$ permettent aussi de déduire l'équidistribution locale de certaines bases orthonormées de fonctions propres du laplacien [38].

Enfin, comme dans la remarque 4.2.2, on peut se poser les mêmes questions sur le tore rationnel muni de sa métrique canonique. Dans ce contexte, avec Hamid Hezari, nous avons démontré des analogues des théorèmes 4.2.3 et 4.2.4 lorsque le rayon des boules géodésiques est d'ordre $\lambda_k^{-\nu_n}$ pour un certain $\nu_n > 0$ qui dépend de la dimension [120]. Cet exposant ν_n a depuis été amélioré par Lester et Rudnick dans [147] qui ont obtenu la borne essentiellement optimale $\nu_n < \frac{1}{n-1}$. Nous renvoyons aussi à [111, 199, 108] pour des résultats récents dans cette direction.

4.2.2 Trou spectral et taux d'ergodicité classique

Dans la borne (4.7) sur la variance quantique, on vérifie que, même si a dépend du paramètre spectral λ, le reste tend toujours vers 0 pourvu que les dérivées de a n'explosent pas trop vite avec Λ et pourvu que T soit plus petit que $\kappa_0 \log \Lambda$ avec κ_0 suffisamment petit. Pour démontrer les théorèmes 4.2.3 et 4.2.4, il reste alors à comprendre comment la variance classique

$$V_p^{\mathrm{cl}}(a,T) := \int_{S^*M} \left| \frac{1}{T} \int_0^T a \circ \varphi^s ds - \int_{S^*M} adL \right|^p dL$$

tend vers 0 en fonction de T mais aussi de a. C'est donc essentiellement cet aspect de la preuve du théorème 4.2.1 qu'il faut chercher à améliorer pour prouver ces résultats d'équidistribution locale des fonctions propres du laplacien en courbure négative. Rappelons que les résultats de [182, 238] permettent de démontrer que cette quantité est d'ordre $\mathcal{O}_a(T^{-\frac{p}{2}})$, où la constante dépend de a. Pour conclure, il faut comprendre cette dépendance en a et, pour cela, on peut essayer de tracer la dépendance en a dans les démonstrations de ces références. Dans le cas $p = 2$, on peut aussi utiliser le théorème suivant dû à Liverani [151] :

Théorème 4.2.5 (Liverani)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. Alors, pour tout $\beta > 0$, il existe $\sigma_\beta, C_\beta > 0$ telles que, pour tout a et b dans $\mathcal{C}^\beta(S^*M)$,*

$$\forall t \geq 0, \ \left| \int_{S^*M} a \circ \varphi^{-t} bdL - \int_{S^*M} adL \int_{S^*M} bdL \right| \leq C_\beta \|a\|_{\mathcal{C}^\beta} \|b\|_{\mathcal{C}^\beta} e^{-t\sigma_\beta}.$$

De manière équivalente, on dit que le flot géodésique est *exponentiellement mélangeant* pour la mesure de Liouville. Rappelons que le caractère mélangeant du flot géodésique avait été démontré par Anosov dans sa thèse [11] et que des estimations quantitatives avaient déjà été obtenues dans certains cas : courbure constante [183, 167], convergence sous-exponentielle [52], dimension 2 [71]. Si on développe l'expression (4.10) pour $p = 2$, une conséquence immédiate de ce résultat de mélange exponentiel est l'estimation quantitative :

$$\forall \beta > 0, \quad V_2^{\mathrm{cl}}(a,T) = \int_{S^*M} \left| \frac{1}{T} \int_0^T a \circ \varphi^s ds - \int_{S^*M} adL \right|^2 dL = \mathcal{O}\left(\|a\|_{\mathcal{C}^\beta}^2 T^{-1} \right).$$

De cette estimation, on peut alors déduire le théorème 4.2.3 pour $0 < \gamma < 1/(2n)$ ainsi que le théorème 4.2.4 pour $0 < \gamma < 1/(3n)$. Pour améliorer l'exposant γ, une manière de procéder consiste à démontrer une estimation similaire pour tous les moments d'ordre $2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Précisément, nous démontrons dans [119] la majoration suivante, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall \beta > 0, \quad V_{2p}^{\mathrm{cl}}(a,T) = \int_{S^*M} \left| \frac{1}{T} \int_0^T a \circ \varphi^s ds - \int_{S^*M} a dL \right|^{2p} dL = \mathcal{O}\left(\|a\|_{\mathcal{C}^\beta}^{2p} T^{-p} \right), \qquad (4.12)$$

qui est suffisante pour démontrer le théorème 4.2.3. À part dans le cas $p = 1$, cette estimation ne peut être directement déduite du théorème 4.2.5 de Liverani et, pour la démontrer, nous nous basons sur des propriétés plus fines du flot géodésique démontrées dans [151]. Plus précisément, si on note X_0 le champ de vecteurs engendrant le flot géodésique et $\mathcal{L}_{X_0}$ la dérivée de Lie le long de X_0, la stratégie de Liverani consiste à étudier le spectre de l'opérateur

$$\mathcal{L}_{X_0} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

agissant sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ (approprié) de distributions anisotropes. Nous reviendrons plus en détail sur ce type de questions au chapitre 6. Pour le moment, mentionnons juste que Liverani démontre que cet opérateur vérifie une *propriété de "trou spectral"* de laquelle il déduit le mélange exponentiel du théorème 4.2.5 qui lui-même implique le taux de convergence de la variance classique nécessaire à la preuve du théorème 4.2.3. Pour démontrer la borne (4.12) sur les moments d'ordre p nécessaire pour conclure la preuve du théorème 4.2.4, nous utilisons aussi les propriétés spectrales fines de cet opérateur $\mathcal{L}_{X_0}$ et nous déduisons, modulo un travail combinatoire inspiré de l'article de Ratner [182], la propriété (4.12).

4.3 Applications aux normes L^p

Jusqu'à présent, nous avons décrit les fonctions propres du Laplacien (ou plus généralement les quasi-modes) à travers leurs distributions de Wigner mais il existe d'autres manières de décrire ses objets. Par régularité elliptique, les solutions de (4.1) sont $\mathcal{C}^\infty$ et on peut par exemple chercher à estimer leurs normes L^p ou encore décrire la géométrie de leurs lignes de niveaux. Nous allons maintenant appliquer les résultats des paragraphes précédents aux normes L^p et nous renvoyons à [102, 135, 245, 117, 118] pour ce qui concerne les liens entre la géométrie des ensembles nodaux et les propriétés d'ergodicité quantique.

4.3.1 Estimées de Sogge

Sans hypothèse particulière sur la variété, les meilleures estimations sur les normes L^p des fonctions propres de $-\Delta_g$ sont dues à Sogge [212] :

Théorème 4.3.1 (Sogge). *Soit $2 \leq p \leq +\infty$. Il existe $C_{M,g,p} > 0$ telle que, pour tout e_λ vérifiant*

$$-\Delta_g e_\lambda = \lambda^2 e_\lambda,$$

avec $\lambda > 0$, on a

$$\|e_\lambda\|_{L^p(M)} \leq C_{M,g,p} \lambda^{\sigma(p)} \|e_\lambda\|_{L^2(M)},$$

où

$$\sigma(p) := \max\left\{ \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \frac{n-1}{2} - \frac{n}{p} \right\}.$$

Ce résultat est optimal si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur la variété car ces bornes sont atteintes sur la sphère munie de sa métrique canonique [215]. Notons que le cas $p = +\infty$ était déjà connu d'Hörmander comme le montre la remarque 4.1.1. L'exposant $p_c = \frac{2(n+1)}{n-1}$ joue un rôle important dans ce théorème puisqu'il correspond à la valeur pour laquelle les deux fonctions qui définissent $\sigma(p)$ coïncident. Toute amélioration de l'estimation de la norme $L^{p_c}(M)$ permet notamment par interpolation d'améliorer les bornes pour $2 < p < +\infty$. Il est bien sûr naturel de se demander si des hypothèses supplémentaires sur la géométrie de la variété ne permettent pas d'améliorer ces bornes au moins pour certaines valeurs de p. Dans ce sens, Sogge et Zelditch démontrent par exemple que, pour un choix générique de métrique, on a une majoration d'ordre $o(\lambda^{\sigma(p)})$ pour $p > p_c$ [218] – voir aussi [217, 219] pour des résultats récents dans cette direction.

Comme nous venons de le mentionner, on ne peut pas espérer améliorer ce théorème sur la sphère munie de sa métrique canonique. Par contre, si on considère le tore rationnel muni de sa métrique canonique, il est possible d'obtenir des améliorations importantes de la valeur de l'exposant $\sigma(p)$ [248, 30, 31]. Ces améliorations reposent de manière cruciale sur la structure des fonctions propres du laplacien qui permet de ramener ces améliorations à des questions de comptage de points d'un réseau pour lesquelles on peut faire appel à d'autres types de techniques de nature plus combinatoire et arithmétique. Pour la surface modulaire, Iwaniec et Sarnak améliorent la borne L^∞ d'Hörmander d'un facteur polynomial pour des fonctions propres de Hecke [128]. Par interpolation, on déduit facilement une amélioration du résultat de Sogge pour $p > p_c$. En utilisant des versions quantitatives du théorème d'ergodicité quantique de Luo et Sarnak, Jung réussit quant à lui à améliorer la borne d'Iwaniec-Sarnak pour une suite typique de fonctions propres de Hecke [135]. En ce qui concerne la courbure négative variable, les majorations des normes L^p sont nettement moins bonnes que dans ces cas arithmétiques. Pour $p = +\infty$, Bérard montre que l'estimation d'Hörmander peut être améliorée d'un facteur logarithmique [18], i.e. la borne est d'ordre $\frac{\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{|\log \lambda|^{\frac{1}{2}}}$ plutôt que $\lambda^{\frac{n-1}{2}}$. Plus récemment, Hassell et Tacy ont démontré que la majoration $\frac{\lambda^{\sigma(p)}}{|\log \lambda|^{\frac{1}{2}}}$ reste vraie pour $p > p_c$ [115] et Bonthonneau a étendu ce résultat au cas des variétés sans points conjugués [28]. Le cas $p \leq p_c$ semble lui moins bien compris et nous y reviendrons au paragraphe suivant.

4.3.2 Lien avec les distributions de Wigner

Avec Hamid Hezari, nous avons voulu mieux comprendre le lien entre les distributions de Wigner des fonctions propres de $-\Delta_g$ et leurs normes L^p. Le théorème d'équidistribution locale 4.2.4 est en fait motivé par le calcul heuristique qui suit et qui permet de connecter un peu ces deux questions. Supposons donc que l'on ait une suite orthonormée $(e_k)_{k\in S}$ de fonctions propres de $-\Delta_g$ et une suite de rayon $r_k > 0$ telles que l'on sache montrer

$$\forall x_0 \in M,\ \forall k \in S, \quad \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B(x_0, r_k))} \int_{B(x_0,r_k)} |e_k(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}_g(x) \leq c_2, \tag{4.13}$$

pour une constante $0 < c_2$ uniforme. Le théorème 4.2.4 nous dit que c'est possible pourvu que le flot géodésique vérifie la propriété d'Anosov et que r_k décroisse de manière logarithmique avec λ_k. Expliquons maintenant de manière un peu heuristique comment on peut espérer améliorer les bornes de Sogge à partir d'une telle propriété. Fixons x_0 dans M et plaçons-nous dans une petite carte géodésique centrée en $x_0 = 0$. Reparamètrons alors la fonction e_k

près de x_0 en posant $\tilde{e}_k(y) = e_k(r_k y)$. Cette nouvelle fonction vérifie alors au voisinage de 0 :

$$\tilde{\Delta}_g \tilde{e}_k \approx r_k^2 \lambda_k^2 \tilde{e}_k$$

et

$$\int_{B(0,1)} |\tilde{e}_k(y)|^2 dy \lesssim c_2.$$

Nous avons donc localement une fonction qui est un quasi-mode pour le laplacien et il est alors possible d'appliquer les estimées de Sogge qui sont valables plus généralement pour des quasi-modes. Ceci nous donne alors, pour $p = p_c$,

$$\int_{B(0,1)} |\tilde{e}_k(y)|^{p_c} dy \lesssim r_k \lambda_k \left(\int_{B(0,1)} |\tilde{e}_k(y)|^2 dy \right)^{\frac{p_c}{2}}.$$

À présent, faisons le changement de variables inverse, i.e. $x = r_k y$. On obtient alors

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B(x_0, r_k))} \int_{B(x_0,r_k)} |e_k(x)|^{p_c} d\mathrm{Vol}_g(x) \lesssim r_k \lambda_k \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B(x_0, r_k))} \int_{B(x_0,r_k)} |e_k(y)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x) \right)^{\frac{p_c}{2}}.$$

Si on utilise l'hypothèse (4.13), on trouve que

$$\int_{B(x_0,r_k)} |e_k(x)|^{p_c} d\mathrm{Vol}_g(x) \lesssim r_k \lambda_k c_2^{\frac{p_c}{2}} \mathrm{Vol}_g(B(x_0, r_k)).$$

Si on recouvre M par une famille "minimale" de boules de rayon r_k, on trouve en sommant ces inégalités la majoration suivante :

$$\left(\int_M |e_k(x)|^{p_c} d\mathrm{Vol}_g(x) \right)^{\frac{1}{p_c}} \lesssim (r_k \lambda_k)^{\frac{1}{p_c}} c_2^{\frac{1}{2}},$$

qui améliore la borne de Sogge d'un facteur $r_k^{\sigma(p_c)}$. Cet argument heuristique nous montre qu'une majoration du type (4.13) permet d'améliorer les estimées du théorème 4.3.1. En d'autres termes, un contrôle quantitatif local des distributions de Wigner permet d'améliorer les bornes de Sogge pour $2 < p < +\infty$: c'est cette observation qui motivait initialement le théorème d'équidistribution locale 4.2.4. Cet argument formel peut être rendu rigoureux et nous démontrons avec Hamid Hezari [119] :

Théorème 4.3.2 (Hezari-R. 2014)**.** *Supposons que le flot géodésique φ^t est de type Anosov. Soit $2 < p < +\infty$ et soit $0 < \gamma < \frac{1}{2n}$. Il existe $C_{M,g,p,\gamma} > 0$ telle que, pour toute base orthonormée $(e_k)_{k \geq 0}$ de fonctions propres de Δ_g, il existe $S_\gamma \subset \mathbb{N}$ (indépendant de p) tel que*

$$\lim_{\Lambda \to +\infty} \frac{|\{k \in S_\gamma : \lambda_k \leq \Lambda\}|}{N(\Lambda)} = 1$$

et tel que

$$\forall k \in S_\gamma, \ \|e_k\|_{L^p(M)} \leq C_{M,g,p,\gamma} \left(\frac{\lambda_k}{(\log \lambda_k)^\gamma} \right)^{\sigma(p)} \|e_\lambda\|_{L^2(M)},$$

où

$$\sigma(p) := \max \left\{ \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \frac{n-1}{2} - \frac{n}{p} \right\}.$$

Notons que ce théorème n'est intéressant que pour $p \leq p_c$ puisque, pour $p > p_c$, la majoration que nous obtenons est moins bonne que celle d'Hassell et Tacy [115]. Notons aussi qu'Hassell et Tacy n'ont pas besoin d'extraire une sous-suite et que leur résultat peut être étendu aux variétés sans points conjugués [28]. Pour des variétés à courbure négative ou nulle et pour $p < p_c$ assez proche de 2, ce résultat a été récemment amélioré d'un facteur logarithmique par Blair et Sogge [24, 23]. Tout comme le théorème d'Hassell et Tacy, leur approche ne nécessite pas d'extraire une sous-suite de densité 1. De la même manière que notre preuve du théorème 4.3.2, leur démonstration se fait en deux temps : (1) contrôle des normes L^p par les distributions de Wigner dans des cylindres géodésiques [7] de longueur 1 et de rayon transversal $r_\lambda \approx \lambda^{-\frac{1}{2}}$ [24], (2) estimation des distributions de Wigner dans ces cylindres géodésiques [23]. En d'autres termes, plutôt qu'estimer les distributions de Wigner dans des boules géodédsiques, ils les estiment dans des cylindres de rayon beaucoup plus petit. Nous renvoyons à l'article de survol récent de Sogge [215] pour une comparaison des avantages et inconvénients de ces deux méthodes. En se basant sur ses résultats avec Blair et sur l'estimation L^∞ de Bérard, Sogge a aussi récemment démontré qu'en courbure négative ou nulle, on peut améliorer l'estimée critique L^{p_c} d'un facteur polynomial en $(\log \log \lambda)^{-1}$ sans avoir besoin d'extraire une sous-suite [214]. À ma connaissance, ce dernier résultat de Sogge et le théorème 4.3.2 sont les seules améliorations (déterministes) connues pour l'exposant critique $p = p_c$. Enfin, notons que, dans un article compagnon [216] du nôtre [119], Sogge montre comment optimiser l'argument présenté ci-dessus pour obtenir le raffinement suivant de son théorème 4.3.1 :

Théorème 4.3.3 (Sogge)**.** *Il existe $C_{M,g} > 0$ telle que, pour tout e_λ vérifiant*

$$-\Delta_g e_\lambda = \lambda^2 e_\lambda, \ \|e_\lambda\|_{L^2} = 1,$$

avec $\lambda > 0$, on a, pour tout $\lambda^{-1} \leq r \leq \mathrm{Inj}(M, g)$,

$$\|e_\lambda\|_{L^{p_c}(M)} \leq C_{M,g,p} \lambda^{\sigma(p_c)} \left(r^{-\frac{n+1}{2}} \sup_{x \in M} \left\{ \int_{B(x,r)} |e_\lambda(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}_g(x) \right\} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Si on fixe $r > 0$, alors on retrouve, par interpolation avec la borne L^∞ d'Hörmander (4.3), le théorème 4.3.1. Sogge démontre aussi une estimation similaire pour la norme L^∞. L'avantage de cette formulation est de relier le problème d'estimer les normes L^p à celui de contrôler les distributions de Wigner dans des petites boules de l'espace des configurations. En particulier, si on sait démontrer une majoration du type 4.13 pour des rayons d'ordre λ^{-1}, alors on saura montrer que la norme L^{p_c} est bornée. Il ne s'agit probablement pas d'un problème beaucoup plus simple mais on peut en revanche au moins espérer obtenir des bornes quantitatives de

$$r^{-\frac{n+1}{2}} \sup_{x \in M} \left\{ \int_{B(x,r)} |e_\lambda(x)|^2 d\,\mathrm{Vol}_g(x) \right\}$$

pour un choix approprié de $r_\lambda \to 0^+$. Il s'agit toutefois d'un problème délicat et on a finalement peu de résultats dans cette direction [155, 119, 120, 110, 216, 147]. Observons tout de même que si la mesure de Liouville est ergodique pour le flot géodésique, la propriété d'ergodicité

7. Ce type de quantités a été introduit récemment par Sogge [213] sous le nom de normes de Kakeya-Nikodym.

quantique (4.11) combinée à ce théorème de Sogge permet d'obtenir une borne d'ordre $o(\lambda^{\sigma(p)})$ pour tout $2 < p < +\infty$ et pour une sous-suite de densité 1 de fonctions propres. À ce sujet, il serait intéressant de comprendre si les méthodes du premier chapitre pourraient être utilisées pour estimer cette quantité ou les normes de Kakeya-Nikodym utilisées par Blair et Sogge [24, 23].

Pour conclure ce chapitre, mentionnons qu'avec Hamid Hezari, nous avions aussi initialement utilisé ce type d'arguments pour améliorer les bornes inférieures connues sur le volume des ensembles nodaux. Ces résultats ont été largement améliorés par Logunov [153] en utilisant plutôt des arguments de théorie géométrique de la mesure et de théorie elliptique. Zelditch [245] et Hezari [117, 118] montrent tout de même comment utiliser les théorèmes d'ergodicité quantique à petites échelles comme 4.2.4 pour améliorer de manière quantitative d'autres résultats sur la géométrie et la topologie des ensembles nodaux.

Chapitre 5

Ensembles nodaux aléatoires

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement les résultats obtenus dans [63]. À la différence des chapitres précédents, on suit une approche de nature plus probabiliste. Précisément, plutôt que de considérer une suite fixée de quasi-modes, on va s'intéresser aux propriétés d'une suite de fonctions choisies au hasard par rapport à une mesure de probabilité gaussienne définie à partir du spectre du laplacien. En adoptant cette approche, il est possible d'apporter des réponses probabilistes à certaines questions ouvertes des chapitres précédents. Dans [63], nous nous sommes intéressés à des aspects plus géométriques que ceux qui ont été considérés précédemment dans ce mémoire, à savoir la distribution du lieu d'annulation de ces fonctions aléatoires.

5.1 Superposition aléatoire de fonctions propres

On peut invoquer plusieurs raisons pour l'étude de superpositions aléatoires de fonctions propres du laplacien. Tout d'abord, ceci fournit une bonne manière de choisir une fonction lisse f au hasard sur une variété riemannienne (M, g) et mène naturellement à des questions de géométrie aléatoire. On peut en effet définir à partir de cela une notion de sous-variétés aléatoires en prenant le lieu d'annulation de ces fonctions alétaoires. On généralise ainsi à des variétés générales des questions de géométrie algébrique réelle aléatoire. Dans la perspective des questions de chaos quantique évoquées dans les chapitres précédents, nous pouvons aussi mentionner l'article de Berry sur les propriétés semi-classiques des solutions stationnaires d'un hamiltonien quantique [19] dont le système classique sous-jacent est chaotique. Il y prédit que les états quantiques d'un tel système ont les mêmes propriétés statistiques dans la limite semi-classique que des fonctions aléatoires gaussiennes. Il s'agit d'un modèle bien établi dans la littérature physique. D'un point de vue mathématique et en vertu de ce principe physique, on peut donc essayer dans un premier temps d'étudier le problème probabiliste afin de comprendre ce que l'on peut espérer obtenir dans le cas déterministe.

5.1.1 Présentation du cadre probabiliste

Précisons maintenant ce que nous entendons par superposition aléatoire de fonctions propres du laplacien. Comme au chapitre précédent, $(e_k)_{k\geq 0}$ désigne une base orthonormée [1]

1. Dans tout ce chapitre, les fonctions seront supposées être à valeurs réelles.

de $L^2(M)$ pour laquelle on peut trouver une suite

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \ldots \to +\infty$$

telle que, pour tout $k \geq 0$,

$$-\Delta_g e_k = \lambda_k^2 e_k.$$

Nous allons nous intéresser à des superpositions finies de telles solutions, i.e. pour $\Lambda > 0$,

$$f \in \mathcal{H}_\Lambda := \mathbf{1}_{[0,\Lambda^2]}(-\Delta_g)L^2(M). \tag{5.1}$$

Rappelons que la loi de Weyl (4.2) nous donne la dimension asymptotique $N(\Lambda)$ de cet espace qui est d'ordre Λ^n et que, par régularité elliptique, tous les éléments de $\mathcal{H}_\Lambda$ sont dans $\mathcal{C}^\infty(M)$. On définit alors une notion de fonction gaussienne aléatoire dans $\mathcal{H}_\Lambda$ en se donnant une mesure de probabilité sur cet espace euclidien :

$$\mu_\Lambda(df) = d\mu_\Lambda(f) := e^{-\frac{N(\Lambda)\|f\|^2}{2}} \left(\frac{N(\Lambda)}{2\pi}\right)^{\frac{N(\Lambda)}{2}} dc_1 \ldots dc_{N(\Lambda)}, \quad \text{avec} \quad f = \sum_{j=1}^{N(\Lambda)} c_j e_j.$$

L'un des points-clefs de tous les résultats qui vont suivre est que l'asymptotique de la fonction de corrélation de cette mesure de probabilité est donnée par la loi d'Hörmander-Weyl locale [125]. Plus précisément, pour tout $(x, y) \in M^2$,

$$C_\Lambda(x, y) := \int_{\mathcal{H}_\Lambda} f(x)f(y)\mu_\Lambda(df) = \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{j=1}^{N(\Lambda)} e_j(x)e_j(y).$$

Par exemple, d'après (4.2), la valeur moyenne de $f^2(x)$ est donnée par

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} f^2(x)\mu_\Lambda(df) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(M)} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}).$$

Plus généralement, on a des estimations explicites des dérivées de cette fonction de corrélation sur la diagonale $x = y$ [21].

5.1.2 Ensembles nodaux aléatoires

On pourrait se reposer un certain nombre des questions des chapitres précédents d'un point de vue probabiliste et montrer que l'on obtient des résultats asymptotiques beaucoup plus précis que ce soit pour ce qui concerne les distributions de Wigner [237, 227] ou les estimations des normes L^p [42, 192]. Nous ne discuterons pas ici ces aspects et nous nous limiterons dans ce mémoire à des considérations de nature plus géométrique. L'objet central de nos discussions sera le lieu d'annulation de ces fonctions aléatoires :

$$\forall f \in \mathcal{H}_\Lambda, \quad \mathcal{N}_f := \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Il est possible de démontrer grâce au lemme de Sard [148] que, pour μ_Λ-presque tout f dans $\mathcal{H}_\Lambda$, f s'annule transversalement sur $\mathcal{N}_f$. Ainsi, $\mathcal{N}_f$ définit une sous-variété lisse de M qu'on appelle *ensemble nodal aléatoire*. Une première question naturelle est d'étudier la distribution de ce lieu d'annulation. Cette question a été étudiée par Bérard [17] et Zelditch [242] qui démontrent que, pour tout ω dans $\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} \langle f^*(\delta_0)\|df\|, \omega\rangle \, d\mu_\Lambda(f) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} \frac{\Lambda}{\sqrt{n+2}} \int_M \omega(x) d\mathrm{Vol}_g(x)(1+o(1)), \tag{5.2}$$

où δ_0 est la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$. En particulier, si on prend $\omega = 1$, on obtient une asymptotique pour le volume moyen des ensembles nodaux aléatoires. À titre de comparaison, la conjecture de Yau affirme dans le cas déterministe que ce volume est d'ordre $\approx \Lambda$ [234] alors qu'ici on a un équivalent explicite en Λ. Cette conjecture a été prouvée dans le cadre analytique par Donnelly et Fefferman dans les années 80 [72] et d'importantes avancées ont été obtenues récemment par Logunov et Malinnikova [153, 152, 154] dans le cas $\mathcal{C}^\infty$. Le résultat de Bérard et Zelditch a, lui, été étendu à l'intersection de plusieurs ensembles nodaux aléatoires par Letendre [148] et des résultats assez précis sur la variance ont été obtenus depuis dans différents contextes géométriques : tore [194], sphère [231], variétés générales [243, 47].

Expliquons maintenant de quelle manière on peut montrer une estimée probabiliste du type de (5.2). Pour cela, on va considérer l'espérance d'une quantité légèrement plus simple à calculer : $f^*(\delta_0)$. Cette distribution est bien entendu moins pertinente d'un point de vue géométrique mais l'absence de valeurs absolues va rendre le calcul plus aisé. Commençons par écrire $f^*(\delta_0)$ sous forme exponentielle :

$$f^*(\delta_0)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipf(x)} dp.$$

Ainsi, on a formellement

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} f^*(\delta_0)(x) d\mu_\Lambda(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathcal{H}_\Lambda} e^{-ipf(x)} d\mu_\Lambda(f) \right) dp. \tag{5.3}$$

Par définition de la mesure gaussienne, on trouve alors

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} f^*(\delta_0)(x) d\mu_\Lambda(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{p^2 C_\Lambda(x,x)}{2}} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_\Lambda(x,x)}}.$$

La loi de Weyl locale nous permet alors de conclure que

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} f^*(\delta_0)(x) d\mu_\Lambda(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{Vol}_g(M)}} (1 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1})).$$

Ces calculs d'espérance sont donc formellement assez "simples" et, une fois l'asymptotique de Weyl connue, la difficulté principale consiste à justifier convenablement l'inversion d'intégrales (5.3). Ceci peut se faire à l'aide de formules de type Kac-Rice ou de manière équivalente en utilisant les théorèmes d'Hörmander sur les tirés en arrière de distributions [63]. Continuons maintenant cette discussion formelle en calculant l'espérance du courant d'intégration $[\mathcal{N}_f]$ qui est une forme différentielle de degré 1 à coefficients dans les distributions. La preuve de notre théorème principal reposera sur des arguments combinatoires similaires. Il est donc intéressant de comprendre les mécanismes sur cet exemple simple. Le courant d'intégration s'écrit

$$[\mathcal{N}_f](x, dx) = f^*(\delta_0)(x) d_x f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipf(x)} d_x f dp.$$

À première vue, ce calcul peut sembler légèrement plus délicat à cause de la présence du terme polynomial d_xf en f. Pour résoudre ce problème, il est commode d'utiliser le formalisme de Berezin pour représenter d_xf comme une intégrale sur des variables impaires, i.e.

$$[\mathcal{N}_f](x,dx) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}^{(1|1)}} e^{-i(pf(x)+\Pi d_x f)} dp d\Pi.$$

Nous ne décrirons pas ici le formalisme de Berezin et nous renvoyons à la section 5 de [63] pour une brève introduction. Notons que ce type de représentation sous forme d'intégrale supersymétrique des courants d'intégration apparaît par exemple dans les travaux de Frenkel, Losev et Nekrasov [91] en théorie quantique des champs. Une fois sous cette forme exponentielle, le calcul est essentiellement le même que le précédent, i.e.

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda}[\mathcal{N}_f](x,dx)d\mu_\Lambda(f) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}^{(1|1)}}\left(\int_{\mathcal{H}_\Lambda} e^{-i(pf(x)+\Pi d_x f)}d\mu_\Lambda(f)\right) dp d\Pi.$$

On utilise de nouveau le fait que notre mesure est gaussienne pour écrire

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda}[\mathcal{N}_f](x,dx)d\mu_\Lambda(f) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}^{(1|1)}}\exp\left(-\frac{\left\langle (p,(\Pi dx_j)_j, C_\Lambda^{(1)}(x,x)\,(\Pi dx_j)_j\right\rangle}{2}\right) dp d\Pi,$$

où la matrice de covariance $C_\Lambda^{(1)}(x,x)$ est donnée par

$$C_\Lambda^{(1)}(x,x) := \begin{pmatrix} C_\Lambda(x,x) & (\partial_{y_k} C_\Lambda(y,z)\rceil_{y=z=x})_k \\ (\partial_{z_j} C_\Lambda(y,z)\rceil_{y=z=x})_k & (\partial^2_{z_j y_k} C_\Lambda(y,z)\rceil_{y=z=x})_{j,k}. \end{pmatrix}.$$

Comme Π est une variable impaire, on a $\Pi^2 = 0$. Notre intégrale peut alors se récrire

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda}[\mathcal{N}_f](x,dx)d\mu_\Lambda(f) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}^{(1|1)}}\exp\left(-\frac{C_\Lambda(x,x)p^2}{2} - p\Pi\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} C_\Lambda(x,x)dx_j\right) dp d\Pi.$$

On commence par intégrer par rapport à la variable impaire Π, ce qui nous donne

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda}[\mathcal{N}_f](x,dx)d\mu_\Lambda(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}^{(1|0)}} e^{-\frac{C_\Lambda(x,x)p^2}{2}} p\left(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} C_\Lambda(x,x)dx_j\right) dp = 0.$$

De nouveau, cet argument formel nous permet de calculer assez simplement l'espérance du courant d'intégration. La difficulté réside encore dans la justification des inversions d'intégrales. Pour conclure cette première discussion sur l'apport des probabilités et des techniques supersymétriques dans notre contexte, rappelons que ce type d'approche en géométrie aléatoire intervient par exemple dans les travaux de Bleher-Shiffman-Zelditch [26] ou encore de Douglas-Shiffman-Zelditch [73] sur la distribution des points critiques de sections aléatoires holomorphes.

5.1.3 Topologie des ensembles nodaux aléatoires

Dans le paragraphe précédent, nous avons surtout discuté la distribution dans M des sous-variétés aléatoires $\mathcal{N}_f$. Afin de motiver les résultats à venir, considérons maintenant des aspects plus topologiques et notons $b_0(\mathcal{N}_f)$ le nombre de composantes connexes de la sous-variété $\mathcal{N}_f$. Nazarov et Sodin ont récemment démontré le résultat suivant [170] :

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{\Lambda \to +\infty} \mu_\Lambda \left(\left\{ f \in \mathcal{H}_\Lambda : \left| \frac{b_0(\mathcal{N}_f)}{\Lambda^n} - a_g \right| > \delta \right\} \right) = 0,$$

pour une certaine constante $a_g > 0$ qui ne dépend que de (M, g) mais *qui n'est pas explicite*. Rappelons que, dans le cas déterministe, la borne de Courant donne une majoration du nombre de composantes connexes mais que la question des bornes inférieures est largement ouverte. Ce résultat généralise à des variétés quelconques un théorème que Nazarov et Sodin avaient obtenu dans le cas de la 2-sphère munie de sa métrique canonique [169]. Observons qu'à la différence des résultats du paragraphe précédent, il s'agit ici d'une estimation de type grandes déviations et la constante a_g qui entre en jeu dans le résultat n'est pas explicite. Des bornes inférieures et supérieures *explicites* sur l'espérance de $b_0(\mathcal{N}_f)$ avaient été obtenues auparavant par Lerario-Lundberg [146] et Nicolaescu [172]. Le résultat de Nazarov et Sodin est en fait légèrement plus précis au sens où il reste vrai si on compte le nombre de composantes connexes dans une boule géodésique $B_g(x, R\Lambda^{-1})$ avec $R > 0$ assez grand et x fixé.

Dans la même veine d'idées, Gayet et Welschinger démontrent que, pour toute hypersurface compacte Σ dans $\mathbb{R}^n$, la probabilité de trouver Σ dans l'intersection de $\mathcal{N}_f$ avec une boule géodésique $B_g(x, R\Lambda^{-1})$ est bornée inférieurement de manière uniforme par une *constante explicite strictement positive* [98]. Nous renvoyons aussi à [95, 97] pour des résultats antérieurs des mêmes auteurs pour les polynômes aléatoires. Plus récemment, Sarnak et Wigman [200] puis Canzani et Sarnak [49] ont montré comment étudier la distribution asymptotique des types topologiques et ont entre autres choses prouvé l'existence d'une mesure limite pour cette distribution. L'un des corollaires du résultat de Gayet et Welschinger est l'existence pour tout $0 \leq i \leq n-1$ d'une constante *explicite* $c_i(M, g) > 0$ telle que

$$c_i(M, g)\Lambda^n \leq \int_{\mathcal{H}_\Lambda} b_i(\mathcal{N}_f) d\mu_\Lambda(f),$$

où b_i est le i-ième nombre de Betti de la variété. Ceci complète un de leurs résultats précédents qui donnait une borne supérieure explicite (toujours d'ordre Λ^n) du i-ème nombre de Betti [96]. Leur argument pour la borne supérieure se base sur la théorie de Morse qui permet de majorer les nombres de Betti d'indice i par le nombre de points critiques d'indice i d'une fonction de Morse [208]. Précisément, étant donnée une fonction de Morse $h : M \to \mathbb{R}$, ils introduisent la mesure suivante, pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$\nu_i(f) := \sum_{x \in \mathrm{Crit}_i(h\rceil_{\mathcal{N}_f}) \setminus \mathrm{Crit}(h)} \delta_x,$$

où $\mathrm{Crit}(h)$ représente les points critiques de h dans M et $\mathrm{Crit}_i(h\rceil_{\mathcal{N}_f})$ les points critiques d'indice i de la restriction de h à $\mathcal{N}_f$. Ceci leur fournit une suite de mesure sur M dont ils vont calculer l'espérance de manière explicite et dont ils montrent qu'elle s'équidistribue sur M. En testant $\nu_i(f)$ contre la fonction 1, ils en déduisent grâce à la théorie de Morse des bornes sur les nombres de Betti. Ceci leur permet aussi, dans le cas où n est impair, de calculer l'espérance de la caractéristique d'Euler :

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} \chi(\mathcal{N}_f) d\mu_\Lambda(f) = \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{n+2}} \right)^n \mathrm{Vol}_g(M) + \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}). \tag{5.4}$$

Rappelons en effet que la caractéristique d'Euler est donnée par la somme alternée du nombre de points critiques d'indice i. Dans [148], Letendre a donné une preuve alternative de ce résultat fondée sur la formule de Chern-Gauss-Bonnet [50] pour la caractéristique d'Euler et l'a étendue à l'intersection de plusieurs ensembles nodaux. Au lieu de s'appuyer sur l'étude des points critiques, il utilise le fait que la caractéristique d'Euler peut s'exprimer comme suit

$$\chi(\mathcal{N}_f) := \langle f^*(\delta_0)\|df\|, \omega_f\rangle \, ,$$

où ω_f est un certain terme de courbure qui dépend explicitement de f de manière polynomiale.

5.2 Cycle conormal

Maintenant que nous avons présenté le cadre ainsi que quelques résultats récents de géométrie aléatoire, nous décrivons les résultats obtenus avec Nguyen Viet Dang dans [63]. L'une des nouveautés par rapport aux résultats précédents est de considérer le relevé "micro-local" de ces variétés aléatoires. Notre objectif était de comprendre un objet géométrique un peu plus général, à savoir le *cycle conormal* de $\mathcal{N}_f$:

$$N^*(\mathcal{N}_f) := \{(x,\xi) \in T^*M : \; f(x) = 0 \text{ et } \xi = td_xf \text{ pour un certain } t \neq 0\} \, .$$

Génériquement par rapport à la mesure gaussienne, cet ensemble définit une sous-variété lisse de $\mathring{T}^*M := \{(x,\xi) \in T^*M : \xi \neq 0\}$ qui décrit à la fois la distribution du lieu d'annulation et la distribution de la direction conormale à $\mathcal{N}_f$ dans le cotangent. Même si cette quantité est naturelle, il semblerait qu'elle n'ait jamais été considérée dans ce cadre, que ce soit d'un point de vue déterministe ou aléatoire. Avec Nguyen Viet Dang, nous avons voulu comprendre la distribution de ces sous-variétés lagrangiennes dans $\mathring{T}^*M$ en commençant par le cadre probabiliste afin de mettre en évidence les comportements qu'on peut espérer pour ce type d'objets. En guise de motivation, nous pouvons aussi rappeler l'autre formule de Chern pour la caractéristique d'Euler [51] : il existe une n-forme différentielle $\omega_g(x,\xi,dx,d\xi)$ dans $\Omega^n_c(\mathring{T}^*M)$ ne dépendant que de la métrique sur M et telle que, pour toute sous-variété lisse $\mathcal{N}$ de M, on a

$$\chi(\mathcal{N}) := \langle [N^*(\mathcal{N})], \omega_g\rangle \, .$$

Ainsi, si on réussit à déterminer l'espérance du courant d'intégration $[N^*(\mathcal{N}_f)]$, on aura en particulier une nouvelle démonstration pour le calcul de l'espérance de la caractéristique d'Euler de $\mathcal{N}_f$. De manière beaucoup plus générale, la théorie d'Alesker montre que toute valuation lisse sur une variété sera de cette forme, i.e. elle pourra être représentée par une forme différentielle dans $\Omega^n_c(\mathring{T}^*M)$ qu'il faut évaluer contre le cycle conormal [2].

5.2.1 Equidistribution du cycle conormal en dimension impaire

Avant dénoncer nos résultats, mentionnons que $N^*(\mathcal{N}_f)$ peut se décomposer en deux "morceaux" (correspondant à $t > 0$ et $t < 0$). Il convient de les orienter convenablement et nous choisissons l'orientation classique de l'article de Chern [51, p. 682]. Notre premier résultat montre que le cycle conormal définit bien un élément de L^1 [63] :

Théorème 5.2.1 (Dang-R. 2015)**.** *Soit (M,g) une variété riemannienne, lisse, compacte, orientée, sans bords et de dimension n. Alors, l'application*

$$f \in \mathcal{H}_\Lambda \mapsto [N^*(\mathcal{N}_f)] \in \mathcal{D}'_n(\mathring{T}^*M) \tag{5.5}$$

est intégrable par rapport à la mesure gaussienne μ_Λ. De manière équivalente, pour toute forme test ω dans $\mathring{T}^*M$, l'application

$$f \in \mathcal{H}_\Lambda \mapsto \langle [N^*(\mathcal{N}_f)], \omega \rangle \in \mathbb{R}$$

appartient à $L^1(\mathcal{H}_\Lambda, d\mu_\Lambda)$.

Pour énoncer notre second résultat, notons Ω_g la forme volume riemannienne sur (M, g), $\pi : T^*M \to M$ la projection canonique, et $\pi^*\Omega_g$ le tiré en arrière de Ω_g sur T^*M. Nous démontrons alors le résultat d'équidistribution suivant [63] :

Théorème 5.2.2 (Dang-R. 2015)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne, lisse, compacte, orientée, sans bords et de dimension n. Alors, on a*

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} [N^*(\mathcal{N}_f)] d\mu_\Lambda(f) = C_n \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{n+2}} \right)^n \pi^*\Omega_g + \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}), \tag{5.6}$$

avec

$$C_n = \frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi \operatorname{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \text{ si } n \text{ est impair, et } C_n = 0 \text{ sinon.}$$

De manière équivalente, ceci signifie que, pour toute forme test ω sur $\mathring{T}^*M$, on a

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda} \langle [N^*(\mathcal{N}_f)], \omega \rangle \, d\mu_\Lambda(f) = C_n \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{n+2}} \right)^n \int_{T^*M} \pi^*\Omega_g \wedge \omega + \mathcal{O}(\Lambda^{n-1}).$$

En particulier, ce résultat permet de retrouver la formule (5.4) obtenue par Gayet-Welschinger et Letendre pour l'espérance de la caractéristique d'Euler et de déduire un résultat pour toute valuation lisse sur M au sens d'Alesker [2]. Tout comme pour la propriété d'équidistribution (5.2) de Bérard et de Zelditch, nous avons un phénomène d'équidistribution de ces sous-variétés aléatoires mais cette fois dans les fibres du cotangent et en supposant que la dimension de la variété ambiante est impaire. En dimension paire, notre résultat donne seulement une borne supérieure d'ordre inférieure en Λ et il serait bien entendu naturel d'identifier le courant limite si n est pair. Enfin, ces résultats ne disent rien sur le cas déterministe et il serait intéressant d'explorer cette direction.

5.2.2 Schéma rapide de la preuve

Essayons maintenant d'expliquer les grandes lignes de la preuve en nous plaçant dans une carte géodésique au voisinage d'un point x_0. Étant donnée f dans $\mathcal{H}_\Lambda$, il va être suffisant par symétrie de considérer

$$N_+^*(\mathcal{N}_f) := \{(x, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n : \; f(x) = 0 \text{ et } \xi = t d_x f \text{ pour un certain } t > 0\}.$$

Pour f dans $\mathcal{H}_\Lambda$ générique, introduisons l'application

$$G(f) : (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathring{T}^*\mathbb{T}^n \mapsto y = (f(x), t d_x f - \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Le courant d'intégration sur $N_+^*(\mathcal{N}_f)$ s'écrit alors, pour μ_Λ-presque tout f,

$$[N_+^*(\mathcal{N}_f)](x, \xi, dx, d\xi) = \int_0^{+\infty} G(f)^* \left(\delta_0(y_1, \ldots, y_{n+1}) dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_{n+1} \right) (t, x, \xi, dt, dx, d\xi).$$

Au regard de cette formule, on voit apparaître essentiellement deux complications : (1) le caractère très combinatoire de l'expression, (2) le nombre de variables qui va rendre encore plus délicates les formules d'inversion. Dans [63], nous avons donné deux manières d'aborder le premier problème : l'une directe et assez combinatoire, l'autre basée sur l'intégrale de Berezin qui permet au prix d'un petit peu d'abstraction d'éviter les défauts de la première. En ce qui concerne l'inversion des intégrales, ce problème pourrait très probablement être traité par des arguments de type Kac-Rice. Nous avons plutôt cherché à comprendre ces formules d'un point de vue plus microlocal basé sur les formules de tiré en arrière de distributions d'Hörmander [126].

Pour ce qui concerne l'aspect combinatoire, on écrit l'intégrale (oscillante) super-symétrique qui suit :

$$\delta_0(y_1,\ldots,y_{n+1})dy_1\wedge\ldots\wedge dy_{n+1}=\frac{1}{(-2i\pi)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{(n+1|n+1)}}e^{-i(p.y+\Pi.dy)}dpd\Pi.$$

La première étape de notre démonstration consiste alors à calculer l'intégrale gaussienne :

$$\int_{\mathcal{H}_\Lambda}e^{-i(p.G(f)+\Pi.dG(f))}d\mu_\Lambda(f)=e^{i(p'.\xi+\Pi.d\xi)}\exp\left(-\frac{\left\langle(p,\Pi)\,,C_\Lambda^{(2)}(x,x)\,(p,\Pi)\right\rangle}{2}\right),$$

où $C_\Lambda^{(2)}(x,x)$ est une matrice de covariance à coefficient dans les formes différentielles des variables impaires (dx,dt) et dont les coefficients sont complètement déterminés par les asymptotiques de Weyl locales [21]. On intègre ensuite par rapport à $\mathbb{R}^{(n+1|n+1)}$, ce qui revient *in fine* à calculer la (super-)transformée de Fourier d'une gaussienne dépendant de variables paires et impaires. Même s'ils sont plus poussés, les arguments super-symétriques sont similaires à ceux que l'on a utilisés pour calculer l'espérance du courant d'intégration $[\mathcal{N}_f]$. Cette seconde étape nous permet d'obtenir une $n+1$ forme différentielle $\omega(t,x,\xi,dt,dx,d\xi)$ et il suffit d'intégrer t entre 0 et $+\infty$ pour conclure.

Chapitre 6

Résonances de Pollicott-Ruelle pour les flots de gradient

Dans ce dernier chapitre, nous revenons sur le théorème de Liverani 4.2.5 que nous avons utilisé au chapitre 4 dans le cadre de l'étude de la croissance des normes L^p des fonctions propres du laplacien. Rappelons que ce résultat de nature dynamique nous donnait une information quantitative sur le caractère mélangeant du flot géodésique en courbure négative. Nous allons maintenant expliquer le contexte de ce théorème. Dans les chapitres 1 à 4, c'est la dynamique classique qui nous permettait de déduire des résultats semi-classiques. Ici, nous verrons comment d'une certaine manière l'analyse microlocale peut aider à la compréhension des propriétés en temps longs d'un flot classique. Pour conclure ce mémoire, nous montrerons aussi comment ces résultats s'appliquent naturellement à des questions de topologie différentielle. Les résultats discutés dans ce chapitre sont essentiellement l'objet de l'article [64] écrit avec Nguyen Viet Dang. Nous renvoyons aussi à [65, 66, 67] pour des généralisations récentes de ces résultats à des flots de type Morse-Smale que nous ne discuterons pas en détail dans ce mémoire.

6.1 Résonances de Pollicott–Ruelle

Dans ce chapitre, M est une variété compacte, orientée, lisse ($\mathcal{C}^\infty$), sans bords et de dimension $n \geq 1$. Étant donné un champ de vecteurs lisse V sur M, on peut définir un flot $\varphi^t : M \to M$ et l'une des questions de base des systèmes dynamiques consiste à comprendre la dynamique en temps longs de ce type d'objet. De cette manière, il s'agit d'un problème assez vague mais on peut essayer de le formuler un peu plus précisément. On peut par exemple fixer ψ_1 dans $\Omega^k(M)$ et se demander quelle est la limite faible en temps longs de la quantité $\varphi^{-t*}(\psi_1)$. Pour cela, on peut introduire la fonction de "corrélation" du flot :

$$\forall t \geq 0, \quad C_{\psi_1,\psi_2}(t) := \int_M \varphi^{-t*}(\psi_1) \wedge \psi_2, \tag{6.1}$$

où ψ_1 est un élément de $\Omega^k(M)$ et ψ_2 de $\Omega^{n-k}(M)$. Il est alors naturel de se demander sous quelles conditions sur le flot la limite de $\varphi^{-t*}(\psi_1)$ existe au sens des courants. Afin de dresser le parallèle avec les questions qui nous ont occupés aux chapitres précédents, observons d'ores et déjà que $\varphi^{-t*}(\psi_1)$ est solution de l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t\psi = \frac{1}{i}\mathcal{L}_V\psi, \quad \psi(t=0) = \psi_1, \tag{6.2}$$

où $\mathcal{L}_V$ est la dérivée de Lie le long du champ de vecteurs V. Rappelons que la formule de Cartan nous permet d'écrire $\mathcal{L}_V$ sous la forme super-symétrique

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}_V = (d - i\iota_V)^2, \tag{6.3}$$

que l'on peut penser comme un analogue de la formule [1]

$$\Delta_g = (d + d^*)^2$$

en théorie de Hodge. Cette analogie formelle avec la théorie de Hodge sera notamment utile dans la perspective des applications à la topologie différentielle sur lesquelles nous reviendrons un peu plus loin dans ce chapitre. Observons aussi que, si l'on se rappelle des raisonnements mis en oeuvre aux chapitres précédents, les propriétés asymptotiques des solutions de (6.2) vont être intimement liées aux propriétés de l'hamiltonien sous-jacent

$$\forall(x,\xi) \in T^*M, \ H_V(x,\xi) := \xi(V(x)), \tag{6.4}$$

qui n'est rien d'autre que le symbole principal de l'opérateur $\frac{1}{i}\mathcal{L}_V$. Le flot hamiltonien correspondant peut alors s'écrire

$$\Phi^t(x,\xi) := \left(\varphi^t(x), \left(d\varphi^t(x)^T\right)^{-1}\xi\right). \tag{6.5}$$

Maintenant que nous avons décrit les analogies avec les chapitres précédents, il convient de soulever certaines différences fondamentales qui vont compliquer l'analyse : $\frac{1}{i}\mathcal{L}_V$ n'est pas un opérateur elliptique, son spectre sur $L^2(M)$ n'est pas discret, etc. Afin de remédier à ces difficultés, on va chercher à étudier cet opérateur sur d'autres espaces de Hilbert sur lesquels l'opérateur ne sera plus auto-adjoint mais pour lesquels on pourra voir apparaître un spectre discret. Cette approche quantique (ou plutôt micro-locale) des questions de dynamique classique a notamment été mise en lumière par Faure, Sjöstrand et Tsujii dans le cas des flots de type Anosov [224, 88, 225, 89], ces travaux faisant suite à des résultats antérieurs de Baladi-Tsujii [13, 14] et de Faure-Roy-Sjöstrand [87] pour les applications hyperboliques.

6.1.1 Petit panorama sur les résonances de Pollicott–Ruelle

Avant de discuter plus en détail ce point de vue microlocal en systèmes dynamiques, dressons un petit panorama des résultats connus sur la question initiale qui était de décrire la fonction de corrélation $C_{\psi_1,\psi_2}(t)$. À titre d'illustration, nous démarrons avec le cas particulier où φ^t est le flot géodésique sur le fibré cotangent S^*M d'une variété riemannienne à courbures sectionnelles strictement négatives. Comme nous l'avons déjà dit au paragaphe 1.2.1, le flot vérifie la propriété d'Anosov qui a démontré le mélange de la mesure de Liouville L ou de manière équivalente la convergence de la fonction de corrélation $C_{\psi_1,\psi_2}(t)$ lorsque ψ_1 est un élément de $\Omega^0(M)$ [11]. On peut reformuler ce résultat de la manière suivante :

$$\forall\psi \in \Omega^0(S^*M), \quad \varphi^{-t*}(\psi_1) \rightharpoonup \int_{S^*M} \psi_1 dL, \quad \text{quand} \quad t \to +\infty. \tag{6.6}$$

1. Ici, d^* désigne l'adjoint de d par rapport à la métrique riemannienne g.

Une fois la limite faible connue, il est naturel de se demander à quelle vitesse $\varphi^{-t*}(\psi_1)$ converge vers l'état d'équilibre. Cette question est longtemps restée ouverte. Dans les années 80, Pollicott et Ruelle ont étudié la transformée de Laplace de la fonction $C_{\psi_1,\psi_2}(t)$ [180, 196], i.e.

$$\hat{C}_{\psi_1,\psi_2}(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} C_{\psi_1,\psi_2}(t)dt, \tag{6.7}$$

qui définit une fonction holomorphe sur un demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > C\}$ avec $C > 0$ assez grand. En se basant sur le codage de tels flots par des partitions de Markov [36], ils ont démontré l'existence d'un prolongement méromorphe de cette fonction à un demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) \geq -\delta\}$ avec $\delta > 0$. Les pôles de ce prolongement donnent en un certain sens des informations sur la dynamique en temps longs de ces flots et nous appellerons ces pôles résonances de Pollicott–Ruelle du flot. Dans le cas où ψ_1 est dans $\Omega^0(M)$, leur approche permet aussi de démontrer que l'on a un unique pôle sur l'axe imaginaire. Ce pôle est simple et correspond au fait que la mesure de Liouville est mélangeante. Ils n'excluent toutefois pas la possibilité d'avoir une infinité de pôles s'accumulant sur l'axe imaginaire, la manière dont ceux-ci s'accumuleraient étant liée à la vitesse de convergence vers l'équilibre dans (6.6). Les résultats de Pollicott et Ruelle s'appliquent en fait de manière plus générale aux flots de type axiome A [210] et nous reviendrons sur cette question dans un instant. Le fait qu'on ait convergence à vitesse exponentielle vers l'équilibre a été démontré en toute généralité par Liverani [151] comme nous l'avons vu dans le théorème 4.2.5. En courbure constante, ceci avait été prouvé par Ratner [183] et Moore [167] en dimension 2 et par Pollicott en dimension 3 [181]. En courbure variable, des résultats dans cette direction avaient été obtenus par Chernov [52] et Dolgopyat [71] en se servant du formalisme des partitions de Markov. La nouveauté de l'approche de Liverani est d'étudier vraiment le spectre du générateur $\mathcal{L}_V$ du flot géodésique sur des espaces de Banach appropriés. En combinant ce point de vue aux approches de Chernov et Dolgopyat, il réussit à démontrer un trou spectral pour le générateur du flot agissant sur un bon espace de Banach et à en déduire le théorème 4.2.5. L'espace de Banach qu'il doit introduire est, lui, inspiré par les espaces de Hölder "anisotropes" qu'il avait introduits avec Blank et Keller pour étudier le problème analogue dans le cas de certains difféomorphismes Anosov [25]. Depuis l'article [25], on a assisté à une explosion d'articles traitant ce type de questions d'un point de vue spectral direct et il serait difficile de les décrire tous. Mentionnons tout de même que, dans le cas d'un flot de type Anosov, Butterley et Liverani ont amélioré le résultat de Pollicott et Ruelle en démontrant que $\hat{C}_{\psi_1,\psi_2}(z)$ admettait un prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}$ [46]. Les espaces fonctionnels de Liverani et ses collaborateurs sont basés sur les espaces de fonctions hölderiennes et leurs duaux. Plus précisément, les espaces de Banach sont constitués d'éléments qui ont une régularité hölderienne dans un cône autour de la direction fortement instable mais qui sont beaucoup plus irréguliers dans un cône de la direction stable, en quelque sorte dans le dual des fonctions hölderiennes. Dans le cas des difféomorphismes hyperboliques, Baladi-Tsujii [13, 14] puis Faure-Roy-Sjöstrand [87] ont introduit un point de vue plus en lien avec l'analyse de Fourier en se basant sur des espaces de Sobolev d'ordre variable, i.e. dont l'ordre sera positif le long des directions instables et négatif le long des directions stables. Comme nous l'avons déjà évoqué, cette approche a ensuite été étendue aux flots de type Anosov dans [224, 88, 225, 79].

Les travaux de Pollicott et Ruelle concernaient en fait des flots beaucoup plus généraux à savoir les flots dont l'ensemble non-errant [2] est hyperbolique au sens du paragraphe 1.2.1.

2. Rappelons qu'un point x est dit errant s'il existe un voisinage ouvert non vide U de x et un $t_0 > 0$ tel

Ce type de flots a été introduit par Smale [210, p. 57] comme une généralisation des flots de gradient associés à une fonction de Morse et des flots géodésiques sur les variétés à courbure négative. On parle alors de flots de type Axiome A en accord avec la terminologie de l'article original de Smale. Rappelons que Smale démontre qu'on peut alors décomposer l'ensemble non-errant en une union finie d'ensembles compacts $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_K\}$ invariants sur lesquels le flot sera topologiquement transitif [3]. Les résultats de Pollicott et Ruelle s'étendent à ce cadre pourvu que l'on choisisse des fonctions tests pour la fonction de corrélation qui soient supportées près d'un ensemble basique fixé. Nous renvoyons aux articles originaux pour une formulation plus précise. En développant l'approche fonctionnelle ci-dessus, Baladi-Tsujii et Gouëzel-Liverani ont, quant à eux, démontré que l'on pouvait obtenir un prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}$ pour des applications Axiome A [14, 106], toujours en supposant que les observables sont supportées près d'un ensemble basique. Sous la même hypothèse de support et en utilisant une approche microlocale, Dyatlov et Guillarmou ont prouvé ce prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}$ [76] dans le cas des flots. Ils en déduisent en particulier le prolongement méromorphe de la fonction zeta dynamique, généralisant ainsi au cas Axiome A des résultats de Giuletti-Liverani-Pollicott [103] et Dyatlov-Zworski [79] dans le cas Anosov.

Les travaux de Thom [222] et Smale [208] sur les flots de gradient associés à une fonction de Morse ont mis en évidence les liens forts entre la topologie de la variété et la dynamique *globale* des flots de gradient. Avec cette observation en tête et en se souvenant que les flots Axiome A sont une généralisation de ces flots de gradient, il semble important de ne pas se limiter à l'étude des flots près des ensembles basiques si on veut relier ces résultats dynamiques aux propriétés globales du flot. Dans cette perspective, il est naturel d'essayer de comprendre le comportement de la fonction de corrélation sans faire d'hypothèse sur le support des observables comme c'est le cas pour les flots géodésiques en courbure négative. Le reste de ce chapitre sera consacré à ces questions dans le cas particulier des flots de gradient de type Morse-Smale.

6.1.2 Flots de gradient Morse-Smale

Fixons pour la suite de ce chapitre une fonction f que l'on supposera lisse ($\mathcal{C}^\infty$) et de type Morse. En d'autres termes, f a seulement un nombre fini de points critiques que l'on suppose non dégénérés. On note $\mathrm{Crit}(f)$ pour l'ensemble de ces points critiques. Pour simplifier la présentation, on supposera aussi que, pour $a \neq b$ dans $\mathrm{Crit}(f)$, on a $f(a) \neq f(b)$. Si on se donne une métrique riemannienne lisse, on peut alors définir un champ de vecteurs en posant

$$\forall (x,v) \in TM, \ d_x f(v) = \langle V_f(x), v \rangle_{g(x)}. \tag{6.8}$$

On dit que V_f est le gradient de la fonction f (par rapport à la métrique g). Un tel champ de vecteurs génère un flot complet sur M que l'on notera φ_f^t. L'ensemble non errant de ce flot est exactement égal à l'ensemble des points critiques de la fonction de Morse [175]. Les points critiques étant non dégénérés, l'ensemble non errant est bien hyperbolique et on a ainsi l'exemple le plus simple d'un flot Axiome A au sens de Smale. Étant donné a dans $\mathrm{Crit}(f)$, on peut définir sa variété stable (resp. instable), i.e.

$$W^{s/u}(a) := \left\{ x \in M : \lim_{t \to +/-\infty} \varphi_f^t(x) = a \right\}$$

que $U \cap (\cup_{|t| \geq t_0} \varphi^t(U)) = \emptyset$.

3. Ceci signifie que pour tous les couples d'ouverts (U, V) non vides, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi^t(U) \cap V \neq \emptyset$.

et démontrer qu'il s'agit de sous-variétés plongées dans M [208, 229, 138]. On pose $0 \leq r \leq n$ (resp. $n-r$) pour la dimension de $W^s(a)$ (resp. $W^u(a)$). Notons que r est aussi l'indice de Morse du point critique a et que $W^u(a) \cap W^s(a) = \{a\}$. Une propriété remarquable de ces sous-variétés est qu'elles forment une partition de la variété M [222], i.e.

$$M = \bigcup_{a \in \mathrm{Crit}(f)} W^s(a), \text{ and } \forall a \neq b,\ W^s(a) \cap W^s(b) = \emptyset.$$

La même propriété reste vraie pour les variétés instables. Cette décomposition joue bien entendu un rôle essentiel dans les applications à la topologie comme cela a été observé par Thom [222]. Toujours dans l'optique des applications à la topologie différentielle, Smale impose que, pour tous les choix de a et b dans $\mathrm{Crit}(f)$, les sous-variétés $W^s(a)$ *et* $W^u(b)$ *s'intersectent transversalement* dès lors qu'elles s'intersectent. Cette hypothèse s'avère aussi être cruciale dans notre analyse. On parle de métrique de type Morse-Smale ou encore de flots de gradient Morse-Smale. La fonction de Morse f étant fixée, on peut vérifier que cette condition de transversalité est satisfaite par un ouvert dense de métrique [112].

Si on revient à la question des fonctions de corrélation, Laudenbach et Harvey-Lawson démontrent le résultat suivant [22, 113] :

Théorème 6.1.1 (Laudenbach, Harvey-Lawson). *Soit f une fonction de Morse. Alors, il existe une métrique de type Morse-Smale "adaptée" telle que*

- *(Laudenbach) pour tout a dans* $\mathrm{Crit}(f)$, *$W^u(a)$ et $W^s(a)$ définissent des courants d'intégration au sens de De Rham que l'on note $[W^u(a)]$ et $[W^s(a)]$,*
- *(Harvey-Lawson) pour tout $0 \leq k \leq n$ et pour tout ψ_1 dans $\Omega^k(M)$,*

$$\varphi^{-t*}(\psi_1) \rightharpoonup \sum_{a:\dim W^s(a)=k} \langle [W^s(a)], \psi_1 \rangle [W^u(a)], \quad \textit{quand} \quad t \to +\infty. \tag{6.9}$$

Par métrique "adaptée", on attend que la métrique soit euclidienne dans une carte de Morse [138] mais cette hypothèse peut être un peu relâchée [166]. La difficulté de la première partie de ce théorème est qu'on peut facilement intégrer une forme différentielle dont le support est inclus dans un compact de $W^u(a)$ mais qu'il n'est pas du tout clair qu'on puisse intégrer une forme différentielle dont le support intersecte $\partial W^u(a) := \overline{W^u(a)} - W^u(a)$. Pour justifier ce point, il faut étudier de manière précise la structure du "bord" de $W^u(a)$. Laudenbach démontre que $\overline{W^u(a)}$ est une sous-variété à singularités coniques et qu'on peut en particulier en faire un courant d'intégration au sens de De Rham [69, 206]. Le résultat d'Harvey et Lawson peut être vu comme un analogue du résultat d'Anosov (6.6). Observons deux choses remarquables au sujet de ce résultat : (1) il s'agit d'un résultat sur la dynamique globale du flot, (2) la partition en cellules de Thom apparaît comme limite de la fonction de corrélation. Concernant le premier point, on peut constater que le flot converge vers un état d'équilibre qui est combinaison de plusieurs états stationnaires linérairement indépendants à savoir les $[W^u(a)]$. Dans (6.6), on avait un seul état d'équilibre qui était donné par la fonction constante 1, ceci étant notamment dû au caractère topologiquement transitif du flot.

De ces résultats, on peut déduire différents résultats classiques de topologie différentielle : finitude des nombres de Betti, inégalités de Morse. Nous verrons comment interpréter ce théorème de manière spectrale et d'une certaine manière le préciser en adoptant le point de vue des paragraphes précédents. Avant d'énoncer nos résultats avec Nguyen Viet Dang, nous devons introduire deux définitions supplémentaires. Tout d'abord, pour tout a dans $\mathrm{Crit}(f)$, on définit $L_f(a)$ comme l'unique matrice vérifiant

$$\forall \xi, \eta \in T_a M,\ d_a^2 f(\xi, \eta) = g_a(L_f(a)\xi, \eta). \tag{6.10}$$

Comme a est un point critique non dégénéré, $L_f(a)$ est symétrique par rapport à g_a et inversible. Ses valeurs propres sont les exposants de Lyapunov du point a et on les note

$$\chi_1(a) \leq \ldots \leq \chi_r(a) < 0 < \chi_{r+1}(a) \leq \ldots \leq \chi_n(a),$$

où r est l'indice du point critique a. Pour $l \geq 0$, nous dirons que le flot φ_f^t est $\mathcal{C}^l$-linéarisable si, pour tout point critique a de f, il existe une carte de classe $\mathcal{C}^l$ au voisinage de a tel que le flot s'écrive localement, pour t assez petit,

$$\varphi_f^t(x_1, \ldots, x_n) = \left(e^{t\chi_1(a)} x_1, \ldots, e^{t\chi_n(a)} x_n\right). \tag{6.11}$$

Grâce au théorème d'Hartman-Grobman, on peut toujours trouver une carte $\mathcal{C}^0$. Le théorème de Sternberg-Chen [171] assure quant à lui que la carte peut être choisie de classe $\mathcal{C}^l$ pourvu qu'un nombre fini [4] de conditions de non résonance soient satisfaites par les exposants de Lyapunov. On supposera par la suite que le flot est $\mathcal{C}^\infty$-linéarisable. Certains résultats ci-dessous pourraient être étendus au cas où l est fini et supérieur ou égal à 1 mais cela nécessiterait un travail technique supplémentaire que nous n'avons pas traité dans [64]. Les métriques du théorème de Laudenbach et Harvey-Lawson génèrent en tout cas des flots $\mathcal{C}^\infty$-linéarisables. Cette propriété est aussi satisfaite pour un choix générique de métriques grâce au théorème de Sternberg-Chen.

6.1.3 Asymptotique des corrélations

Maintenant que nous avons fixé le cadre, nous pouvons énoncer les résultats obtenus avec Nguyen Viet Dang. Commençons par le raffinement suivant du théorème 6.1.1 obtenu dans [64] :

Théorème 6.1.2 (Dang-R. 2016)**.** *Supposons que φ_f^t est un flot de gradient Morse-Smale qui est $\mathcal{C}^\infty$-linéarisable. Alors, pour tout $0 \leq k \leq n$, pour tout*

$$0 < \chi < \min\{|\chi_j(b)| : 1 \leq j \leq n \text{ et } b \in \operatorname{Crit}(f)\},$$

et pour tout $(\psi_1, \psi_2) \in \Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M)$, on a

$$\int_M \varphi_f^{-t*}(\psi_1) \wedge \psi_2 = \sum_{a:\dim W^s(a)=k} \int_{W^s(a)} \psi_1 \int_{W^u(a)} \psi_2 + \mathcal{O}_{\psi_1,\psi_2}(e^{-\chi t}),$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

La preuve que nous donnons est de nature spectrale et totalement indépendante des théorèmes de Laudenbach et d'Harvey-Lawson. En particulier, nous redémontrons l'existence des courants associés aux variétés stables et instables ainsi que la convergence des corrélateurs vers une limite finie. Ce premier théorème pourrait probablement être obtenu

4. Ce nombre dépend des exposants de Lyapunov et de l.

par des méthodes de la théorie des courants à la Federer comme celles qu'utilisent Laudenbach et Harvey-Lawson. Ce résultat n'est cependant que le premier terme d'une asymptotique que notre approche spectrale permet de décrire complètement. Pour énoncer notre théorème général, nous introduisons la notation suivante :

$$|\chi(a)| = (|\chi_1(a)|, \dots, |\chi_n(a)|).$$

Dans [64], nous démontrons :

Théorème 6.1.3 (Dang-R. 2016)**.** *Supposons que φ_f^t est un flot de gradient Morse-Smale dont tous les exposants de Lyapunov sont rationnellement indépendants. Soit $0 \leq k \leq n$.*

Alors, pour tout a dans $\mathrm{Crit}(f)$ et pour tout α dans $\mathbb{N}^n$, il existe une application linéaire continue[5] *:*

$$\pi_{a,k}^{(\alpha)} : \Omega^k(M) \to \mathcal{D}'^k(M),$$

telle que, pour tout $(\psi_1, \psi_2) \in \Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M)$ et pour tout $\chi > 0$, on a

$$\int_M \varphi_f^{-t*}(\psi_1) \wedge \psi_2 = \sum_{a \in \mathrm{Crit}(f)} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n : \alpha.|\chi(a)| \leq \chi} e^{-t\alpha.|\chi(a)|} \int_M \pi_{a,k}^{(\alpha)}(\psi_1) \wedge \psi_2 + \mathcal{O}_{\psi_1,\psi_2}(e^{-\chi t}),$$

lorsque t tend vers $+\infty$. De plus, pour tout a dans $\mathrm{Crit}(f)$ et pour tout α dans $\mathbb{N}^n$, on a

- $0 \leq \mathrm{rg}(\pi_{a,k}^{(\alpha)}) \leq 2^n$,
- *pour tout ψ_1 dans $\Omega^k(M)$, $\pi_{a,k}^{(\alpha)}(\psi_1)$ est supporté dans $\overline{W^u(a)}$,*
- $\mathrm{rg}(\pi_{a,k}^{(0)}) = \delta_{k,\dim(W^s(a))}$,
- *pour tout α dans $(\mathbb{N}^*)^n$, $\mathrm{rg}(\pi_{a,k}^{(\alpha)}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

En particulier, ce théorème démontre que *les résonances de Pollicott-Ruelle des flots de gradient sont de la forme $-\alpha.|\chi(a)|$* avec α un multi-indice dans $\mathbb{N}^n$. Observons que nous faisons l'hypothèse que les exposants de Lyapunov sont rationnellement indépendants. Notre théorème est en fait valable de manière plus générale si le flot est supposé $\mathcal{C}^\infty$-linéarisable à la différence que l'asymptotique peut dans ce cas faire intervenir des termes polynomiaux [64, 66]. Si l'on ne s'intéresse qu'à des observables ψ_1 et ψ_2 supportées près d'un point critique donné, alors ce résultat peut s'obtenir facilement en utilisant la formule de Taylor afin de déduire un développement asymptotique à tout ordre (voir paragraphe 6.2.1). Ici, il s'agit vraiment d'un résultat *global* sur les flots de gradient qui est valable pour tout choix de ψ_1 et de ψ_2 sans restriction sur leurs supports. À la différence des résultats obtenus dans le cas Anosov ou Axiome A, nous décrivons non seulement les résonances de Pollicott-Ruelle, mais aussi les vecteurs propres généralisés. En particulier, ce théorème établit l'existence de courants portés par les variétés instables. Nous démontrons que, pour chaque choix de $a \in \mathrm{Crit}(f)$ et de $0 \leq k \leq n$, tout élément u dans l'image de $\pi_{a,k}^{(\alpha)}$ est supporté dans $\overline{W^u(a)}$ et vérifie

$$\mathcal{L}_V^{(k)}(u) = \alpha.|\chi(a)|u.$$

Ainsi, en plus de donner un développement asymptotique à tout ordre, nous construisons des courants propres portés par les variétés instables qui généralisent ceux construits par Laudenbach dans [22].

5. Ici, $\mathcal{D}'^k(M)$ désigne l'ensemble des courants de degré k, i.e. le dual topologique de $\Omega^{n-k}(M)$.

Pour conclure notre discussion, mentionnons que, dans son carnet de problèmes [35, Problème 1], Bowen mentionne la question suivante à propos des flots de gradient : *To what extent does the gradient flow near a critical point depend on the metric ?* Le théorème 6.1.3 donne quelques éléments de réponse à cette question du point de vue de la dynamique *globale* (plutôt que locale) des flots de gradient. Nous pouvons, par exemple, observer que les résonances de Pollicott-Ruelle d'un flot de gradient dépendent uniquement des exposants de Lyapunov et donc du 0-jet de la métrique aux points critiques [6]. Notre analyse permet aussi de décrire la structure des états résonants correspondants en fonction du choix de la métrique. Comme le suggère la question de Bowen, il serait intéressant de comprendre plus en détail ce qui se passe près des points critiques, par exemple de mieux analyser les termes polynomiaux qui peuvent apparaître ou encore la structure des modes propres lorsqu'on enlève les hypothèses d'indépendance rationnelles entre les points critiques [66].

6.2 Schéma de la preuve

Par souci de simplicité, nous nous limiterons au degré $k = 0$ sachant que la preuve en degré supérieur suit un schéma similaire.

6.2.1 Un calcul préliminaire

Commençons par étudier le problème près d'un point fixe donné a dans $\text{Crit}(f)$ dont l'indice sera noté r. On fixe deux formes tests $\psi_1(x) \in \Omega^0(M)$ et $\psi_2(x, dx) \in \Omega^n(M)$ qui sont toutes les deux supportées dans un petit voisinage de a où le flot peut être linéarisé de manière $\mathcal{C}^\infty$ sous la forme (6.11). On peut alors écrire :

$$\int_M \varphi_f^{-t*}(\psi_1) \wedge \psi_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}_1(e^{-t\chi_1(a)}x_1, \ldots, e^{-t\chi_n(a)}x_n)\tilde{\psi}_2(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

On effectue un changement de variables sur les coordonnées $1 \leq j \leq r$ qui nous donne

$$\int_M \varphi_f^{-t*}(\psi_1) \wedge \psi_2 = e^{t\sum_{j=1}^r \chi_j(a)} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}_1(x_1, \ldots, x_r, e^{-t\chi_{r+1}(a)}x_{r+1}, \ldots, e^{-t\chi_n(a)}x_n)$$
$$\times \tilde{\psi}_2(e^{t\chi_1(a)}x_1, \ldots, e^{t\chi_r(a)}x_r, x_{r+1}, \ldots x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

En écrivant la formule de Taylor, on obtient formellement le développement asymptotique suivant :

$$\int_M \varphi_f^{-t*}(\psi_1) \wedge \psi_2 \sim e^{t\sum_{j=1}^r \chi_j(a)} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^r\times\mathbb{N}^{n-r}} C_{\alpha,\beta} e^{-t(\alpha,\beta).|\chi(a)|}$$
$$\times \left\langle x^{(\alpha,0)}\delta_0^{(\beta)}(x_{r+1}, \ldots, x_n), \tilde{\psi}_1 \right\rangle \left\langle x^{(0,\beta)}\delta_0^{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_r), \tilde{\psi}_2 \right\rangle,$$

où les $C_{\alpha,\beta}$ sont des constantes universelles. Ainsi, pour tout α dans $\mathbb{N}^n$, on a, au voisinage de a dans $\text{Crit}(f)$, un germe de vecteur propre u_α qui s'écrit en coordonnées locales

$$u_{\alpha,a}(x_1, \ldots, x_r) := \delta_0^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1, \ldots, x_r)x_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \ldots x_n^{\alpha_n}, \tag{6.12}$$

6. Si on se limite à la dynamique locale près d'un point critique, l'analogue de cette observation peut aussi être déduit des travaux de Baladi et Tsujii sur les difféomorphismes Axiome A [14].

et qui vérifie, toujours au voisinage de a,

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}(u_{\alpha,a}) = -i\left(\alpha.|\chi(a)| + \sum_{j=1}^{r}\chi_j(a)\right)u_{\alpha,a}. \tag{6.13}$$

La stratégie de la preuve est alors la suivante :

1. étendre le germe de vecteur propre en un vecteur propre défini globalement,
2. montrer que tous les vecteurs propres ainsi définis permettent de décrire tout le développement asymptotique de la fonction de corrélation.

Pour le premier point, il est naturel d'utiliser l'équation (6.13) pour prolonger le germe local de distribution $u_{\alpha,a}$ en une distribution définie sur l'ouvert $M - \partial W^u(a)$ où $\partial W^u(a) = \overline{W^u(a)} - W^u(a)$. La distribution ainsi étendue vérifie toujours l'équation aux valeurs propres 6.13 et il faut essayer de la prolonger en une distribution globalement bien définie sur M. Il s'agit de problématiques classiques en théorie quantique des champs [62] et qui apparaissent aussi naturellement dans la preuve de Laudenbach et d'Harvey-Lawson. Ici, nous traitons cette difficulté d'une manière complètement différente en nous servant de la théorie spectrale. Plus précisement, pour tout $\chi > 0$, nous construisons dans un premier temps un espace de Sobolev "anisotrope" $\mathcal{H}^{m_\chi}(M)$ pour lequel l'opérateur $\frac{1}{i}\mathcal{L}_V$ a un spectre discret sur le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) > -\chi\}$ puis nous utilisons notre analyse spectrale pour démontrer les points 1 et 2 mentionnés ci-dessus.

6.2.2 Dynamique dans le cotangent et espaces anisotropes

Notre construction spectrale s'inspire de l'approche microlocale développée par Faure et Sjöstrand pour étudier le spectre des corrélations de flots de type Anosov [88]. Pour une fonction $m(x,\xi)$ dans $S^0(T^*M)$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre variable :

$$\mathcal{H}^m(M) := \mathrm{Op}\left((1+\|\xi\|_x^2)^{\frac{m(x,\xi)}{2}}\right)^{-1} L^2(M).$$

Étudier l'opérateur $\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}$ revient à étudier l'opérateur *non auto-adjoint*

$$\hat{H}_{V_f} := \mathrm{Op}\left((1+\|\xi\|_x^2)^{\frac{m(x,\xi)}{2}}\right) \circ \left(\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}\right) \circ \mathrm{Op}\left((1+\|\xi\|_x^2)^{\frac{m(x,\xi)}{2}}\right)^{-1}$$

sur $L^2(M)$. Une application des règles du calcul pseudo-différentiel nous montre que cet opérateur peut se récrire :

$$\hat{H}_{V_f} = \mathrm{Op}\left(H_{V_f} + iX_{H_{V_f}}.\left(\frac{m(x,\xi)}{2}\ln(1+\|\xi\|_x^2)\right)\right) + \mathcal{O}(\Psi^0(M)) + \mathcal{O}_m(\Psi^{-1+0}(M)),$$

où H_{V_f} est l'hamiltonien défini par (6.4) et $X_{H_{V_f}}$ le champ de vecteurs correspondant. Ainsi, si, pour tout $c > 0$, on réussit à construire une fonction $m(x,\xi)$ telle que, pour $\|\xi\|_x$ assez grand,

$$X_{H_{V_f}}.\left(\frac{m(x,\xi)}{2}\ln(1+\|\xi\|_x^2)\right) \leq -c, \tag{6.14}$$

alors la partie imaginaire du symbole de l'opérateur sera "elliptique" dans une zone $\|\xi\|_x \geq R$ avec $R > 0$ assez grand. En utilisant la théorie de Fredholm, nous pourrons alors inverser l'opérateur "modulo un opérateur compact" et ainsi en déduire que l'opérateur

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f} : \mathcal{H}^m(M) \to \mathcal{H}^m(M)$$

a du spectre discret dans la zone $\{\mathrm{Im}(z) > -\chi\}$, pourvu que $c > 0$ soit choisi assez grand dans (6.14). En d'autres termes, si l'on suit la stratégie de Faure et Sjöstrand, la difficulté principale réside dans la construction d'une fonction m vérifiant (6.14), ce qui n'est rien d'autre qu'une question de systèmes dynamiques hamiltoniens. Afin de comprendre comment construire une telle fonction m, commençons par écrire

$$X_{H_{V_f}} \cdot \left(\frac{m(x,\xi)}{2} \ln(1 + \|\xi\|_x^2) \right) = X_{H_{V_f}}(m) \times \frac{1}{2} \ln(1 + \|\xi\|_x^2) + m(x,\xi) \frac{X_{H_{V_f}} \cdot \left(\|\xi\|_x^2\right)}{2(1 + \|\xi\|_x^2)}. \quad (6.15)$$

On peut d'ores et déjà remarquer que le second terme du membre de droite est borné. Il faut donc nécessairement imposer $X_{H_{V_f}}(m) \leq 0$ afin d'espérer démontrer l'inégalité (6.14) pour $\|\xi\|$ assez grand. On peut observer que $-X_{H_{V_f}}(f) \leq 0$. Ainsi, si l'on pose $m(x,\xi) = -f(x) + m_0(x,\xi)$ avec $X_{H_{V_f}}(m_0) \leq 0$, l'inégalité sera vérifiée loin des points critiques du flot. Près d'un point critique a, on peut faire appel à l'hyperbolicité du flot pour démontrer que $\frac{X_{H_{V_f}} \cdot \left(\|\xi\|_x^2\right)}{2(1+\|\xi\|_x^2)} \geq c_0 > 0$ (resp. $\leq -c_0 < 0$) le long de la direction instable (resp. stable) $N^*(W^u(a))$ (resp. $N^*(W^s(a))$). En particulier, si on choisit $m_0(x,\xi) \ll 0$ le long de la direction instable et $m_0(x,\xi) \gg 0$ le long de la direction stable, on aura aussi démontré l'inégalité (6.14) dans cette zone de l'espace des phases. Pour résumer, il suffit donc de construire une fonction $m_0(x,\xi)$ dans $s^0(T^*M)$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $X_{H_{V_f}}(m_0) \leq 0$,

— au voisinage des points critiques, $m_0(x,\xi) \ll 0$ le long de la direction instable et $m_0(x,\xi) \gg 0$ le long de la direction stable,

— toujours au voisinage des points critiques mais loin des directions stables et instables, $X_{H_{V_f}}(m_0) \leq -c_1 < 0$.

Si nous réunissons ces ingrédients, nous serons alors capables de faire marcher la stratégie de Faure-Sjöstrand décrite plus haut. C'est à cette étape de la preuve que nous avons besoin de comprendre de manière cruciale les propriétés topologiques et dynamiques des variétés instables. Nous démontrons en particulier le théorème suivant qui est plus ou moins suffisant pour conclure cette construction spectrale [64, 65] :

Théorème 6.2.1 (Dang-R. 2016). *Soit φ_f^t un flot de gradient Morse-Smale qui est $\mathcal{C}^1$-linéarisable. Alors,*

1. *L'ensemble*
$$\Sigma := \bigcup_{a \in \mathrm{Crit}(f)} N^*(W^u(a)) \cap S^*M$$
est compact.

2. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ϵ-voisinage ouvert O de Σ dans S^*M tel que, pour tout $t \geq 0$,*
$$\tilde{\Phi}_{V_f}^t(O) \subset O,$$
où $\tilde{\Phi}_{V_f}^t$ est le flot induit par l'Hamiltonien H_V sur S^*M.

La preuve de ce résultat s'inspire des travaux originaux de Smale [208] que nous transposons dans un contexte hamiltonien. Nous renvoyons aussi le lecteur aux travaux de Weber [229] pour une formulation proche de la nôtre. Ce théorème nous permet en particulier de nous affranchir des constructions délicates de Laudenbach dans [22]. Le prix à payer est bien entendu que nous avons une description beaucoup moins précise de la structure différentiable de $\overline{W^u(a)}$.

6.2.3 Construction des vecteurs propres

Supposons maintenant que nous avons démontré que le spectre de l'opérateur $\frac{1}{i}\mathcal{L}_V$ (agissant sur l'espace $\mathcal{H}^m(M)$) est discret et de multiplicité finie dans la zone $\text{Im}(z) > -\chi$. Pour chaque z_0 dans ce demi-plan complexe, on peut définir un projecteur spectral

$$\Pi_{z_0} := \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{z_0}} \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}\right)},$$

où Γ_{z_0} est un contour bordant un petit disque qui contient au plus la valeur propre z_0 dans son intérieur. Si z_0 n'est pas valeur propre, ceci définit bien entendu un opérateur nul. Au voisinage du point critique, on peut alors étendre la distribution u_α définie par (6.12) en se fixant une petite fonction de troncature $\chi_{a,\alpha}$ au voisinage de a et en posant

$$\mathbf{u}_{\alpha,a} := \Pi_{z_0}(\chi_{a,\alpha}u_\alpha),$$

où

$$z_0 := -i\left(\alpha.|\chi(a)| + \sum_{j=1}^{r}\chi_j(a)\right).$$

On peut vérifier en utilisant [88, Th. 1.5] que la distribution ainsi définie est indépendante du choix de la fonction d'ordre m utilisée dans la définition de l'espace de Sobolev anisotrope $\mathcal{H}^m(M)$. Par ailleurs, on peut démontrer que $\mathbf{u}_{\alpha,a}$ coïncide avec u_α au voisinage du point critique et que l'on a en particulier défini une famille de distributions linérairement indépendantes. Ces distributions vérifient

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}\mathbf{u}_{\alpha,a} = -i\left(\alpha.|\chi(a)| + \sum_{j=1}^{r}\chi_j(a)\right)\mathbf{u}_{\alpha,a} \text{ sur } M - \partial W^u(a)$$

mais elles ne satisfont *a priori* que

$$\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f} + i\left(\alpha.|\chi(a)| + \sum_{j=1}^{r}\chi_j(a)\right)\right)^N \mathbf{u}_{\alpha,a} = 0 \text{ sur } M,$$

pour un choix de N assez grand dépendant de a et de α. Par cette procédure spectrale, nous avons donc étendu les germes de distributions invariantes et nous pouvons bien sûr procéder de la même manière pour des courants de degré k plus élevé. Cette définition permet de court-circuiter en un sens l'analyse faite par Laudenbach mais, de nouveau, la difficulté a été déplacée dans la construction de l'espace anisotrope. Par ailleurs, même si nous construisons une infinité de distributions supportées dans $\overline{W^u(a)}$, nous ne réussissons pas à contrôler aussi bien leur "masse" près de $\partial W^u(a)$.

6.2.4 Conclusion

Il reste à démontrer que ces distributions permettent d'écrire le développement asymptotique de la fonction de corrélation à tout ordre. Pour cela, on rappelle l'observation-clef : $\varphi_f^{-t*}(\psi_1)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles (6.2), i.e. φ_f^{-t*} est formellement égal à $e^{-t\mathcal{L}_{V_f}}$. Il suffit donc de montrer que, dans le demi-plan $\{\text{Im}(z) > -\chi\}$, les vecteurs propres généralisés de $\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}$ sont complètement déterminés par les distributions que nous venons de construire. On fixe donc u_0 un vecteur propre généralisé et $p \geq 1$ minimal tels que

$$\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f} - z_0\right)^p u_0 = 0,$$

pour un certain z_0 vérifiant $\text{Im}(z) > -\chi$. On lui associe la famille

$$u_0,\ u_1 := \left(\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f} - z_0\right) u_0, \ldots,\ u_{p-1} := \left(\frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f} - z_0\right)^{p-1} u_0.$$

On conclut alors en démontrant que chacun des u_i peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $\mathbf{u}_\alpha$. Les ingrédients principaux sont : (1) la dynamique de gradient, (2) un théorème de Schwartz sur la forme des distributions portées par des sous-variétés [206, p. 102] et (3) la régularité des u_j le long des variétés instables combinée avec un résultat de Nguyen Viet Dang [62]. Nous omettons la fin de la démonstration et renvoyons à [64, 66] pour plus de détails, notamment sur la possibilité d'avoir ou non des blocs de Jordan. En particulier, nous montrons qu'en tout degré k,

$$C^k(V_f) := \text{Ker}\left(\mathcal{L}_{V_f}^{(k)}\right) = \text{Ker}\left(\mathcal{L}_{V_f}^{(k)}\right)^2. \tag{6.16}$$

6.3 Applications à la topologie

Les travaux de Thom [222] et de Smale [208] ont démontré que l'étude des flots de gradient avait des liens forts avec la topologie différentielle. Nous voudrions conclure ce mémoire en discutant un peu cette question dans la perspective de l'analyse développée dans les paragraphes précédents. Tout d'abord, notons que, puisque d commute avec $\mathcal{L}_{V_f}$, on peut définir un complexe cohomologique spectral naturel :

$$0 \xrightarrow{d} C^0(V_f) \xrightarrow{d} C^1(V_f) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} C^n(V_f) \xrightarrow{d} 0.$$

Nous démontrons dans [64] que les espaces $C^k(V_f)$ apparaissant dans ce complexe spectral sont de dimension égale au nombre $c_k(f)$ de points critiques d'indice k, i.e. dont la variété stable est de dimension k. Par ailleurs, rappelons que le complexe de De Rham est défini comme suit :

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0.$$

Introduisons maintenant le projecteur spectral associé à la valeur propre 0 :

$$\Pi_0^{(k)} := \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{z_0}} \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{i}\mathcal{L}_{V_f}^{(k)}\right)}.$$

Cet opérateur linéaire de rang fini nous est donné naturellement par notre analyse spectrale en chaque degré et il induit une application linéaire de $\Omega^k(M)$ dans $C^k(V_f)$. En omettant certains détails techniques, nous allons maintenant vérifier que ceci nous permet de déduire une *équation d'homotopie de chaîne entre les deux complexes.* En effet, pour tout ψ dans $\Omega^\bullet(M)$, on a

$$\begin{aligned}\psi &= \Pi_0(\psi) + (\mathrm{Id} - \Pi_0)(\psi) \\ &= \Pi_0(\psi) + \left(d \circ \iota_{V_f} + \iota_{V_f} \circ d\right) \circ \mathcal{L}_{V_f}^{-1} (\mathrm{Id} - \Pi_0)(\psi) \\ &= \Pi_0(\psi) + d \circ \iota_{V_f} \circ \mathcal{L}_{V_f}^{-1} (\mathrm{Id} - \Pi_0)(\psi) + \iota_{V_f} \circ \mathcal{L}_{V_f}^{-1} (\mathrm{Id} - \Pi_0)\, d(\psi).\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on pose $R_f := \iota_{V_f} \circ \mathcal{L}_{V_f}^{-1} \circ (\mathrm{Id} - \Pi_0)$, on trouve l'équation d'homotopie attendue :

$$\psi = \Pi_0(\psi) + dR_f(\psi) + R_f d(\psi).$$

Il est alors ensuite classique de déduire en utilisant l'ellipticité de l'opérateur d que *les deux complexes sont quasi-isomorphes* [64]. L'argument que nous venons de proposer est en fait assez robuste et, dans un travail plus récent, nous l'appliquons à des flots plus généraux de type Morse-Smale ou Anosov [67]. Outre le fait qu'il démontre la finitude de la cohomologie de De Rham, l'intérêt d'un tel quasi-isomorphisme est qu'il permet de déduire les inégalités de Morse plus ou moins automatiquement par des arguments d'algèbre linéaire élémentaire [138]. Dans le cas de certains flots de Morse-Smale non singuliers [67], nous montrons aussi comment relier ce spectre de Pollicott-Ruelle à la torsion de Reidemeister [92]. Enfin, remarquons que le contenu topologique des résonances de Pollicott-Ruelle a aussi été mis en évidence récemment par Dyatlov et Zworski pour des flots de contact de type Anosov en dimension 3 [80].

Le complexe $(C^\bullet(V_f), d)$ est connu dans la littérature sous le nom de complexe de Thom-Smale-Witten ou encore complexe de Morse. Notre analyse permet non seulement de réaliser ce complexe en termes de courants portés par des variétés instables comme cela avait déjà été observé dans [22, 113] mais aussi d'en donner une interprétation spectrale qui est en un certain sens la limite de celle proposée par Witten [233] et par Helffer-Sjöstrand [116]. Rappelons que Witten introduit l'opérateur de cobord semi-classique

$$d_{f,\hbar} := e^{-\frac{f}{\hbar}} d e^{\frac{f}{\hbar}},$$

et qu'à cet opérateur de cobord, il associe un opérateur elliptique, maintenant nommé laplacien de Witten :

$$\hat{W}_{f,\hbar} = \frac{\hbar}{2} \left(d_{f,\hbar} d_{f,\hbar}^* + d_{f,\hbar}^* d_{f,\hbar} \right),$$

où $d_{f,\hbar}^*$ est l'adjoint de $d_{f,\hbar}$ par rapport à la métrique riemannienne. Comme l'observent Frenkel, Losev et Nekrasov dans [91], cet opérateur se récrit

$$e^{\frac{f}{\hbar}} \hat{W}_{f,\hbar} e^{-\frac{f}{\hbar}} = -\frac{\hbar \Delta_g}{2} + \mathcal{L}_{V_f}, \tag{6.17}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami que nous avons déjà rencontré dans les chapitres précédents. En d'autres termes, le laplacien de Witten est asymptotiquement une perturbation stochastique de l'opérateur $\mathcal{L}_{V_f}$ dont nous venons de décrire le spectre. La stratégie de Witten ne passe pas directement par l'étude de $\mathcal{L}_{V_f}$. Elle consiste plutôt à décrire directement le spectre de $\hat{W}_{f,\hbar}$ et à démontrer que, pour $\hbar$ assez petit, le bas du spectre de $W_{f,\hbar}$ forme en chaque degré un sous-espace vectoriel de $L^2(M)$ dont la dimension est égale au nombre de points critiques d'indice correspondant. Witten montre alors que cette famille de sous-espaces détermine un complexe cohomologique qui est quasi-isomorphe au complexe de De Rham. Grâce à la formule de conjugaison (6.17), on voit que notre opérateur est formellement la limite du Laplacien de Witten : nous renvoyons à [91] pour une justification physique de ce passage à la limite et à [78] pour un argument mathématique dans le cas des flots de type Anosov. Pour résumer, les résultats de ce chapitre montrent en particulier qu'il est possible de déterminer directement et complètement le spectre de l'opérateur “limite” du Laplacien de Witten, ce dernier étant naturel du point de vue des résonances de Pollicott-Ruelle. Dans un travail en cours avec Nguyen Viet Dang, nous revenons sur cette interprétation et sur ses conséquences à la fois pour le Laplacien de Witten et le spectre de Pollicott-Ruelle.

Bibliographie

[1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of mechanics.* Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978. Second edition, revised and enlarged, With the assistance of Tudor Raţiu and Richard Cushman.

[2] S. Alesker. Theory of valuations on manifolds : a survey. *Geom. Funct. Anal.*, 17(4) :1321–1341, 2007.

[3] N. Anantharaman. Entropy and the localization of eigenfunctions. *Ann. of Math. (2)*, 168(2) :435–475, 2008.

[4] N. Anantharaman. Spectral deviations for the damped wave equation. *Geom. Funct. Anal.*, 20(3) :593–626, 2010.

[5] N. Anantharaman, C. Fermanian-Kammerer, and F. Macià. Semiclassical completely integrable systems : long-time dynamics and observability via two-microlocal Wigner measures. *Amer. J. Math.*, 137(3) :577–638, 2015.

[6] N. Anantharaman and M. Léautaud. Sharp polynomial decay rates for the damped wave equation on the torus. *Anal. PDE*, 7(1) :159–214, 2014. With an appendix by Stéphane Nonnenmacher.

[7] N. Anantharaman and F. Macià. Semiclassical measures for the Schrödinger equation on the torus. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(6) :1253–1288, 2014.

[8] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Entropy of semiclassical measures of the Walsh-quantized baker's map. *Ann. Henri Poincaré*, 8(1) :37–74, 2007.

[9] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(7) :2465–2523, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.

[10] N. Anantharaman and G. Rivière. Dispersion and controllability for the Schrödinger equation on negatively curved manifolds. *Anal. PDE*, 5(2) :313–338, 2012.

[11] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 90 :209, 1967.

[12] M. Asch and G. Lebeau. The spectrum of the damped wave operator for a bounded domain in $\mathbf{R}^2$. *Experiment. Math.*, 12(2) :227–241, 2003.

[13] V. Baladi and M. Tsujii. Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(1) :127–154, 2007.

[14] V. Baladi and M. Tsujii. Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms. In *Geometric and probabilistic structures in dynamics*, volume 469 of *Contemp. Math.*, pages 29–68. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[15] D. Bambusi, S. Graffi, and T. Paul. Long time semiclassical approximation of quantum flows : a proof of the Ehrenfest time. *Asymptot. Anal.*, 21(2) :149–160, 1999.

[16] L. Barreira and C. Wolf. Dimension and ergodic decompositions for hyperbolic flows. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 17(1) :201–212, 2007.

[17] P. Bérard. Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien. In *Bony-Sjöstrand-Meyer seminar, 1984–1985*, pages Exp. No. 14 , 10. École Polytech., Palaiseau, 1985.

[18] P.H. Bérard. On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. *Math. Z.*, 155(3) :249–276, 1977.

[19] M. Berry. Regular and irregular semiclassical wave functions. *J.Phys.A*, 10 :2083–2091, 1977.

[20] A.L. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*, volume 93 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. With appendices by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.

[21] X. Bin. Derivatives of the spectral function and Sobolev norms of eigenfunctions on a closed Riemannian manifold. *Ann. Global Anal. Geom.*, 26(3) :231–252, 2004.

[22] J.-M. Bismut and W. Zhang. An extension of a theorem by Cheeger and Müller. *Astérisque*, (205) :235, 1992. With an appendix by François Laudenbach.

[23] M.D. Blair and C.D. Sogge. Concerning toponogov's theorem and logarithmic improvement of estimates of eigenfunctions. 2015. Preprint arXiv :1510.07726.

[24] M.D. Blair and C.D. Sogge. Refined and microlocal kakeya-nikodym bounds of eigenfunctions in higher dimensions. 2015. Preprint arXiv :1510.07724.

[25] M. Blank, G. Keller, and C. Liverani. Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps. *Nonlinearity*, 15(6) :1905–1973, 2002.

[26] P. Bleher, B. Shiffman, and S. Zelditch. Correlations between zeros and supersymmetry. *Comm. Math. Phys.*, 224(1) :255–269, 2001. Dedicated to Joel L. Lebowitz.

[27] J. Bolte and T. Schwaibold. Stability of wave-packet dynamics under perturbations. *Phys. Rev. E (3)*, 73(2) :026223, 9, 2006.

[28] Y. Bonthonneau. A lower bound for the θ function on manifolds without conjugate points. 2016. Preprint arXiv :1603.05697.

[29] J.M. Bouclet. A wave packet approach to semiclassical propagation on Riemannian manifolds. 2017. En préparation.

[30] J. Bourgain. Eigenfunction bounds for the Laplacian on the n-torus. *Internat. Math. Res. Notices*, (3) :61–66, 1993.

[31] J. Bourgain. Moment inequalities for trigonometric polynomials with spectrum in curved hypersurfaces. *Israel J. Math.*, 193(1) :441–458, 2013.

[32] J. Bourgain, N. Burq, and M. Zworski. Control for Schrödinger operators on 2-tori : rough potentials. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15(5) :1597–1628, 2013.

[33] J. Bourgain and E. Lindenstrauss. Entropy of quantum limits. *Comm. Math. Phys.*, 233(1) :153–171, 2003.

[34] A. Bouzouina and D. Robert. Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables. *Duke Math. J.*, 111(2) :223–252, 2002.

[35] R. Bowen. Notebook. https ://bowen.pims.math.ca/.

[36] R. Bowen. Symbolic dynamics for hyperbolic flows. *Amer. J. Math.*, 95 :429–460, 1973.

[37] S. Brooks. Logarithmic-scale quasimodes that do not equidistribute. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22) :11934–11960, 2015.

[38] S. Brooks, E. Le Masson, and E. Lindenstrauss. Quantum ergodicity and averaging operators on the sphere. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19) :6034–6064, 2016.

[39] S. Brooks and E. Lindenstrauss. Joint quasimodes, positive entropy, and quantum unique ergodicity. *Invent. Math.*, 198(1) :219–259, 2014.

[40] D. Bures. An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite w^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135 :199–212, 1969.

[41] N. Burq and H. Christianson. Imperfect geometric control and overdamping for the damped wave equation. *Comm. Math. Phys.*, 336(1) :101–130, 2015.

[42] N. Burq and G. Lebeau. Injections de Sobolev probabilistes et applications. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(6) :917–962, 2013.

[43] N. Burq and C. Zuily. Laplace eigenfunctions and damped wave equation II : Product manifolds. 2015. Preprint arXiv :1503.05513.

[44] N. Burq and M. Zworski. Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(2) :443–471, 2004.

[45] N. Burq and M. Zworski. Control for Schrödinger operators on tori. *Math. Res. Lett.*, 19(2) :309–324, 2012.

[46] O. Butterley and C. Liverani. Smooth Anosov flows : correlation spectra and stability. *J. Mod. Dyn.*, 1(2) :301–322, 2007.

[47] Y. Canzani and B. Hanin. Local integral statistics for monochromatic random waves. 2016. Preprint arXiv :1610.09438.

[48] Y. Canzani, D. Jakobson, and J. Toth. On the distribution of perturbations of propagated Schrödinger eigenfunctions. *J. Spectr. Theory*, 4(2) :283–307, 2014.

[49] Y. Canzani and P. Sarnak. Topology and nesting of the zero set components of monochromatic random waves. 2017. Preprint arXiv :1701.00034.

[50] S.-s. Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 45 :747–752, 1944.

[51] S.-s. Chern. On the curvatura integra in a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 46 :674–684, 1945.

[52] N. I. Chernov. Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :269–324, 1998.

[53] H. Christianson. Semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits. *J. Funct. Anal.*, 246(2) :145–195, 2007.

[54] H. Christianson. Corrigendum to "Semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits". *J. Funct. Anal.*, 258(3) :1060–1065, 2010.

[55] H. Christianson. Quantum monodromy and nonconcentration near a closed semi-hyperbolic orbit. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(7) :3373–3438, 2011.

[56] H. Christianson, E. Schenck, A. Vasy, and J. Wunsch. From resolvent estimates to damped waves. *J. Anal. Math.*, 122 :143–162, 2014.

[57] Y. Colin de Verdière. Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. *Comment. Math. Helv.*, 54(3) :508–522, 1979.

[58] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102(3) :497–502, 1985.

[59] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. I. Concentration microlocale. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(9-10) :1535–1563, 1994.

[60] M. Combescure and D. Robert. Semiclassical spreading of quantum wave packets and applications near unstable fixed points of the classical flow. *Asymptot. Anal.*, 14(4) :377–404, 1997.

[61] M. Combescure and D. Robert. A phase-space study of the quantum Loschmidt echo in the semiclassical limit. *Ann. Henri Poincaré*, 8(1) :91–108, 2007.

[62] N.V. Dang. The extension of distributions on manifolds, a microlocal approach. *Ann. Henri Poincaré*, 17(4) :819–859, 2016.

[63] N.V. Dang and G. Rivière. Equidistribution of the conormal cycle of random nodal sets. *J. Eur. Math. Soc.*, 2016. To appear.

[64] N.V. Dang and G. Rivière. Spectral analysis of Morse-Smale gradient flows. 2016. Preprint arXiv :1605.05516.

[65] N.V. Dang and G. Rivière. Spectral analysis of Morse-Smale flows I : Construction of the anisotropic Sobolev spaces. 2017. Preprint arXiv arXiv :1703.08040.

[66] N.V. Dang and G. Rivière. Spectral analysis of Morse-Smale flows II : Resonances and resonant states. 2017. Preprint arXiv :1703.08038.

[67] N.V. Dang and G. Rivière. Topology of Pollicott-Ruelle resonant states. 2017. Preprint arXiv :1703.08037.

[68] R. de la Llave, J. M. Marco, and R. Moriyón. Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livšic cohomology equation. *Ann. of Math. (2)*, 123(3) :537–611, 1986.

[69] G. de Rham. *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et augmentée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, III, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1222b.

[70] B. Dehman, P. Gérard, and G. Lebeau. Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface. *Math. Z.*, 254(4) :729–749, 2006.

[71] D. Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.

[72] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Invent. Math.*, 93(1) :161–183, 1988.

[73] M.R. Douglas, B. Shiffman, and S. Zelditch. Critical points and supersymmetric vacua. III. String/M models. *Comm. Math. Phys.*, 265(3) :617–671, 2006.

[74] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1) :39–79, 1975.

[75] S. Dyatlov and C. Guillarmou. Microlocal limits of plane waves and Eisenstein functions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(2) :371–448, 2014.

[76] S. Dyatlov and C. Guillarmou. Pollicott-Ruelle resonances for open systems. *Ann. Henri Poincaré*, 17(11) :3089–3146, 2016.

[77] S. Dyatlov and L. Jin. Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support. 2017. Preprint arXiv :1705.05019.

[78] S. Dyatlov and M. Zworski. Stochastic stability of Pollicott-Ruelle resonances. *Nonlinearity*, 28(10) :3511–3533, 2015.

[79] S. Dyatlov and M. Zworski. Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(3) :543–577, 2016.

[80] S. Dyatlov and M. Zworski. Ruelle zeta function at zero for surfaces. *Invent. Math.*, 2016. To appear, preprint arXiv :1606.04560.

[81] M. Einsiedler and T. Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*, volume 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[82] S. Eswarathasan and S. Nonnenmacher. Strong scarring of logarithmic quasimodes. *Ann. Inst. Fourier*, 2016. To appear.

[83] S. Eswarathasan and G. Rivière. Perturbation of the semiclassical Schrödinger equation on negatively curved surfaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2015. In press.

[84] S. Eswarathasan and L. Silberman. Scarring of quasimodes on hyperbolic manifolds. 2016. Preprint arXiv :1609.04912.

[85] S. Eswarathasan and J.A. Toth. Averaged pointwise bounds for deformations of Schrödinger eigenfunctions. *Ann. Henri Poincaré*, 14(3) :611–637, 2013.

[86] F. Faure, S. Nonnenmacher, and S. De Bièvre. Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods. *Comm. Math. Phys.*, 239(3) :449–492, 2003.

[87] F. Faure, N. Roy, and J. Sjöstrand. Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances. *Open Math. J.*, 1 :35–81, 2008.

[88] F. Faure and J. Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. *Comm. Math. Phys.*, 308(2) :325–364, 2011.

[89] F. Faure and M. Tsujii. Prequantum transfer operator for symplectic Anosov diffeomorphism. *Astérisque*, (375) :ix+222, 2015.

[90] M. Feingold and A. Peres. Distribution of matrix elements of chaotic systems. *Phys. Rev. A (3)*, 34(1) :591–595, 1986.

[91] E. Frenkel, A. Losev, and N. Nekrasov. Instantons beyond topological theory. I. *J. Inst. Math. Jussieu*, 10(3) :463–565, 2011.

[92] D. Fried. Lefschetz formulas for flows. In *The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984)*, volume 58 of *Contemp. Math.*, pages 19–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[93] H. Furstenberg. The unique ergodicity of the horocycle flow. pages 95–115. Lecture Notes in Math., Vol. 318, 1973.

[94] J. Galkowski. Quantum ergodicity for a class of mixed systems. *J. Spectr. Theory*, 4(1) :65–85, 2014.

[95] D. Gayet and J.Y. Welschinger. Lower estimates for the expected Betti numbers of random real hypersurfaces. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 90(1) :105–120, 2014.

[96] D. Gayet and J.Y. Welschinger. Betti numbers of random nodal sets of elliptic pseudo-differential operators. *Asian J. Math.*, 2015. To appear, preprint arXiv :1406.0934.

[97] D. Gayet and J.Y. Welschinger. Expected topology of random real algebraic submanifolds. *J. Inst. Math. Jussieu*, 14(4) :673–702, 2015.

[98] D. Gayet and J.Y. Welschinger. Universal components of random nodal sets. *Comm. Math. Phys.*, 347(3) :777–797, 2016.

[99] P. Gérard. Mesures semi-classiques et ondes de Bloch. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1990–1991*, pages Exp. No. XVI, 19. École Polytech., Palaiseau, 1991.

[100] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(11) :1761–1794, 1991.

[101] P. Gérard and É. Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem. *Duke Math. J.*, 71(2) :559–607, 1993.

[102] A. Ghosh, A. Reznikov, and P. Sarnak. Nodal domains of Maass forms I. *Geom. Funct. Anal.*, 23(5) :1515–1568, 2013.

[103] P. Giulietti, C. Liverani, and M. Pollicott. Anosov flows and dynamical zeta functions. *Ann. of Math. (2)*, 178(2) :687–773, 2013.

[104] S. Gomes. Percival's conjecture for the Bunimovich mushroom billiard. 2015. Preprint arXiv :1504.07332.

[105] T. Gorin, T. Prosen, T.H. Seligman, and M. Zdinaric. Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay. *Physics Reports*, 435 :33–156, 2006.

[106] S. Gouëzel and C. Liverani. Compact locally maximal hyperbolic sets for smooth maps : fine statistical properties. *J. Differential Geom.*, 79(3) :433–477, 2008.

[107] A. Goussev, R.A. Jalabert, H.M. Pastawski, and D. Wisniacki. Loschmidt echo. *Scholarpedia*, 7(8), 2012.

[108] A. Granville and I. Wigman. Planck-scale mass equidistribution of toral laplace eigenfunctions. 2016. Preprint arXiv :1612.07819.

[109] V. Guillemin. The Radon transform on Zoll surfaces. *Advances in Math.*, 22(1) :85–119, 1976.

[110] X. Han. Small scale quantum ergodicity in negatively curved manifolds. *Nonlinearity*, 28(9) :3263–3288, 2015.

[111] X. Han. Small scale equidistribution of random eigenbases. *Comm. Math. Phys.*, 349(1) :425–440, 2017.

[112] F.R. Harvey and H.B. Lawson, Jr. Morse theory and Stokes' theorem. In *Surveys in differential geometry*, Surv. Differ. Geom., VII, pages 259–311. Int. Press, Somerville, MA, 2000.

[113] F.R. Harvey and H.B. Lawson, Jr. Finite volume flows and Morse theory. *Ann. of Math. (2)*, 153(1) :1–25, 2001.

[114] A. Hassell. Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic, with an appendix by the author and luc hillairet. *Ann. of Math. (2)*, 171(1) :605–619, 2010.

[115] A. Hassell and M. Tacy. Improvement of eigenfunction estimates on manifolds of non-positive curvature. *Forum Math.*, 27(3) :1435–1451, 2015.

[116] B. Helffer and J. Sjöstrand. Puits multiples en mécanique semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten. *Comm. Partial Differential Equations*, 10(3) :245–340, 1985.

[117] H. Hezari. Applications of small scale quantum ergodicity in nodal sets. 2016. Preprint arXiv :1606.02057.

[118] H. Hezari. Inner radius of nodal domains of quantum ergodic eigenfunctions. 2016. Preprint arXiv :1606.03499.

[119] H. Hezari and G. Rivière. L^p norms, nodal sets, and quantum ergodicity. *Adv. Math.*, 290 :938–966, 2016.

[120] H. Hezari and G. Rivière. Quantitative equidistribution properties of toral eigenfunctions. *J. of Spectral Theory*, 2016. To appear.

[121] M. Hitrik. Eigenfrequencies for damped wave equations on Zoll manifolds. *Asymptot. Anal.*, 31(3-4) :265–277, 2002.

[122] M. Hitrik. Eigenfrequencies and expansions for damped wave equations. *Methods Appl. Anal.*, 10(4) :543–564, 2003.

[123] M. Hitrik and J. Sjöstrand. Non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in 2 dimensions. I. *Ann. Henri Poincaré*, 5(1) :1–73, 2004.

[124] M. Hitrik, J. Sjöstrand, and S. Vũ Ngọc. Diophantine tori and spectral asymptotics for nonselfadjoint operators. *Amer. J. Math.*, 129(1) :105–182, 2007.

[125] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121 :193–218, 1968.

[126] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition.

[127] R. Hovila, E. Järvenpää, M. Järvenpää, and F. Ledrappier. Singularity of projections of 2-dimensional measures invariant under the geodesic flow. *Comm. Math. Phys.*, 312(1) :127–136, 2012.

[128] H. Iwaniec and P. Sarnak. L^∞ norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 141(2) :301–320, 1995.

[129] P. Jacquod and C. Petitjean. Decoherence, entanglement and irreversibility in quantum dynamical systems with few degrees of freedom. *Adv. Phys.*, 58 :67–196, 2009.

[130] P. Jacquod, P.G. Silvestrov, and C.W.J. Beenakker. Golden rule decay versus lyapunov decay of the quantum loschmidt echo. *Phs. Rev. E*, 64 :055203, 2001.

[131] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. *Portugal. Math.*, 47(4) :423–429, 1990.

[132] D. Jakobson. Quantum limits on flat tori. *Ann. of Math. (2)*, 145(2) :235–266, 1997.

[133] D. Jakobson and S. Zelditch. Classical limits of eigenfunctions for some completely integrable systems. In *Emerging applications of number theory (Minneapolis, MN, 1996)*, volume 109 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 329–354. Springer, New York, 1999.

[134] R.A. Jalabert and H.M. Pastawski. Environment-independent decoherence rate in classically chaotic systems. *PRL*, 86 :2490–2493, 2001.

[135] J. Jung. Quantitative quantum ergodicity and the nodal domains of Hecke-Maass cusp forms. *Comm. Math. Phys.*, 348(2) :603–653, 2016.

[136] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[137] D. Kelmer. Arithmetic quantum unique ergodicity for symplectic linear maps of the multidimensional torus. *Ann. of Math. (2)*, 171(2) :815–879, 2010.

[138] F. Laudenbach. *Transversalité, courants et théorie de Morse.* Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2012. Un cours de topologie différentielle. [A course of differential topology],.

[139] V.F. Lazutkin. *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*, volume 24 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1993. With an addendum by A. I. Šnirel'man.

[140] J. Le Rousseau and G. Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 18(3) :712–747, 2012.

[141] M. Léautaud and N. Lerner. Energy decay for a locally undamped wave equation. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 2016. To appear.

[142] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3) :267–291, 1992.

[143] G. Lebeau. Équation des ondes amorties. In *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, volume 19 of *Math. Phys. Stud.*, pages 73–109. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[144] F. Ledrappier and E. Lindenstrauss. On the projections of measures invariant under the geodesic flow. *Int. Math. Res. Not.*, (9) :511–526, 2003.

[145] F. Ledrappier and L.-S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Ann. of Math. (2)*, 122(3) :509–539, 1985.

[146] A. Lerario and E. Lundberg. Statistics on Hilbert's 16th problem. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (12) :4293–4321, 2015.

[147] S. Lester and Z. Rudnick. Small Scale Equidistribution of Eigenfunctions on the Torus. *Comm. Math. Phys.*, 350(1) :279–300, 2017.

[148] T. Letendre. Expected volume and Euler characteristic of random submanifolds. *J. Funct. Anal.*, 270(8) :3047–3110, 2016.

[149] E. Lindenstrauss. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :165–219, 2006.

[150] P.-L. Lions and T. Paul. Sur les mesures de Wigner. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 9(3) :553–618, 1993.

[151] C. Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.

[152] A. Logunov. Nodal sets of laplace eigenfunctions : polynomial upper estimates of the hausdorff measure. 2016. Preprint arXiv :1605.02587.

[153] A. Logunov. Nodal sets of laplace eigenfunctions : proof of nadirashvili's conjecture and of the lower bound in yau's conjecture. 2016. Preprint arXiv :1605.02589.

[154] A. Logunov and E. Malinnikova. Nodal sets of laplace eigenfunctions : estimates of the hausdorff measure in dimension two and three. 2016. Preprint arXiv :1605.02595.

[155] W. Luo and P. Sarnak. Quantum ergodicity of eigenfunctions on $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}^2$. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (81) :207–237, 1995.

[156] F. Macià. Some remarks on quantum limits on Zoll manifolds. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(4-6) :1137–1146, 2008.

[157] F. Macià. Semiclassical measures and the Schrödinger flow on Riemannian manifolds. *Nonlinearity*, 22(5) :1003–1020, 2009.

[158] F. Macià. High-frequency propagation for the Schrödinger equation on the torus. *J. Funct. Anal.*, 258(3) :933–955, 2010.

[159] F. Macià and G. Rivière. Concentration and Non-Concentration for the Schrödinger Evolution on Zoll Manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 345(3) :1019–1054, 2016.

[160] F. Macià and G. Rivière. Observability and quantum limits for the Schrödinger equation on the sphere. 2017. Preprint arXiv :1702.02066.

[161] B. Marcus. Unique ergodicity of the horocycle flow : variable negative curvature case. *Israel J. Math.*, 21(2-3) :133–144, 1975. Conference on Ergodic Theory and Topological Dynamics (Kibbutz Lavi, 1974).

[162] B. Marcus. Ergodic properties of horocycle flows for surfaces of negative curvature. *Ann. of Math. (2)*, 105(1) :81–105, 1977.

[163] J. Marklof and S. O'Keefe. Weyl's law and quantum ergodicity for maps with divided phase space. *Nonlinearity*, 18(1) :277–304, 2005. With an appendix "Converse quantum ergodicity" by Steve Zelditch.

[164] J. Marklof and Z. Rudnick. Almost all eigenfunctions of a rational polygon are uniformly distributed. *J. Spectr. Theory*, 2(1) :107–113, 2012.

[165] J. Marzuola. Eigenfunctions for partially rectangular billiards. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(4-6) :775–790, 2006.

[166] G. Minervini. A current approach to Morse and Novikov theories. *Rend. Mat. Appl. (7)*, 36(3-4) :95–195, 2015.

[167] C.C. Moore. Exponential decay of correlation coefficients for geodesic flows. In *Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics (Berkeley, Calif., 1984)*, volume 6 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 163–181. Springer, New York, 1987.

[168] J. Moser. On a theorem of Anosov. *J. Differential Equations*, 5 :411–440, 1969.

[169] F. Nazarov and M. Sodin. On the number of nodal domains of random spherical harmonics. *Amer. J. Math.*, 131(5) :1337–1357, 2009.

[170] F. Nazarov and M. Sodin. Asymptotic laws for the spatial distribution and the number of connected components of zero sets of Gaussian random functions. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 12(3) :205–278, 2016.

[171] E. Nelson. *Topics in dynamics. I : Flows.* Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[172] L.I. Nicolaescu. Critical sets of random smooth functions on compact manifolds. *Asian J. Math.*, 19(3) :391–432, 2015.

[173] S. Nonnenmacher. Spectral theory of damped quantum chaotic systems. In *Journées Équations aux Dérivées Partielles, 2011*, page Exp. No. IX. 2011.

[174] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Quantum decay rates in chaotic scattering. *Acta Math.*, 203(2) :149–233, 2009.

[175] J. Palis, Jr. and W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. An introduction, Translated from the Portuguese by A. K. Manning.

[176] I.C. Percival. Regular and irregular spectra of molecules. In *Stochastic behavior in classical and quantum Hamiltonian systems (Volta Memorial Conf., Como, 1977)*, volume 93 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 259–282. Springer, Berlin-New York, 1979.

[177] A. Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Phys. Rev. A*, 30(4), 1984.

[178] Y. B. Pesin and V. Sadovskaya. Multifractal analysis of conformal Axiom A flows. *Comm. Math. Phys.*, 216(2) :277–312, 2001.

[179] Y.B. Pesin. *Dimension theory in dynamical systems*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1997. Contemporary views and applications.

[180] M. Pollicott. On the rate of mixing of Axiom A flows. *Invent. Math.*, 81(3) :413–426, 1985.

[181] M. Pollicott. Exponential mixing for the geodesic flow on hyperbolic three-manifolds. *J. Statist. Phys.*, 67(3-4) :667–673, 1992.

[182] M. Ratner. The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature. *Israel J. Math.*, 16 :181–197, 1973.

[183] M. Ratner. The rate of mixing for geodesic and horocycle flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 7(2) :267–288, 1987.

[184] J. Rauch and M. Taylor. Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(4) :501–523, 1975.

[185] G. Rivière. Entropy of semiclassical measures for nonpositively curved surfaces. *Ann. Henri Poincaré*, 11(6) :1085–1116, 2010.

[186] G. Rivière. Entropy of semiclassical measures in dimension 2. *Duke Math. J.*, 155(2) :271–336, 2010.

[187] G. Rivière. Entropy of semiclassical measures for symplectic linear maps of the multidimensional torus. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (11) :2396–2443, 2011.

[188] G. Rivière. Delocalization of slowly damped eigenmodes on Anosov manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 316(2) :555–593, 2012.

[189] G. Rivière. Remarks on quantum ergodicity. *J. Mod. Dyn.*, 7(1) :119–133, 2013.

[190] G. Rivière. Eigenmodes of the damped wave equation and small hyperbolic subsets, with an appendix by S. Nonnenmacher and G. Rivière. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 64(3) :1229–1267, 2014.

[191] G. Rivière. Long-Time Dynamics of the Perturbed Schrödinger Equation on Negatively Curved Surfaces. *Ann. Henri Poincaré*, 17(8) :1955–1999, 2016.

[192] D. Robert and L. Thomann. Random weighted Sobolev inequalities and application to quantum ergodicity. *Comm. Math. Phys.*, 335(3) :1181–1209, 2015.

[193] Z. Rudnick and P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 161(1) :195–213, 1994.

[194] Z. Rudnick and I. Wigman. On the volume of nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on the torus. *Ann. Henri Poincaré*, 9(1) :109–130, 2008.

[195] D. Ruelle. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 9(1) :83–87, 1978.

[196] D. Ruelle. Resonances for Axiom **A** flows. *J. Differential Geom.*, 25(1) :99–116, 1987.

[197] D. Ruelle. *Thermodynamic formalism.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. The mathematical structures of equilibrium statistical mechanics.

[198] R.O. Ruggiero. *Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points*, volume 12 of *Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys].* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

[199] N.T. Sardari. Quadratic forms and semiclassical eigenfunction hypothesis for flat tori. 2016. Preprint arXiv :1604.08488.

[200] P. Sarnak and I. Wigman. Topologies of nodal sets of random band limited functions. 2015. Preprint arXiv :1510.08500.

[201] E. Schenck. Energy decay for the damped wave equation under a pressure condition. *Comm. Math. Phys.*, 300(2) :375–410, 2010.

[202] E. Schenck. Exponential stabilization without geometric control. *Math. Res. Lett.*, 18(2) :379–388, 2011.

[203] R. Schubert. Semiclassical localization in phase space. 2001. Phd Thesis Ulm.

[204] R. Schubert. Semiclassical behaviour of expectation values in time evolved Lagrangian states for large times. *Comm. Math. Phys.*, 256(1) :239–254, 2005.

[205] R. Schubert. Upper bounds on the rate of quantum ergodicity. *Ann. Henri Poincaré*, 7(6) :1085–1098, 2006.

[206] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Hermann, Paris, 1966.

[207] J. Sjöstrand. Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 36(5) :573–611, 2000.

[208] S. Smale. Morse inequalities for a dynamical system. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 :43–49, 1960.

[209] S. Smale. An infinite dimensional version of Sard's theorem. *Amer. J. Math.*, 87 :861–866, 1965.

[210] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :747–817, 1967.

[211] A. I. Šnirel'man. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(6(180)) :181–182, 1974.

[212] C.D. Sogge. Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 77(1) :123–138, 1988.

[213] C.D. Sogge. Kakeya-Nikodym averages and L^p-norms of eigenfunctions. *Tohoku Math. J. (2)*, 63(4) :519–538, 2011.

[214] C.D. Sogge. Improved critical eigenfunction estimates on manifolds of nonpositive curvature. 2015. Preprint arXiv :1512.03725.

[215] C.D. Sogge. Problems related to the concentration of eigenfunctions. 2015. Preprint arXiv :1510.07723.

[216] C.D. Sogge. Localized L^p-estimates of eigenfunctions : a note on an article of Hezari and Rivière. *Adv. Math.*, 289 :384–396, 2016.

[217] C.D. Sogge, J.A. Toth, and S. Zelditch. About the blowup of quasimodes on Riemannian manifolds. *J. Geom. Anal.*, 21(1) :150–173, 2011.

[218] C.D. Sogge and S. Zelditch. Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth. *Duke Math. J.*, 114(3) :387–437, 2002.

[219] C.D. Sogge and S. Zelditch. Focal points and sup-norms of eigenfunctions. *Rev. Mat. Iberoam.*, 32(3) :971–994, 2016.

[220] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 115(3-4) :193–230, 1990.

[221] M. Taylor. Variations on quantum ergodic theorems. *Potential Anal.*, 43(4) :625–651, 2015.

[222] R. Thom. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 :973–975, 1949.

[223] J.A. Toth and S. Zelditch. L^p norms of eigenfunctions in the completely integrable case. *Ann. Henri Poincaré*, 4(2) :343–368, 2003.

[224] M. Tsujii. Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows. *Nonlinearity*, 23(7) :1495–1545, 2010.

[225] M. Tsujii. Contact Anosov flows and the Fourier-Bros-Iagolnitzer transform. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(6) :2083–2118, 2012.

[226] G. Usaj, H.M. Pastawski, and P.R. Levstein. Gaussian to exponential crossover in the attenuation of polarization echoes in NMR. *Mol. Phys.*, 95(6) :1229, 1998.

[227] J.M. VanderKam. L^∞ norms and quantum ergodicity on the sphere. *Internat. Math. Res. Notices*, (7) :329–347, 1997.

[228] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[229] J. Weber. The Morse-Witten complex via dynamical systems. *Expo. Math.*, 24(2) :127–159, 2006.

[230] A. Weinstein. Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential. *Duke Math. J.*, 44(4) :883–892, 1977.

[231] I. Wigman. Fluctuations of the nodal length of random spherical harmonics. *Comm. Math. Phys.*, 298(3) :787–831, 2010.

[232] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40 :748–759, 1932.

[233] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.*, 17(4) :661–692 (1983), 1982.

[234] S.T. Yau. Problem section. In *Seminar on Differential Geometry*, volume 102 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 669–706. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.

[235] M.P. Young. The quantum unique ergodicity conjecture for thin sets. *Adv. Math.*, 286 :958–1016, 2016.

[236] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55(4) :919–941, 1987.

[237] S. Zelditch. Quantum ergodicity on the sphere. *Comm. Math. Phys.*, 146(1) :61–71, 1992.

[238] S. Zelditch. On the rate of quantum ergodicity. I. Upper bounds. *Comm. Math. Phys.*, 160(1) :81–92, 1994.

[239] S. Zelditch. Maximally degenerate Laplacians. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(2) :547–587, 1996.

[240] S. Zelditch. Quantum ergodicity of C^* dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, 177(2) :507–528, 1996.

[241] S. Zelditch. Fine structure of Zoll spectra. *J. Funct. Anal.*, 143(2) :415–460, 1997.

[242] S. Zelditch. Real and complex zeros of Riemannian random waves. In *Spectral analysis in geometry and number theory*, volume 484 of *Contemp. Math.*, pages 321–342. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[243] S. Zelditch. Eigenfunctions and nodal sets. In *Surveys in differential geometry. Geometry and topology*, volume 18 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 237–308. Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[244] S. Zelditch. Gaussian beams on Zoll manifolds and maximally degenerate Laplacians. In *Spectral theory and partial differential equations*, volume 640 of *Contemp. Math.*, pages 169–197. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[245] S. Zelditch. Logarithmic lower bound on the number of nodal domains. *J. Spectr. Theory*, 6(4) :1047–1086, 2016.

[246] O. Zoll. Ueber Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien. *Math. Ann.*, 57(1) :108–133, 1903.

[247] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[248] A. Zygmund. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. *Studia Math.*, 50 :189–201, 1974.